Günter Aumann

GEOMETRIE!

Mit Farben statt Formeln auf den Spuren Euklids

primus verlag

Günter Aumann

Geometrie!

Günter Aumann

Geometrie!

Mit Farben statt Formeln auf den Spuren Euklids

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Die Herausgabe dieses Werks wurde durch
die Vereinsmitglieder der WBG ermöglicht.
Satz: PTP-Berlin Protago-TEX-Production GmbH (www.ptp-berlin.eu)
Umschlaggestaltung: Peter Lohse, Heppenheim
Umschlagabbildung: Regelmäßige Vielecke mit Umkreis.
Grafik: Günter Aumann
Druck und Bindung: Fortuna Libri SK, Bratislava
Gedruckt auf säurefreiem und alterungsbeständigem Papier
Printed in EU

Besuchen Sie uns im Internet: www.wbg-wissenverbindet.de

ISBN 978-3-534-23978-8

Die Buchhandelsausgabe erscheint beim Primus Verlag
Umschlaggestaltung: Christian Hahn, Frankfurt
www.primusverlag.de

ISBN 978-3-89678-711-8

Elektronisch sind folgende Ausgaben erhältlich:
eBook (PDF): 978-3-534-71413-1 (für Mitglieder der WBG)
eBook (epub): 978-3-534-71415-5 (für Mitglieder der WBG)
eBook (PDF): 978-3-86312-621-6 (Buchhandel)
eBook (epub): 978-3-86312-622-3 (Buchhandel)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort: Farbe statt Formeln

Formeln können faszinieren. Einsteins $E = mc^2$, im Jahre 1905 als Nachtrag zu seiner Speziellen Relativitätstheorie veröffentlicht, hat etwas Magisches. Für den Laien ist es eine Zauberformel, die Eingeweihten einen Zugang zu geheimnisvollen Welten eröffnet, die ihm verschlossen sind.

Gleichzeitig schrecken Formeln ab. „Jede Formel halbiert die Leserzahl", wird kolportiert. Nicht repräsentative Recherchen in meiner Umgebung scheinen das zu bestätigen. Dies ist eine ebenso erstaunliche wie traurige Erfahrung angesichts der Tatsache, dass zumindest jeder Abiturient (mithin fast die Hälfte jedes Schülerjahrgangs, Tendenz steigend) vom Satz des Pythagoras über die Binomischen Formeln bis zur Produktregel der Differentialrechnung jahrelang mit Formeln traktiert wurde. Und das durchaus mit gutem Grund: Die symbolische Schreibweise und der analytische Ansatz eröffneten völlig neue Zugänge zu vielen Bereichen der Mathematik, insbesondere auch der Geometrie. Eine Formel sagt dem, der die Sprache der Mathematik spricht, mehr als 1000 Wörter. Sie ermöglicht es, ein Maximum an Information auf einem Minimum an Raum unterzubringen, und wird daher von Mathematikern sehr geschätzt. Im Extremfall führt diese Wertschätzung dazu, dass in einem Buch, das auf etwa 200 Seiten in die Geometrie einführen möchte und nach Ansicht der Autoren so aufgebaut wurde, dass es auch interessierten Schülern der Oberstufe zugänglich ist, ein knapp 20-seitiger Anhang mit Bezeichnungen und Abkürzungen zu finden ist.

Doch wie die meisten Fremdsprachen ist die Sprache der Mathematik nicht leicht zu lernen. Bei Sprachen, die neue Märkte oder interessante Urlaubsziele erschließen, ist naturgemäß die Bereitschaft größer, eine solche Mühe auf sich zu nehmen. Dass auch die Welt der Mathematik ihre Reize hat, wird zwar bisweilen schlaglichtartig deutlich; viele gelungene Veranstaltungen im Mathematikjahr 2008 belegen dies. Doch in der Regel bleibt es beim frommen Schauer, wie er auch den Besucher eines Trappistenklosters überkommt, ohne ihn deshalb zum Eintritt zu bewegen.

Auf Kosten des geometrischen Denkens und Argumentierens ist die Manipulation algebraischer Formeln bis in die Anfangsgründe der Schulmathematik vorgedrungen. War dies früher gerechtfertigt durch die damit verbundene Schulung logischen Denkens (die korrekte Addition zweier Brüche ist dafür ein gutes Beispiel), reduziert sich die Schülerleistung heute oft auf das richtige Eintippen der Formel in den Taschenrechner und die richtige Interpretation des von ihm gelieferten Ergebnisses (das nur selten hinterfragt wird). Mathematisches Verständnis oder geometrisches Vorstellungsvermögen werden so sicher nicht gefördert.

Dabei haben Mathematiker jahrhundertelang eindrucksvoll bewiesen, dass auch ohne Formeln (und erst recht ohne Taschenrechner) tiefgehende Ergebnisse erzielt werden können. Schließlich sind Analysis und Algebra Urenkelinnen der Geometrie, der Urmutter jeder Mathematik. Natürlich erschlossen diese Methoden neue mathematische Welten, die ohne sie unentdeckt geblieben wären. Doch sie verschlossen auch für viele die Welt der Geometrie, indem sie Interessierten ihre Formeln und Begriffe in den Weg stellten. Es scheint daher lohnend, Euklids formelfreien Ansatz wieder näher in den Blick zu nehmen (ohne ihn verabsolutieren zu wollen). Dies ist angesichts der Wirkungsgeschichte seiner um 300 vor Christus entstandenen *Elemente*, die bis in die Neuzeit die wissenschaftliche Denkweise prägten, mehr als gerechtfertigt. Denn auch nach der Entdeckung der hyperbolischen Geometrie im 19. Jahrhundert bleibt die nun euklidisch genannte Geometrie die Geometrie unserer Erfahrungswelt.

Will man sich heute gewinnbringend mit Euklid beschäftigen, kann man die über 2000 Jahre, die zwischen ihm und der heutigen Zeit liegen, nicht ausblenden. Folgende Aspekte scheinen mir dabei bedenkenswert.

Wie Pasch gegen Ende des 19. Jahrhunderts zeigen konnte, war Euklids Axiomensystem lückenhaft. Als Hilbert im Jahre 1899 seine *Grundlagen der Geometrie* veröffentlichte, war die Frage nach den präzisen axiomatischen Voraussetzungen dieser Geometrie grundsätzlich geklärt, die bei Euklid vorhandenen Lücken und unzulässigen anschaulichen Argumentationen eliminiert. Seither wurden weitere Axiomensysteme der euklidischen Geometrie vorgestellt, die oft bewusst sehr abstrakt formuliert wurden. Dies geschah einerseits, um der Gefahr anschaulicher Trugschlüsse zu entgehen; andererseits ermöglichte dies die Einbettung der euklidischen Geometrie in weit allgemeinere Strukturen, die mathematisch interessant, aber für den Außenstehenden nicht mehr als Geometrie erkennbar waren. Da bei diesen Ansätzen oft die Mühen der Ebene gescheut, also nur selten die Beweise der schulgeometrischen Sätze auf der Basis dieser Axiomensysteme geführt wurden, blieben sie in der Regel von engerem fachwissenschaftlichem Interesse.

Demgegenüber wird hier versucht, die Grundlagen der euklidischen Geometrie allgemein verständlich und trotzdem mathematisch präzise zu formulieren und daraus ein breites Spektrum geometrischer Sätze herzuleiten. Denn natürlich ist heute bei einer Beschäftigung mit Euklid auf ein korrektes Axiomensystem zu achten. Doch die hier gewählte Formulierung greift das Vorverständnis des Lesers und sein geometrisches Grundwissen, das bei vielen, auch mathematisch wenig Interessierten vorhanden ist, auf. Wesentlich ist dabei der durch die Verwendung von Taschenrechner und Computer oder das Messen mit Zollstock und Metermaß vertraute Umgang mit (reellen) Zahlen.

Auch ein weitgehender Verzicht auf Begriffsbildungen und Definitionen, die jenseits der Vorstellungswelt nichtmathematischer Leser liegen, soll den Einstieg erleichtern. Diese Begriffsbildungen erlauben zwar kompakte Formulierungen und erleichtern die Diskussion zwischen Mathematikern. Im Dialog mit Nichtmathematikern bewirken sie jedoch das Gegenteil. (Der abschreckende Effekt von Fachsprachen ist ja kein ausschließlich mathematisches Phänomen.) Deshalb war jeweils sorgfältig abzuwägen, ob der Nutzen kürzerer Formulierungen mit der Einführung eines Fachbegriffs erkauft werden sollte. Nur in wenigen Ausnahmefällen konnte dies bejaht werden.

Gleiches gilt für die Verwendung mathematischer Symbole. Ein Leser, der beim Zeichen „<“ unsicher ist, ob es „größer“ oder „kleiner“ bedeutet, hat den roten Beweisfaden schon verloren. Daher wird konsequent die Zahl der verwendeten Symbole auf die geometrisch notwendigen (etwa für Geraden oder Strecken) beschränkt. Auf griechische Buchstaben wird verzichtet.

Der entscheidende Schritt in Richtung des nichtmathematischen Lesers ist wahrscheinlich der völlige Verzicht auf Formeln und deren Manipulation. So bequem für den Mathematiker das Hantieren mit Formeln ist, so sehr schreckt erfahrungsgemäß dieser Kernbereich der mathematischen Fremdsprache den nichtmathematischen Leser ab. Auch wenn dadurch manche Formulierung etwas länger wird (in den Augen mancher Mathematiker also weniger elegant ist), kann man nur so dem Leser einen unmittelbaren Zugang zu geometrischen Inhalten vermitteln.

Der zweite Gesichtspunkt, der Euklid dem heutigen Leser näherbringen soll, ist eine geeignete Auswahl unter den etwa 400 Sätzen Euklids. Hier beschränkt sich das Buch wegen seines einführenden Charakters auf die ebene Geometrie, also auf eine Auswahl der Bücher I bis VI von Euklids *Elementen*. Wir lernen über 100 der 173 Sätze (und Konstruktionen) dieser Bücher kennen, darunter alle wichtigen Sätze der Schulgeometrie. Die geringere Zahl der Sätze erklärt sich vor allem durch den Verzicht auf nichtgeometrische Resultate (etwa die Grundlegung der reellen Zahlen im Buch V). Eine gelbe Randmarke wird jeweils anzeigen, welchen Satz Euklids wir gerade beweisen. **I,48** meint etwa den Satz 48 aus Buch I.

Schließlich bleibt festzuhalten, dass trotz der Formelfreiheit viele Beweise Euklids sperrig sind. Dies liegt nicht zuletzt an der Fülle von Bezeichnungen, die er verwendet. Hier lässt sich durch die heutigen Möglichkeiten, Sachverhalte zu illustrieren, manches Dickicht lichten. Zwei gleich große Winkel, die man in einer Zeichnung anhand von je drei Punkten erst mühsam lokalisieren muss, fallen sofort ins Auge, wenn man sie durch einen gleichfarbigen Winkelbogen kennzeichnet. Nicht nur Formeln, auch Farben sagen oft mehr als viele Worte. Hierbei muss man nicht so weit gehen wie Byrne, der („for the greater ease of learners“) in seiner Ausgabe der ersten sechs Bücher der *Elemente* Bezeichnungen völlig durch Farbcodierungen ersetzt hat. Sein Buch ist zweifellos ein ästhetischer Genuss; doch scheint hier (wie häufig) ein maßvoller Mittelweg angemessener. In über 170 Abbildungen wird versucht, einen solchen Weg zu gehen.

Blaue Hervorhebungen sollen zeigen, dass sich mit einer Handvoll aus der Schule bekannter Werkzeuge eine Vielzahl geometrischer Resultate erzielen lässt. Sie werden größtenteils im Abschnitt 2.1 (Zentrale Sätze) vorgestellt und natürlich axiomatisch bewiesen. Es handelt sich dabei um einen Satz über das gleichschenklige Dreieck sowie um die Kongruenzsätze für das Dreieck. *sws* etwa verweist auf den Satz, nach dem zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie in zwei Seiten und dem dazwischenliegenden Winkel übereinstimmen.

Im Schriftbild abgesetzte Einschübe vermitteln einen tieferen Einblick in die behandelten Themen. Sie sind zum Verständnis des übrigen Textes nicht notwendig und können daher (beim ersten Lesen) übergangen werden. Sie dienen auch dazu, dem Kundigen die Auswahl und Formulierung der verwendeten Axiome nahezubringen.

Die einheitliche Theorie, die Euklid in seinen *Elementen* vorstellt, machen ihn zum (Mit-)Begründer der exakten Wissenschaft. Es verwundert daher nicht, dass sein Werk viel gerühmt und noch mehr gelesen wurde. Über 22 Jahrhunderte riss das Interesse daran eigentlich nie ab. Erst im 20. Jahrhundert begannen die euklidischen Schätze zu verstauben. Im Museum der Wissenschaften wurden sie in finstere Ecken verbannt oder gleich ins Magazin ausgelagert. Es lohnt der Versuch, sie dem Betrachter wieder etwas ansprechender zu präsentieren. Das vorliegende Buch will ein solcher Versuch sein.

Danken möchte ich meiner Frau Christa sowie meinen Kollegen Dr. Volker Drumm und Dr. Klaus Spitzmüller für ihre kritische Durchsicht des Manuskripts. Sie haben mir wertvolle Anregungen geliefert und mich vor manchem Fehler bewahrt. Nicht zuletzt danke ich der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft für die Möglichkeit, dieses Vorhaben zu realisieren.

Bretten, im September 2010 *Günter Aumann*

1 Die Grundlagen

Dieses Buch verfolgt zwei einander scheinbar widersprechende Ziele. Zum einen will es eine mathematisch solide Einführung in die aus der Schule vertraute ebene euklidische Geometrie geben. Ausgehend von Axiomen sollen ohne Verwendung anschaulicher „Argumente“ (wie man sieht, wie folgende Abbildung zeigt, ...) geometrische Sätze bewiesen werden. Es soll also der Ansatz Euklids verfolgt werden, und zwar konsequenter, als dies Euklid tat. Die anschaulichen Argumente, die sich bei ihm bisweilen einschlichen, sollen vermieden werden. Dazu ist es nötig, Euklids Axiomensystem geeignet zu modifizieren, also auf Erkenntnisse, wie sie etwa Moritz Pasch und David Hilbert im 19. Jahrhundert formulierten, zurückzugreifen.

Zum anderen soll dieses Buch ohne mathematische Vorkenntnisse lesbar und verständlich sein. Es will und wird auskommen ohne mathematische Symbole, ohne Formeln, ohne griechische Buchstaben. Dies kann nur funktionieren, wenn es gelingt, das bei jedem zumindest implizit vorhandene geometrische Grundverständnis mit den zu formulierenden Axiomen zu verknüpfen. Dies soll im folgenden Abschnitt geschehen.

1.1 Vom Geodreieck zum Axiomensystem

Wir beginnen mit den geometrischen Grundbegriffen Punkt, Gerade, Ebene. Hier stellt sich bereits die erste Frage: Was ist ein Punkt? Euklids Antwort, ein Punkt ist, was keine Teile hat, kann uns nicht befriedigen. Sie setzt die Anschauung voraus. Wer nicht schon weiß, was ein Punkt ist, wird dadurch nicht schlauer. Auch klärt Euklid die Frage nicht, ob es (solche) Punkte überhaupt gibt.

Wir lösen dieses Problem, indem wir auf eine Beschreibung völlig verzichten. *Punkte* ist zunächst nur ein Name für die Elemente der Menge, die allen Betrachtungen zugrunde liegt. Diese Menge nennen wir *Ebene*. *Geraden* sind für uns (wie für Euklid und auch die Schulgeometrie) Mengen von Punkten. Eigenschaften von Punkten und Geraden ergeben sich nur aus den Axiomen, die im Folgenden zu formulieren sind.

> Da wir nur *eine* Ebene betrachten, hätte man natürlich auf den Begriff *Ebene* verzichten können. Benötigt wird er erst bei räumlichen Betrachtungen. Da er aber allen vertraut ist und die spätere Begriffsbildung *Halbebene* motiviert, wird er hier eingeführt.

Zu Beginn unserer Überlegungen wollen wir uns an das Standardwerkzeug des schulischen Geometrieunterrichts erinnern: das Geodreieck. Welche Konstruktionen ließen sich damit durchführen? Ob eine Konstruktion exakt oder nur näherungsweise durchgeführt werden konnte, soll uns dabei zunächst nicht interessieren.

Die einfachste Aufgabe, die mit dem Geodreieck erledigt werden konnte, war das Zeichnen von Geraden (genauer eines endlichen Abschnitts einer unendlichen Geraden). Zum Beispiel konnte man durch zwei beliebig gegebene Punkte P, Q eine (und nur eine) solche Gerade legen (siehe Abbildung 1.1). Genau dies fordern wir im ersten Axiom.

(I/1) *Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die diese Punkte enthält.*

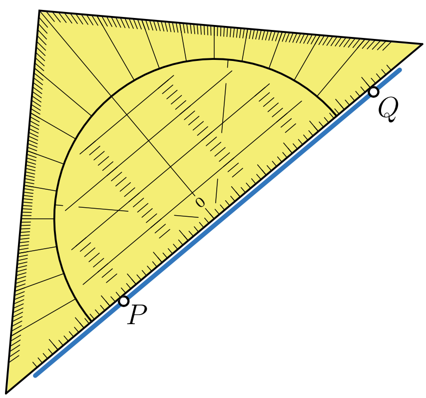

Abbildung 1.1: Geraden zeichnen

Die nach Axiom (I/1) zu zwei Punkten P, Q eindeutig existierende Gerade heißt ihre *Verbindungsgerade* und wird mit PQ bezeichnet. Wir verwenden die gewohnten Sprechweisen wie „P liegt auf PQ“ oder „PQ geht durch Q“.

Wir wissen, dass jede Gerade unendlich viele Punkte enthält. Unsere zweite Forderung, die garantiert, dass wir jede Gerade als Verbindungsgerade von zwei Punkten betrachten können, ist daher sehr bescheiden.

(I/2) *Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.*

Nach Axiom (I/1) können sich zwei verschiedene Geraden nicht in zwei (oder mehr) Punkten treffen. Sie haben also genau einen oder keinen Punkt gemeinsam. Im ersten Fall sagt man, dass sich die Geraden *schneiden*, im zweiten Fall nennt man sie *parallel*.

Ferner können wir mit dem Geodreieck Strecken messen (links in Abbildung 1.2), also den eindeutigen, positiven Abstand ihrer Endpunkte bestimmen. Wir halten dies fest im nächsten Axiom.

(II/1) *Je zwei Punkte besitzen einen eindeutigen, nicht negativen Abstand. Er ist genau dann null, wenn die Punkte zusammenfallen.*

Diese Möglichkeit, den *Abstand* zweier Punkte zu bestimmen, ist grundlegend für die euklidische Geometrie, ja der Ursprung aller Geometrie. Schließlich bedeutet das griechische Lehnwort *Geometrie* nichts anderes als *Vermessung der Erde.*

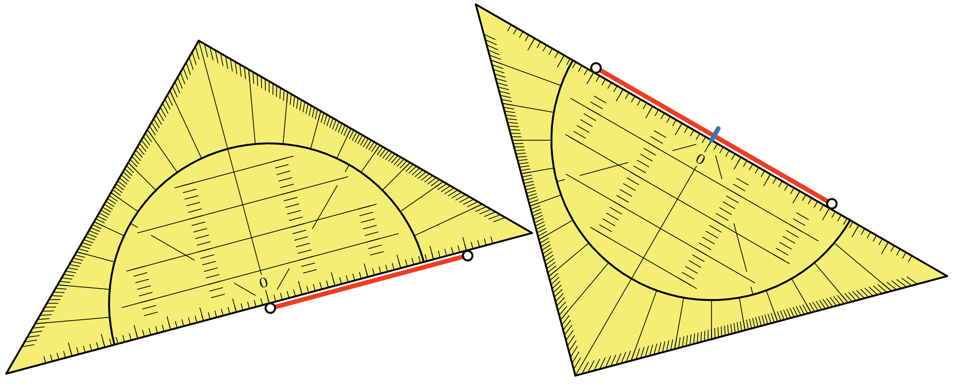

Abbildung 1.2: Strecken messen und halbieren

Eigentlich hätte man im Axiom (II/1) präziser fordern müssen, dass je zwei Punkte einen eindeutigen, nicht negativen *reellen* Abstand besitzen. Wir haben den Begriff *reell* bewusst vermieden, um den Leser nicht durch im Hinterkopf herumspukende komplizierte Begriffe („transzendente Zahlen", π, ...) zu beunruhigen, die er vielleicht damit assoziiert. Nichts dergleichen benötigen wir. Es genügt zu wissen, dass wir diese Abstände auf der Zahlengeraden finden und sie daher addieren, subtrahieren und ihre Größe vergleichen können.

Die Aussage, dass zwei Punkte den Abstand 1 haben, ist allerdings nur dann verständlich, wenn klar ist, welche Einheit verwendet wird. Die Frage danach beantwortet man am einfachsten, indem man auf zwei Punkte mit dem Abstand 1 deutet. Die Existenz solcher Punkte garantiert das folgende Axiom.

(II/2) *Es gibt zwei Punkte mit dem Abstand* 1.

Um die übrigen Abstände brauchen wir uns nicht zu kümmern. Unsere Axiome werden uns mit einer hinreichend großen Zahl solcher Abstände versorgen.

Wir gehen einen Schritt weiter und konstruieren mit dem Geodreieck aus gegebenen Punkten neue. Wir können zum Beispiel eine Strecke halbieren, also jenen Punkt der Strecke finden, der von beiden Endpunkten denselben Abstand hat (rechts in Abbildung 1.2). Die halbierte Strecke können wir nun wieder halbieren und dieses Verfahren theoretisch beliebig oft wiederholen. Wir finden also zwischen zwei Punkten stets weitere Punkte. Und wir wissen, dass von drei verschiedenen Punkten P, Q, R einer Geraden genau einer zwischen den beiden anderen liegt (siehe Abbildung 1.3).

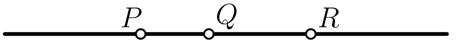

Abbildung 1.3: Drei Punkte einer Geraden

Doch was heißt „dazwischenliegen“? Was heißt „Strecke“? Da wir uns vorgenommen haben, nicht anschaulich zu argumentieren, müssen diese – uns ebenso wie Euklid anschaulich klaren – Begriffe von der Anschauung gelöst und davon unabhängig definiert werden. Hier sehen wir erstmals, dass eine solche Definition nicht immer einfach oder gar naheliegend ist. Wir verwenden dazu eine Eigenschaft, die uns so klar ist, dass wir wohl zunächst gar nicht auf die Idee kommen, dass sie uns weiterhelfen könnte.

Liegt der Punkt Q wie in Abbildung 1.3 zwischen P und R, so erhält man den Abstand von P und R, indem man die Abstände von P und Q sowie von Q und R addiert. Diese uns geläufige *Eigenschaft* der Zwischenbeziehung verwenden wir als *Definition* dieser Beziehung: Gilt für drei paarweise verschiedene Punkte P, Q, R, dass der (nach Axiom (II/1) eindeutig existierende) Abstand von P und R so groß ist wie die Summe der Abstände von P und Q sowie von Q und R, so sagen wir, dass Q *zwischen* P und R *liegt.*

Damit formulieren wir die folgenden Forderungen.

(II/3) *Liegt von drei Punkten einer zwischen den beiden anderen, so liegen die Punkte auf einer Geraden.*

(II/4) *Von drei verschiedenen Punkten einer Geraden liegt genau einer zwischen den beiden anderen.*

Hat man positive Zahlen a, b, c, so gilt:

– Ist c die Summe von a und b, so ist c größer als b.
– Ist b die Summe von a und c, so ist b größer als c.

Beides kann also nicht gleichzeitig eintreten. Dies zeigt, dass von drei verschiedenen Punkten höchstens einer zwischen den beiden anderen liegen kann. Man ändert daher nichts an unserer Geometrie, wenn man das Axiom (II/4) abschwächt zu