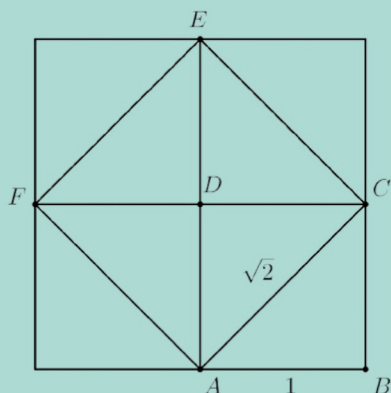


TOMAS MALM

DEN REELLA TALSYMBOLENS PRINCIPER & HANTVERK



Didymos Bokförlag

TOMAS MALM

Den reella talsymbolens principer och hantverk

Portfölj III(c) (De reella talen och analysens
grunder) av *Den första matematiken*

Didymos Matematik & Logik

Den reella talsymbolens principer och hantverk

Portfölj III(c) av *Den första matematiken*

© Tomas Malm & Didymos Bokförlag

ISBN: 978-91-984768-6-6

Produktion: BoD — [Books on Demand](#), Norderstedt, Tyskland 2021

Mer information om Didymos Bokförlag och dess författare finns på vår webbplats:

didymos-bokforlag.com

För detaljer gällande rättigheter med mera vänligen kontakta förlaget via dess webbplats.

Förord

Denna bok innehåller portfölj III(c) av den mer omfattande studien och artikelsamlingen *Den första matematiken* (DFM).¹ Den utgör en översiktlig teoretisk framställning, genomgång och analys av det reella talbegreppet, med möjlighet av teoretisk djupdykning i detta tema och de särskilda svårigheter som omgärdar de så kallade irrationella talen.

Boken kan vara intressant för studenter och lärare i matematik, men är skriven för att även kunna läsas av en allmän publik. Vilka kapitel eller delar av boken som intresserar en specifik läsare beror på vilka intressen man har och var man befinner sig i sin egen matematiska "bildningsprocess". Vissa delar av den är kanske mest relevanta för den som själv också har ett mer teoretiskt–filosofiskt intresse för matematiken. En allmän förutsättning är nog dock att man har en praktisk förtrogenhet med matematik åtminstone motsvarande ungefär inledande baskurser på gymnasienivå. Det vore inte realistiskt att försöka göra den här texten mer "self-contained" än så.

Projektet *Den första matematiken* som helhet hade som sitt övergripande syfte en omsorgsfull teoretisk redogörelse för, framställning av och påminnelse om de grundläggande begreppen och sambanden i ma-

¹Webbsida för artikelsamlingen är:

www.didymos-bokforlag.com/den-forsta-matematiken/

Samtliga artiklar ur DFM finns att beställa som digitalt material från förlagets webbsajt.

tematiken som språk, verktygslåda och vetenskap (vilket innebär ett särskilt fokus på geometri, aritmetik och elementär algebra). Resultatet är dessa portföljer av artiklar. De utgör en del av ett visst arbete med undervisning i matematik, och denna synvinkel ger ett sätt att läsa och använda artiklarna. Men studien bör också betraktas som ett led i ett för mig vidare engagemang i filosofi, och därmed logik. Detta tillför ytterligare en dimension till texterna.

Den första artikeln har samma titel som hela denna bok — ”Den reella talsymbolens principer och hantverk” — och kan sägas utgöra bokens kärna. Denna artikel — eller kanske snarare uppsats² — är den definitivt mest omfattande i hela studien DFM. Det fylliga kommentarsavsnittet i den innehåller framförallt historisk, logisk och filosofisk fördjupning, att läsa i mån av behov eller intresse. Artiklarna 2–5 i portfölj III(c) kan betraktas som matematisk fördjupning i förhållande till den första artikeln, som har en mer översiktlig framtoning.

Det mesta av artiklarnas innehåll utgör en genomgång av tämligen välkända samband, bevis och metoder: diagonalen och sidan i en kvadrat, motsägelsebevis för $\sqrt{2}$, klassifikation av heltalsrötter, decimalutvecklingar, allmänna räknelagar, algebraisk axiomatisering av de reella talen, de mängdteoretiska konstruktionerna, med mera. En sak som dock överlag särskilt utmärker denna framställning och undersökning är att vi inför och rör oss med ett perspektiv på de reella talen, som inte brukar göras lika explicit i de flesta läromedel i matematik (för gymnasium, högskola eller universitet).

Det här perspektivet på och approachen till beskrivningen av de reella talens kalkyl skulle kanske kunna betecknas symboliskt, symbolteoretiskt eller semiotiskt. Det handlar kort sagt om en förståelse av det

²Ska man följa gängse språkbruk vore det kanske mer naturligt att kalla den för en ”uppsats” snarare än ”artikel”, givet dess omfång. Men eftersom det i processen av att arbeta med projektet DFM kom sig naturligt att den resulterade i mindre tematiska undersökningar vars textmässiga omfång sällan översteg det som lämpligen kunde kallas en artikel, kändes det vara fördelaktigare att behålla denna benämning konsekvent.

reella talet som i första hand givet som en *operativ symbol* ingående i en komplicerad väv av språk (språkspel, symbolsystem, kalkyler) och mänsklig verklighet och praxis. Dessa talsymboler är av olika arter och kategorier och har alltid *mer* eller *mindre* artikulerade regler för sin användning, varav vissa är av helt fundamental karaktär. Viktiga inspirationskällor i det här avseendet, och speciellt för arbetet med den första artikeln i samlingen, har varit Ludwig Wittgenstein och den svenske filosofen Sören Stenlund (1943–2019, verksam vid Uppsala universitet).

Så, vi har konstanter (såsom $3, \frac{1}{7}, 1.618, \sqrt{2}$ etc.) respektive variabler (såsom x, y, a, b etc.), och konstantsymbolerna kan klassificeras i rationella respektive irrationella. Vi kan, till exempel, om symbolen $\sqrt{2}$ säga saker som: " $\sqrt{2}$ är större än 1 men mindre än 2" eller " $\sqrt{2}$ är 1,414 till tre decimalers noggrannhet". Medan om till exempel x och y i rollen som reella variabelsymboler kan man inte uttala sig på det sättet, eftersom vi har att göra med variabler. Däremot kan man säga saker som: "*Antag* x är större än 10" eller "*Om* x är mindre än 0, *så* är ..." eller "*För alla* reella tal x och y gäller att $xy = yx$ ".

Den mest allmänna regeln för reella talsymboler kan formuleras som en princip, som vi här kallar *approximationskriteriet*: "Varje reellt tal kan entydigt approximeras med bråk — såsom decimaltal — till varje given noggrannhet $\varepsilon > 0$." Om det reella talet dessutom låter sig uttryckas exakt som ett enda bråk (med felgränsen $\varepsilon = 0$) säger vi att talet är rationellt, i annat fall irrationellt. Själva möjligheten av och dessa villkor för approximationen är alltså konstitutivt för den reella talsymbolen som sådan.

Som läsaren kan lägga märke till förekommer det en del upprepningar av samma eller likartat innehåll mellan artiklar och i enstaka fall inom en artikel. Detta har delvis att göra med det att artiklarna är skrivna för att kunna läsas var för sig som meningsfulla helheter inom den större helhet som studien DFM utgör. Och delvis har det funktionen av att förstärka effekten av genomgången och att man får syn på olika saker ur en lite annan synvinkel nästa gång man ser dem.

Artiklarna i *Den första matematiken* är skrivna med en speciell metod och layout som jag valt att kalla för *den holistiska framställningsformen (och layouten) för matematiken*, vilken jag redogör närmare för i artikeln ”Allmänna ord om den holistiska framställningsformen för matematiken”, förlagd som appendix A till boken. Det finns både didaktiska och filosofiska skäl till att jag valt att experimentera med denna en smula annorlunda form.

Lägg märke till att det finns två olika typer av sidnumreringar i boken: Den ena numreringen är *lokal* och bara relevant för specifik artikel/kapitel i sig, medan den andra är *global* och gäller boken som helhet. Lokal numrering visas nedtill på varje sida av en artikel, den globala numreringen upptill. Den övergripande innehållsförteckningen (på nästa sida) visar ”global position” för vardera artikel.

Innehåll

1	Den reella talsymbolens principer och hantverk	1
2	Roten ur två, eller, diagonalen och sidan i en kvadrat .	147
3	Periodiska decimalutvecklingar	157
4	Identifiering av irrationella heltalsrötter	169
5	Typisk algebraisk axiomatisering av $\mathbb{R}$ och de mängd- teoretiska konstruktionerna	175
		
A	Allmänna ord om den holistiska framställningsformen för matematiken	241
B	Förteckning över notation	251

Den reella talsymbolens principer och hantverk

Artikel 1

Innehåll

1	Kärninnehåll	5
1.1	Särarten hos olika slags frågor	5
1.1.1	Beskrivning och teoretisk analys av de reella talen	8
1.2	De reella talen: rationella och irrationella	10
1.2.1	Newtons beskrivning av det reella talet som bestämning av kvantitet och det abstraherade storleksförhållandet	10
1.2.2	Tallinjen som representation av de reella talen. Samband med geometrin och koordinatsystem .	16
1.2.3	Rationella tal och decimaltal	19
1.2.4	Irrationella tal och inkommensurabla storheter	21
1.2.5	Mängdlärans beteckningar för talområden . . .	26
1.3	Den reella talsymbolen och approximationens princip .	27
1.3.1	Reella talsymboler: konstanter respektive variabler	28
1.3.2	Approximationsprincipen för $\mathbb{R}$	34
1.3.3	Approximationskriteriet: alternativ formulering i termer av decimalutveckling	37
1.3.4	Notation för approximation, närmevärden och felgränser till reella tal	38

1.3.5	Empiriska storheter jämfört med matematiska talsymboler	43
1.3.6	Tre skilda begrepp: decimaltal, decimalutveck- ling, reellt tal	45
1.3.7	Decimalutvecklingens allmänna approximations- villkor	52
1.4	Reell aritmetik: aritmetiska operationer i $\mathbb{R}$	53
1.4.1	Arvsprincipen för $\mathbb{R}$: räknelagar och ordningse- genskaper (ordnad kropp)	53
1.4.2	Negativa tal och negativoperatorn (additiv in- vers) genom talpilsmodellen	59
1.4.3	Utvidgningsprincipen för $\mathbb{R}$ och de fyra räkne- sätten	65
1.4.4	Kvadratrötter: approximationsregeln och några räknelagar	71
1.4.5	Hur kan man förklara/bevisa räknelagar och ordningsegenskaper för reella tal?	77
1.5	Mer om grundläggande kriterier i de reella talens kal- kyl: approximation, identitet, existens	83
1.5.1	Några anmärkningar om approximationskriteriet	83
1.5.2	Approximationskriteriet i termer av storleksre- lationen. Samband med linjäriteten	84
1.5.3	Ett identitetskriterium för de reella talen: oskilj- aktighet upp till bråk	87
1.5.4	Existens- eller representationskriteriet och sym- bolisk konstruktion av reella tal	88
1.5.5	Summan av en oändlig decimalserie. En första formulering av fullständighetsegenskapen	95
1.5.6	Fullständighetsegenskapen och olika fullständig- hetsaxiom	100
1.5.7	Approximationsvillkor för k -rötter	102
2	Kommentarer	103
2.1	Matematisk fördjupning	103

2.1.1	Talet π och dess transcendens	103
2.2	Historisk fördjupning: berättelsen om de reella talen .	108
2.2.1	Jämförelser med den grekiska matematiken . .	108
2.2.2	Renässansen och den naturvetenskapliga revo- lutionen	111
2.2.3	1800-tal: analysens aritmetisering, rigorositets- strävanden och de mängdteoretiska konstruk- tionerna	112
2.3	Logiska och filosofiska reflektioner	118
2.3.1	Tecknet och symbolen	118
2.3.2	”Hur vet man att kvadratroten verkligen existe- rar?”	122
2.3.3	Den långa tråden om $0,999\dots = 1$	124
2.3.4	Längden av en geometrisk sträcka	127
2.3.5	Några anmärkningar kring de reella talens full- ständighetsegenskap	128
2.3.6	Ett försök till definition?	130
2.3.7	Konstruktion av $\mathbb{R}$ och det symboliska perspek- tivet	135
2.4	Förslag på vidare läsning rörande de reella talen och analysens grunder	140

3 Lock/portar 144

Abstract

I den absoluta lejonparten av studier, forskning och tillämpning i eller av matematik kan ett tal vara icke-rationellt av två olika anledningar: Den ena möjligheten är att det är ett reellt tal som är *irrationellt*, som man säger. Exempel på irrationella tal är $\sqrt{2}$ och π . Den andra möjligheten är att det är ett *komplex tal*, på vilket exempel är talet $3 + 4i$.

De reella talen kan definitivt upplevas som någonting mer proble-

matiskt, undflyende och oklart jämfört med dem som samlas under termen rationellt tal. Detta är inte alls någon ovanlig upplevelse för den som studerar matematik, även på högskolenivå. Att det reella talbegreppet kan upplevas som mer förvirrande tror jag kan bero på olika saker. En kan vara att man gör olika förväxlingar mellan reellt tal, decimaltal och decimalutveckling — detta är tre skilda saker. Men det mest påtagligt förvirrande momentet är nog förekomsten av dessa så kallade irrationella tal. Här finns frågor som kan vara i behov av att benas ut, frågor av ett slag som inte bara ”filosofer” kan behöva brottas med i sina matematikstudier.

Syftet med det här dokumentet är dels att påminna om och sammanställa de mest grundläggande begrepp, regler och allmänna principer man behöver i det praktiska arbetet med matematikens reella tal. Det är de begrepp och regler som kommer till användning i studier och tillämpningar av de fyra räknesätten, rötter och andra aritmetiska operationer med reella tal, i matematisk analys, med mera — alltså i majoriteten av kurser i matematik, ekonomi, naturvetenskap, teknologi, statistik och så vidare. Och dels är syftet förstås att efter bästa förmåga i någon mån reda ut begreppen och nå större klarhet.

Vad som litegrann skiljer den här framställningen från den man finner i de flesta läroböcker för gymnasium och universitet/högskola är dels (a) den mer utförligt reflekterande behandlingen av begreppen och sambanden, och dels (b) en lite annan approach till beskrivningen av de reella talens kalkyl, som explicit tar fäste på det reella talet som en viss typ av *operativ symbol* ingående i en matematisk praktik intimt sammanflätad med tillämpningarna i samhälle, teknik och naturvetenskap.

På grund av det här talbegreppets relativa komplexitet är den här artikeln avsevärt tjockare än de flesta artiklar som ingår i studien *Den första matematiken*.

1 Kärninnehåll

1.1 Särarten hos olika slags frågor

Det finns olika sorters frågor rörande talen eller andra matematiska begrepp och företeelser. En del av dessa frågor har inte något helt okontroversiellt svar. Vissa frågeställningar, eller punkter av upplevd oklarhet, leder över till filosofin (matematikfilosofin). Exempel på sådana mer kontroversiella frågeställningar med tentakler till filosofin är:

Vad är ett irrationellt tal — egentligen?

Hur vet man att den och den kvadratroten (decimalsummeföljden, gränsvärdet, etc) alls *existerar*?

Vad är egentligen definitionen av ett reellt tal?

Vad är en verkligt logiskt *stringent*, rigorös, framställning av de reella talens kalkyl och matematisk analys?

Vilken logisk status har egentligen de mängdteoretiska konstruktionerna av de reella talen?

Vilken status har formell logik, mängdlära och överhuvudtaget axiomatiskt tänkande i relation till matematiken som helhet?

Det råder inte någon självklar enighet beträffande *precis alla* frågor om matematiken — inte ens bland matematiker. En del matematiker (eller filosofer) har sina svar på frågorna, men samtidigt finns det andra matematiker (filosofer) som inte vore beredda att hålla med, och ytterligare dem som inte känner sig så säkra. Där den ene känner sig tillfredsställd med ett svar, är det inte garanterat att den andre också gör det.

Är denna omständighet något att förvånas över? — Jag skulle nog svara att det inte alls är något att häpna över, bara därför att vi har att göra med matematik. Så där är det ju med de allra flesta teoretiska verksamheter (liksom med existentiella och religiösa frågor); matematiken eller matematikvetenskapen är inkluderad. Det är om

man klänger fast vid en viss *bild av* och håller sig med vissa *förväntningar på* hur den matematiska eller mänskliga verkligheten *borde* vara, som det här blir till något problem.

— Däremot råder inte någon *större* oenighet om hur man ska handskas med till exempel de reella talen *i praktiken*, närmare bestämt såsom verktyg inom olika arbetsområden, genom tillämpningarna inom ämnen såsom ekonomi, datateknologi, fysik, kemi eller biologi, och även inom lejonparten av den rent matematiska forskningen. Det är verkligen en otvivelaktig, definitiv, karakteristisk sanning om ämnet:

I praktiken råder en oerhört hög och (jämfört med övriga ämnen) påfallande grad av konsensus beträffande matematiken och dess tillämpning, kring frågor ställda såväl inom ämnet som omkring det.

Det vi ska göra i den översiktliga framställning som ges här i textens kärninnehåll är därför egentligen bara att på ett tydligt och precist sätt påminna om och formulera *de praktiska regler för opererandet* med reella tal som gäller inom såväl matematiken — som den normalt lärs ut och utövas på gymnasium, universitet och teknisk högskola — som inom naturvetenskaplig forskning, ingenjörskonst, samhälle och ekonomi. Vi ska alltså fastslå *gällande praxis*. Detta är det *säkerhetsbälte* man behöver i arbetet med att lära sig och använda matematik, och kanske till och med utveckla ny matematik.

Det handlar alltså inte om att matematiken på något sätt skulle befinna sig i gungning, i någon allvarlig ”grundvalskris”, bara därför att vi konstaterar att det vid sidan om den påfallande graden av praktisk konsensus, existerar frågeställningar där det inte förhåller sig på det sättet. Ett annat enkelt exempel: det råder fullständig konsensus beträffande frågan ”Vad är summan av 5 och 7?” eller ”Om jag har fem äpplen i en låda och sju i en annan, hur många har jag totalt?”; men knappast någon konsensus vad gäller frågan ”Vilken logisk/ontologisk status har satsen ' $5 + 7 = 12$ ' i förhållande till den naturliga verkligheten? Är det en sorts absolut sanning inristad som det vore på eteriska stenar i evigheten, eller är det mer någonting analogt med en

mänsklig överenskommelse beträffande hur vi ska räkna? Är det ett axiom, en definition, ett teorem? —”

Det finns åtskilliga (mer eller mindre) precisa saker man kan säga om ’de reella talen’, som alla matematiskt kompetenta personer skulle vara överens om, utan att därmed förutsätta något sådant som en standardiserad definition, som skulle vara analog med definitionen av exempelvis ett primtal. Eller att förutsätta konsensus rörande alla möjliga frågor rörande de reella talen. Ibland visar det sig också värdefullt för förståelsen att anknyta den undervisande framställningen till en liten smula begreppshistoria.

Vidare matematikfilosofiska, logisk–begreppsliga frågeställningar som kan uppstå (hos vissa studenter) har jag förlagt till kommentarerna, andra författares texter och naturligtvis läsarens egen vidare tanke och reflektion. Här finns frågor som knappast kan avhandlas fullständigt i ett dokument av den här ringa omfattningen, och det jag skriver i de filosofiska kommentarerna är blott några få egna reflektioner.

I kärninnehållet av artikeln, liksom i de logisk–filosofiska kommentarerna, antyder eller föreslår jag alltså ett sätt att närma sig frågor om de reella talen (och deras natur och existens), som är en liten smula ”oortodox”. Åtminstone jämfört med de approacher till de reella talen man finner i de flesta grundläggande eller högre läroböcker i matematisk analys. Dessa frågor kan vara studentens praktiska behov i studierna, lärarens didaktisk–pedagogiska frågor eller mer logisk–filosofiska frågor. Man kan också välja att läsa delar av framställningen som något med karaktären av en fundering, en frågeställning till tänkande läsare, snarare än direkta påståenden.

Den beskrivning som ges har dock naturligtvis viktiga beröringspunkter med den typiska algebraiska beskrivningen av $\mathbb{R}$ (som en fullständigt ordnad kropp) och de ansatser som går under rubriken ”mängdteoretisk konstruktion” av de reella talen, varav de två mest frekventa är Dedekinds snittmetod respektive Cantors cauchyföljds metod. Grund-

ritningen för dessa går vi igenom i den historiska delen samt artikeln ”Typisk algebraisk axiomatisering av $\mathbb{R}$ och de mängdteoretiska konstruktionerna”. Detaljerna överlåter jag till läsaren att fördjupa sig i på egen hand i mån av tid och intresse eller studiebehov.

Den väsentliga skillnaden här är att vi inte betonar att ’konstruktionen’ eller beskrivningen formuleras med stöd av den terminologi och notation som hör till mängdläran. Istället kommer vi att röra oss med och inom följande vokabulär:

symbol (talsymbol, kvantitet, kvantitativ symbol), approximation, närmevärde, felgräns, noggrannhet, regler, villkor

med mera. Det finns olika anledningar till att jag vill att vi prövar den här rutten, istället för att direkt dra in mängdlära och den typiska axiomatiseringen av $\mathbb{R}$ — utan att för den delen avvisa dessa eller vilja uttrycka någon ringaktning för mängdlära. Den viktigaste anledningen är att jag tror man kan uppleva vår beskrivning eller framställning som på vissa sätt mer klargörande, didaktiskt sett men också principiellt, filosofiskt.

Man skulle kunna kalla vår approach för **symbolisk**, **semiotisk**, **symbolteoretisk** eller **symbolisk-axiomatisk** — eller något åt det hållet. Jag lämnar det öppet.

1.1.1 Beskrivning och teoretisk analys av de reella talen

Det finns många ganska bra anledningar att dela in den fördjupade teoretiska matematiska analysen och reflektionen över våra grundläggande moderna talbegrepp i väsentligen tre huvudmoment:

- (i) De rationella taltyperna, med fokus på de fyra räknesätten och elementär algebra.
- (ii) De irrationella och reella talen, med fokus på algebrans fortsättning med rötter och utvidgningen av aritmetiska operationer till

reella tal (vilket bildar upptakten till studiet av reellvärd analys i en variabel).

- (iii) De komplexa talen (och eventuellt ytterligare matematiska konstruktioner, såsom kvaternionerna).

Vår matematiska begreppsbildning är sådan att denna uppdelning är, eller kan vara, mycket klargörande.

Det handlar inte om att vi ska försöka vara ”mer katoliker än påven” i analysen och återuppförandet av de rationella talen och deras aritmetik och elementär algebra, liksom vissla och låtsas som om de irrationella talen inte alls existerade; men de illustrationer, resonemang och algebraiska härledningar som är möjliga för de rationella taltyperna, gör att det finns många teoretiska såväl som didaktiska poänger med att göra en separat behandling av grundläggande aritmetik som ställer in siktet specifikt på de rationella taltyperna. Det är lättare att få en upplevelse av ordning, enkelhet och överblick i samband med en separat teoretisk framställning av de hela talen och bråkens grundläggande regler och begrepp.

Detaljerna i den sortens teoretiska behandling av grunderna i aritmetik och algebra utgör avsikten med portfölj III(a)–(b) av DFM. Här, i denna och resten av artiklarna ur portfölj III(c), förutsätter vi dock praktisk och teoretisk kunskap om de rationella taltyperna (speciellt heltal, bråk och decimaltal), de fyra räknesätten och väldigt elementär algebra som given utgångspunkt, som ’etablerad’ om man så vill.

Som utgångspunkt för artikeln tar vi alltså vad man med en samlande term kunde beteckna *rationell aritmetik*. Termen *reell aritmetik* syftar då på att vi från rationell aritmetik går över till att undersöka hur olika aritmetiska operationer ska tolkas för det vidare reella talbegreppet: hur beräknar man till exempel en summa eller produkt med irrationella talsymboler i sig?

1.2 De reella talen: rationella och irrationella

1.2.1 Newtons beskrivning av det reella talet som bestämning av kvantitet och det abstraherade storleksförhållandet

Under tiden för den naturvetenskapliga revolutionen ger Newton i sin skrift *Universal Arithmetick* en beskrivning av engelskans *number*, vars allmänna idé eller konception här motsvarar den samtida matematikens term 'reellt tal', på följande sätt:

Artikel I. Med ett tal förstår vi, inte så mycket en given mångfald av enheter, utan snarare *det abstraherade storleksförhållandet* [eng. orig. *the abstracted ratio*] mellan en viss storhet och en annan bestämd storhet hörande till samma *sort* [kategori, dimension], där vi låter den senare fungera som vår *enhet*. Och dessa tal är av *tre typer*; heltal, bråk respektive irrationellt: Ett heltal är *det som mäter* en storhet av ett helt antal enheter, ett bråk det som mäter ett visst antal andelar av enheten, och ett irrationellt tal det som mäter något i jämförelse med vilket enheten är inkommensurabel.¹

Dessa rader av Newton är en kärnfull sammanfattning av den klassiska europeiska matematikens konception om (de reella) talen, som samlar dess fyra väsentliga komponenter: (a) talet som abstraherat storleksförhållande och talet som måttet snarare än det konkret uppmätta;

¹Isaac Newton, *Universal Arithmetick*, kap. 1 ("Notation"), artikel I. Min översättning från den engelska utgåvan från 1768. Jag har gjort om originaltexten med eget val av kursiveringar, i syfte att lyfta fram den newtonska konceptionens komponenter: abstraherat storleksförhållande, kategori/dimension, enhet, tre typer av tal och talet som det som mäter snarare än det mätta.

Det engelska originalet lyder:

Article I. *By Number we understand, not so much a Multitude of Unities, as the abstracted Ratio of any Quantity, to another Quantity of the same Kind, which we take for Unity. And this is threefold; integer, fraction, and surd: An Integer, is what is measured by Unity, a Fraction, that which a submultiple Part of Unity measures, and a Surd, to which unity is incommensurable.*

I det engelska originalet heter alltså irrationellt tal "surd".

(b) varje mätbar storhet har en specifik sort/kategori/dimension; (c) val av enhet för mätningen/räkningen och (d) tre grundläggande typer av tal som sätt att jämföra med enheten. (Vi kommer till begreppet inkommensurabilitet några avsnitt längre fram i dokumentet.)

Newtons beskrivning anknyter till och har alltså starka beröringspunkter med den moderna naturvetenskapens begrepp *storhet* — motsvarande det engelska *physical quantity* —, vilket är något som (föreställer man sig åtminstone) låter sig mätas, varvid man uppger *måte-tal* och *enhet*. Exempel på fysikaliska storheter är längd, tid, massa, temperatur och energi. Inom ekonomin hittar vi storheter som valuta, inflation, konsumentprisindex, med mera. Och, givetvis, inom geometrin hittar vi rent *geometriska* storheter vid jämförelse av vinklar, sträckor, ytor, kroppar, med mera, en jämförelse som äger rum inom det matematiska språket och tänkandet. Geometris ’storheter’ är *abstrakta-symboliska* storheter, de har alltså en annan innebörd än den fysikaliska.

Låt oss kalla den här klassiska konceptionen om de reella talen för **den newtonsk–cartesianska konceptionen** om (det reella) talet.² Många av oss skulle benämna den här konceptionen som ’den intuitiva idén’ bakom begreppsbildningen reellt tal. Den ger både grundritningen för tallinjen och koordinatsystemet och är väsentlig att ha god känsla för i all matematisk problemlösning och modellering i hantverk, teknik, vetenskap och ekonomi. Den är nödvändig för att förstå hur matematiken ska *tillämpas*, hur den ska användas i praktiken.

Låt oss för tydlighetens skull analysera Newtons beskrivning i ett antal punkter:

1. Det klassiska sättet att uppfatta det reella talet är som själva *det abstraherade storleksförhållande* som det är möjligt för en storhet och en annan storhet som tillhör samma kategori att stå i till varandra, till exempel två

²Ordet ”cartesiansk” ska här framförallt väcka associationen till den vanliga tallinjen och cartesiska koordinatsystem, välbekant från grundläggande matematikundervisning; vilken allmän konception personen René Descartes skulle ha haft om talen är en annan fråga, som hamnar utanför syftet med den här genomgången.

längder, två areor, två vikter, två tidsintervall.

2. Vi kan föreställa oss att en storhet av en given kategori fixeras och får fungera som *enheten*, svarande mot talet 1, alltså 'en hel'.

3. Ett tal kan då vara av tre arter, menar Newton: heltal, bråk eller irrationellt.

4. *Heltalen* svarar mot en mångfald hela enheter.

5. *Bråken* svarar mot en mångfald delar av en hel enhet.

6. *Irrationella tal* svarar mot de storheter som är inkommensurabla med enheten (men som fortfarande är av samma kategori).

Som vi ser följer förstås den vanliga tallinjens konstruktion Newtons rekommendationer. Vid sidan om *åskådliga* storheter av typen längd, area, volym, vinkel — vare sig det är geometrins rent symboliska eller det fysiska rummets fysikaliska motsvarigheter — kan kategorin av storheter vara exempelvis ett tidsintervall eller massan hos något visst objekt. Den kategori en storhet tillhör kallas i modern teknik och naturvetenskap för dess *dimension*. Tag som exempel kategorin/dimensionen [massa]. Då är kilogramprototypen i Paris ett exempel på fixering av enheten 1. Varje annan vikt, om vi följer Newtons tankespår, är en storhet som ligger inom samma kategori som kilogramprototypen och låter sig därmed jämföras med denna. Det är verkligen så man resonerar i klassisk fysik. Genom mätning av en viss vikt på en våg (kalibrerad för kilogram) erhålles måttet på viktens storlek som ett måtetal i enheten kilogram, såsom " $m = 4,5$ kg".

Matematikens vidaste talbegrepp för bestämning av *kvantitet* heter alltså de reella talen. Sedan Aristoteles skiljer man mellan:

kontinuerlig kvantitet: kvantitet i betydelsen storleken eller magnituden av något som kan tänkas variera över en kontinuerlig skala, till exempel mängden vatten i en regntunna mätt i enheten liter;

diskret kvantitet: kvantitet i betydelsen antalet av något, till exempel antalet tänder i munnen.

Inom matematiken och vetenskapen tänker man normalt som så att svaret på en fråga av dessa och liknande slag är eller kan representeras, modelleras av något reellt tal:

A: "Hur många stolar får plats i det rummet? Vi behöver åtminstone få in 20 pers." — B: "Det får plats minst 35 stolar, inga problem."

A: "Hur många deciliter vatten behövs till bröddegen?" — B: "2,5 deciliter"

A: "Hur många kilometer är det från Stockholm till Uppsala?" — B: "Cirka 71 km via E4:an"

A: "Hur högt är trädet jämfört med björnen som står bredvid det?" — B: "Om jag mäter med linjal får jag att trädet är 7,3 gånger så högt som björnen."

A: "Hur stor är diagonalen i en kvadrat jämfört med sidan?" — B: "Diagonalen är kvadratroten ur två gånger större än sidan"

A: "Hur stor är omkretsen av en cirkel jämfört med diametern?" — B: "Pi gånger större"

A: "Hur många kilogram väger blyklumpen?" — B: "4,53 kg enligt vågen"

"Vad är temperaturen inne i kylskåpet fem minuter efter att det blivit påslaget?"

"Hur många varv rör sig Jorden kring sin egen axel på ett år?"

"Hur lång tid tar det för ljuset att färdas från Solen till Jordens yta (mätt med en klocka på jorden)?"

... ..

Denna tankegång utgör *en vägledande princip för matematisk modellering* av naturliga (fysikaliska) situationer och förlopp. Situationen och dess förlopp kan vara temperaturens variation över tid vid påslagning/avstängning av ett kylskåp eller höjden hos ett föremål som faller mot jordytan. Där låter man typiskt temperaturen representeras av någon reell variabel T och höjden av en reell variabel h eller kanske y . Men samma vägledande princip gäller även modellering av samhällsliga, ekonomiska och andra sorters förlopp.

Den newtonsk–cartesianska konceptionen om ett reellt tal kan sammanfattas såhär: *Det reella talet uppfattas här som det abstraherade storleksförhållande, med hjälp av vilket förhållandet mellan två giv-*

na storheter hörande till samma kategori (dimension) låter sig anges, uttryckas, mätas. Talet är alltså 'måttet' och inte 'det mätta'.

Det vill säga, det avser själva förhållandet tänkt *in abstracto* utan hänsyn till någon specifik enhet. Om en stav är 4,5 meter lång, så är storleksförhållandet mellan staven och en meterlinjal 4,5:1. Samma storleksförhållande 4,5:1 skulle dock kunna råda mellan en viss vikt och kilogramprototypen, i vilket fall vikten skulle ha massan 4,5 kg. Det reella talet 4,5 i sig självt är här egentligen *en symbol som i sin roll och funktion abstraherar från specifika omständigheter*, från specifika geometriska, fysikaliska eller ekonomiska storheter, enheter eller kategorier av storheter.

Denna allmänna idé om det reella talets roll i vetenskaperna och olika tekniska och praktiska tillämpningar är precis lika viktig idag, i början av 2000-talets studier och forskning i matematik och vetenskap, som på Newtons tid. Det gäller universitet och högskola likaväl som för undervisningen i grundskola och gymnasium.

De negativa reella talen hos Newton

Noga räknat är vad Newton beskriver som ett tal, *number*, vad vi i modern matematik skulle kalla *de icke-negativa* reella talen; alla tal 'till höger' på tallinjen inklusive noll. Han tycks inte betrakta våra 'negativa tal' som en speciell typ av tal, eftersom ett *number* utgör måttet på storleksförhållandet mellan tänkbara storheter av samma kategori. Negativa tal införs och betraktas snarare som en speciell aritmetisk–algebraisk *teknisk anordning*, ett visst sätt att göra bruk av tal. Ett *number* är för Newton intimt förknippat med specifikt *storlek*, i originalets engelska *magnitude*, och storleksjämförelse, *ratio*. 'Negativa tal' benämns hos Newton (kap. 1, art. IV) *negative quantities*, och är en talsymbol försedd med *negativt förtecken*, medan samma talsymbol försedd med positivt förtecken kallas för en *affirmative*

quantity.³

Newton fortsätter i bokens övergripande och inledande kapitel:

I vetenskaperna är det inte endast storlek [eng. magnitude] som tas under betraktande: utan det finns många egenskaper hos och operationer på storheter av olika slag, som man måste ta hänsyn till. När man bestämmer storleksförhållandet mellan storheter är det förstås endast deras storlek som räknas: men egenskaperna hos geometriska figurer beror på såväl inbördes läge mellan de linjer som avgränsar dem såväl som på storleken. Vid behandling av rörelse måste man beakta rörelsens riktning, såväl som dess hastighet och de krafter vilka får rörelsen av tillta eller avta. I optiken är bildernas position, ljusstyrka och skärpa av ingen mindre betydelse än deras storlek. — Och liknande saker kan sägas om alla övriga vetenskaper. Det är således helt nödvändigt att många andra symboler [tecken] tillåts in i algebran, utöver de bokstäver [variabler] och tecken för tal [konstanter] vilka specifikt representerar storheternas själva magnitud [storlek, absolutbelopp].⁴

Till dessa ytterligare symboler och beteckningssätt hör: *hjälp-tecken* såsom parenteser, *signum*, *förtecken* $+/-$, skrivsätt för *de fyra räknesätten*, *potenser*, *rötter*, med mera. Det ovan citerade gäller speciellt införandet av signum och negativa tal för att smidigt kunna uttrycka sådant som skuld på kontot, rörelse i motsatt riktning, temperatur under strecket, läge på en geometrisk linje givet en bestämd punkt, och så vidare.

³Exempel på Newtons sätt att skriva och uttrycka sig finner vi i bokens andra kapitel, "Of Addition":

XXIII. *Negative Quantities are added after the same way as Affirmative.* Thus -2 and -3 make -5 ; $-\frac{4ax}{b}$ and $-\frac{11ax}{b}$ make $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ and $-b\sqrt{ax}$ make $-(a+b)\sqrt{ax}$.

Överstreckat $---$ är vad Newton använder istället för parenteser som algebraiska hjälptecken; i modern matematik skriver vi det sista uttrycket som $(-a-b)\sqrt{ax}$ eller $((-a)+(-b))\sqrt{ax} = -(a+b)\sqrt{ax}$.

⁴Isaac Newton, *Universal Arithmetick*, kap. 1 ("Notation"), fotnot till §IV. Förf. övers. Kursiveringarna tillhör originaltexten.

1.2.2 Tallinjen som representation av de reella talen. Samband med geometrin och koordinatsystem

Den beskrivning vi just gjort av reella tal träffar något mycket viktigt om hur man faktiskt lär sig att handskas med talen och de fyra räknesätten, om man studerar matematik eller ämnen som fysik, kemi, biologi och ekonomi.

I några samtida uppslagsverk av typen encyklopedi läser man följande beskrivningar⁵ av 'de reella talen', i jämförelse med, och delvis i kontrast till, Newtons (eftersom han inte talar i termer av någon "tallinje"):

"Reellt tal, tal som kan åskådliggöras som punkter på en tallinje." — Nationalencyklopedien

"De reella talen är de tal som man vanligtvis menar med tal. De kan beskrivas som alla punkter på en kontinuerlig linje, utan att det finns glapp mellan talen i linjen." — Wikipedia (svenska)

"In mathematics, a real number is a value that represents a quantity along a continuous line." — Wikipedia (engelska)

Det här sättet att beskriva de reella talen bygger alltså på **tallinjen** som visuell, bildmässig, geometrisk form för representationen av de reella talen. Den torde kännas bekant från läsarens egen erfarenhet av att studera matematik.



Figur 1: Tallinjen eller "tallinjalen". Punkten O kallas origo och sträckan OE är enheten, motsvarande talet 1. Punkter på tallinjen till höger om origo motsvarar positiva reella tal och punkter till vänster negativa reella tal. Sträckan OP motsvarar talet 1,4 eftersom OP är 1,4 i jämförelse med OE . Storleksförhållandet mellan OP och OE är 1,4 (= 14 10-delar).

⁵Från 16 september 2015.