

FUNDAMENTOS DE **MATEMÁTICA FINANCIERA**

*Con aplicaciones en Excel y en estándares
internacionales de información financiera*

Juan Ignacio Oviedo Pino

editorial
UC
Universidad del Cauca

FUNDAMENTOS DE
MATEMÁTICA
FINANCIERA

FUNDAMENTOS DE **MATEMÁTICA FINANCIERA**

*Con aplicaciones en Excel y en estándares
internacionales de información financiera*

Juan Ignacio Oviedo Pino

Convocatoria



2018

Texto pedagógico



Editorial Universidad del Cauca

2020

Oviedo Pino, Juan Ignacio

Fundamentos de matemática financiera : con aplicaciones en Excel y en estándares internacionales de información financiera / Juan Ignacio Oviedo Pino. -- Popayán : Universidad del Cauca, 2020.

260 páginas : ilustraciones ; 24 cm.

Incluye bibliografía e índice.

1. Matemáticas financieras 2. Matemáticas para administradores
3. Matemáticas financieras - Problemas, ejercicios, etc. 4. Toma de decisiones - Métodos matemáticos 5. Evaluación de proyectos - Métodos matemáticos 6. Excel (Programa para computador) I. Tít.
513.93 cd 22 ed.
A1661690

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Hecho el depósito legal que marca el Decreto 460 de 1995

Fundamentos de matemática financiera

Con aplicaciones en Excel y en estándares internacionales de información financiera

© Universidad del Cauca, 2020

© Autor: Juan Ignacio Oviedo Pino

Primera edición en español

Editorial Universidad del Cauca, agosto de 2020

ISBN impreso: 978-958-732-429-7

ISBN digital: 978-958-732-430-3

Diseño editorial: Área de Desarrollo Editorial - Universidad del Cauca

Corrección de estilo: Laura Mercedes Carvajal Guaca y Maribel Villota

Diagramación: Ángela María Pereira

Diseño de carátula: Ángela María Pereira

Editor general de Publicaciones: Mario Delgado-Noguera

Editorial Universidad del Cauca

Casa Mosquera Calle 3 No. 5-14

Popayán, Colombia

Código Postal 190003

Teléfonos: (2) 8209900, ext. 1134 - 1135

<http://www.unicauca.edu.co/editorial/>



Licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 2.5
Colombia (CC BY-NC-ND 2.5 CO).

Impreso en Popayán, Cauca, Colombia. Printed in Colombia

Contenido

Introducción	13
Recursos económicos en el tiempo	15
Diagrama de flujo de caja o diagrama económico	16
Concepto de interés, tasa de interés y costo de oportunidad	19
Ejercicios de repaso	25
Interés simple	27
Operaciones básicas a interés simple	27
Conversión de tasas de interés simple	35
Bases de cálculo de días	38
Concepto de fecha focal y ecuación de valor	40
Anualidad o serie uniforme simple	48
Descuento simple	54
Interés anticipado	63
Equivalencia entre el interés anticipado y el interés vencido	65
Ejercicios de repaso	70
Interés compuesto	77
Operaciones básicas a interés compuesto	80
Fecha focal en interés compuesto	83
Tasas de interés	85
Descuento compuesto	102
Tasa de inflación y pérdida de poder adquisitivo	108
Tasa de rendimiento real	113
Tipos de cambio, tasa de depreciación, apreciación de monedas y paridad de tasas de interés	114
Ejercicios de repaso	119
Series uniformes o anualidades	127
Series uniformes finitas	127
Serie uniforme infinita o perpetuidad uniforme	157
Ejercicios de repaso	159
Series gradientes	165
Series gradientes aritméticas	166
Series gradientes geométricas	176
Series escalares	186
Ejercicios de repaso	199

Aplicación en evaluación financiera de proyectos	205
Valor presente neto –VPN–	205
Tasa interna de retorno TIR	220
Periodo de recuperación de la inversión o payback	225
Beneficio/costo (B/C)	228
Costo Anual Uniforme Equivalente –CAUE–	229
Ejercicios de repaso	235
Aplicación en normatividad internacional	
de reportes financieros	241
Método del interés efectivo	241
Costo amortizado, reconocimiento inicial y posterior	247
Glosario	253
Referencias citadas	255
Índice analítico	257
Sobre el autor	259

Lista de esquemas

Esquema 1. Conversión de tasas de interés simple anticipadas	69
Esquema 2. Conversión de tasas de interés periódicas vencidas	90
Esquema 3. Conversión de tasas periódicas anticipadas	101
Esquema 4. Conversión de tasas de interés compuesto	102
Esquema 5. Series uniformes vencidas y anticipadas	152
Esquema 6. Series gradientes aritméticas finitas vencidas y anticipadas	174
Esquema 7. Series geométricas crecientes y decrecientes vencidas y anticipadas	183

Lista de diagramas

Diagrama 1. Entrada y salida de recursos en el tiempo	16
Diagrama 2. Flujo de recursos del comprador de vivienda a crédito	17
Diagrama 3. Flujo neto de recursos del comprador de vivienda a crédito	17
Diagrama 4. Flujo de caja para la constructora	17
Diagrama 5. Flujo de caja para la entidad financiera	18
Diagrama 6. Equivalencia de tiempo en diagramas económicos	18
Diagrama 7. Equivalencia de flujos en diagramas económicos	19
Diagrama 8. Flujo de caja para el prestamista	20
Diagrama 9. Flujo de caja del crédito	23
Diagrama 10. Composición del valor futuro	24
Diagrama 11. Flujo de caja para prestamista a un periodo en interés simple	28
Diagrama 12. Pago de interés al momento de su devengo	28
Diagrama 13. Pago total del interés al finalizar el crédito	29
Diagrama 14. Crédito a cuatro cuotas iguales en interés simple	30
Diagrama 15. Correspondencia entre los periodos y la tasa de interés	32
Diagrama 16. El tiempo (n) a interés simple	33
Diagrama 17. Valor presente en interés simple	34
Diagrama 18. Valor futuro a hallar con fecha focal en periodo cero	41
Diagrama 19. Valor futuro con fecha focal en el periodo cinco	42
Diagrama 20. Valor futuro con fecha focal en el periodo tres	42
Diagrama 21. Valor futuro con fecha focal en el periodo ocho	43
Diagrama 22. Renegociación de deuda-diagrama que induce a error	45
Diagrama 23. Renegociación de deuda-diagrama correcto	45
Diagrama 24. Flujo de caja de deuda inicial	46
Diagrama 25. Flujo de caja de deuda con tasa renegociada	46
Diagrama 26. Cambio de fecha de dos deudas	47
Diagrama 27. Valor futuro de una serie uniforme anticipada	48
Diagrama 28. Valor futuro de una serie uniforme vencida	50
Diagrama 29. Valor presente de una serie uniforme vencida	52
Diagrama 30. Descuento simple comercial	55
Diagrama 31. Descuento simple racional	56
Diagrama 32. Operación a interés anticipado	64
Diagrama 33. Flujo de caja con tasa de interés anticipada	65
Diagrama 34. Préstamo a interés simple vs. interés compuesto	78
Diagrama 35. Comportamiento del valor futuro en interés compuesto	79
Diagrama 36. Renegociación de deudas en interés compuesto	84
Diagrama 37. Capitalización de intereses y valor futuro con tasa J_{mens} y con J_{trim}	86
Diagrama 38. Descuento compuesto comercial para un periodo	103
Diagrama 39. Descuento compuesto comercial para t periodos	103
Diagrama 40. Descuento compuesto racional para un periodo	105
Diagrama 41. Descuento compuesto racional para t periodos	106

Diagrama 42. Pérdida de poder adquisitivo	110
Diagrama 43. Apreciación vs. depreciación de monedas	115
Diagrama 44. Valor futuro de una serie uniforme vencida	127
Diagrama 45. Valor futuro de una serie uniforme anticipada	129
Diagrama 46. Futuro de una serie uniforme vencida vs. anticipada	130
Diagrama 47. Valor presente de una serie uniforme vencida	132
Diagrama 48. Valor presente a partir del valor futuro de una serie uniforme vencida	133
Diagrama 49. Valor presente de una serie uniforme vencida vs. anticipada	135
Diagrama 50. Composición de cuota en crédito a largo plazo	138
Diagrama 51. Flujo de caja en créditos con periodo de gracia	150
Diagrama 52. Cálculo de cuota fija en crédito con periodo de gracia	150
Diagrama 53. Flujo de caja de un bono con cupones anuales	155
Diagrama 54. Flujo de caja de un bono con cupones semestrales	155
Diagrama 55. Valoración de un bono en fecha posterior a su emisión	156
Diagrama 56. Valor futuro de una serie gradiente creciente finita vencida	166
Diagrama 57. Descomposición de gradiente aritmético en series uniformes	166
Diagrama 58. Valor futuro de una serie gradiente creciente finita anticipada	168
Diagrama 59. Valor futuro de una serie gradiente aritmética anticipada vs. vencida	169
Diagrama 60. Valor presente de una serie gradiente a partir de su valor futuro	170
Diagrama 61. Valor presente de una serie gradiente aritmética vencida finita	171
Diagrama 62. Valor presente de una serie geométrica finita vencida	177
Diagrama 63. Valor futuro de una serie geométrica vencida	180
Diagrama 64. Flujo de caja con crecimiento a tasa constante a partir del año cinco	186
Diagrama 65. Serie escalar aritmética finita	187
Diagrama 66. Flujo de caja de arrendamiento mensual vencido a tres años	188
Diagrama 67. Conversión de una serie escalar aritmética en una serie aritmética.	189
Diagrama 68. Flujo de arrendamiento con crecimiento anual a tasa constante	193
Diagrama 69. Conversión de serie escalar geométrica en serie geométrica	194
Diagrama 70. Inversión con único retorno	206
Diagrama 71. Inversión con dos retornos	207
Diagrama 72. VPN con distintas tasas de oportunidad	209
Diagrama 73. Flujo de caja de proyecto con retornos uniformes	212
Diagrama 74. Flujo de caja de proyecto con retornos uniformes infinitos	213
Diagrama 75. Flujo de caja de proyecto con retornos crecientes aritméticamente	214
Diagrama 76. Flujo de caja de proyectos con retornos a perpetuidad crecientes aritméticamente	215
Diagrama 77. Flujo de caja de proyectos con retornos crecientes geoméricamente	216
Diagrama 78. Flujo de caja de proyectos con tasa de crecimiento de retornos iguales a la tasa de oportunidad	218
Diagrama 79. Flujo de caja de proyecto con retornos a perpetuidad crecientes geoméricamente	219
Diagrama 80. Flujo de caja de proyectos alternativos	229
Diagrama 81. Procedimiento gráfico para hallar el CAUE	230
Diagrama 82. Anualización de costo de adquisición y valor de salvamento	233

Lista de imagenes

Imagen 1. Días entre fechas en Excel	40
Imagen 2. Descuento simple comercial vs. descuento simple racional	60
Imagen 3. Tasa de descuento simple racional con herramienta “Buscar objetivo” de Excel .	61
Imagen 4. Valor futuro con la función “VF” de Excel	80
Imagen 5. Valor presente con la función “VA” de Excel	81
Imagen 6. Número de periodos con la función “NPER” de Excel	82
Imagen 7. Tasa de interés con la función “TASA” de Excel	82
Imagen 8. Conversión de tasas nominales a e. a. con función “INT.EFECTIVO” de Excel	91
Imagen 9. Conversión de tasa e. a. a nominal con la función “TASA.NOMINAL” de Excel ..	92
Imagen 10. Variación discreta del precio de la acción	93
Imagen 11. Variación continua del precio de la acción	93
Imagen 12. Cálculo de la inflación acumulada a partir del IPC	109
Imagen 13. Valor futuro de serie uniforme vencida con función “VF” de Excel	131
Imagen 14. Valor futuro de serie uniforme anticipada con función “VF” de Excel	131
Imagen 15. Valor presente de una serie uniforme vencida con la función “VA” de Excel	134
Imagen 16. Valor presente de una serie vencida con la función “VNA” de Excel	134
Imagen 17. Valor presente de una serie uniforme anticipada con la función “VA” de Excel	135
Imagen 18. Amortización de crédito con cuota constante	137
Imagen 19. Amortización de crédito a largo plazo	137
Imagen 20. Número de cuotas constantes con la función “NPER” de Excel	139
Imagen 21. Amortización con cinco cuotas	139
Imagen 22. Amortización con seis cuotas	140
Imagen 23. Identificación de la herramienta “Tabla de datos” de Excel	141
Imagen 24. Parámetros de la “Tabla de datos” de una entrada en Excel	141
Imagen 25. Cuota a pagar, según el plazo elegido, por cada peso financiado	142
Imagen 26. Diseño de tabla de datos de doble entrada	143
Imagen 27. Parámetros en “Tabla de datos” de doble entrada en Excel	143
Imagen 28. Cuota a pagar, según el plazo y la tasa de interés elegidos, por cada peso financiado	144
Imagen 29. Tasa de interés en serie uniforme con la función “TASA” de Excel	145
Imagen 30. Tasa de interés en créditos con arandelas y cuota constante	146
Imagen 31. Tasa en créditos con la función “TIR” de Excel	146
Imagen 32. Tasa de interés de crédito con herramienta “Buscar objetivo” de Excel	147
Imagen 33. Amortización de crédito con abono extraordinario e igual número de cuotas ..	148
Imagen 34. Amortización de crédito con abono extraordinario y menor número de cuotas	149
Imagen 35. Amortización de crédito con periodo de gracia	151
Imagen 36. Amortización de crédito en UVR	154
Imagen 37. Valor futuro en serie gradiente aritmética creciente finito vencida	168
Imagen 38. Valor presente de una serie gradiente haciendo uso de la función “VNA” de Excel	171
Imagen 39. Amortización de crédito con abono constante a capital	173

Imagen 40. Valor presente de una serie gradiente aritmética infinita vencida	176
Imagen 41. Valor presente de una serie geométrica finita vencida	178
Imagen 42. Valor futuro de una serie geométrica finita	181
Imagen 43. Valor presente de una serie gradiente geométrica decreciente	183
Imagen 44. Valor presente neto con la ayuda de la función "VNA" de Excel	208
Imagen 45. VPN con distintas tasas de oportunidad	208
Imagen 46. VPN en proyectos de distinta duración	211
Imagen 47. Mínimo común múltiplo en VPN con proyectos de distinta duración	211
Imagen 48. VPN con retornos uniformes	213
Imagen 49. VPN con retornos crecientes aritméticamente	215
Imagen 50. VPN con retornos crecientes geoméricamente	217
Imagen 51. VPN con retornos cuya tasa de crecimiento es igual a la tasa de oportunidad .	219
Imagen 52. Tasa interna de retorno con la función "TIR" de Excel	221
Imagen 53. Uso del parámetro "estimar" en la función "TIR" de Excel	224
Imagen 54. Saldos por recuperar en un proyecto sin costo de oportunidad	226
Imagen 55. Saldos por recuperar en un proyecto con costo de oportunidad	227
Imagen 56. Relación beneficio/costo de proyectos	229
Imagen 57. Uso de la función "PAGO" de Excel para hallar el CAUE	231
Imagen 58. CAUE de dos alternativas de costos	231
Imagen 59. Incomparabilidad entre el CAUE y el VPN en proyectos de distinta duración ...	232
Imagen 60. Ajustes para comparar CAUE de proyectos con distintas duraciones	233
Imagen 61. Interés efectivo en crédito con reembolso único	242
Imagen 62. Interés efectivo en crédito con comisión	242
Imagen 63. Interés efectivo en crédito con cuota constante	243
Imagen 64. Interés efectivo en crédito con abono constante a capital	243
Imagen 65. Interés efectivo de un bono	244
Imagen 66. Interés efectivo de leasing financiero	244
Imagen 67. Interés efectivo para amortizaciones no periódicas	246
Imagen 68. Medición inicial de préstamo sin interés	246
Imagen 69. Costo amortizado de crédito con único reembolso	247
Imagen 70. Costo amortizado en crédito con comisión	248
Imagen 71. Costo amortizado de crédito con cuota constante	248
Imagen 72. Costo amortizado de crédito con abono constante a capital	249
Imagen 73. Costo amortizado de un bono	250
Imagen 74. Costo amortizado de arrendamiento financiero	250
Imagen 75. Costo amortizado para amortizaciones no periódicas	251
Imagen 76. Costo amortizado en préstamo a empleado, sin intereses	252

Introducción

En el presente texto usted encontrará la fundamentación matemática de las equivalencias de recursos en el tiempo, lo que facilita la evaluación financiera de alternativas de inversión y financiación.

El primer capítulo, dedicado a los recursos en el tiempo, presenta la conceptualización de diagramas económicos y tasa de interés. En el segundo se recogen nociones de equivalencias de tasas de interés, bases de cálculo de días, fecha focal y ecuaciones de valor, series uniformes o anualidades, operaciones de descuento y la fundamentación del interés anticipado. Todo lo anterior en torno a la modalidad de interés simple. No obstante, su revisión facilita la comprensión del apartado que enfatiza en el interés compuesto, en el que se tratan algunas de las nociones anteriores, aplicadas a la modalidad de interés compuesto, además de abordar nociones de tasas de inflación, tasas de rendimiento real, tipos de cambio y depreciación/apreciación de monedas, siendo enfático en que dicha modalidad es la que impera en el mundo de los negocios. Seguidamente se presentan dos capítulos dedicados a series, las cuales tienen gran aplicación en operaciones financieras repetitivas de largo plazo.

Por otra parte, en el capítulo destinado a la aplicación financiera de proyectos se despliegan las principales herramientas de la matemática financiera o ingeniería económica, aplicada a la evaluación de alternativas de inversión. Asimismo, en el último acápite se exponen aplicaciones del costo amortizado mediante el método del interés efectivo, el cual es propuesto por el estándar internacional de información financiera para la medición de instrumentos financieros básicos.

Por último, en cada uno de los capítulos se ofrece la fundamentación teórica, seguida de su aplicación y ejemplificación en casos prácticos, los cuales facilitan su comprensión. A excepción del último capítulo, al final de cada apartado se proponen ejercicios de repaso con sus respectivas respuestas.

Recursos económicos en el tiempo

Habitualmente escuchamos a personas de edad avanzada decir que en su juventud los salarios o ingresos eran mucho menores de los que se reciben hoy en día, y no precisamente debido a una mejora sustancial de la economía, sino al aumento nominal del salario mínimo que al final de cada año los gobiernos establecen en compensación al alza generalizada de los precios de los productos, es decir, no es lo mismo haber poseído cien unidades monetarias hace treinta años que poseerlas hoy, ni mucho menos poseerlas dentro de cincuenta años. El poder adquisitivo de esa cantidad no es el mismo, esto es, que no se compra la misma cantidad de artículos similares que antes se adquirirían con esa suma nominal de dinero, ni la que se podrá adquirir en el futuro (Baca 1996).

La dinámica de precios de mercado no es el objetivo del presente texto, pero sí la dinámica de los recursos en el tiempo, denominada ingeniería económica o matemática financiera, la cual es importante tener en cuenta en la gestión de cualquier proyecto, organización o empresa. El dinero hace parte de esa dinámica económica, por ejemplo, si un lote de terreno hoy cuesta más de lo que hace algunos años, ya sea por valorización, obras de urbanismo, extensión de las zonas urbanas, aumento de la demanda, entre otras causas, y si ese lote de terreno se reduce a una cifra monetaria para su enajenación la cual cambia con el tiempo, es porque el dinero en parte representa el valor, así este provenga de una intersubjetividad de los recursos y por lo tanto, es importante estudiar su comportamiento en el tiempo, incluso “de todas las técnicas que se usan en las finanzas, ninguna es más importante que el valor del dinero con el tiempo” (Weston y Brigham 1987: 293).

Si una persona renuncia a disponer hoy de 100 unidades monetarias y espera un año para disponer de 110 unidades monetarias, quiere decir entonces que estos dos valores, para esa persona, son equivalentes en el tiempo. Existen múltiples factores que hacen que una persona en particular considere equivalentes dos o más sumas nominales diferentes en el tiempo, sin embargo, los más importantes se resumen en la inflación, las oportunidades de inversión y el riesgo (García 2009).

Lo anterior sintetiza “la capacidad que tiene el dinero de aumentar su magnitud cuando transcurra el tiempo” (Cardona 1986: 14).

Diagrama de flujo de caja o diagrama económico

Un diagrama económico es la representación gráfica de flujo de recursos en el tiempo. En dicho diagrama la esquematización depende de la perspectiva de quien esté realizando la operación, por ejemplo: en una operación de préstamo para quien lo solicita hoy, momento que podría definirse como periodo cero ($n = 0$), constituye un ingreso o entrada de recursos y se representa en el diagrama mediante un vector hacia arriba (\uparrow), cuando la suma se reintegra o se reembolsa, se considera un egreso o una salida de recursos y se representa mediante un vector hacia abajo (\downarrow), por el contrario, para el prestamista, al momento de entregar el dinero o periodo cero ($n = 0$), se considera una salida de recursos representado con un vector hacia abajo (\downarrow), y cuando el dinero es r se considera una entrada de recursos y se representa mediante un vector hacia arriba (\uparrow) (Ramírez *et al.* 2009). La línea de tiempo se representa mediante un segmento horizontal indicando que este transcurre de izquierda a derecha.

Es recomendable que los vectores se representen en el diagrama económico de forma proporcional a sus magnitudes (Diagrama 1).

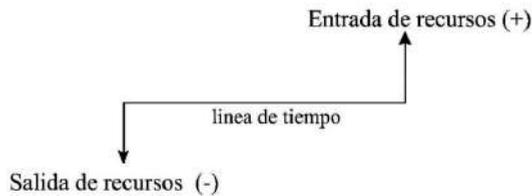


Diagrama 1. Entrada y salida de recursos en el tiempo
Fuente: elaboración propia.¹

Se ha de tener en cuenta que las magnitudes que representan salidas de dinero podrían considerarse como negativas (-), y aquellas que representan ingresos como positivas (+), esto es importante al momento de ingresar datos en algunas calculadoras financieras y en Microsoft Excel®. A medida que se avance en la lectura se hará referencia a estas indicaciones.

Ejemplo de diagramas económicos desde diferentes perspectivas:

Una persona adquiere una vivienda nueva por valor de \$ 1000, y para ello cancela a la constructora una cuota inicial por valor de \$ 300, el resto lo financia con una entidad financiera mediante cuatro cuotas iguales por valor de \$ 200, la entidad financiera cancela los \$ 700 restantes directamente a la constructora. Vamos a realizar los diagramas económicos desde la perspectiva de cada uno de los involucrados en la transacción:

1 Este, al igual que todos los diagramas que se presentan en este libro, fueron elaborados por el autor con fines ilustrativos.

El cliente en el momento o periodo cero paga (salida de recursos) una cantidad de \$ 300, en ese mismo momento le entregan la casa (entrada de recursos), la cual tiene un valor de \$ 1000, posteriormente, la cantidad faltante la difiere (pagará) mediante cuatro cuotas por valor de \$ 200 cada una al final de los periodos uno, dos, tres y cuatro (salidas de recursos) (Diagrama 2).

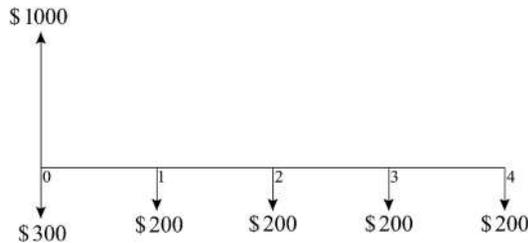


Diagrama 2. Flujo de recursos del comprador de vivienda a crédito

El diagrama anterior podría resumirse restando los vectores en el momento cero, lo cual arrojar una entrada neta de \$ 700 que equivale exactamente al valor a financiar mediante las cuotas periódicas (Diagrama 3).

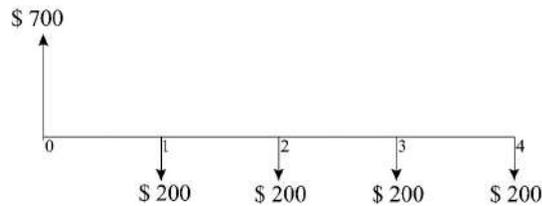


Diagrama 3. Flujo neto de recursos del comprador de vivienda a crédito

La constructora, en el momento cero, recibe del comprador de la vivienda \$ 300 y del banco \$ 700 (entradas de recursos). La salida de recursos son los desembolsos (desconocidos) que en el pasado la constructora ha realizado en la construcción de la vivienda (Diagrama 4).

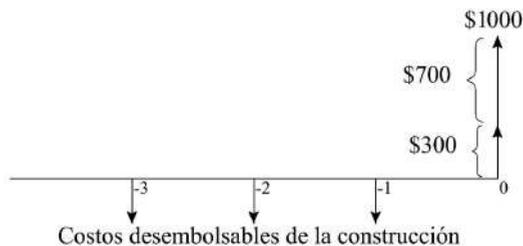


Diagrama 4. Flujo de caja para la constructora

En el Diagrama 4, la salida de recursos para la constructora se ha establecido como el precio de venta; sin embargo, internamente la constructora tiene un diagrama con fechas anteriores en la que se representan los desembolsos de dinero a medida que se realiza la construcción y el ingreso al momento de la venta.

Para la entidad financiera, los \$ 700 del valor de la vivienda girados en el momento cero a la constructora constituye una salida de recursos, y las cuotas a recibir por el comprador de la vivienda se consideran entradas futuras de recursos (Diagrama 5).

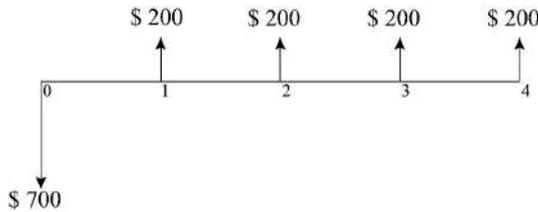


Diagrama 5. Flujo de caja para la entidad financiera

Algunos lectores se preguntarán: ¿por qué si la cantidad prestada por la entidad financiera es de \$ 700 se deben pagar cuatro cuotas de \$ 200 cada una? La respuesta es muy sencilla: para la entidad financiera la cantidad prestada es *equivalente* en el tiempo a las cuotas a recibir, las cuales incluyen el interés (financiación) reconocido en el préstamo. Más adelante se abordará ampliamente el concepto de equivalencia.

En los diagramas anteriores no se ha especificado los periodos de tiempo, por lo tanto, es importante que esto quede explícito dentro del mismo diagrama, de tal manera que diagramas expresados con diferentes periodos pueden ser equivalentes (Diagrama 6).

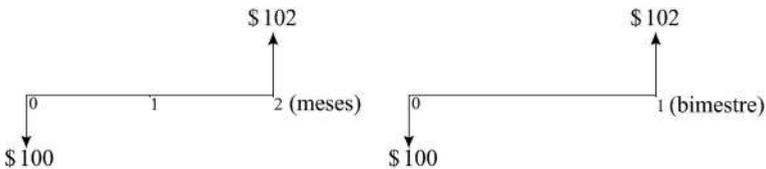


Diagrama 6. Equivalencia de tiempo en diagramas económicos

Sin embargo, otra utilidad de los diagramas económicos, además de esquematizar los flujos de caja, es indicar la equivalencia de valores en el tiempo. Por ejemplo, si una persona tiene una deuda con vencimiento a un mes, este podría solicitar cancelarla mediante dos cuotas, una el mismo día del vencimiento de la deuda original y el resto un mes después. En este caso, el diagrama no necesariamente indica entradas y salidas de recursos, sino la equivalencia entre ellas; es indistinto si la deuda original se traza mediante un vector hacia abajo y las dos cuotas, producto de la renegociación, hacia arriba o viceversa (Diagrama 7).

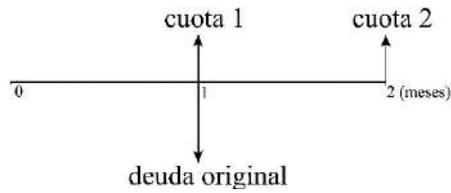


Diagrama 7. Equivalencia de flujos en diagramas económicos

Concepto de interés, tasa de interés y costo de oportunidad

Para evitar que el dinero pierda valor en el tiempo es necesario agregar al capital que se tiene, por lo menos, una suma equivalente a la diferencia de su poder adquisitivo en el tiempo, la cual llamaremos en primera instancia el *interés* (I), necesario para contrarrestar la inflación.

Cuando se solicita una cantidad en calidad de préstamo, generalmente el deudor se compromete a reintegrar una cantidad mayor, la diferencia entre estas dos cantidades es lo que se denomina interés, que también puede ser entendido como el precio/costo por ceder/recibir temporalmente recursos económicos. El dinero es una mercancía, cuyo costo al expresarlo en términos porcentuales es la ‘tasa de interés’ (i). Esta tasa es el costo que se asume por disfrutar de los beneficios que se obtienen al disponer de manera inmediata de recursos económicos. Por ejemplo, para invertir en proyectos, o también el precio recibido por desprenderse temporalmente de recursos económicos y posponer los proyectos de inversión que se podrían iniciar de manera inmediata. Se enfatiza que llamaremos interés (I) a una suma de dinero y a tasa de interés (i) a un porcentaje o fracción.

Si la tasa de interés (i) que se cobra compensa el aumento porcentual de los precios de los productos básicos de una familia promedio (inflación), para quien presta el dinero esto no representa una ganancia, debido a que tan solo mantiene el poder adquisitivo de su dinero en el tiempo, por lo que en términos generales “el interés es la utilidad o ganancia que genera el capital” (Arboleda 2010: 3).

Matemáticamente el interés se podría expresar de la siguiente manera:

$$\text{Interés (I)} = \text{capital final (F)} - \text{capital inicial (P)}$$

A medida que se avance en los diferentes temas se hará claridad sobre la notación que se usará, debido a que autores de textos similares usan diferentes estilos; sin embargo, en el presente texto se contextualizará la notación dependiendo del tema que se aborde.

Ejemplo: solicitamos en préstamo una cantidad de \$ 100 y nos comprometemos a devolver \$ 102 a futuro.

Nos ubicaremos en el momento en que se realiza el préstamo, por lo tanto, el capital inicial será para nosotros el valor presente, que es el valor que hoy estamos solicitando en calidad de préstamo $P = \$ 100$, y el capital final es el valor a reintegrar en el futuro $F = \$ 102$. El interés (I) es la diferencia entre los dos valores:

$$I = F - P$$

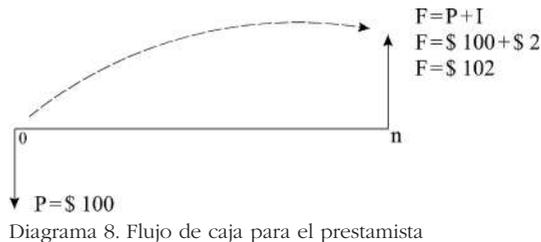
$$\$ 2 = \$ 102 - \$ 100$$

También podríamos expresar la cantidad a devolver como la suma de la cantidad que nos prestan más el interés generado.

$$\text{Capital final (F)} = \text{capital inicial (P)} + \text{interés (I)}$$

$$\$ 102 = \$ 100 + \$ 2$$

En el Diagrama 8 se presenta el flujo de recursos para el *prestamista* (persona que facilita el dinero al *prestatario*).



Lo anterior quiere decir que para quienes aceptan las condiciones del préstamo, \$ 100 hoy son *equivalentes* a \$ 102 dentro de un periodo de tiempo (n) determinado.

Nótese que en los cálculos anteriores no hemos involucrado la variable tiempo en que nos comprometemos a devolver el capital, tan solo lo hemos referenciado en el futuro.

El interés (I) también se obtiene como una fracción o porcentaje del capital inicial (P), y como se reintegra al final del plazo se le conoce como interés vencido o simplemente interés para no confundir con interés anticipado que se abordará en el siguiente capítulo.

Ejemplo: se solicita un préstamo por valor de \$ 200 (P), por el cual se va a reconocer una tasa de interés (i) del 3% de ese valor. ¿Cuál es el valor a reembolsar (F)?

En este caso, inicialmente vamos a averiguar cuál es valor del interés (I), recordemos que 3% significa tres unidades por cada cien.

$$\frac{3 \text{ unidades}}{100 \text{ unidades}} = 0,03 = 3 \%$$

Por lo que multiplicamos \$ 200 y 0,03

$$\begin{aligned} I &= P * i \\ I &= \$ 200 * 0,03 \\ I &= \$ 6 \end{aligned}$$

En adelante el símbolo de multiplicación lo representaremos mediante un asterisco (*).

En este caso i es la tasa de interés pactada.

También por regla de tres tendríamos:

$$\begin{array}{l} \$ 3 \xrightarrow{\text{por cada}} \$ 100 \\ ? \xrightarrow{\text{por cada}} \$ 200 \end{array}$$

Donde despejando I de la ecuación tendríamos:

$$? = I = \frac{\cancel{\$} 3 * \$ 200}{\cancel{\$} 100} = \frac{\$ 600}{100} = \$ 6$$

El interés es de \$6, valor obtenido al aplicar el 3% a \$ 200. El valor a reintegrar es igual al capital inicial más el interés.

$$\begin{aligned} F &= P + I \\ F &= P + P * i & I &= P * i \\ F &= P * (1 + i) & \text{factor común } P & \\ F &= \$ 200 * (1 + 0,03) & \text{reemplazando por los valores del ejemplo} & \\ F &= \$ 200 * (1,03) \\ F &= \$ 206 \end{aligned}$$

También podríamos determinar el interés (I) y la tasa de interés (i) de un préstamo conociendo el monto solicitado (P) y la suma a devolver (F).

Ejemplo: una cantidad de \$ 500 es solicitada en préstamo y el compromiso es devolver en determinado tiempo \$ 550. Hallar el Interés (I) y la tasa de interés (i) reconocidos en la operación.

$$\text{si } P + I = F$$

$$I = F - P \quad \text{restando } P \text{ en los dos lados de la igualdad}$$

$$I = \$ 550 - \$ 500 \quad \text{reemplazando por los valores del ejemplo}$$

$$I = \$ 50$$

La tasa de interés (i) se halla de la siguiente manera:

$$\text{si } P * i = I$$

$$\frac{P * i}{P} = \frac{I}{P} \quad \text{dividiendo entre } P \text{ los dos lados de la igualdad}$$

$$i = \frac{I}{P} \quad \text{se cancela } P \text{ en el lado izquierdo de la igualdad}$$

$$i = \frac{\$ 50}{\$ 500} \quad \text{reemplazando por los valores del ejemplo}$$

$$i = 0,1 \quad \text{las unidades monetarias (\$) se cancelan en la división}$$

$$i = 0,1 * 100 \quad \text{se multiplica por 100 para obtener en terminos porcentuales}$$

$$i = 10 \% \quad \text{tasa de interés (sin tener en cuenta el tiempo que dura la operación)}$$

O también:

$$i = \frac{F - P}{P} \quad \text{debido que } I = F - P$$

$$i = \frac{\$ 550 - \$ 500}{\$ 500} \quad \text{reemplazando por los valores del ejemplo}$$

$$i = \frac{\$ 50}{\$ 500} = 0,1 * 100 = 10 \%$$

De manera similar podríamos hallar el monto solicitado de un préstamo a partir del valor a reintegrar y la tasa de interés.

Ejemplo: hallar el valor inicial de un préstamo si el monto a reintegrar es de \$ 300 y la tasa de interés (i) es del 4%.

El diagrama para el prestamista sería el siguiente:

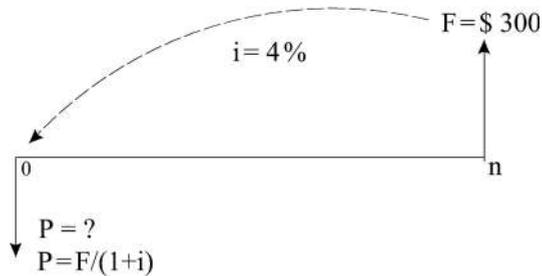


Diagrama 9. Flujo de caja del crédito

Suponiendo que hoy se efectúa el desembolso (P) por parte del prestamista, la salida de estos recursos la ubicamos en periodo cero (0), en el periodo (n) ubicamos el momento en que dichos recursos más el interés son reintegrados (F).

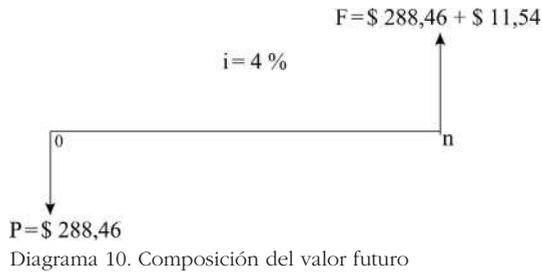
$F = P + I$	debemos despegar P
$F = P + P * i$	
$F = P * (1 + i)$	factor común P
$\frac{F}{(1+i)} = P * \frac{(1+i)}{(1+i)}$	dividiendo en ambos lados entre (1+i)
$\frac{F}{(1+i)} = P$	se cancela (1+i) en el lado derecho de la ecuación
$\frac{\$ 300}{(1+0,04)} = P$	reemplazando por los valores del ejemplo
$\$ 288,46 = P$	

En estos casos el interés (I) se puede encontrar de dos maneras: restando el valor futuro (F) menos el valor presente (P), o aplicando la tasa de interés (i) al valor presente (P).

Obsérvese los dos casos:

$I = F - P$	$I = P * i$
$I = \$ 300 - \$ 288,46$	$I = \$ 288,46 * 0,04$
$I = \$ 11,54$	$I = \$ 11,54$

Gráficamente sería:



La tasa de interés se aplica sobre el valor presente. Más adelante veremos un tipo de operación (descuento comercial) en la que la *tasa de descuento* se aplica sobre el valor futuro. Nótese que hasta ahora no hemos incluido un periodo de tiempo explícito en el que duren las operaciones, tan solo nos hemos limitado a enunciar el interés y la tasa de interés por un lapso cualquiera (n), el cual está comprendido únicamente entre un valor futuro y un valor presente. Sin embargo, en el siguiente capítulo la variable periodo de tiempo hará parte de los cálculos.

Ejercicios de repaso

1. Se solicita un préstamo por valor de \$ 1 000 000 por el cual se reconocerá una tasa de interés de 6%. ¿Cuál es el valor del a devolver (F)? y ¿cuál es el interés (I) generado?

R/ \$ 1 060 000; \$ 60 000.

2. Por un préstamo de \$ 5 000 000 se devolverá \$ 5 350 000. ¿Cuál es la tasa de interés implícita (i)? y ¿cuál es el interés (I) reconocido o devengado?

R/ 7%; \$ 350 000.

3. Un préstamo se reintegrará con un valor \$ 2 700 000. Si la tasa de interés que se reconoce es del 8%, ¿cuál es el valor inicial del préstamo (P)? y ¿cuál es el interés generado (I)?

R/ \$ 2 500 000 y \$ 200 000.

4. Si el valor futuro de un préstamo es el doble de la cantidad prestada, ¿cuál es la tasa de interés implícita?

R/ 100%.

5. Si el valor presente de un préstamo es la tercera parte de su valor futuro, ¿cuál es la tasa de interés implícita?

R/ 200%.

6. Si el valor presente de un préstamo es el 80% de su valor futuro, ¿cuál es la tasa de interés implícita?

R/ 25%.

7. Si el interés (I) de un préstamo es la cuarta parte del valor futuro, ¿cuál es la tasa de interés implícita?

R/ 33,33%.

8. Por un préstamo se reconoce una tasa de interés del 7%, al cabo de este el valor futuro nuevamente se presta a la misma tasa de interés del 7%. Si se tomaran los dos préstamos como uno solo, ¿cuál es la tasa de interés total?

R/ 14,49%.

9. Tengo un capital del \$120, de los cuales las $\frac{3}{5}$ partes del mismo los invierto a una tasa de interés del 2% y el resto a una tasa del 3%. ¿Cuál es el valor total de los intereses a recibir? y ¿cuál es la tasa de interés promedio a la que se invirtió la totalidad del capital?

R/ \$ 2,88 y 2,4%.

10. De un capital de \$5000, una parte es invertida al 2% y la restante es invertida al 3%. Si el valor total de los intereses recibidos es de \$122, ¿cuáles son las cantidades invertidas para cada tasa de interés?

R/ \$ 2800 y \$ 2200.

11. Si la mitad de un capital se presta al 4% y el resto al 6%, el valor reembolsado al finalizar los dos préstamos es de \$84000, ¿cuál es el valor inicial del capital? y ¿cuál es la tasa promedio de interés?

R/ \$ 80000 y 5%.

12. Si la cuarta parte de un capital se presta al 2% y el resto al 4%, el valor reembolsado al finalizar los dos préstamos es de \$4140, ¿cuál es el valor inicial del capital? y ¿cuál es la tasa promedio de interés?

R/ \$ 4000 y 3,5%.