Institución Universitaria

PUNTOS NOTABLES Y ESCINTORES DE UN TRIÁNGULO

HERNÁN DARÍO ORTIZ ALZATE

Puntos notables y escintores de un triángulo

Puntos notables y escintores de un triángulo

Hernán Darío Ortiz Alzate

ITM
Institución
Universitaria

Puntos notables y escintores de un triángulo.

Edición: Noviembre de 2021
ISBN: 978-958-5122-61-1 (PDF)

Autor
Hernán Darío Ortiz Alzate

Sello Fondo Editorial ITM
Calle 73 No. 76A 354 / Tel.: (574) 440 5100 ext. 5197-5382
Editado en Medellín, Colombia por el Instituto Tecnológico Metropolitano
catalogo.itm.edu.co - fondoeditorial.itm.edu.co
www.itm.edu.co

Ortiz Alzate, Hernán Darío
Puntos notables y escintores de un triángulo / Hernán Darío Ortiz Alzate. – 1 ed.– Medellín: Instituto Tecnológico Metropolitano, 2021.
237 p. – (Naturae)

Incluye bibliografía

1. Matemáticas. 2. Triángulo. I. Tít. II. Serie.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Este es un Texto de Formación que se inscribe en la gran área de las Ciencias Naturales, en el área de Matemáticas, y en las disciplinas de Matemáticas puras y Matemáticas aplicadas.

A mi esposa Lucero
y a mis hijos Carolina y Joseph

Índice general

Prefacio

Una de las motivaciones que llevaron al tratamiento de la temática del texto surge de encontrar una escasa conexión entre lo abordado sobre los puntos notables de un triángulo como parte de la geometría sintética, en la básica secundaria, y su desarrollo posterior como parte de la geometría analítica en la educación media, situación que se hace evidente en los textos escolares habituales y cuya problemática geométrica es expuesta por Gascón (2002, p. 21) quien defiende la «tesis de la continuidad entre las geometrías sintética y analítica». Adicional a lo anterior, se encuentra el hecho que los textos escolares solo hacen mención de los puntos notables gravicentro, incentro, circuncentro y ortocentro, y con ello deja de tratarse lo que tiene que ver con otros puntos notables, como son los puntos de Nagel, de Spieker, de Feuerbach y el centro de la circunferencia de los nueve puntos, esenciales para el desarrollo de la temática abordada en este texto.

Por otro lado, se tiene como fuente de motivación especial el hecho de que el concepto de *escintor* de un triángulo no se desarrolla en los textos guía usados por los docentes escolares, los cuales, como plantean Abrate, R. S.; Delgado, G. I.; Pochulu, M. D. (2006), se convierten, sin lugar a duda, en el «vehículo que legitima los contenidos prescriptos y en una de las principales fuentes de actividades y tareas». Concepto de *escintor* sobre el cual es necesario indicar que lo relacionado con su clasificación como *vescintor*, *mescintor* y *escintriz* (términos acuñados por Therán Palacio, E. y Falcón Dorado, F., 2006), se registra en ámbitos internacionales con los términos *splitter*, *cleaver* y *equalizer*,[1] respectivamente.

[1] Los conceptos de *splitter* y *cleaver* se pueden rastrear en la literatura con Avishalom (1963). El concepto de *equalizer* se puede rastrear en la literatura con el problema propuesto por Podkolzin (1978), citado por Vershik (1994), si bien el término se registra con Berzsenyi (1997).

En cuanto al aporte teórico de lo desarrollado en la presente obra se halla la obtención de las fórmulas que permiten determinar la ubicación de algunos de los puntos notables de un triángulo y de los puntos extremos de los escintores de este, cuando se conozcan la longitud de los lados o las coordenadas de sus vértices en un sistema cartesiano, dando continuidad a lo ya expuesto y publicado por el autor (Ortiz Alzate, 2010, 2013a,b, 2016, 2018).

Es de resaltar que la facilidad que brindan los procesadores geométricos para hacer construcciones dinámicas, esto es, «dibujar figuras en función de sus relaciones geométricas y no de su apariencia» (García Mangas, 2011, p. 9), permite hacer investigación en geometría, dado que el uso de sus potentes herramientas de visualización ofrece la posibilidad de hacer conjeturas sobre ciertas propiedades de los objetos geométricos, las cuales habrán de ser validadas con posterioridad.[2] Fue así como, a partir de construcciones geométricas dinámicas «que permiten unir el conocimiento empírico y teórico» (Kondratieva, 2013, p. 51), se pudo constatar la relación entre algunos de los escintores de un triángulo con puntos notables de este y, luego de considerar relaciones geométricas y trigonométricas intrafigurales, determinar las fórmulas que dan cuenta de las coordenadas de sus puntos extremos,[3] permitiendo con ello establecer las condiciones de su existencia y sus propiedades.

El contenido teórico expuesto en el texto va dirigido en primera instancia a docentes de matemáticas de los niveles de la educación básica y media, estudiantes de licenciatura en matemáticas y docentes de matemáticas básicas en la educación superior quienes, a partir de su lectura acuciosa, y una vez vislumbrada la opción de ampliar el margen

[2] «La actividad de experimentación con los objetos de la geometría dinámica es una actividad productiva de relaciones entre dos polos [objetos perceptibles y objetos teóricos]. La experimentación implica no solamente una manipulación perceptiva de los objetos, sino una postura teórica que busca explicar y predecir el comportamiento de los mismos. La actividad de experimentación implica enunciar conjeturas y verificarlas experimentalmente. Las conjeturas que sean validadas se convertirán en leyes teóricas que permitirán guiar y controlar la percepción» (Acosta Gempeler, M. E.; Fiallo Leal, J. E, 2017, p. 21).

[3] Para la validación de las fórmulas desarrolladas en el presente texto se hizo uso del procesador geométrico GeoGebra.

de aplicación de los conceptos que normalmente se desarrollan en la geometría escolar, tendrán la posibilidad de hacer una transposición didáctica de este ajustándolo a los niveles de complejidad adecuados para cada uno de los grados del sistema educativo.

Como una primera aproximación para el tratamiento del contenido expuesto en el texto, en los distintos niveles del sistema educativo, se tiene que en la educación básica primaria podría introducirse el trazo de los segmentos que bisecan el perímetro de un triángulo cuyas medidas de sus lados sean números enteros, donde, en una primera actividad, se podría partir, para los trazos, desde cada uno de los vértices (vescintores) y con ello mostrar la concurrencia en un punto, el punto de Nagel. En una segunda actividad se podría partir para los trazos desde los puntos medios de los lados (mescintores) y con ello mostrar también la concurrencia en un punto, el punto de Spieker.

En la básica secundaria podría llevarse a cabo la construcción sintética de los segmentos que bisecan el perímetro de cualquier triángulo (escintores). Adicionalmente, podrían tratarse las razones métricas entre el gravicentro, el incentro, el punto de Nagel y el punto de Spieker de un triángulo y hacer uso de las fórmulas para establecer la ubicación de los puntos notables en términos de la longitud de sus lados.

En la educación media podría llevarse a cabo la construcción sintética de los segmentos que bisecan tanto el perímetro como el área de un triángulo (escintrices) con relación a uno de sus ángulos y hacer uso de las fórmulas para establecer la ubicación de los puntos extremos de los escintores en términos de la longitud de sus lados. Asimismo, se podría abordar el proceso analítico para determinar las fórmulas algebraicas que permiten hallar las coordenadas de los puntos notables en términos de los lados del triángulo y de las coordenadas cartesianas de sus vértices.

En la educación superior se podría abordar el proceso analítico para determinar las fórmulas algebraicas que permiten hallar las coordenadas de los extremos de las escintrices en términos de la longitud de los lados del triángulo y de las coordenadas cartesianas de sus vértices.

Por otro lado, el contenido del texto podría servir de referencia para investigadores matemáticos interesados en profundizar en temas afines a los desarrollados, y como fuente de consulta para los amantes de las matemáticas que tengan curiosidad por ampliar sus conocimientos al respecto. Se espera que este texto sea de gran utilidad para ampliar el horizonte de estudio de los puntos notables de un triángulo y sirva de motivación para la inclusión de la temática de escintores como parte del contenido de las geometrías sintética y analítica, en el currículo de las matemáticas escolares.

Hernán Darío Ortiz Alzate

Introducción

En el desarrollo de la geometría se acostumbra determinar la ubicación de los puntos notables de un triángulo por métodos sintéticos, analíticos o dinámicos. Los métodos sintéticos corresponden a procedimientos constructivos, con regla y compás, sin referencia a un sistema de coordenadas, los cuales conllevan la inexactitud propia de los instrumentos y la imprecisión en la manipulación de estos por parte del dibujante, siendo métodos netamente intuitivos y visuales. Entre las técnicas distintivas para resolver situaciones en geometría sintética Álvarez (2014) señala: los lugares geométricos, enriquecer la figura, el uso de la figura de análisis, el patrón de análisis-síntesis, el método reductivo, el método de las transformaciones y la razón (homotecia).

Por su parte, los métodos analíticos arrojan datos exactos, con referencia a un sistema de coordenadas. Estos métodos requieren de la referencia de las coordenadas y ubicación en el plano cartesiano de los vértices de un triángulo, y la posterior determinación de parámetros como puntos medios, pendientes, ecuaciones de rectas y puntos de intersección, elementos claves para establecer la ubicación de los puntos notables, todo haciendo uso de fórmulas y procedimientos de la geometría analítica (De Oteyza, E.; Lam, E.; Hernández, C.; Carrillo, A.; Ramírez, A., 2001, 2011; Vásquez, 2002). Dado que son netamente abstractos, estos requieren de gran desempeño matemático y cálculos diversos, en los cuales se acostumbra el uso de ayudas visuales. En los métodos analíticos difícilmente se parte de conocer las longitudes de los lados de un triángulo. Entre las técnicas distintivas de la geometría analítica Álvarez (2014) señala: asociar un sistema de coordenadas a una situación geométrica dada, la determinación del sistema de ecuaciones, las transformaciones algebraicas, la modelización algebraica con parámetros y el estudio analítico de casos, y el patrón de análisis-síntesis.

En cuanto a los métodos dinámicos puede decirse que son los más versátiles porque conjugan los dos anteriores y permiten una excelente visualización a partir de la manipulación de *software* creado para tal fin. Con ellos es posible determinar con exactitud la ubicación de los puntos notables, pero se requiere de acceso a un ordenador y pericia en el manejo del *software*. Entre las técnicas y tecnologías propias de la geometría dinámica Álvarez (2014), citando a Acosta (2005, p. 138), señala: el arrastre de exploración, el arrastre de verificación, las transformaciones y resoluciones en símbolos, la resolución y graficación en tiempo real.

En consideración con las posibilidades brindadas por los métodos descritos previamente, el presente texto pretende divulgar las fórmulas algebraicas directas que permiten determinar la ubicación de los puntos notables de un triángulo y los puntos extremos de los escintores, haciendo uso de cálculos exactos y sin requerir de construcciones geométricas elaboradas, es así que se plantean como objetivos:

- ❒ Exponer las fórmulas algebraicas directas que permitan determinar la ubicación de los puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de sus vértices.
- ❒ Mostrar las propiedades de los escintores y su relación con algunos de los puntos notables de un triángulo.
- ❒ Dar a conocer las fórmulas algebraicas directas que permitan determinar la ubicación de los puntos extremos de los escintores de un triángulo en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de sus vértices.

Para el abordaje del contenido expuesto en el texto se precisa que el lector cuente con conocimientos básicos sobre la geometría del triángulo, métodos de demostración, relaciones de proporcionalidad y fundamentos de geometría analítica, bagaje teórico que le permitirá comprender algunos procesos implícitos en el desarrollo de las demostraciones geométricas y en la obtención de las ecuaciones algebraicas presentadas.

En la exposición de la temática se proporcionan algunas definiciones básicas, se plantean los teoremas que sustentan el desarrollo conceptual, se muestra el proceso llevado a cabo para la obtención de las fórmulas puestas en consideración como aporte teórico y, por último, se valida el uso de dichas fórmulas con la inserción de estas en un *software* dinámico (GeoGebra) obteniendo como resultado las figuras presentadas.

El texto se compone de siete capítulos; donde, en el **Capítulo 1** se desarrolla la conceptualización básica sobre las rectas y puntos notables de un triángulo más habituales en la geometría escolar: mediatrices-circuncentro, alturas-ortocentro, bisectrices-incentro y medianas-gravicentro. Para un mejor abordaje, se dan las demostraciones de los teoremas de concurrencia de las rectas notables, de colinealidad entre los puntos notables y de razones métricas en el segmento de Euler. Se concluye el capítulo con el teorema de Ceva que se utiliza para probar de un modo diferente la concurrencia de las rectas notables cevianas; correspondientes a las alturas, las medianas y las bisectrices.

Por su parte, en el **Capítulo 2** se hace un tratamiento analítico de las relaciones métricas y trigonométricas entre los elementos de un triángulo que llevan a establecer las coordenadas de los puntos notables en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices. Así mismo, se presenta el desarrollo de la obtención de las fórmulas para el cálculo de la distancia entre puntos notables y para la medida de los radios de las circunferencias inscrita y circunscritas, en términos de la longitud de los lados de un triángulo.

A continuación, en el **Capítulo 3** se da la demostración del teorema de la circunferencia de los nueve puntos y se obtienen las coordenadas del centro de dicha circunferencia en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo. De igual manera, se presentan las fórmulas para el cálculo de la medida del radio de la circunferencia de los nueve puntos en términos de la longitud de los lados de un triángulo.

En el **Capítulo 4** se desarrolla lo relativo a la conceptualización de los puntos de Nagel y de Spieker; se dan las demostraciones de los teoremas que sustentan su presentación y colinealidad con el gravicentro y el incentro para, a partir de la determinación de la relación métrica entre ellos, obtener sus coordenadas en términos de las longitudes de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo.

Ulteriormente, en el **Capítulo 5** se aborda la conceptualización básica respecto de los escintores de un triángulo: vescintores, mescintores y escintrices. Se presentan los procesos para la construcción sintética de un escintor general y de una escintriz general, con su respectiva justificación, y se aborda la demostración de los teoremas relacionados con ellos: segmento de Nagel como vescintor, segmento de Spieker como mescintor y escintor incentral como escintriz.

Luego, en el **Capítulo 6** se desarrolla el proceso de obtención de las coordenadas de los puntos extremos de un escintor general y de los casos especiales: vescintores y mescintores, en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo.

Y por último, en el **Capítulo 7** se desarrolla el proceso de obtención de las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo. Conjuntamente, se presenta un análisis respecto de las condiciones para la existencia de las escintrices de un triángulo y su cantidad, de acuerdo con la longitud de sus lados.

Al final de los capítulos 2, 3, 4, 6 y 7 se presenta el resumen de las fórmulas más relevantes tratadas en ellos, junto con algunos ejemplos de su aplicación. De igual manera, en todos los capítulos se presentan para su ejecución una serie de ejercicios complementarios y pertinentes.

CAPÍTULO 1

Rectas y puntos notables de un triángulo

Al inicio de este capítulo se aborda la conceptualización relacionada con las rectas notables de un triángulo más comúnmente tratadas en la geometría escolar, como son las mediatrices, las alturas, las bisectrices y las medianas, y se expone la demostración de la concurrencia de cada uno de estos sistemas de rectas, lo cual lleva a la definición de los puntos notables correspondientes, circuncentro, ortocentro, incentro y gravicentro.

Posteriormente, se expone la demostración de la colinealidad de los puntos notables circuncentro, gravicentro y ortocentro en la que se conoce como la recta de Euler, junto con la demostración de la razón métrica entre ellos. Por último, se integra el concepto de ceviana y se aborda la demostración de su propiedad proporcional, la cual se aplica como un método alternativo para la demostración de la concurrencia de las cevianas que contienen las alturas, la concurrencia de las cevianas que contienen las medianas y la concurrencia de las cevianas que contienen las bisectrices de un triángulo.

1.1. Rectas notables de un triángulo

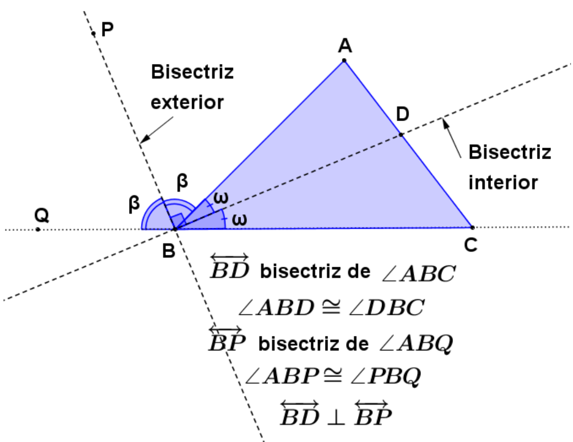
Definición 1: la *bisectriz* de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos congruentes entre sí, donde sus puntos equidistan de los lados del ángulo (figura 1.1.).

En un triángulo por cada vértice puede trazarse una bisectriz interior (bisectriz de un ángulo interior),[4] que corta al lado opuesto, y una bisectriz exterior (bisectriz de un ángulo exterior)[5] que es perpendicular a la interior.

Definición 2: la *mediatriz* de un segmento es la recta que pasa por su punto medio y es perpendicular a este. Los puntos de una mediatriz equidistan de los puntos extremos del segmento.

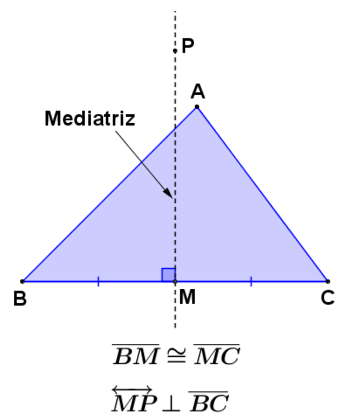
En un triángulo, por cada lado puede trazarse una mediatriz. (figura 1.2.).

Figura 1.1. Bisectrices interior y exterior respecto de un vértice de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Figura 1.2. Mediatriz de un lado de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

---

[4] Un ángulo interior de un triángulo es la región de este que se forma entre dos de sus lados.

[5] Un ángulo exterior de un triángulo es la región exterior a este que se forma entre uno de sus lados y la prolongación del otro con el que comparte uno de sus vértices.

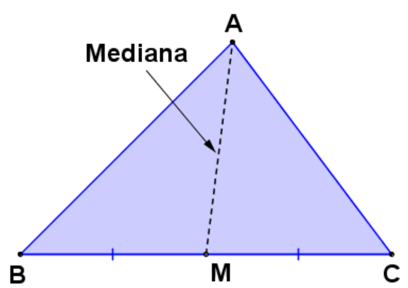
Definición 3: la *mediana* en un triángulo es el segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. La mediana divide al triángulo en dos áreas iguales[6] (figura 1.3.).

En un triángulo, desde cada vértice puede trazarse una mediana.

Definición 4: la *altura* en un triángulo es el segmento de recta que va desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación y es perpendicular a este (figura 1.4.). Al punto de corte de la altura con el lado de un triángulo, o su prolongación, se le denomina *pie de la altura.*

En un triángulo, desde cada vértice puede trazarse una altura.

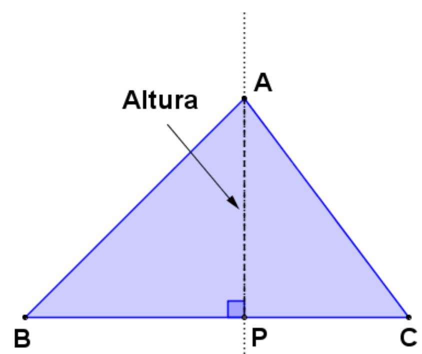
Figura 1.3. Mediana de un triángulo



$$\overline{BM} \cong \overline{MC}$$
$$A(\Delta ABM) = A(\Delta AMC)$$

Fuente: elaboración propia.

Figura 1.4. Altura de un triángulo



$$\overline{AP} \perp \overline{BC}$$

Fuente: elaboración propia.

1.2. Concurrencia de las rectas notables de un triángulo y puntos notables

1.2.1. Concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo y circuncentro

Teorema 1: las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto que equidista de los vértices.

[6] Hay infinitos segmentos de recta que dividen el área de un triángulo en dos partes iguales. En el portal WOLFRAM Demonstrations Project se puede acceder a la construcción dinámica diseñada y publicada por Rangel-Mondragón (2013a), en la cual el usuario puede variar la ubicación del segmento de recta que bisecta el área del triángulo.