

Geometri

Gymnasiematematik, bind 2



Flemming Pedersen og Christian Thybo

Gymnasiematematik

Bind 2. Geometri

Flemming Pedersen og Christian Thybo

BoD - [Books on Demand GmbH](#), Hellerup, Danmark

© 2022 Flemming Pedersen og Christian Thybo

Forlag: BoD – [Books on Demand GmbH](#), Hellerup, Danmark

Produktion: BoD – [Books on Demand GmbH](#), Norderstedt, Tyskland

ISBN: 978-87-4306-633-0

Illustration på forside: Sten Platz

Layout på omslag: Maria P. Pedersen

Gymnasiematematik under udarbejdelse

3. Analytisk geometri
4. Trigonometri
5. Funktioner
6. Differentialregning
7. Integralregning
8. Vektorer
9. Statistik og sandsynlighed

Andre bøger af de samme forfattere

- BasisMatematik Grundforløbet
- Matematikprojekter til gymnasier
- Gymnasiematematik, bind 1, Kunsten at regne

Forord

Geometri er andet bind i serien *Gymnasiematematik*. Vi vil med serien gerne dele vores lidenskab for faget med den lærer eller elev, der har lyst til at forstå, mestre og lade sig udfordre.

I alle bind finder du mange opgaver, henvisninger til videre fordybelse, historiske indblik, beviser for påstande og så vidt muligt en grundig gennemgang af teori fra før gymnesieniveau til begyndende universitetsniveau.

I *Geometri* giver vi en grundig introduktion til emnet. Vi beviser sætninger om vinkler ved cirklen, trekanter og polygoner. Vi giver også en grundig gennemgang af konstruktion med passer og lineal.

Der er i reglen kun brug for en lommeregner eller computer, når det er angivet med symbolet . Når det ikke er tilfældet, så udfordres du til så vidt muligt at løse problemet kun ved brug af din forstand og nogle skriveredskaber. Det er sjovt, tilfredsstillende og meget lærerigt selv at kunne tænke sig frem.

Christian Thybo og Flemming Pedersen

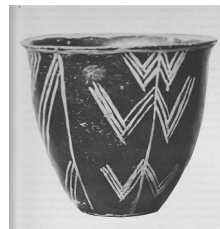
Indhold

KAPITEL 1	Geometriens historie	3
KAPITEL 2	Grundlæggende begreber	7
	2.1 Punkter, linjer og planer	7
	2.2 Længden af et linjestykke	10
	2.3 Vinkler	14
KAPITEL 3	Trekanter	24
	3.1 Grundlæggende egenskaber	24
	3.2 Kongruens	28
	3.3 Karakterisering af punktmængde	31
	3.4 Egenskaber ved trekanter	37
	3.5 Lighedannethed og ensvinklethed	41
	3.6 Specielle punkter i en trekant	56
	3.7 Den retvinklede trekant	67
	3.8 Arealet af en trekant	81
KAPITEL 4	Cirkler	88
	4.1 Definition og notation	88
	4.2 Vinkler igen	90
	4.3 Cirkelns areal og omkreds	92
	4.4 Vinkler ved cirklen	94
	4.5 Opgaver med cirkler	101

KAPITEL 5	Polygoner og firkanter	103
KAPITEL 6	Appendiks	121
	6.1 Konstruktioner	121
	6.2 Ceva, Menelaos og Pappos	140
	6.3 Oversigt.	153

1. Geometriens historie

Geometrien går langt tilbage i historien, og allerede i en fjern fortid har mennesker haft glæde og nytte af at eksperimentere med plane og rumlige figurer og mønstre, f.eks. ved dekorering af forskellige brugsgenstande som krukker¹, smykker og tæpper, ved fremstilling af religiøse symboler og ved praktisk opmåling af marker, hytter og andre bygninger. Ordet geometri er græsk og betyder egentlig jordmåling og den græske historiker Herodot (ca. 485-420 f.Kr.) mente ligefrem, at geometrien opstod i det gamle Ægypten som et nødvendigt hjælpemiddel til at genskabe de markskel, som blev udvisket ved Nilens oversvømmelser. Bonden kunne på den måde få sin jord igen på retfærdig vis, og staten kunne få sine skatter.



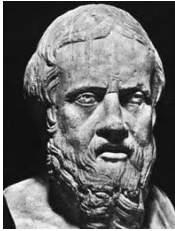
Ægyptisk vase

Den, som eksperimenterer med figurer, vil før eller senere opdage regler for, hvordan figurerne lettest konstrueres. Det blev i perioden 500-300 f.Kr. nødvendigt at formalisere geometrien. Selvindlysende påstande blev sat i spidsen for teorien som såkaldte *aksiomer*. Alle påstande, skulle så udledes derudfra vha. logik. Man præciserede også betydningen af de geometriske begreber såsom punkt, linje, plan, cirkel, trekant osv. gennem *definitioner*. Kronen på dette værk er *Euklids elementer* fra hellenistisk tid².

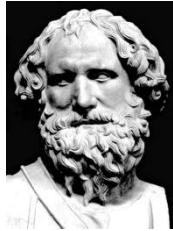
¹Ægyptisk vase. Taget fra [2] Dirk J. Struik, *A Concise History of mathematics*, p14

²Se [3] Thyra Eibe, *Euklids Elementer*, [4] Claus Glunk m.fl. *Euklid Elementer, bog I-VI* og [5] Asger Aaboe, *Episoder fra matematikkens historie* for nærmere udredning.

Hermed var den aksiomatisk-deduktive fremstillingsform lanceret, og dens succes var enorm, så det blev et videnskabeligt ideal for kommende tider at bruge denne fremstillingsform ikke blot i matematik, men også i fysik og andre fag.



Herodot



Archimedes

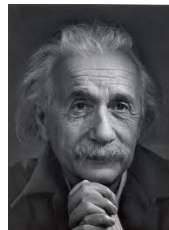
Allerede Archimedes (278-212 f.Kr.) benyttede metoden i sin tyngdepunktslære (om plane legemers ligevægt), men også langt senere Newton (1642-1727), Maxwell (1831-1879) og Einstein (1879-1955) ved beskrivelsen af klassisk mekanik, elektromagnetisme og relativitetsteori.



Newton



Maxwell



Einstein

Det var i mange år en udbredt opfattelse, at den euklidiske geometri måtte gælde med *nødvendighed*, således hos filosofen Immanuel Kant (1724-1804).



Kant



Gauss



Lobatjevskij

I hans terminologi er geometriens påstande syntetisk a priori domme. Kort tid efter 1800 viste Carl Friedrich Gauss (1777-1855), at en anden geometri end den euklidiske var mulig, men han publicerede ikke sine resultater af frygt for det polemiske stormvejr, som kunne tænkes at opstå i kølvandet på en sådan offentliggørelse. Han frygtede boiotiernes skrig, som han sagde. Det blev derfor ikke ham, men russeren N. I. Lobatjevskij (1793-1856), der som den første publicerede en afhandling om ikke-euklidisk geometri³.

³Se [6] N. I. Ljobatjevskij, *Geometriske undersøgelser over teorien for parallelle linjer*.

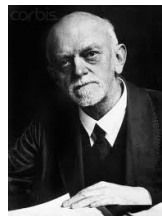
Uafhængigt af Gauss og Lobatjevskij blev den nye geometri også opfundet af ungarenen J. von Bolyai (1802-1860). Under alle omstændigheder: Kant var modbevist, og der findes mange slags geometrier, herunder også de såkaldte riemannske geometrier⁴.



Bolyai



Riemann



Hilbert

Det er væsentligt at være opmærksom på, at geometri har to betydninger. På den ene side kan en geometri være en empirisk teori for det rum, som vi alle lever og ånder i. Geometrien er da en del af fysikken. På den anden side kan en geometri være en abstrakt teori opbygget strengt aksiomatisk, hvor vi interesserer os mindre for konkrete fortolkninger og anvendelser. Geometri opfattet på denne måde er ren matematisk teori. Euklids Elementer er med rette et beundret mesterværk, men set med moderne briller er der nogle mangler, f.eks. mangler der aksiomer for punkters rækkefølge og gensidige beliggenhed (ordningsaksiomer) og for eksistens af skæringspunkter mellem linjer (kontinuitetsaksiomer). Den første, der gav en fremstilling af geometriens grundlag, som set med moderne øjne er tilfredsstillende, og hvor Euklids fejl og mangler er udbedret, er David Hilbert (1862-1943), nemlig i *Die Grundlagen der Geometrie* fra 1899.

⁴Efter Bernhard Riemann (1826-1866). Riemannsk geometri er af betydning i Einsteins relativitetsteori. Se nærmere hos [7] Søren Sikjær, *Elementer af Einsteins relativitetsteori*.

2. Grundlæggende begreber

I vores fremstilling af den euklidiske plangeometri, vil vi ikke gå aksiomatisk til værks. I stedet vil vi tilstræbe en mellemting mellem det aksiomatiske og det empiriske⁵.

2.1. Punkter, linjer og planer

I plangeometrien arbejder vi i en givet fast plan π , som tænkes at være en uendelig flade, der ikke krummer. Geometriens grundlæggende byggesten er punkter, linjer, trekanter og cirkler.

Øvelse 2.1

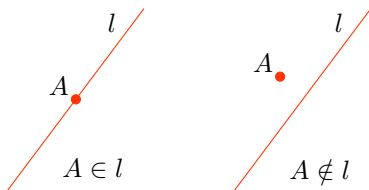
Hvordan vil du forklare (definere) begreberne punkt, linje og cirkel for en person, som aldrig før har haft geometri?

⁵Som videre læsning kan første og sidste trediedel af Albert Einsteins foredrag om *Geometri og erfaring* anbefales. Foredraget kan findes i [8] Albert Einstein, *Perspektiver og udsyn*, side 170-182.

Punkter skrives vha. store bogstaver $A, B, C, \dots, P, Q, \dots$
Linjer og *halvlinjer* skrives med små bogstaver $a, b, c, \dots, l, m, n, \dots$ og de betragtes som punktmængder.

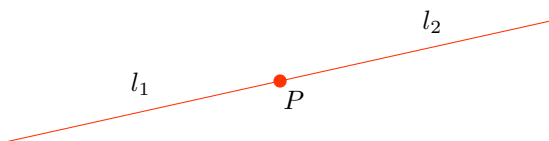
Vi skriver altså om et punkt A i planen

1. $A \in l$, hvis A ligger på linjen l .
2. $A \notin l$, hvis A ikke ligger på linjen l .



Et punkt P på en linje l deler linjen op i 3 dele l_1 , P og l_2 , så

1. $l = l_1 \cup \{P\} \cup l_2$
2. $P \notin l_1$
3. $P \notin l_2$
4. $l_1 \cap l_2 = \emptyset$



De to halvlinjer l_1 og l_2 kaldes åbne halvlinjer, mens $l_1 \cup \{P\}$ og $l_2 \cup \{P\}$ kaldes lukkede halvlinjer. P kaldes endepunktet for de to halvlinjer⁶.

⁶For betydningen af $\cup$ og $\cap$, se Gymnasiematematik, bind 1, Kunsten at regne, Definition 2.2 side 18.

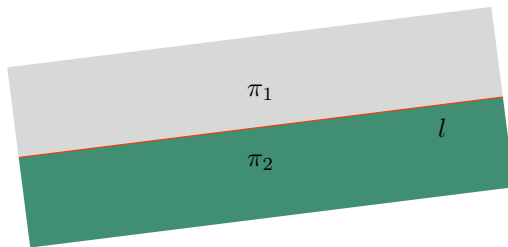
På samme måde deler en linje l planen π op i tre dele π_1 , l og π_2 , så

$$1. \pi = \pi_1 \cup l \cup \pi_2$$

$$3. \pi_2 \cap l = \emptyset$$

$$2. \pi_1 \cap l = \emptyset$$

$$4. \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$$

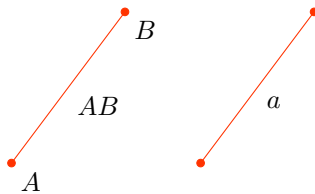


π_1 og π_2 kaldes åbne *halvplaner*. $\pi_1 \cup l$ og $\pi_2 \cup l$ kaldes lukkede halvplaner. l kaldes *randen* af de to halvplaner.

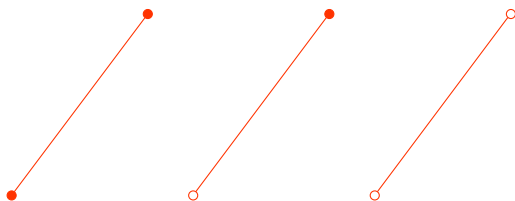
Et *linjestykke* kan benævnes på to måder.

1. Ud fra dens endepunkter: AB , PQ , RS , ...

2. Med små bogstaver: a , b , c , ...



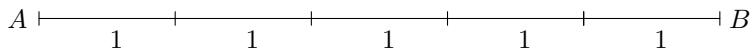
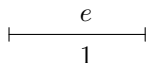
Et linjestykke kaldes *lukket*, hvis dets endepunkter regnes med; *halvåbent*, hvis netop et af endepunkterne regnes med og *åbent*, hvis ingen af endepunkterne regnes med.



2.2. Længden af et linjestykke

Til ethvert linjestykke AB knytter vi et tal⁷, som kaldes *længden* af AB (eller *måltallet* for AB), og som betegnes $|AB|$

For at gøre det, er vi nødt til at vælge en *længdeenhed*, dvs. et linjestykke, som vi tildeler længden 1.



På figuren ovenfor er $|AB| = 5$

⁷Når der ikke er fare for misforståelser, vil vi dog tillade os at skrive a i stedet for $|a|$, så der undertiden ikke skelnes mellem navnet på siden af en trekant og måltallet for siden. For en retvinklet trekant med siderne a , b og c skriver vi således $a^2 + b^2 = c^2$ i stedet for $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2$

Eksempel 2.2

Når en længde a er 5cm, skriver vi $|a| = 5$, $[a] = \text{cm}$ og $a = 5\text{cm}$. Vi opfatter størrelsen a som et produkt af måltallet og enheden.

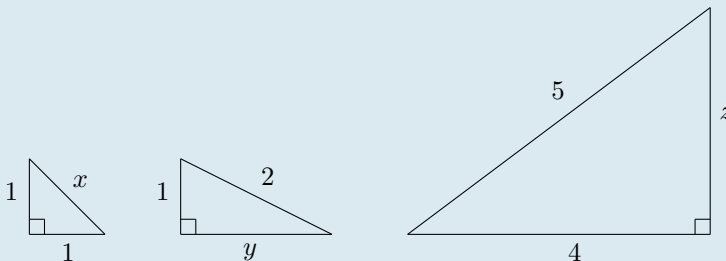
Generelt opfatter vi en fysisk størrelse sådan

$$a = |a| \cdot [a]$$

størrelse måltal enhed

Øvelse 2.3

Find x , y og z på figurerne herunder



Hvad er man nødt til at kende for at løse opgaven?

Øvelse 2.4

Husk definitionen af $A \cap B$ (se *Gymnasiematematik*, bind 1. *Kunsten at regne*).

1. Se på to linjer l og m . Tegn og beskriv $l \cap m$. Hvor mange punkter består $l \cap m$ af? Hvad kan du konkludere, hvis $l \cap m = \emptyset$?
2. Sæt l og m til at være to linjer, som skærer hinanden. Se så på to halvplaner π_l og π_m med linjerne l og m som rand. Tegn og beskriv $\pi_l \cap \pi_m$

Øvelse 2.5

Tegn^a to linjer l og m . Afsæt punkter A , C og E på l og B , D og F på m i den nævnte rækkefølge.

Lad L være skæringspunktet mellem AB og DE

Lad N være skæringspunktet mellem BC og EF

Lad M være skæringspunktet mellem CD og FA

1. Hvad ser der ud til at gælde om L , N og M ?
2. Prøv igen med en ny tegning, hvor rækkefølgen af A , C og E ændres (og evt. også rækkefølgen af B , D og F).
3. Formulér en konklusion.

^aResultatet i opgaven illustrerer 6.32 Pappos' sætning