CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Tradução: Elza F. Gomide

WILLIAM G. McCALLUM
DEBORAH HUGHES-HALLETT
ANDREW M. GLEASON
ET AL.

Blucher

CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Produzido pelo Consórcio baseado em Harvard, com auxílio financeiro do National Science Foundation

William G. McCallum
University of Arizona

Daniel Flath
University of South Alabama

Andrew M. Gleason
Harvard University

Sheldon P. Gordon
Suffolk County Community College

David Mumford
Harvard University

Brad G. Osgood
Stanford University

Deborah Hughes-Hallett
Harvard University

Douglas Quinney
University of Keele

Wayne Raskind
University of Southern California

Jeff Tecosky-Feldman
Haverford College

Joe B. Thrash
University of Southern Mississippi

Thomas W. Tucker
Colgate University

com a colaboração de

Paul M. N. Feehan
Harvard University

Adrian Iovita
Centre Interuniversitaire en
Calcul Mathématique Algébrique

WILLIAM G. McCALLUM
DEBORAH HUGHES-HALLETT
ANDREW M. GLEASON et al.

CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Tradução:
ELZA F. GOMIDE
Prof.ª Dr.ª do Instituto de Matemática
e Estatística da Universidade de São Paulo

3ª reimpressão – 2015

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

FICHA CATALOGRÁFICA

Cálculo de várias variáveis / Willian G. McCallum...[et al.]; tradução Elza F. Gomide. – São Paulo: Blucher, 2009.

Título original: Multivariable calculus.
ISBN 978-85-212-0144-1

1. Cálculos – Livros-textos I. McCallum, William G.

08-11931 CDD-515

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo de várias variáveis: Matemática 515

PREFÁCIO

O Cálculo é uma das grandes realizações do intelecto humano. Inspirados por problemas de astronomia, Newton e Leibniz desenvolveram as idéias do Cálculo há 300 anos. Desde então cada século demonstrou o poder do cálculo para iluminar questões de matemática, das ciências físicas e das ciências sociais e biológicas.

O Cálculo foi tão bem sucedido por causa de seu extraordinário poder para redução de problemas complicados a regras e procedimentos simples. Nisto reside o perigo no ensino de Cálculo: é possível ensinar o assunto como se nada mais fosse que regras e procedimentos – perdendo assim de vista tanto a matemática quanto seu valor prático. Com o generoso apoio da National Science Foundation nosso grupo se propôs a criar um novo currículo de Cálculo que restaurasse essa visão. Este livro é o segundo estágio nessa empreitada. O primeiro estágio é nosso texto sobre uma variável.

Princípios básicos

Os dois princípios básicos que guiaram nossos esforços ao desenvolver o texto em uma variável permanecem válidos. O primeiro é nossa receita para restaurar o conteudo matemático do Cálculo:

> **A Regra de Três:** Todo tópico deve ser apresentado geometricamente, numericamente e algebricamente.

Constantemente encorajamos os estudantes a pensar e escrever sobre o significado geométrico e numérico do que estão fazendo. Não é nossa intenção reduzir o aspecto puramente algébrico do Cálculo, mas antes reforçá-lo dando significado aos símbolos. Nos problemas para trabalho de casa lidando com aplicações, continuadamente perguntamos aos estudantes o que significam suas respostas em termos práticos.

O segundo princípio, inspirado por Arquimedes, é nossa receita para recuperar a compreensão prática:

> **A maneira de Arquimedes:** Definições e procedimentos formais decorrem da investigação de problemas práticos.

Arquimedes acreditava que se ganha entendimento de problemas matemáticos investigando primeiro problemas mecânicos ou físicos.* Pela mesma razão, nosso texto é conduzido por problemas. Sempre que possível partimos de um problema prático e dele extraímos resultados gerais. Por problemas práticos em geral, mas não sempre, entendemos aplicações ao mundo real. Esses dois princípios levaram a um currículo dramaticamente novo – mais do que uma olhada rápida ao conteúdo poderia indicar.

Tecnologia

No Cálculo de várias variáveis, mais ainda do que no de uma variável, a tecnologia do computador pode ser usada muito vantajosamente para ajudar os estudantes a pensar matematicamente. Por exemplo, olhar gráficos de superfícies e diagramas de curvas de nível ajuda enormemente a compreender funções de várias variáveis. Além disso, a capacidade de usar eficazmente a tecnologia como um instrumento em si é da maior importância. Espera-se que os estudantes usem sua capacidade de reflexão para decidir onde a tecnologia é útil.

Porém o livro não exige nenhum software específico ou tecnologia, e nós acomodamos aqueles que não têm acesso

* ... julguei conveniente descrever para você e explicar em detalhe ... a peculiaridade de um certo método, pelo qual será possível a você ter um ponto de partida para permitir-lhe investigar alguns problemas de matemática por meio da mecânica. Este procedimento, estou persuadido, não é menos útil mesmo para a prova dos próprios teoremas; pois certas coisas primeiro se tornam claras para mim por um método mecânico, embora tenham que ser demonstradas depois por geometria, porque sua investigação pelo método referido não fornece uma real demonstração. Mas é claro que é mais fácil, quando pelo método já se adquiriu algum conhecimento da questão, fornecer a prova, do que achá-la sem qualquer conhecimento prévio. De *O Método* em *The Works of Archimedes* editado e traduzido por Sir Thomas L Heath (Dover,NY)

a tecnologia suficientemente poderosa fornecendo cópias master suplementares para "slides" mostrando gráficos de superfícies, diagramas de contorno, curvas parametrizadas e campos de vetores. Idealmente os estudantes deveriam ter acesso à tecnologia, com a capacidade de traçar gráficos de superfícies, diagramas de contornos, e campos de vetores, e de calcular integrais múltiplas e integrais de linha numericamente. Faltando isso, porém, a combinação de calculadoras gráficas manuais e de transparências para superposição é bem satisfatória, e tem sido usada com sucesso em lugares em que foi testada.

Que preparo anterior do estudante se espera ?

Estudantes usando este livro deveriam ter completado com sucesso um curso Cálculo de uma única variável. Não é necessário que tenham usado o livro sobre uma única variável escrito pelo mesmo grupo para que possam aprender com este livro.

O livro provoca reflexão em estudantes bem preparados, sendo ainda acessível a estudantes com preparo anterior mais fraco. Procedimentos gráficos e numéricos bem como algébricos fornecem aos estudantes outro modo de dominar o material. Esta abordagem encoraja os estudantes a persistir, diminuindo as taxas de fracasso.

Conteúdo

Nosso procedimento ao planejar o currículo foi o mesmo que usamos no nosso livro de uma variável: partimos de uma lousa vazia e compilamos uma lista de tópicos que julgamos fundamentais para o assunto, após discussões com engenheiros, físicos, químicos, biólogos e economistas. Para responder a necessidades individuais ou exigências de cursos, facilmente podem ser acrescentados ou retirados tópicos, ou a ordem mudada.

Em todo o livro supomos que as funções de duas ou mais variáveis são definidas em regiões com fronteiras lisas por pedaços.

Capítulo 1: Funções de várias variáveis

Introduzimos funções de várias variáveis de diversos pontos de vista, usando gráficos de superfícies, diagramas de contornos e tabelas. Este capítulo desempenha o mesmo papel para este curso que o Capítulo 1 para o de uma única variável; dá aos estudantes a capacidade de ler gráficos e diagramas de contornos e de pensar graficamente, ler tabelas e pensar numericamente, e aplicar essas capacidades, juntamente com as habilidades algébricas, para modelar o mundo real. Damos particular atenção à idéia de uma seção de uma função, obtida variando uma variável independentemente das outras. Vimos que é útil para o estudante estudar esta noção antes de avançar para as derivadas parciais e gradientes. Estudamos com detalhe as funções lineares, como preparação para a noção de linearidade local. Concluímos com uma seção sobre continuidade.

Capítulo 2: Um instrumento fundamental: vetores

Definimos vetores como objetos geométricos tendo direção e magnitude, com vetores de deslocamento como modelo, e depois introduzimos a representação de vetores em termos de coordenadas. Damos definições geométrica e algébrica equivalentes do produto escalar e do produto vetorial.

Capítulo 3: Diferenciação de funções de várias variáveis

Introduzimos as noções básicas de derivada parcial, derivada direcional, gradiente e diferencial. De acordo com o espírito do livro de uma variável, pomos estas noções na moldura de linearidade local. Também usamos a linearidade local para introduzir a noção de diferenciabilidade, e na discussão da regra da cadeia em várias variáveis. Discutimos derivadas parciais de ordem superior, sua interpretação e equações a derivadas parciais e sua aplicação a aproximações de Taylor quadráticas. Concluímos com uma seção sobre diferenciabilidade.

Capítulo 4: Otimização

Aplicamos as idéias do capítulo anterior a problemas de otimização, tanto sem vínculos como com vínculos. Obtemos o critério da segunda variável para extremos locais considerando primeiro o caso de polinômios quadráticos e depois apelando para a aproximação de Taylor quadrática. Discutimos a existência de extremos globais para funções contínuas em regiões fechadas e limitadas. Na seção sobre otimização com vínculos discutimos multiplicadores de Lagrange, vínculos de igualdades e desigualdades, problemas com mais de um vínculo e a lagrangeana.

Capítulo 5: Integração de funções de várias variáveis

Motivamos a integral definida em várias variáveis graficamente, considerando o problema de avaliar a população total a partir de um diagrama de contornos para densidade de população, usando grades cada vez mais finais. Continuamos com exemplos numéricos usando tabelas, e depois damos dois métodos para calcular integrais múltiplas: analiticamente, por meio de integrais iteradas, e numericamente pelo método de Monte Carlo. Discutimos integrais duplas e triplas em coordenadas cartesianas, polares, esféricas e cilíndricas. Também discutimos aplicações a probabilidade em mais de uma variável.

Capítulo 6: Curvas e superfícies paramétricas

Partimos do problema de representar curvas parametricamente, depois usamos curvas parametrizadas para representar movimento. Definimos velocidade e aceleração geometricamente, depois damos fórmulas em termos de componentes. Continuamos com uma seção sobre superfícies parametrizadas e discutimos a conexão entre representações implícitas, explícitas e paramétricas de superfícies usando o teorema da função implícita. A seção final discute uma das aplicações primeiras, originais, do Cálculo: a explicação de Newton para as leis de Kepler sobre os movimentos dos planetas.

Capítulo 7: Campos de vetores

Neste breve capítulo introduzimos funções de várias variáveis a valores vetoriais, ou campos de vetores. Este capítulo dá as bases para o tratamento geométrico nos três capítulos seguintes das integrais de linha, integrais de fluxo, divergência e rotacional. Começamos com exemplos físicos tais como campos vetoriais de velocidade e de força, e incluímos muitos esboços de campos de vetores para ajudar a formar a intuição geométrica. Discutimos também as linhas de corrente de campos de vetores e sua relação com sistemas de equações diferenciais.

Capítulo 8: Integrais de linha

Apresentamos o conceito de integrar um campo de vetores ao longo de um caminho com uma definição livre de coordenadas. Levamos algum tempo formando a intuição usando esboços de campos de vetores com caminhos superpostos, antes de introduzir o método para calcular integrais de linha usando parametrizações. Então discutimos campos conservativos, campos gradientes e o Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha. Continuamos com a discussão de campos não conservativos e o teorema de Green, e damos o critério do rotacional para um campo de vetores conservativo. Concluímos com uma prova do teorema de Green usando a fórmula para mudança de variáveis.

Capítulo 9: Integrais de fluxo

Introduzimos a integral de fluxo de um campo de vetores através de uma superfície parametrizada do mesmo modo que introduzimos integrais de linha. Primeiro damos uma definição sem coordenadas, depois discutimos exemplos em que a integral de fluxo (ou pelo menos seu sinal) pode ser calculada geometricamente. Depois mostramos como calcular integrais de fluxo sobre gráficos de superfícies, porções de cilindros, e porções de esferas. Concluímos esta seção com integrais de fluxo sobre superfícies parametrizadas arbitrárias.

Capítulo 10: Cálculo de campos vetoriais

Introduzimos divergência e rotacional de modo livre de coordenadas: a divergência em termos de densidade de fluxo e o rotacional em termos de densidade de circulação. Damos então fórmulas em coordenadas cartesianas. No livro de uma só variável deduzimos o teorema fundamental do Cálculo mostrando que a integral da taxa de variação é a variação total. De modo muito semelhante deduzimos o teorema da Divergência mostrando que a integral da densidade de fluxo sobre um volume é o fluxo total para fora do volume e o teorema de Stokes mostrando que integral da densidade de circulação sobre uma superfície é a circulação total sobre seu bordo. Discutimos os três teoremas fundamentais do Cálculo de várias variáveis e mostramos como levam ao critério tridimensional do rotacional para um campo de vetores conservativo. Concluímos com uma seção provando os teoremas da divergência e de Stokes usando a fórmula de mudança de variáveis.

Mudanças com relação à edição preliminar

Incorporamos sugestões de usuários da Edição Preliminar que nos ajudaram a tornar a exposição tão clara e concisa quanto possível. Muitas das figuras foram refeitas, particularmente as figuras em três dimensões.

- Capítulo 1. Acrescentamos uma seção sobre Limites e Continuidade.
- Capítulo 2. As definições geométrica e algébrica dos produtos escalar e vetorial agora são dadas juntas no começo de cada seção. Cada seção dá um argumento explicando porque as duas definições são equivalentes.
- Capítulo 3. O material sobre derivadas direcionais e gradientes foi substancialmente reorganizado. Introduzimos tanto derivadas direcionais quanto vetores gradiente na Seção 3.4, mas somente no caso de dimensão 2. Substituímos a definição geométrica de gradiente pela definição algébrica, motivada pela fórmula para calcular derivadas direcionais; as propriedades geométricas são então deduzidas desta fórmula. A Seção 3.5 contém material novo sobre a relação entre gradientes em dimensões dois e três, e sobre situações em que o gradiente não tem significado geométrico. Na seção sobre a regra da cadeia acrescentamos um novo exemplo da química física. Acrescentamos uma nova seção no fim sobre a diferenciabilidade de um ponto de vista gráfico e intuitivo, que discute a relação entre diferenciabilidade, derivadas parciais e continuidade.
- Capítulo 4. O material sobre extremos globais da antiga Seção 4.1 foi deslocado para a Seção 4.2, de modo que a Seção 4.1 focaliza unicamente pontos críticos e sua classificação. O material teórico sobre conjuntos fechados e limitados foi deslocado para o fim da Seção 4.2. Isto tem como resultado uma ênfase maior sobre as idéias principais.
- Capítulo 5. Os exemplos introdutórios foram encurtados de modo que a definição é atingida mais depressa.
- Capítulo 6. Reorganizamos substancialmente o material das Seções 6.1 e 6.3. A nova Seção 6.1 se concentra na idéia geométrica de representarem uma curva parametricamente. A nova Seção 6.2 desenvolve a idéia de os vetores de uma curva paramétrica representar um movimento e introduz a velocidade e aceleração. O material sobre representações implícitas, explícitas e paramétricas foi levado para a nova Seção 6.4 sobre o teorema da Função Implícita. Acrescentamos uma Seção

6.5 sobre a explicação de Newton das leis de Kepler.

- Capítulo 8. Acrescentamos material sobre o critério tridimensional do rotacional, antecipando o capítulo 10. Acrescentamos uma nova seção dando uma prova do teorema de Green.
- Capítulo 9. Reorganizamos este capítulo em três seções com algum material novo. A Seção 9.1 contém material novo sobre o cálculo de integrais de fluxo sem parametrizações usando argumentos geométricos simples para reduzir a integral a uma integral dupla. A Seção 9.2 tem material novo sobre o cálculo de integrais de fluxo sobre pedaços de cilindros e esferas.
- Capítulo 10. Refletindo as modificações feitas no Capítulo 2, as definições geométrica e algébrica da divergência e do rotacional são agora apresentadas juntas, com um argumento intuitivo explicando porque dão o mesmo resultado. Acrescentamos alguns exemplos mais desafiadores, e material sobre campos vetoriais livres de divergências e livres de rotacional. Uma nova seção sobre os três teoremas fundamentais discute o critério tridimensional do rotacional e o critério da divergência sobre campos rotacionais. Substituímos a seção final antiga por uma nova dando as provas dos teoremas da divergência e de Stokes baseadas na idéia de parametrizar uma região e usar mudança de variáveis para reduzir a prova ao caso de regiões retangulares, afinada com a prova moderna usual com formas diferenciais. Esta é uma seção desafiadora para estudantes fortes que serve como excelente pedra-de-abóboda para estudantes tomando este curso em forma avançada.
- *Respostas aos Problemas de número ímpar*. Incorporamos o Manual de Respostas para Estudantes no livro. Este dá respostas abreviadas aos problemas de número ímpar que têm respostas breves.

Opções para um curso de um semestre

Instrutores usando o texto em um curso semestral têm as duas escolhas seguintes: Podem parar no fim do Capítulo 8, dando tempo para um tratamento desenvolvido de curvas e superfícies parametrizadas, integrais de linha e teorema de Green; ou podem continuar até o Capítulo 10, cobrindo apenas as primeiras seções dos Capítulo 6, 7, 8 e 9 que fornecem um tratamento breve das integrais de linha e de fluxo de um ponto de vista geométrico e dão aos estudantes base suficiente para entender o teorema da divergência e o teorema de Stokes.

Nossas experiências

No processo de desenvolver as idéias incorporadas neste livro tomamos consciência da necessidade de testar os materiais completamente numa ampla variedade de instituições servindo a muitos tipos diferentes de estudantes. Os membros do grupo usaram versões prévias do livro numa ampla faixa de instituições. Durante o ano acadêmico de 1995–1996 fomos ajudados por colegas em mais de 100 instituições que testaram em classe a Edição Preliminar e relataram suas experiências e as de seus estudantes. Este grupo diverso de instituições usou o livro em sistemas semestrais e trimestrais, em laboratórios de computador, pequenos grupos e configurações tradicionais, com várias tecnologias diferentes. Apreciamos as valiosas sugestões que fizeram, que tentamos incorporar na Primeira Edição do texto.

Agradecimentos

Obrigado para Ruby Aguirre, Ed Alexender, Carole Andersom, Leonid Andreev, Ralph Baierlein, Paul Balister, Frank Beatrous, Jerrie Beibertein, Melanie Bell, Ebo Bentil, Yoav Bergner, Shelina Bhojani, Thomas Bird, Paul Blanchard, Melkana Brakalova, John Bravman, David Bressoud, R. Campbell, Phil Cheifetz, Oksana Cheniavskaya, C.K. Cheung, Dave Chua, Dean Chung, Robert Condon, Eric Connally, Radu Constantinescu, Pat Corn, Josh Cowley, Jie Cui, Caspara Curjel, Bill Dunn, Mike Esposito, Pavel Etingof, Bill Faris, Hermann Flaschlka, Leonid Friedlander, Leonid Fridman, Deborah Gaines, Amanda Galtman, Avijit Gangopadhyay, Howard Georgi, Scott Gilbert, Marty Greenlee, David Granda, Benedict Gross, John Hagood, David G. Harris, Angus Hendrick, John Huth, Robert Indik, Raj Jesudason, Qin Jing, Jerry Johnson, Millie Jonhson, Joe Kanapka, Alesx Kasman, Matthias Kawski, David Kazhdan, Miska Kazhdan, Thomas Kerler, Charlie Kerr, Mike Klucznik, Sandy Koonce, Matt Kruse, Ted Laetsch, Sylvain Laroche, Janny Leung, Dave Levermome, Lei Li, Weiye Li, Li Liu, Carlos Lizzaraga, Patti Frazes Lock, John Lucas, Alex Mallozzi, Brad Mann, Elliot Marks, Ricardo Martinez, Eric Mazur, Mark McConnell, Dan McGee, Tom McMahon, Georgia Mederer, Andrew Metrick, Michal Mlejnek, Jeana Morris, Dom Myers, Bridget Neale, Alan Newell, James Osterburg, Myles Paige, Ed Park, Ted Pyne, Howard Penn, Tony Phillips, Laura Piscatelli, Algo Pisztora, Steve Prothero, Rebecca Rapoport, Russ Shachter, Barbara Shipman, Mary Sibayan, Jeff Silver, Chris Sinclair, Yum-Tong Siu,, Keith Stroyan, Noah Syroid, Francis Su, Suds Ulmer, Adrian Vajiac, Bill Velez, Fave Villalobos, Jianmei Wang, Joseph Warkins, Xianbao Xu, e Brunce Yoshiwara.

William G. McCallum
Sheldon P. Gordon
Wayne Raskind
Deborah Hughes-Hallett
David Mumford
Jeff Tecosky-Feldman
Daniel E. Flath
Brad G. Osgood
Joe B. Thrash
Andrew M. Gleason
Douglas Quinney
Thomas W. Tucher

CONTEÚDO

1

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Muitas grandezas dependem de mais de uma variável: a quantidade de alimento produzida depende de quantidade de chuva e da quantidade de fertilizante usada; a taxa de uma reação química depende da temperatura e da pressão do ambiente em que se processa; a intensidade da atração gravitacional entre dois corpos depende de suas massas e da distância que os separa; a taxa de matéria ejetada numa explosão vulcânica que cai num lugar depende da distância ao vulcão e do tempo decorrido desde a explosão. Cada exemplo envolve uma função de duas ou mais variáveis. Neste capítulo veremos muitas maneiras diferentes de olhar funções de várias variáveis.

1.1- FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Notação de função

Suponha que você quer obter um empréstimo pelo prazo de cinco anos para comprar um carro e precisa calcular quanto deverá pagar por mês; isto dependerá tanto da quantidade de dinheiro emprestada quanto da taxa de juro. Estas quantidades podem variar separadamente: o valor do empréstimo pode variar e a taxa de juro permanecer constante, ou a taxa de juro pode mudar enquanto a quantia emprestada permanece constante. Para calcular seu pagamento mensal você precisa conhecer ambos. Se o pagamento mensal é $\$m$, a quantia emprestada é $\$E$ e a taxa de juros é t % então exprimimos o fato de m ser função de E e t escrevendo:

$$m = f(E, t).$$

É exatamente semelhante à notação para função de uma variável. A variável m chama-se a variável dependente e as variáveis E e t se dizem independentes. A letra f representa a *função* ou regra que fornece o valor de m correspondente a valores dados de E e t.

Uma função de duas variáveis pode ser representada graficamente, numericamente por uma tabela de valores, ou algebricamente por uma fórmula. Nesta seção daremos exemplos dessas três maneiras de olhar uma função.

Exemplo gráfico: um mapa do tempo

A Figura 1.1 mostra um mapa do tempo de um jornal. Que informação ele transmite? Mostra a temperatura máxima T prevista, em graus Fahrenheit (°F), através dos Estados Unidos naquele dia. As curvas do mapa, ditas *isotérmicas*, separam o país em zonas, conforme T esteja nos 60°s, 70°s, 80°s, 90°s ou 100°s. (*Iso* significa igual e *thermo* significa calor). Observe que a isotérmica separando as zonas dos 80s e dos 90s liga todos os pontos em que temperatura é exatamente 90°F.

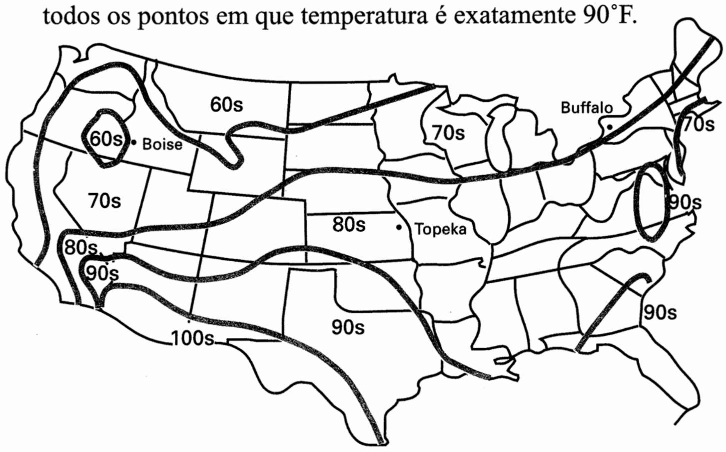


Figura 1.1: Mapa do tempo mostrando as temperaturas máximas T, previstas num dia de verão

Exemplo 1: Avalie o valor previsto T em Boise, Idaho; Topeka, Kansas; e Buffalo, New York

Solução: Boise e Buffalo estão na região dos 70, e Topeka na região dos 80. Assim a temperatura prevista em Boise e Buffalo está entre 70 e 80; a temperatura em Topeka entre 80 e 90. Na verdade, podemos dizer mais. Embora Boise e Buffalo estejam ambas nos 70, Boise está bem perto da isotérmica de $T = 70$, ao passo que Buffalo está perto da isotérmica de $T = 80$. Assim avaliamos que a temperatura estará nos 70 baixos em Boise e nos 70 altos em Buffalo, Topeka está mais ou menos a meia distância entre a isotérmica de $T = 80$ e a de $T = 90$. Assim avaliamos que a temperatura em Topeka estará nos 80 médios. Na verdade as temperaturas máximas naquele dia foram 71°F em Boise, 79°F em Buffalo e 86°F em Topeka.

A máxima T prevista, ilustrada no mapa do tempo, é função de (isto é, depende de) duas variáveis, freqüentemente tomadas como latitude e longitude, ou distância leste-oeste e distância norte-sul de um ponto fixado, por exemplo, Topeka. O mapa de tempo na Figura 1.1 é chamado um mapa de *curvas de nível* ou *diagrama de curvas de nível* da função. A Seção 1.3 mostra outro modo de visualizar funções de duas variáveis usando superfícies. A Seção 1.4 mostra curvas de nível em detalhe.

Exemplo numérico: consumo de carne

Suponha ser um produtor de carne e querer saber quanta carne será comprada. Isso depende de quanto dinheiro as pessoas têm e do preço da carne. O consumo de carne C, (em quilos por semana por família) é função da renda familiar R (em milhares de reais por ano) e do preço da carne p (em reais por quilo). Em notação funcional escrevemos:

$$C = f(R, p)$$

A tabela 1.1 contém valores dessa função. Os valores de p são mostrados no topo, valores de R do lado esquerdo de cima para baixo, valores correspondentes de $f(R, p)$ dados na tabela*. Por exemplo, para achar o valor de $f(40, 3{,}50)$ olhamos a linha a linha correspondendo a $R = 40$ sob $p = 3{,}50$ onde achamos o número 4,05. Assim

$$f(40, 3{,}50) = 4{,}05$$

Isso significa que em média se a renda familiar é de $40.000 por ano, e o preço da carne é 3,50 o quilo, a família comprará 4,05 quilos de carne por semana.

Observe como difere de tabelas de funções de uma variável, em que uma linha ou uma coluna bastam para listar os valores da função. Aqui precisamos de muitas linhas e colunas porque a função tem um valor para cada *par* de valores das variáveis independentes.

* Adatado de R.G. Lipsey, Introduction to Positive Economics, 3ªedição, Weidenfeld and Nicolson, Londres, 1971.

Tabela 1.1 *Quantidade de carne comprada (quilos/ família / semana)*

		Preço da carne p ($ por quilo)			
		3,00	3,50	4,00	4,50
Renda familiar por ano R ($1000)	20	2,65	2,59	2,51	2,43
	40	4,14	4,05	3,94	3,88
	60	5,11	5,00	4,97	4,84
	80	5,35	5,29	5,19	5,07
	100	5,79	5,77	5,60	5,53

Exemplos algébricos: fórmulas

Tanto no exemplo de mapa de tempo quanto no do consumo de carne, não há fórmula para a função subjacente. Isso é o que ocorre usualmente com funções representando dados da vida real. De outro lado para muitos modelos idealizados na física, na engenharia ou na economia há fórmulas exatas.

Exemplo 2: Dê uma formula para a função $D = f(B,t)$ onde D é a quantidade de dinheiro numa conta bancária t anos depois de um investimento inicial de B reais, se os juros são acumulados à taxa de 5% ao ano compostos a) anualmente b) continuamente.

Solução: a) Compostos anualmente significa que D aumenta por um fator de 1,05 a cada ano, de modo que

$$D = f(B, t) = B\,(1{,}05)^t.$$

Composição contínua significa que D cresce conforme a correspondente função exponencial e^{kt}, com $k = 0{,}05$ de modo que

$$D = f(B, t) = Be^{0{,}05t}\ .$$

Exemplo 3: Um cilindro com extremidades fechadas tem um raio r e altura h. Se seu volume é V e sua área da superfície é A, ache fórmulas para as funções $V = f(r, h)$ e $A = g(r, h)$.
Solução Como a área da base circular é πr^2 temos

$$V = f(r, h) = \text{Área da base . Altura} = \pi r^2 h\ .$$

A área da superfície lateral é a circunferência da base, $2\pi r$, vezes a altura h, dando $2\pi rh$. Assim

$$A = g(r, h) = 2\ .\ \text{Área da base} + \text{Área lateral} = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Estratégia para investigar funções de duas variáveis: uma variável de cada vez

Podemos aprender muito sobre funções de duas ou mais variáveis fazendo variar uma variável de cada vez mantendo as outras fixas, obtendo assim uma função de uma variável.

A onda

Suponha que você está num estádio onde a audiência está fazendo a onda. Este é um ritual em que membros da audiência se levantam e sentam de modo a criar uma onda que se desloca à volta do estádio. Normalmente uma única onda viaja a toda volta do estádio, mas podemos supor que há uma seqüência contínua de ondas. Que espécie de função descreveria o movimento da audiência? Para conservar simples as coisas, olhamos só uma fileira de espectadores. Consideramos a função que descreve o movimento de cada indivíduo na fileira. Este é função de duas variáveis: x (número do lugar) e t (tempo em segundos). Para cada valor de x e t escrevemos $h\ (x,\ t)$ para a altura (em centímetros) acima do solo da cabeça do espectador no lugar de número x ao tempo de t segundos. Suponhamos que nos dizem que

$$h\ (x,\ t) = 150 + 30 \cos\ (0{,}5x - t).$$

Exemplo 4: a) Explique o sentido de $h\ (x,\ 5)$ em termos da onda. Ache o período de $h\ (x{,}5)$. O que representa esse período?

b) Explique o significado de $h\ (2,\ t)$ em termos da onda. Ache o período de $h\ (2,\ t)$. O que representa esse período?

Solução: a) Fixar $t = 5$ significa que estamos tomando um particular momento no tempo; fazer x variar significa que estamos olhando toda a fileira neste instante.

Assim a função $h\ (x,\ 5) = 150 + 30\cos\ (0{,}5x - 5)$ dá as alturas ao longo da fileira no instante $t = 5$. A Figura 1.2 dá o gráfico de $h\ (x,\ 5)$ que é uma foto instantânea da fileira em $t = 5$. As alturas formam uma onda de período 4π, ou aproximadamente 12,6 lugares. Esse período nos diz que o comprimento da onda é de cerca de 13 lugares.

b) Fixar $x = 2$ significa que estamos nos concentrando no espectador com o lugar de número 2, fazer t variar significa que estamos observando o movimento desse espectador no correr do tempo. A Figura 1.3 mostra o gráfico de $h\ (2,\ t) = 150 + 30 \cos\ (1 - t)$. Observe que o valor de h varia entre 120 e 180 cm quando o espectador se senta ou se levanta. O período é 2π ou cerca de 6,3 segundos. Este período representa o tempo que o espectador leva para levantar-se e sentar-se uma vez.

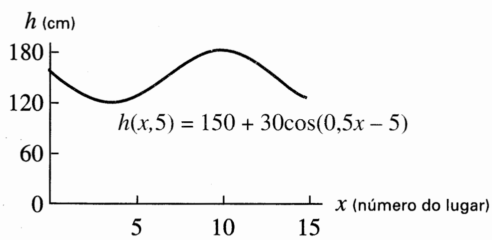


Figura 1.2: A função $h\ (x,\ 5)$ mostra a forma da onda no instante $t = 5$.

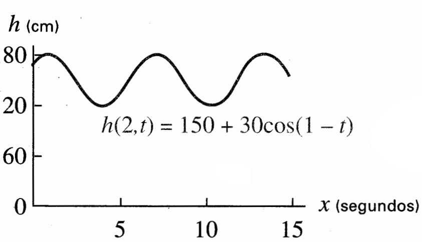


Figura 1.3: A função $h\ (2,\ t)$ mostra o movimento do espectador no lugar de número 2

De modo geral, a função de uma variável $h\ (a,\ t)$ dá o movimento do espectador no lugar a . A Figura 1.3 mostra o movimento da pessoa no lugar 2. Se escolhermos uma pessoa em outro lugar, teremos uma função semelhante, só que o gráfico pode ser deslocado para a direita ou para a esquerda.

Exemplo 5: Mostre que o gráfico de $h\ (7,\ t)$ tem a mesma forma que o gráfico de $h\ (2,\ t)$.

Solução: O movimento da pessoa no lugar 7 é descrito por

$$h\ (7,\ t) = 150 + 30 \cos\ (0{,}5(7) - t) = 150 + 30 \cos\ (3{,}5 - t).$$

Como $h\ (2,\ t) = 150 + 30 \cos\ (1 - t)$ podemos reescrever $h(7,\ t)$ como

$$h\ (7,\ t) = 150 + 30 \cos\ (1 + 2{,}5 - t)$$

$$= 150 + 30 \cos\ (1 - (t - 2{,}5) = h\ (2,\ t - 2{,}5).$$

Assim o gráfico de $h\ (7,\ t)$ é o gráfico de $h\ (2,\ t)$ deslocado de 2,5 segundos para a direita, isto é, 2,5 segundos depois. E o espectador do lugar 7 se levanta 2,5 segundos depois que a pessoa no lugar 2 se levantou. (Ver Figura 1.4). Este atraso é o que faz a onda mover-se à volta do estádio. Se todos os espectadores se levantassem e sentassem ao mesmo tempo não haveria onda.

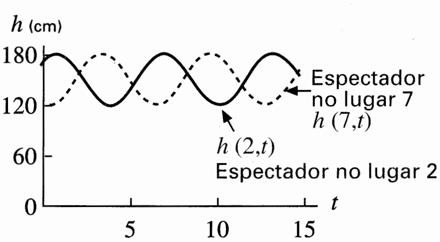


Figura 1.4: Comparação dos movimentos

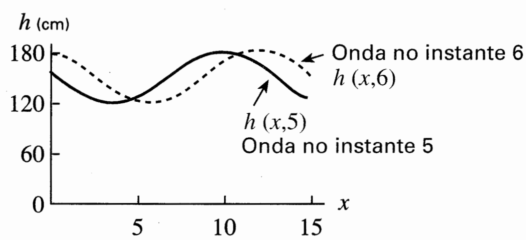


Figura 1.5: A forma da onda dos espectadores nos lugares 2 e 7 em $t = 5$ e em $t = 6$

Exemplo 6: Use o resultado no Exemplo 5 para achar a velocidade da onda.

Solução: Como o espectador no lugar 7 faz o mesmo que o espectador do lugar 2 mas 2,5 segundos depois, a onda se moveu de 5 lugares em 2, 5 segundos. Assim a velocidade é $5/2{,}5 = 2$ lugares por segundo.

Exemplo 7: Use as funções $h\ (x,\ 5)$ e $h\ (x,\ 6)$ para mostrar que a velocidade da onda é de 2 lugares por segundo.

Solução: A Figura 1.5 mostra os gráficos de $h\ (x,\ 5) = 150 + 30 \cos\ (0{,}5x - 5)$ e $h\ (x,\ 6) = 150 + 30 \cos\ (0{,}5x - 6)$, isto é, fotos instantâneas da onda nos instantes $t = 5$ e $t = 6$. A forma da onda a $t = 6$ é a mesma que a forma da onda a $t = 5$, somente deslocada para a direita de cerca de 2 lugares. Assim a onda se move à taxa de cerca de 2 assentos por segundo. Para confirmar que a velocidade é exatamente 2 lugares por segundo, precisamos usar álgebra. Quando $t = 5$ a equação da onda é

$$h(x, 5) = 150 + 30 \cos(0{,}5x - 5)$$

que tem um máximo onde

$$0{,}5x - 5 = 0$$

portanto em

$$x = 10,$$

Isto é, no décimo lugar. Um segundo depois, a $t = 6$, a equação da onda é

$$h = 150 + 30 \cos(0{,}5x - 6)$$

que tem um máximo onde

$$0{,}5x - 6 = 0$$

portanto em

$$x = 12$$

isto é, no duodécimo lugar. Assim a onda se desloca de 2 lugares num segundo.

Os dados da carne

Para uma função dada por uma tabela de valores tal como os dados de consumo de carne, deixamos uma variável variar de cada vez olhando uma linha e uma coluna. Por exemplo para fixar a renda em 40 olhamos a linha $R = 40$. Esta linha dá valores da função $f(40, p)$. Como R está fixo temos agora uma função de uma variável que mostra quanta carne é comprada dos vários preços por quem ganha \$40.000 por ano. A Tabela 1.2 mostra que $f(40, p)$ decresce quando p cresce. As outras linhas contam a mesma história: para cada renda R o consumo de carne decai quando o preço p cresce.

Tabela 1.2 *Consumo de carne por famílias ganhando \$40.000*

p	3,00	3,50	4,00	4,50
$f(40, p)$	4,14	4,05	3,94	3,88

Mapa do tempo

O que acontece como mapa na Figura 1.1 quando fazemos variar uma só variável de cada vez? Suponha que x representa milhas a leste-oeste de Topeka e y milhas norte-sul, e suponha que nos movemos sobre a linha oeste-leste por Topeka. Mantemos y fixo no zero e deixamos x variar. Ao longo da linha a temperatura máxima T vai dos 60s na costa oeste para os 70s em Nevada e Utah, para os 80s em Topeka, aos 90s logo antes da costa leste e então volta aos 80s. Um gráfico possível é mostrado na Figura 1.6. Outros gráficos são possíveis porque não sabemos com segurança como a temperatura varia entre curvas de nível.

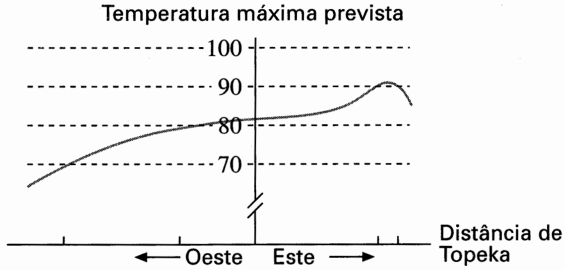


Figura 1.6: Temperatura máxima prevista numa linha oeste–leste por Topeka

Problemas para a seção 1.1

Os problemas 1–3 se referem ao mapa de tempo na Figura 1.1 página 1

1 Dê o intervalo da variação das máximas temperaturas diárias para
a) Pennnsylvania b) North Dakota c) California

2 Esboce o gráfico da temperatura máxima T em uma linha norte–sul através de Topeka.

3 Esboce o gráfico da temperatura máxima T sobre linha norte-sul e linha leste-oeste passando por Boise.

Para os problemas 4-8 a referência é a Tabela 1.1 na página 2, onde p é o preço da carne e R é a renda familiar anual.

4 Faça tabela mostrando a quantia Q que a família média gasta em carne (em reais por família por semana) como função do preço da carne e da renda familiar.

5 Dê tabelas para consumo de carne como função de p, com R fixo em $R = 20$ e $R = 100$. Dê tabelas para consumo de carne com função de R, com p fixo em 3,00 e $p =$ 4,00. Comente o que vê nas tabelas.

6 Como varia o consumo de carne como função da renda familiar se o preço da carne é mantido constante?

7 Faça uma tabela da proporção P da renda familiar gasta em carne por semana como função do preço e da renda (Note que P é a fração da renda gasta em carne.)

8 Expresse P, a proporção da renda familiar gasta em carne por semana, em termos da função original $f(R, p)$ que dá o consumo como função de p e R.

9 Esboce o gráfico da função f de conta corrente no Exemplo 2(a), mantendo B fixo em três valores diferentes e fazendo somente t variar. Explique o que vê.

10 Você está planejando um longa viagem de carro e sua despesa principal será com gasolina.

a) Faça tabela mostrando como o custo diário de combustível varia como função do preço da gasolina (em reais por litro) e do número de litros que você compra cada dia.

b) Se seu carro faz 9 km para cada litro de gasolina, faça uma tabela mostrando com varia o custo diário de combustível como função da distância percorrida cada dia e do preço da gasolina.

11 Considere a aceleração da gravidade g a uma altura h

sobre a superfície de uma planeta de massa m.

a) Se m fica constante, g é função crescente ou decrescente de h? Porque?

b) Se h é mantido constante, g é função crescente ou decrescente de m? Porque?

12 A temperatura ajustada para o fator vento é uma temperatura que diz quanto frio se percebe como combinação de vento e temperatura. A Tabela 1.3 mostra a temperatura ajustada para o fator vento como função da velocidade do vento e da temperatura.

Tabela 1.3: *Temperatura ajustada para o fator vento* (°F)

Velocidade do vento	Temperatura (°F)							
(mph)	35	30	25	20	15	10	5	0
5	33	27	21	16	12	7	0	–5
10	22	16	10	3	–3	–9	–15	–22
15	16	9	2	–5	–11	–18	–25	–31
20	12	4	–3	–10	17	–24	–31	–39
25	8	1	–7	–15	–22	–29	–36	–44

a) Se a temperatura é 0°F e a velocidade do vento é 15 mph, quão frio parece?

b) Se a temperatura é 35°F que velocidade do vento faz parecer 22°F?

c) Se a temperatura é 25°F que velocidade do vento faz parecer 20°F?

d) Se o vento soprar a 15mph que temperatura parece ser de 0°F?

13 Usando a Tabela 1.3 faça tabelas de temperatura ajustada para o fator vento como função da velocidade do vento, para temperaturas de 20°F e 0°F.

14 Usando a Tabela 1.3 faça tabelas da temperatura ajustada para o fator vento como função da temperatura, para velocidades do vento de 5 mph e 20 mph.

15 Suponha que a função onda no estádio na página 2 fosse dada por $h(x, t) = 150 + 30 \cos (x - 2t)$. Como essa onda se compara com a onda original? Qual é a velocidade dessa onda (em lugares por segundo)?

16 Suponha que a onda no estádio da página 2 se movesse em sentido contrário, direita para a esquerda em vez de esquerda para a direita. Dê uma fórmula possível para h.

Os Problemas 17–20 dizem respeito a uma corda de violão vibrante. Suponha que você faça vibrar uma corda de violão. Fotos instantâneas da corda a intervalos de milissegundo são mostradas na Figura 1.7.

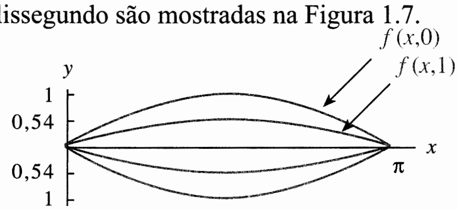


Figura 1.7: Uma corda vibrante: $f(x, t) = \cos t \operatorname{sen} x$ para quatro valores de t

Pense na corda esticada ao longo do eixo dos x de $x = 0$ a $x = \pi$. Cada ponto da corda tem um valor x, $0 \leq x \leq \pi$. Quando a corda vibra cada ponto da corda se move de um lado para outro do eixo dos x. Seja $y = f(x, t)$ o deslocamento no instante t do ponto da corda localizado a x unidades da extremidade esquerda. Então uma possível fórmula para $y = f(x, t)$ é

$$y = f(x, t) = \cos t \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \ t \text{ em milissegundos}$$

17 a) Esboce gráficos de y como função de x para valores fixados de t, $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

b) Use seus gráficos para explicar porque essa função poderia representar uma corda de violão vibrante.

18 Explique o que as funções $f(x, 0)$ e $f(x, 1)$ representam em termos da corda vibrante.

19 Explique o que as funções $f(0, t)$ e $f(1, t)$ representam em termos da corda vibrante.

20 Descreva o movimento das cordas cujos deslocamentos são dados por:

(a) $y = g(x, t) = \cos 2t \operatorname{sen} x$

(b) $y = h(z, t) = \cos t \operatorname{sen} 2x$

1.2 - UMA VOLTA PELO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Coordenadas cartesianas no espaço tridimensional

Imagine três eixos de coordenadas encontrando-se na origem: um eixo vertical, e dois eixos horizontais perpendiculares entre si. (Ver Figura 1.8.) Pense no plano-xy como sendo horizontal, ao passo que o eixo-z se estende verticalmente acima e abaixo do plano. As indicações x, y e z mostram que parte de cada eixo é positiva; o outro lado é negativo. Em geral usamos eixos em que olhando para baixo ao longo do eixo-z tem-se a visão usual do plano-xy. Especificamos um ponto no 3-espaço dando suas coordenadas (x, y, z) com relação a esses eixos. Pense nas coordenadas como instruções que lhe dizem como chegar ao ponto: comece na origem, vá x unidades ao longo do eixo-x, depois y unidades paralelamente ao eixo-y e finalmente z unidades paralelamente ao eixo-z. As coordenadas podem ser positivas, zero, ou negativas; uma coordenada zero diz "não se mova nesta direção", e uma coordenada negativa significa "vá no sentido negativo paralelamente a este eixo". Por exemplo, a origem tem coordenadas (0, 0, 0), pois vamos lá partindo da origem fazendo absolutamente nada

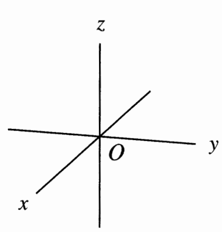


Figura 1.8: Eixos de coordenadas no espaço tridimensional

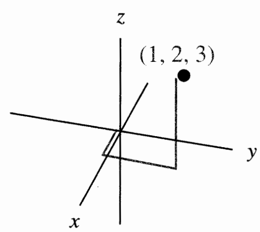


Figura 1.9: O ponto (1, 2, 3) no 3-espaço

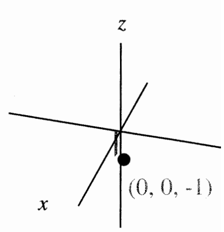


Figura 1.10 O ponto (0, 0, –1) no 3-espaço

Exemplo 1: Descreva a posição dos pontos com coordenadas (1, 2, 3) e (0, 0, –1)

Solução: Chegamos ao ponto (1, 2, 3) partindo da origem, caminhando 1 unidade ao longo do eixo dos x, 2 unidades na direção paralela ao eixo-y e 3 unidades para cima paralelamente ao eixo-z. (Ver Figura 1.9.)

Para chegar a (0, 0, –1) não nos movemos nada nas direções x e y, mas caminhamos 1 unidade no sentido de z negativo. Assim o ponto está no eixo-z negativo. (Ver Figura 1.10.) Pode verificar que a posição final não depende da ordem dos deslocamentos nas direções x, y, z.

Exemplo 2: Você parte da origem, caminha pelo eixo-y uma distância de 2 unidades no sentido positivo, e depois verticalmente para cima uma distância de 1 unidade. Quais são as coordenadas de sua posição final?

Solução: Você partiu do ponto (0, 0, 0). Quando você caminhou ao longo do eixo-y sua coordenada y aumentou para 2. O movimento vertical aumentou a coordenada z de 1; sua coordenada x não mudou. Assim suas coordenadas finais são (0, 2, 1).(Ver Figura 1.11.)

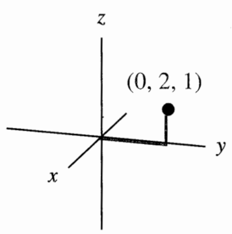


Figura 1.11: O ponto (0, 2, 1) é atingido movendo-se 2 ao longo do eixo-y e 1 para cima

Muitas vezes ajuda imaginar um sistema de coordenadas a três dimensões em termos de uma sala. A origem é um canto ao nível do chão. O eixo-z é a interseção vertical das duas paredes: os eixos x e y são as interseções de cada parede com o chão. Pontos com coordenadas negativas ficam atrás de uma parede na sala vizinha ou abaixo do chão.

Gráficos de equações no espaço tridimensional

Representamos em gráfico no espaço a três dimensões equações envolvendo as variáveis x, y, z.

Exemplo 3: Que forma tem os gráficos das equações $z = 0$, $z = 3$ e $z = -1$?

Solução: Fazer o gráfico de uma equação significa desenhar o conjunto de todos os pontos do espaço cujas coordenadas satisfazem à equação. Assim para fazer o gráfico de $z = 0$ precisamos visualizar o conjunto de pontos cuja coordenada z é zero. Se a coordenada z é zero então devemos estar no mesmo nível vertical da origem, isto é, estamos num plano horizontal contendo a origem. Portanto o gráfico de $z = 0$ é o plano do meio na Figura 1.12. O gráfico de $z = 3$ é um plano paralelo ao gráfico de $z = 0$ mas 3 unidades acima dele. O gráfico de $z = -1$ é um plano paralelo ao gráfico de $z = 0$ mas uma unidade abaixo dele.

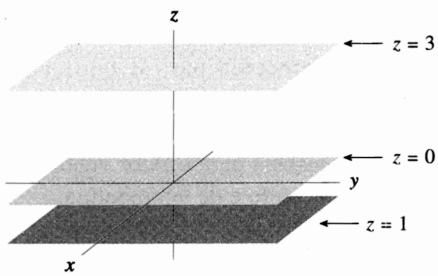
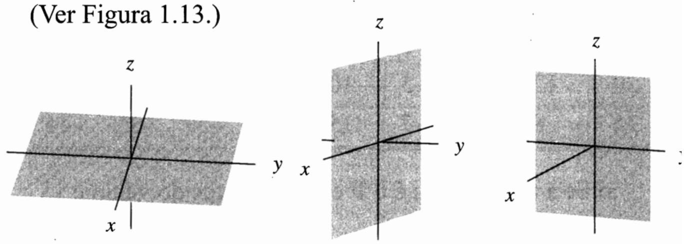


Figura 1.12: Os planos $z = -1$, $z = 0$ e $z = 3$

O plano $z = 0$ contém os eixos x e y de coordenadas e por isso é chamado o plano-xy de coordenadas ou plano-xy simplesmente. Há dois outros planos de coordenadas. O plano-yz contém os eixos y e z e o plano-xz contém os eixos x e z. (Ver Figura 1.13.)



O plano - xy O plano - xz O plano - yz

Figura 1.13: Os três planos de coordenadas

Exemplo 4: Qual dos pontos $A = (1, -1, 0)$, $B = (0, 3, 4)$, $C = (2, 2, 1)$ e $D = (0, -4, 0)$ está mais perto do plano-xz? Qual ponto está sobre o eixo-y?

Solução: O tamanho de coordenada y dá a distância ao plano-xz. O ponto A está mais próximo desse plano pois sua coordenada y é a de menor grandeza. Para ter um ponto sobre o eixo-y nós nos movemos sobre o eixo y mas não nos movemos nada nas direções x e z. Assim, um ponto do eixo-y tem ambas as coordenadas x e z iguais a zero. O único ponto dos quatro que satisfaz a isto é D. (Ver Figura 1.14.)

Em geral se um ponto tem uma de suas coordenadas igual a zero ele está sobre um dos planos coordenados. Se um ponto tem duas coordenadas iguais a zero ele está sobre um dos eixos de coordenadas.

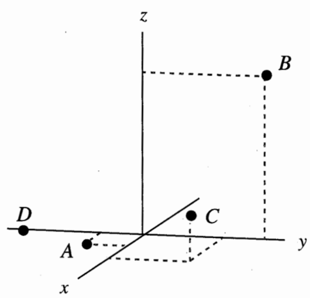


Figura 1.14:
Qual ponto está mais perto do plano-xz? Qual ponto está sobre o eixo-y?

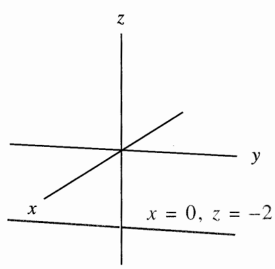


Figura 1.15:
A reta $x = 0, z = -2$

Exemplo 5: Você está 2 unidades abaixo do plano xy e está no plano yz. Quais as coordenadas?

Solução: Como você está 2 unidades abaixo do plano-xy sua coordenada z é -2. Como você está no plano-yz sua coordenada x é zero: sua coordenada y pode ser qualquer coisa. Assim você está em $(0, y, -2)$. O conjunto de todos esses pontos forma uma reta paralela ao eixo-y, 2 unidades abaixo do plano-xy e no plano yz. (Ver Figura 1.15.)

Exemplo 6: Você está no ponto (4, 5, 2) olhando para o ponto (0,5, 0, 3). Você está olhando para cima ou para baixo?

Solução: O ponto em que você está tem coordenada z igual a 2, ao passo que o ponto para o qual você está olhando tem coordenada 3; portanto você está olhando para cima.

Exemplo 7: Imagine que o plano-yz da Figura 1.15 é uma página deste livro. Descreva a região atrás da página.

Solução: A parte positiva do eixo-x se projeta para fora da página; mover-se na direção de x positivo o traz para a frente da página. A região atrás da página corresponde aos valores negativos de x e portanto é o conjunto de todos os pontos do espaço tridimensional que satisfazem à desigualdade $x < 0$.

Distância

No 2-espaço a fórmula para a distância entre dois pontos (x, y) e (a, b) é dada por

$$\text{Distância} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

A distância entre dois pontos (x, y, z) e (a, b, c) no 3-espaço é representada por PG na Figura 1.16. O lado PE é paralelo ao eixo-x, EF é paralelo ao eixo-y e FG é paralelo ao eixo-z.

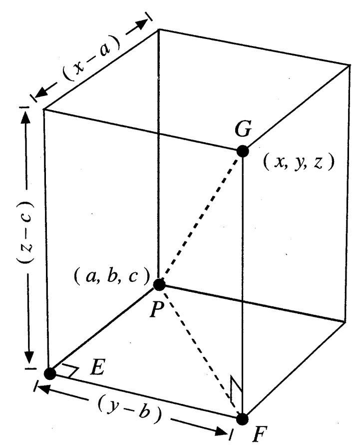


Figura 1.16: A diagonal PG dá a distância entre os pontos (x, y, z) e (a, b, c)

Usando o teorema de Pitágoras duas vezes vem

$$(PG)^2 = (PF)^2 + (FG)^2 = (PE)^2 + (EF)^2 + (FG)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Assim uma fórmula para a distância entre os pontos (x, y, z) e (a, b, c) no 3-espaço é

$$\boxed{\text{Distância} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\ .}$$

Exemplo 8: Ache a distância entre (1, 2, 1) e (–3, 1, 2).

Solução: A fórmula dá

$$\text{Distância} = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{18} = 4{,}24$$

Exemplo 9: Ache uma expressão para a distância da origem ao ponto (x, y, z)

Solução: A origem tem coordenadas (0, 0, 0) assim a distância da origem a (x, y, z) é dada por

$$\text{Distância} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exemplo 10: Ache a equação para uma esfera de raio 1 com centro na origem.

Solução: A esfera consiste de todos os pontos (x, y, z) cuja distância à origem é 1, isto é, que satisfazem à equação

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1\,.$$

Esta é uma equação para a esfera. Se elevarmos ao quadrado ambos os membros obteremos a equação na forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Note que esta equação representa a *superfície* da esfera. A bola sólida limitada pela esfera é representada pela desigualdade $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Problemas para a seção 1.2

1 Qual dos pontos $A = (1{,}3, -2{,}7, 0)$, $B = (0{,}9, 0, 3{,}2)$, $C = (2{,}5, 0{,}1, -0{,}3)$ está mais próximo do plano-yz? Qual pertence ao plano-xz? Qual está mais longe do plano-xy?

2 Qual dos pontos $A = (23, 92, 48)$, $B = (-60, 0, 0)$, $C = (60, 1, -92)$ está mais próximo do plano-yz? Qual está no plano-xz? Qual está mais longe do plano-xy?

3 Você está no ponto (–1, –3, –3), de pé e de frente para o plano-yz. Você caminha 2 unidades para a frente, vira à esquerda e caminha por outras 2 unidades. Qual é sua posição final? Do ponto de vista de um observador olhando o sistema de coordenadas na Figura 1.8 da página 5, você está na frente ou atrás do plano-yz? Está à esquerda ou à direita do plano xz? Está acima ou abaixo do plano xy?

4 Você está no ponto (3, 1, 1) de frente para o plano-yz. Suponha que você está de pé. Você caminha 2 unidades para a frente, vira à esquerda e caminha por outras 2 unidades.

Qual é sua posição final? Do ponto de vista de um observador olhando o sistema de coordenadas da Figura 1.8. na página 5, você está na frente ou atrás do plano-yz? Está à esquerda ou à direita do plano-xz? Está acima ou abaixo do plano-xy? Esboce gráficos das equações nos problemas 5–7 no 3-espaço.

5 $x = -3$ **6** $y = 1$ **7** $z = 2$ e $y = 4$

8 Ache uma fórmula para a mínima distância entre um ponto (a, b, c) e o eixo-y.

9 Descreva o conjunto de pontos cuja distância ao eixo-x é 2.

10 Descreva o conjunto dos pontos cuja distância ao eixo-x é igual à distância ao plano-yz.

11 Qual dos pontos $P = (1, 2, 1)$ e $Q = (2, 0, 0)$ está mais perto da origem?

12 Quais dois dos três pontos $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (3, 2, 1)$ e $P_3 = (1, 1, 0)$ estão mais próximos um do outro?

13 Um cubo está localizado de tal forma que seus quatro vértices de topo têm coordenadas $(-1, -2, 2)$, $(-1, 3, 2)$, $(4, -2, 2)$ e $(4, 3, 2)$. Dê as coordenadas do centro do cubo.

14 Um sólido retangular jaz com seu comprimento paralelo ao eixo-y e suas faces superior e inferior paralelas ao plano $z = 0$. Se o centro do objeto é em $(1, 1, -2)$ e se tem um comprimento de 13, altura de 5 e largura de 6, dê as coordenadas de todos os oito vértices e trace a figura denominando todos os vértices.

15 Qual dos pontos $P_1 = (-3, 2, 15)$, $P_2 = (0, -10, 0)$, $P_3 = (-6, 5, 3)$ e $P_4 = (-4, 2, 7)$ está mais perto de $P = (6, 0, 4)$?

16 Num conjunto de eixos x, y, e z orientados como na Figura 1.8 da página 5, trace uma reta pela origem, jazendo no plano-xz e tal que se você se move ao longo da reta com sua coordenada x crescendo, sua coordenada z vá decrescendo.

17 Num conjunto de eixos x, y e z orientados como na Figura 1.8 da página 5, trace uma reta pela origem, jazendo no plano-yz e tal que se você se move ao longo da reta com sua coordenada y crescendo, sua coordenada z cresce.

18 Ache a equação da esfera de raio 5 centrada na origem.

19 Ache a equação da esfera de raio 5 centrada em $(1, 2, 3)$

20 Dada a esfera

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 4$$

(a) Ache as equações dos círculos (se existem) em que a esfera corta cada um dos planos coordenados.
(b) Ache os pontos (se existem) em que a esfera intercepta cada um dos eixos coordenados.

1.3 - GRÁFICOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Como você visualiza uma função de duas variáveis?

O mapa do tempo da página 1 é um modo de visualizar uma função de duas variáveis. Nesta seção vemos como visualizar uma função de duas variáveis de outro modo, usando uma superfície no 3-espaço.

O gráfico de uma função e como construí-lo

Para uma função de uma variável $y = f(x)$, o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) no 2-espaço, tais que $y = f(x)$. Em geral esses pontos estão sobre uma curva do plano. Quando um computador ou calculadora faz o gráfico de f, o que faz é aproximar calculando pontos no plano-xy, juntando pontos consecutivos por segmentos de reta. Quanto mais pontos, melhor é a aproximação.

Agora considere uma função de duas variáveis.

> O **gráfico** de uma função de duas variáveis f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que $z = f(x, y)$. Em geral, o gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície no 3-espaço

Fazendo o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$

Para esboçar o gráfico de f ligamos pontos como para uma função de uma variável. Primeiro fazemos um tabela de valores de f, tal como a Tabela 1.4.

Tabela 1.4 *Tabela dos valores de* $f(x, y) = x^2 + y^2$

		y						
		−3	−2	−1	0	1	2	3
	−3	18	13	10	9	10	13	18
	−2	13	8	5	4	5	8	13
	−1	10	5	2	1	2	5	10
x	0	9	4	1	0	1	4	9
	1	10	5	2	1	2	5	10
	2	13	8	5	4	5	8	13
	3	18	13	10	9	10	13	18

Agora colocamos pontos. Por exemplo, colocamos $(1, 2, 5)$ porque $f(1, 2) = 5$ e colocamos $(0, 2, 4)$ porque $f(0,2) = 4$. Então ligamos os pontos correspondentes às linhas e colunas na tabela. O resultado é o que se chama modelo *moldura de arame* do gráfico. Preenchendo os interstícios obtemos uma superfície. Foi assim que um computador traçou os gráficos nas Figuras 1.17 e 1.18. Quanto mais pontos forem colocados mais a figura se parece com a superfície na Figura 1.19.

É bom que se verifique se os esboços fazem sentido. Observe que o gráfico passa pela origem, pois $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ satisfaz a $z = x^2 + y^2$. Observe que se fixarmos x e deixarmos y variar, o gráfico mergulha para baixo e depois sobe outra vez, como os elementos nas linhas horizontais da Tabela 1.4. Analogamente, se fixarmos y e deixarmos x variar, o gráfico mergulha para baixo e depois volta para cima, como as colunas da Tabela 1.4.

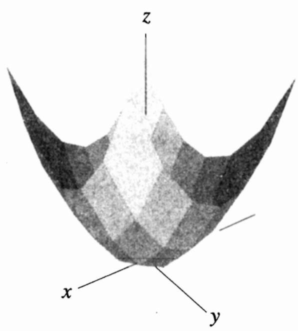


Figura 1.17: Moldura de arame de $f(x, y) = x^2 + y^2$ para $-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$

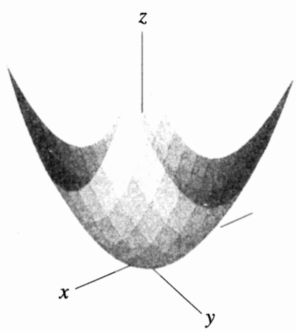


Figura 1.18: Moldura de arame para $f(x, y) = x^2 + y^2$ com mais pontos colocados.

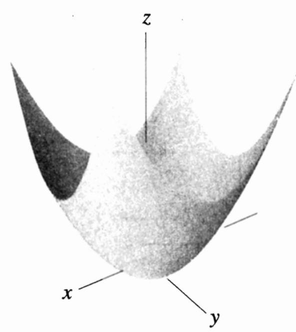


Figura 1.19: Gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ para $-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$

Gráficos novos a partir de velhos

Podemos usar o gráfico de uma função para visualizar os gráficos de funções relacionadas.

Exemplo 1: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Descreva em palavras os gráficos das seguintes funções:

a) $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3$, b) $h(x, y) = 5 - x^2 - y^2$,

c) $k(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

Solução: Sabemos da Figura 1.19 que o gráfico de f é uma concha com o vértice na origem. Disto podemos concluir como são os gráficos de g, h, k.

a) A função $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3 = f(x, y) + 3$ de modo que o gráfico é o de f mas levantado de três unidades. Ver Figura 1.20.

b) Como $-x^2 - y^2$ é o negativo de $x^2 + y^2$, o gráfico de $-x^2 - y^2$ é uma concha revirada de cabeça para baixo. Assim o gráfico de $h(x, y) = 5 - x^2 - y^2 = 5 - f(x, y)$ aparece como uma concha invertida com vértice em (0, 0, 5), como na Figura 1.21.

c) O gráfico de $k(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 = f(x, y - 1)$ é uma concha com vértice em $x = 0$, $y = 1$, pois é aí que $k(x, y) = 0$, como na Figura 1.22.

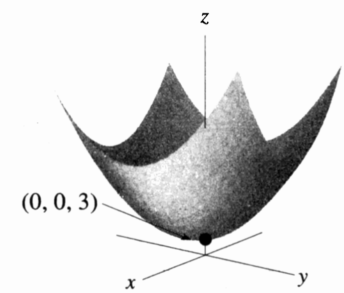


Figura 1.20: Gráfico de $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3$

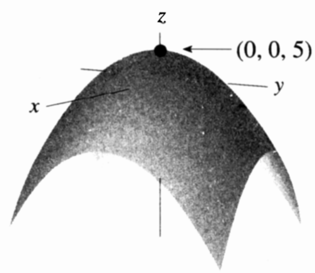


Figura 1.21: Gráfico de $h(x, y) = 5 - x^2 - y^2$

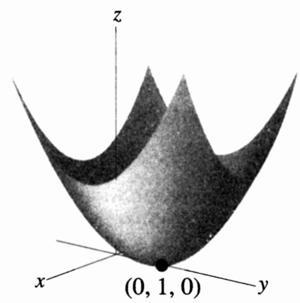


Figura 1.22: Gráfico de $k(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$

Exemplo 2: Descreva o gráfico de $G(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$. Que simetria tem?

Solução: Como a função exponencial é sempre positiva o gráfico jaz totalmente acima do plano-xy. Do gráfico de $x^2 + y^2$ vemos que $x^2 + y^2$ é zero na origem e aumenta quando nos afastamos da origem em qualquer direção. Assim $e^{-(x^2 + y^2)}$ vale 1 na origem e diminui à medida que nos afastamos da origem em qualquer direção. Não pode passar para baixo do plano-xz: em vez disso ele se achata, aproximando-se cada vez mais do plano. Dizemos que a superfície é *assintótica* ao plano-xy. (Ver Figura 1.23.)

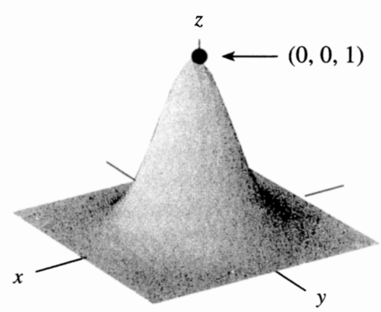


Figura 1.23: Gráfico de $G(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

Agora considere um ponto (x, y) no círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Como

$G(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$, o valor da função G é o mesmo em todos os pontos do círculo. Por isso dizemos que o gráfico de G tem *simetria circular*.

Seções e o gráfico de uma função

Vimos que um bom modo de analisar uma função de duas variáveis é deixar variar uma das variáveis enquanto a outra fica fixa.

> Para uma função $f(x, y)$, a função que obtemos mantendo x fixo e deixando y variar chama-se uma *seção* de f com x fixo. O gráfico de $f(x, y)$ com $x = c$ é a curva, ou seção, que obtemos fazendo a interseção do gráfico de f com o plano $x = c$. Definimos analogamente a seção de f com y fixo.

Por exemplo, a seção de $f(x, y) = x^2 + y^2$ com $x = 2$ é $f(2, y) = 4 + y^2$. O gráfico desta seção é a curva que obtemos cortando o gráfico de f pelo plano perpendicular ao eixo-x em $x = 2$. (Ver Figura 1.24.)

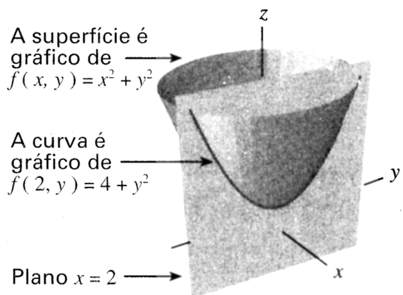


Figura 1.24: Seção da superfície $z = f(x, y)$ pelo plano $x = 2$

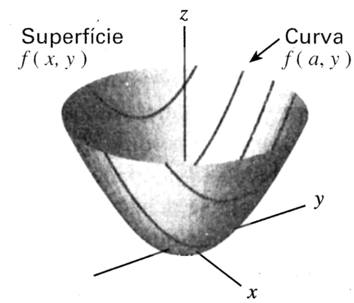


Figura 1.25: As curvas $z = f(a, y)$ com a constante: seção com x fixo.

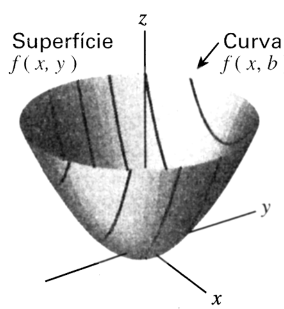


Figura 1.26: As curvas $z = f(x, b)$ com b constante: seção com y fixo.

A Figura 1.25 mostra gráficos de outras seções de f com x fixo. A Figura 1.26 mostra seções com y fixo.

Exemplo 3: Descreva as seções da função $g(x, y) = x^2 - y^2$ com y fixo e depois com x fixo. Use seções para descrever a forma do gráfico de g.

Solução: As seções com y fixo em $y = b$ são dadas por

$$z = g(x, b) = x^2 - b^2.$$

Assim, cada seção com y fixo dá uma parábola abrindo para cima, com mínimo em $z = -b^2$. As seções com x fixo são da forma

$$z = g(a, y) = a^2 - y^2,$$

que são parábolas abrindo para baixo com máximo de $z = a^2$.(Ver Figuras 1.27 e 1.28). O gráfico de g é mostrado na Figura 1.29. Observe as parábolas abrindo para cima na direção x e as parábolas abrindo para baixo na direção y. Dizemos que a superfície tem *forma de sela*

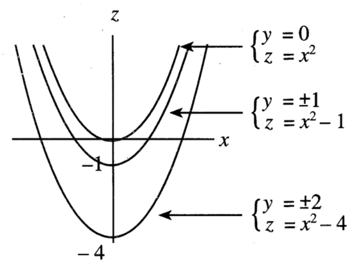


Figura 1.27: Seções de $g(x, y) = x^2 - y^2$ com y fixo

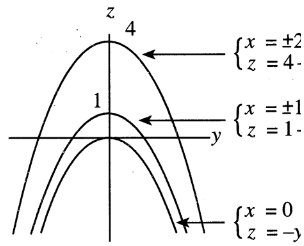


Figura 1.28: Seções de $g(x, y) = x^2 - y^2$ com x fixo

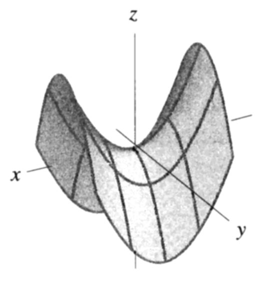


Figura 1.29: Gráfico de $g(x, y) = x^2 - y^2$ mostrando seções

Funções lineares

Funções lineares são centrais no Cálculo de uma variável; são igualmente importantes no Cálculo de várias variáveis. Você talvez possa adivinhar a forma do gráfico de uma função linear de duas variáveis. (É um plano.) Olhemos um exemplo.

Exemplo 4: Descreva o gráfico de $f(x, y) = 1 + x - y$.

Solução: O plano $x = a$ é vertical e paralelo ao plano-yz. Assim a seção com $x = a$ é a reta $z = 1 + a - y$ que se inclina para baixo na direção y. Analogamente, o plano $y = b$ é paralelo ao plano-xz. Assim a seção por $y = b$ é a reta $z = 1 + x - b$ que se inclina para cima na direção x. Como todas as seções são retas, você poderia esperar que o gráfico seja um plano que se inclina para baixo na direção y e para cima na direção x. É o que acontece.(Ver Figura 1.30.)

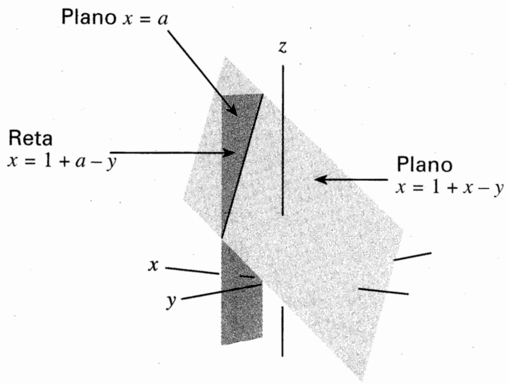


Figura 1.30: Gráfico do plano $z = 1 + x - y$ mostrando seção com $x = a$

Quando falta uma variável: cilindros

Suponha que fazemos o gráfico de uma equação como $z = x^2$ em que falta uma variável. Que aspecto tem a superfície? Como falta y na equação, as seções com y fixo são todas a mesma parábola, $z = x^2$. Quando deixamos y variar para cima e para baixo no eixo-y a parábola varre a superfície em forma de calha mostrada na Figura 1.31. A seção com x fixo é sempre uma reta horizontal, obtida cortando a superfície por um plano perpendicular ao eixo-x.

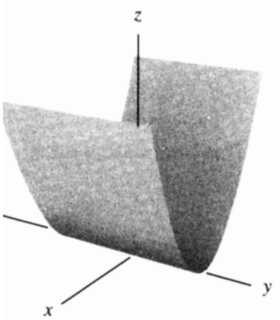


Figura 1.31:
Um cilindro parabólico $z = x^2$

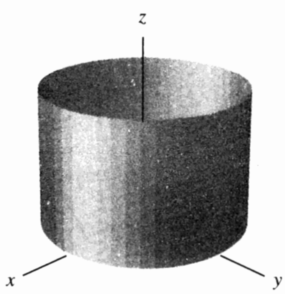


Figura1.32:
Cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$

Essa superfície chama-se um *cilindro parabólico* porque é formado a partir de uma parábola, do mesmo modo que um cilindro comum é formado a partir de um círculo; tem uma seção parabólica em vez de seção circular.

Exemplo 5: Faça o gráfico da equação $x^2 + y^2 = 1$ no 3-espaço.

Solução: Embora a equação $x^2 + y^2 = 1$ não represente uma função, a superfície que a representa pode ter seu gráfico traçado pelo método usado para $z = x^2$. O gráfico de $x^2 + y^2 = 1$ no plano-xy é um círculo. Como z não aparece na equação, a interseção da superfície com qualquer plano horizontal será sempre o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Assim a superfície é o cilindro mostrado na Figura 1.32.

Problemas para a Seção 1.3

1 A superfície na Figura 1.33 é o gráfico da função $z = f(x, y)$ para x e y positivos.
a) Suponha y fixo e positivo. E z cresce ou decresce quando x cresce? Esboce um gráfico de z como função de x.
b) Suponha x fixo e positivo. E z cresce ou decresce quando y cresce? Esboce um gráfico de z como função de y.

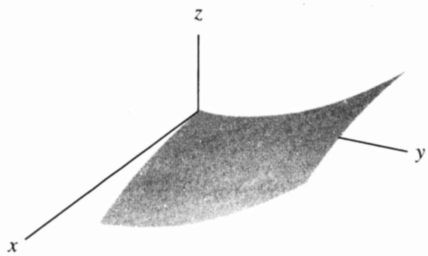


Figura 1.33

2 Combine as seguintes descrições do sucesso de uma companhia com os gráficos da Figura 1.34.
a) Nosso sucesso é medido em reais, pura e simplesmente. Mais trabalho duro não prejudicará mas também não ajudará.
b) Não importa quanto dinheiro ou trabalho duro puséssemos na companhia, não pudemos fazê-la progredir.
c) Embora não fossemos totalmente bem sucedidos, parece que a quantidade de dinheiro investida não importa. Enquanto pusermos trabalho duro na companhia nosso sucesso aumentará.
d) O sucesso da companhia se baseia tanto em trabalho duro quanto em investimento.

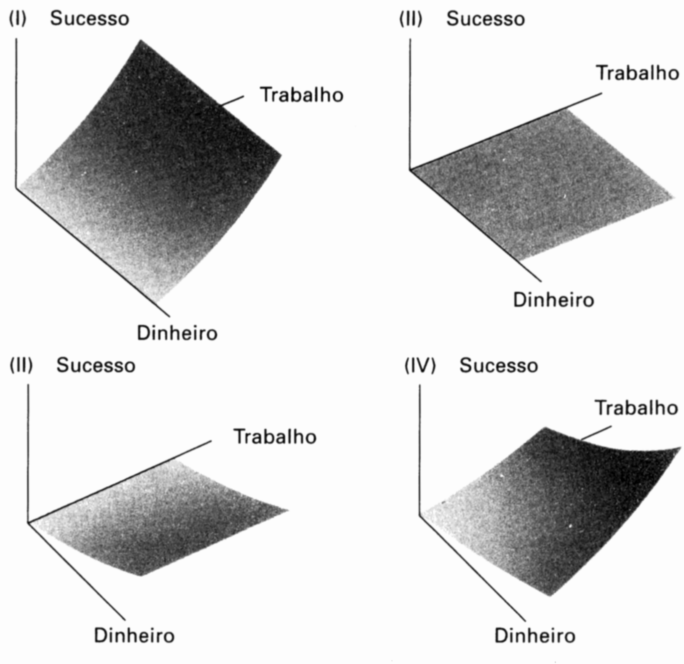


Figura 1.34

3 Para cada uma das funções seguintes decida se poderia ser uma concha, um prato ou nenhum dos dois. Pense num prato como sendo qualquer superfície razoavelmente plana e concha como qualquer coisa que pudesse conter água, supondo que o eixo dos z vai para cima.

a) $z = x^2 + y^2$ b) $z = 1 - x^2 - y^2$

c) $x + y + z = 1$ d) $z = -\sqrt{5 - x^2 - y^2}$

e) $z = 3$

4 Para cada função do Problema 3 esboce seções:

(i) Com x fixado em $x = 0$ e $x = 1$
(ii) Com y fixado em $y = 0$ e $y = 1$

5 Combine as funções seguintes com seus gráficos na Figura 1.35.

a) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ b) $z = -e^{-x^2 - y^2}$ c) $z = x + 2y + 3$

d) $z = -y^2$ e) $z = x^3 - \text{sen}\, y$

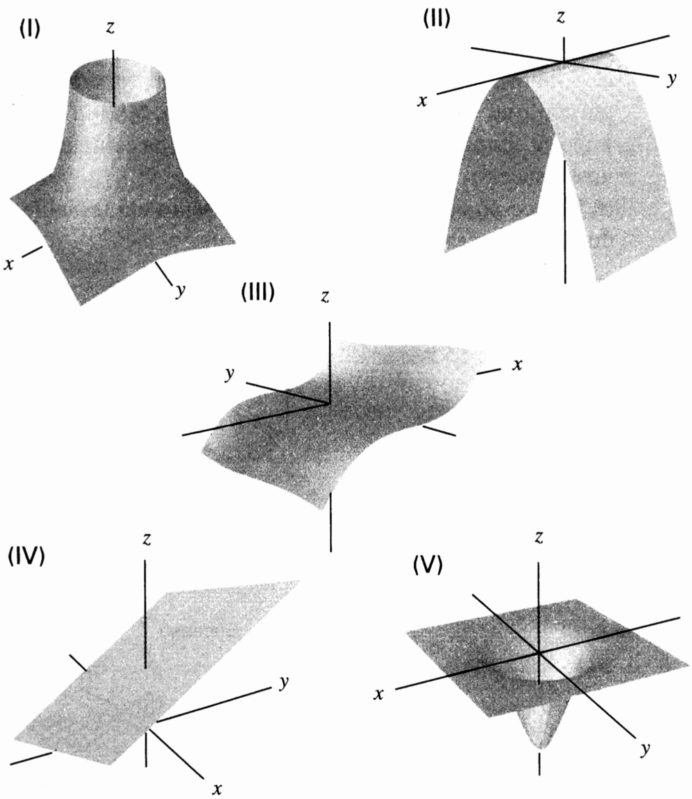


Figura 1.35

6 Você gosta de pizza e de cola. Qual dos gráficos na Figura 1.36 representa sua satisfação como função de quantas pizzas e quantas colas você tem se

a) Para você nunca há pizzas ou colas demais?
b) Pode haver excesso de pizzas ou de colas?
c) Pode haver excesso de colas mas nunca de pizzas?

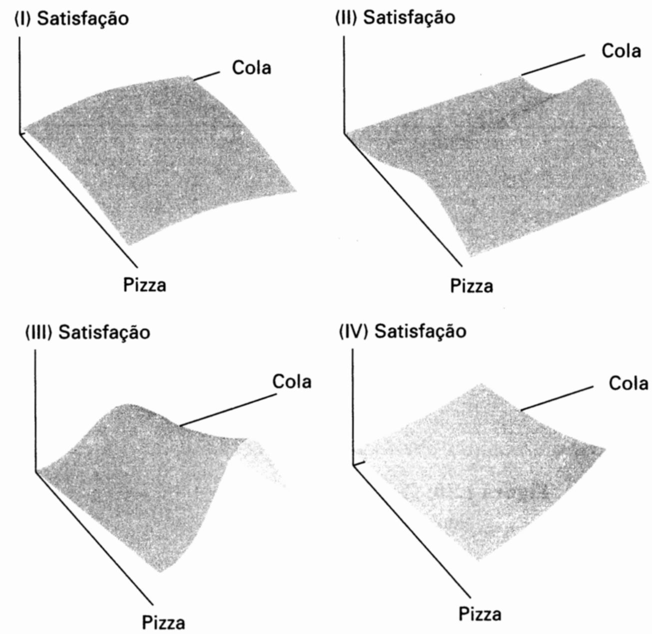


Figura 1.36

7 Para cada um dos gráficos I–IV no Problema 6 esboce:

a) Duas seções com pizza fixa b) Duas seções com cola fixa

8 A Figura 1.37 contém os gráficos das parábolas $z = f(x, b)$ para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. Qual dos gráficos na Figura 1.38 melhor se ajusta a essa informação?

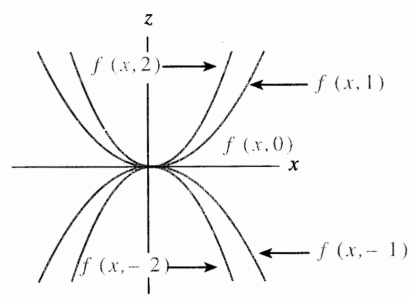


Figura 1.37

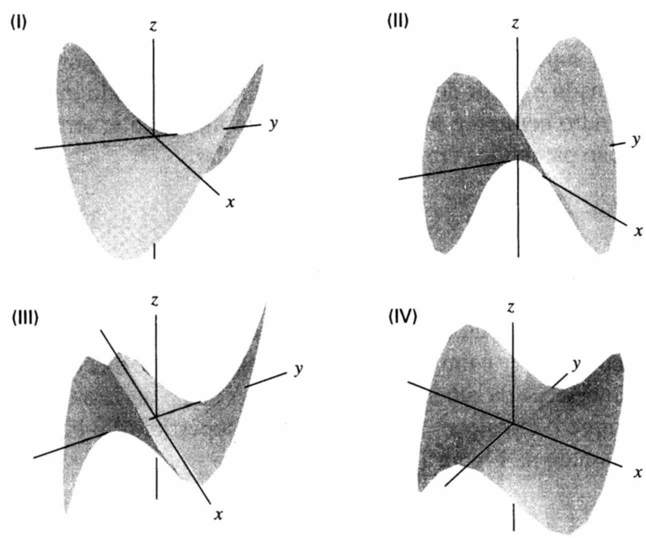


Figura 1.38

9 Imagine uma única onda percorrendo um canal. Suponha que x é a distância ao longo do canal a partir do meio, t é o tempo e z a altura da água acima do nível de equilíbrio. O gráfico de z como função de x e t é mostrado na Figura 1.39.
a) Desenhe o perfil da onda para $t = -1, 0, 1, 2$. (Ponha o eixo-x para a direita e o eixo-z verticalmente.)
b) A onda está indo na direção de x crescente ou decrescente?
c) Esboce uma superfície representando uma onda que vai na direção oposta.

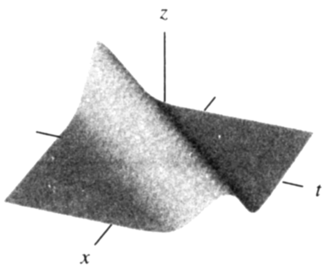


Figura 1.39

10 Descreva em palavras as seções com t fixo e as seções com x fixo da corda de violão vibrante dada pela função

$$f(x, t) = \cos t \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

da página 5. Explique a relação entre essas seções e o gráfico de f.

11 Use um computador ou calculadora para traçar o gráfico da função da corda de violão vibrante:
$g(x, t) = \cos t \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Estabeleça relação entre a forma do gráfico e as seções com t fixo e as seções com x fixo.

12 Use um computador ou calculadora para traçar o gráfico da função de onda circulante.

$h(x, t) = 150 + 30 \cos(x - 0{,}5t), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$
$0 \leq t \leq 2\pi$

Relacione a forma do gráfico a seções com t fixo e as com x fixo.

13 Considere a função f dada por $f(x, y) = y^3 + xy$. Esboce os gráficos das seções com:

a) x fixado em $x = -1$, $x = 0$, e $x = 1$.
b) y fixado em $y = -1$, $y = 0$, e $y = 1$.

14 Um pêndulo consiste de uma massa suspensa na extremidade de uma corda. Num dado momento a corda faz um ângulo x com a vertical e a massa tem velocidade y. Nesse instante a energia E do pêndulo é dada pela expressão*

$$E = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}.$$

a) Considere a superfície que representa a energia. Esboce uma seção por um plano.
(i) Perpendicular ao eixo-x em $x = c$.
(ii) Perpendicular ao eixo-y em $y = c$.

*Adatado de *Calculus in Context*, de James Callahan, Kenneth Hoffman(New York:W.H.Freeman,1995)

b) Para cada um dos gráficos nas Figuras 1.40 e 1.41 use sua reposta à parte a) para decidir qual é o eixo-x e qual é o eixo-y e para pôr unidades razoáveis em cada um.

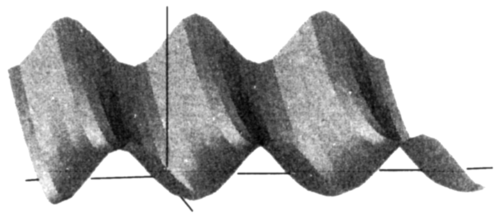


Figura 1.40

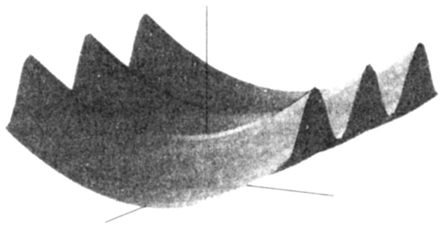


Figura 1.41

1.4 - DIAGRAMAS DE NÍVEL

A superfície que representa uma função de duas variáveis muitas vezes dá uma idéia boa do comportamento geral da função – por exemplo, se é crescente ou decrescente quando uma das variáveis cresce. Porém é difícil perceber valores numéricos numa superfície e pode ser difícil ver todo o comportamento da função a partir da superfície. Assim funções de duas variáveis freqüentemente são representadas por diagramas de curvas de nível como o mapa do tempo na página 1. Curvas de nível têm ainda a vantagem de poderem ser estendidas a funções de três variáveis.

Mapas topográficos

Um dos exemplos mais comuns de diagrama de curvas de nível é um mapa topográfico como o mostrado na Figura 1.42. O mapa dá a elevação na região e é uma boa maneira de obter uma visão geral do terreno: onde estão as montanhas, onde as planícies. Tais mapas topográficos freqüentemente são coloridos em verde nas elevações mais baixas e marrom, vermelho ou branco nas mais altas.

As curvas num mapa topográfico que separam as elevações mais baixas das mais altas são chamadas *curvas de contorno*, porque traçam o contorno ou forma do terreno.* Porque cada ponto ao longo de um contorno tem a mesma elevação, são chamadas também *curvas de nível* ou *conjuntos de nível*. Quanto mais próximas umas das outras estiverem a curvas, mais inclinado é o terreno; quanto mais espaçadas, mais plano. (É claro, desde que a elevação entre contornos varie por uma quantidade constante). Certos aspectos têm características marcantes. Um pico montanhoso tipicamente é rodeado de

*Na verdade em geral não são retas. Podem também ser em pedaços desconexos linhas de nível como os da Figura 1.43. Uma passagem numa cordilheira pode ter contornos como na Figura 1.44. Um longo

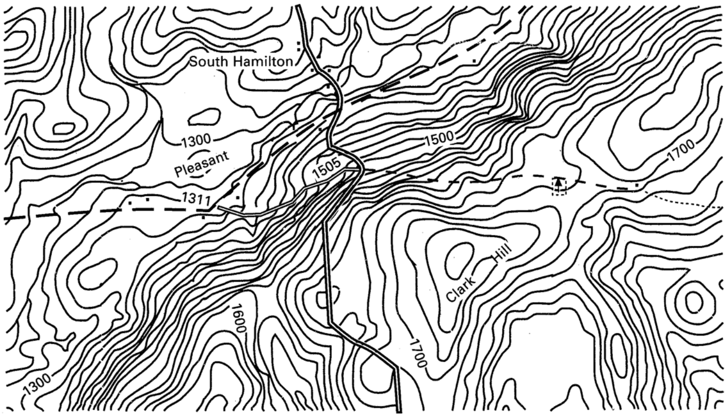


Figura 1.42: Um mapa topográfico mostrando a região em torno de South Hamilton, NY

vale tem linhas de nível paralelas indicando as elevações crescentes de ambos os lados do vale (ver Figura 1.45); uma longa cadeia de montanhas tem o mesmo tipo de curvas de nível, só que as elevações decrescem de ambos os lados do topo. Observe que os números de elevações sobre as curvas de nível são tão importantes quanto as próprias curvas.

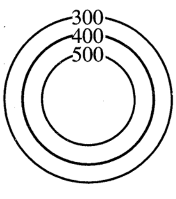


Figura 1.43: Pico

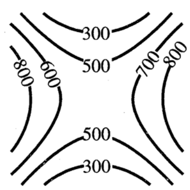


Figura 1.44: Passagem entre duas montanhas

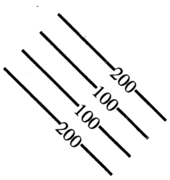


Figura 1.45: Vale longo

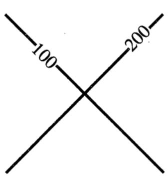


Figura 1.46: Linhas impossíveis

Algumas coisas curvas de nível não podem fazer. Duas curvas correspondendo a diferentes elevações não podem cruzar-se como na Figura 1.46. Se o fizéssem, o ponto de interseção teria duas elevações diferentes, o que é impossível (supondo que o terreno não tem sobressaliências). Freqüentemente seguiremos a convenção de traçar curvas para valores igualmente espaçados de z.

Produção de milho

Curvas de nível podem também ser úteis para exibir informação sobre uma função de duas variáveis sem referência a uma superfície. Considere como representar o efeito de diferentes condições de tempo sobre a produção de milho. O que aconteceria se a temperatura média subisse (por causa do aquecimento global, por exemplo)? O que aconteceria se a quantidade de chuva decrescesse (devido a uma seca)? Um modo de avaliar o efeito de tais mudanças climáticas é usar a Figura 1.47. Este é um diagrama de curvas de nível dando a produção de milho $f(C, T)$ como função da quantidade de chuva C e da temperatura T durante a estação de crescimento.* Suponha que neste momento $C = 45$cm e $T 25°$C . A produção é medida como porcentagem da produção atual: assim, o contorno por $C = 45$, $T = 25$ tem valor 100, isto é, $f(45, 25) = 100$.

Exemplo 1: Use a Figura 1.47 para avaliar $f(54, 26)$ e $f(36, 25)$ e explique a resposta em termos de produção de milho.

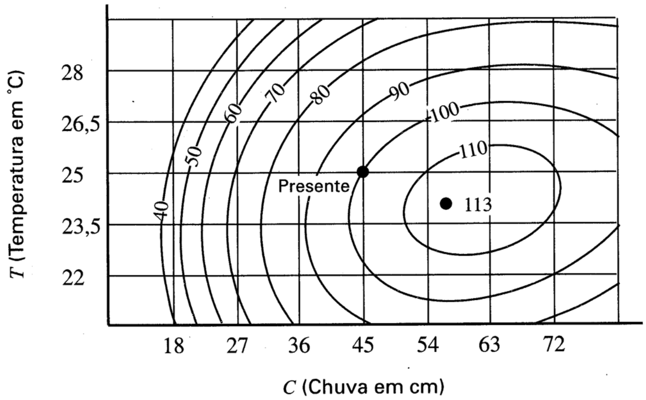


Figura 1.47: Produção de milho como função da quantidade de chuva e da temperatura

Solução: O ponto com coordenada-C 54 e coordenada-T 26,5 está sobre o nível $N = 100$, assim $f(54, 26{,}5) = 100$. Isto significa que se a quantidade de chuva anual fosse 54cm e a temperatura 26,5°C, a produção de milho seria aproximadamente igual à atual, embora estivesse mais chuvoso e quente o tempo que agora.

O ponto com coordenada-C 36 e coordenada-T 25 está aproximadamente a meia distância entre os níveis $N = 80$ e $N = 90$, de modo que $f(36, 25) \approx 85$. Isto significa que se o índice de chuva caísse a 36cm e a temperatura permanecesse a 25°C, a produção de milho cairia a cerca de 85% do que é agora.

Exemplo 2: Descreva em palavras as seções com T e C constantes pelo ponto representando as condições atuais. Dê uma explicação de senso comum para sua resposta.

Solução: Para ver o que acontece com a produção de milho se a temperatura ficar fixa a 25°C mas o índice de chuva variar, olhe a reta horizontal $T = 25$. Partindo do presente e indo para a esquerda ao longo da reta $T = 25$, os valores nas curvas de nível caem. Em outras palavras, se houver uma seca a produção vai baixar. Ao contrário, se o índice de chuva aumenta, isto é, se nos deslocamos da condição atual para a direita ao longo da reta $T = 25$ a produção de milho cresce, chegando a um máximo de mais de 110% quando $C = 63$, e depois decresce (excesso de chuva inunda os campos).

*Adatado de S.Beaty e R.Healy, The Future of American Agriculture, Scientific American, Vol.248, N° 2, Fevereiro1983.(Alterado para nossas medidas na tradução)

Se, em vez disso, a chuva permanece no valor atual e a temperatura cresce, nós nos movemos para cima na reta vertical $C = 45$. Nessas circunstâncias a produção de milho decresce: um aumento de $1^\circ C$ causa queda de 10% na produção. Isto faz sentido porque temperaturas mais altas levam a maior evaporação, portanto a condições mais secas, mesmo com o índice de chuvas constante. Da mesma forma, uma queda de temperatura leva a um ligeiro aumento da produção, atingindo um máximo a cerca de 102% quando $T = 23$, seguido de baixa (o milho não cresce se faz muito frio).

Curvas de nível e gráficos

Diagramas de nível e gráficos são duas maneiras diferentes de representar uma função de duas variáveis. Como passamos de uma a outra? No caso do mapa topográfico, o diagrama foi criado unindo todos os pontos à mesma altura sobre a superfície e projetando a curva sobre o plano-xy.

Como proceder na outra direção? Suponha que quiséssemos traçar a superfície representando a função de produção de milho $M = f(C, T)$ dada pelo diagrama de contornos na Figura 1.47. Ao longo de cada contorno a função tem valor constante; se tomarmos cada contorno e o elevarmos acima do plano a uma altura igual a esse valor, teremos a superfície na Figura 1.48.

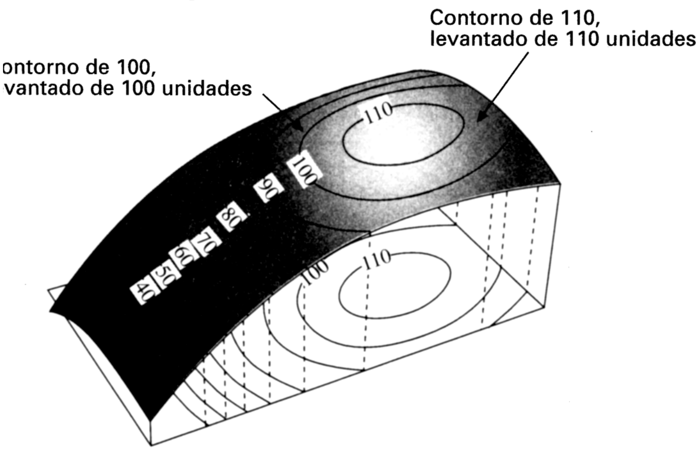


Figura 1.48: Obter o gráfico da produção de milho a partir do diagrama de contornos.

Observe que os contornos levantados são as curvas que obtemos cortando a superfície horizontalmente. De modo geral, temos o seguinte resultado:

> Linhas de contorno, ou curvas de nível, são obtidas de uma superfície cortando-a por planos horizontais.

Achar curvas de nível algebricamente

É fácil achar algebricamente equações para as curvas de nível de uma função f se tivermos uma fórmula para $f(x, y)$. Suponha que a superfície tem a equação.

$$z = f(x, y)$$

Uma curva de nível é obtida cortando a superfície com um plano horizontal de equação $z = c$. Assim a equação para o contorno à altura c é dada por

$$f(x, y) = c$$

Exemplo 3: Ache equações para as curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e trace um diagrama de contornos para f. Relacione o diagrama com o gráfico de f.

Solução: O contorno à altura c é dado por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = c\,.$$

Isto é um contorno somente para $c \geq 0$, Para $c > 0$ é um circulo de raio $\sqrt{c}$. Para $c = 0$, é um único ponto (a origem). Assim, os contornos à elevação de $c = 1, 2, 3, 4, \ldots$ são todos círculos centrados na origem de raios $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots$. O diagrama é mostrado na Figura 1.49. O gráfico em forma de concha de f é mostrado na Figura 1.50. Observe que o gráfico de f sobe mais rapidamente à medida que nos afastamos da origem; isto se reflete no fato de as curvas de nível ficarem mais próximas umas das outras quando nos afastamos da origem; por exemplo, os contornos para $c = 6$ e $c = 8$ estão mais próximos um do outro que os para $c = 2$ e $c = 4$.

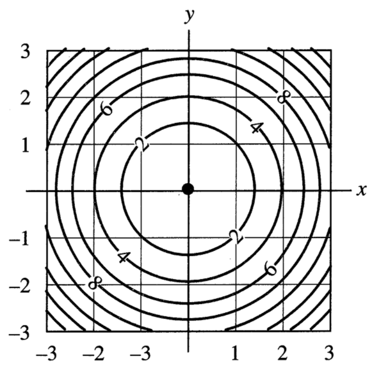


Figura 1.49: Diagrama de contorno para $f(x, y) = x^2 + y^2$ (só valores pares de c)

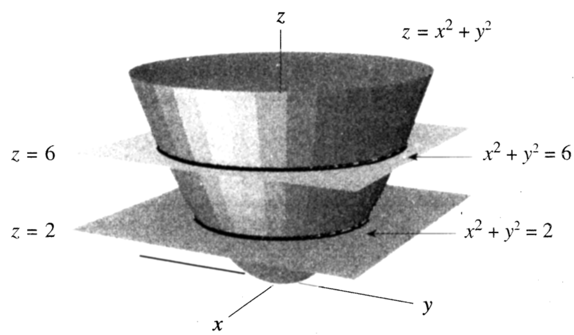


Figura 1.50: O gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Exemplo 4: Trace diagrama de curvas de nível para $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e relacione-o com o gráfico de f.

Solução: A curva do nível c é dada por

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = c$$

Para $c > 0$ isto é um círculo, como no exemplo anterior, mas aqui o raio é c em vez de $\sqrt{c}$. Para $c = 0$ é a origem. Assim, se o nível c aumenta de 1, o raio da curva aumenta de 1. Isto significa que as linhas de nível são círculos concêntricos igualmente espaçados (ver Figura 1.51) que não ficam mais próximos uns dos outro longe da origem. Assim o gráfico de f tem a mesma inclinação constante quando nos afastamos da origem (ver Figura 1.52), tornando-o um cone e não uma concha.

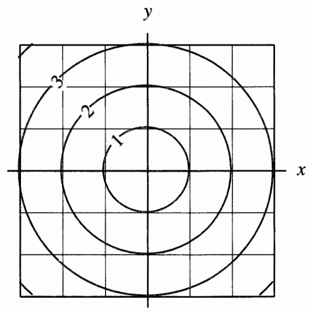


Figura 1.51:
Um diagrama de contornos para $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

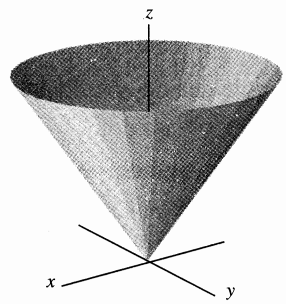


Figura 1.52:
O gráfico de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Nos dois exemplos precedente as curvas de nível eram círculos concêntricos porque as superfícies têm simetria circular. Toda função de duas variáveis que só depende de $(x^2 + y^2)$ tem tal simetria: por exemplo, $G(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ ou $H(x, y) = \text{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

Exemplo 5: Trace diagrama de contornos para $f(x, y) = 2x + 3y + 1$.

Solução: O contorno do nível c tem equação $2x + 3y + 1 = c$. Reescrevendo isto como $y = -(2/3)x + (c - 1)/3$, vemos que os contornos são retas paralelas com inclinação -2/3. A interseção com o eixo-y deste contorno é $(c - 1)/3$; de cada vez que c aumenta de 3, a interseção move-se para cima de 1. O diagrama é mostrado na Figura 1.53.

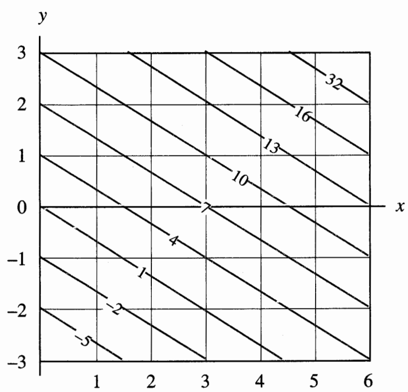


Figura 1.53: Um diagrama de contornos para $f(x, y) = 2x + 3y + 1$

Diagramas de contorno e tabelas

Às vezes podemos ter uma idéia do aspecto do diagrama de contornos de uma função a partir de sua tabela.

Exemplo 6: Relacione os valores de $f(x, y) = x^2 - y^2$ na Tabela 1.5 com seu diagrama de contornos na Figura 1.54

Tabela 1.5 Tabela de valores de $f(x, y) = x^2 - y^2$

y \ x	−3	−2	−1	0	1	2	3
3	0	−5	−8	−9	−8	−5	0
2	5	0	−3	−4	−3	0	5
1	8	3	0	−1	0	3	8
0	9	4	1	0	1	4	9
−1	8	3	0	−1	0	3	8
−2	5	0	−3	−4	−3	0	5
−3	0	−5	−8	−9	−8	−5	0

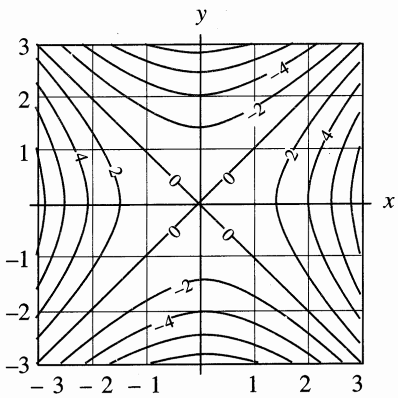


Figura 1.54: Diagrama de contornos $f(x, y) = x^2 - y^2$

Solução: Um aspecto importante dos valores na Tabela 1.5 é o dos zeros nas diagonais. Isto ocorre porque $x^2 - y^2 = 0$ ao longo das retas $y = x$ e $y = -x$. Assim a curva de nível $z = 0$ consiste dessas duas retas. Na região triangular da tabela que fica à direita das duas diagonais os elementos são positivos. À esquerda das duas diagonais são também positivos. Assim no diagrama de contornos os de nível positivo ficarão nas regiões triangulares à direita e à esquerda das retas $y = x$ e $y = -x$. Além disso a tabela mostra que os números da esquerda são iguais aos da direita. Assim cada curva de nível terá dois pedaços, um à direita e outro à esquerda. Ver Figura 1.54. Quando nos afastamos da origem ao longo do eixo dos x atravessamos curvas de nível correspondendo a valores cada vez maiores. No gráfico em forma de sela de $f(x, y) = x^2 - y^2$ mostrado na Figura 1.55 isto corresponde a subir pela sela ao longo de uma crista. Analogamente os contornos negativos ocorrem aos pares nas regiões triangulares acima e em baixo; os valores ficam mais e mais negativos quando nos afastamos ao longo do eixo-y. Isto corresponde a descer na sela ao longo dos vales submersos abaixo do plano-xy na Figura 1.55. Observe que poderíamos também obter o diagrama das curvas de nível traçando as hipérboles $x^2 - y^2 = 0, \pm 2, \pm 4,...$

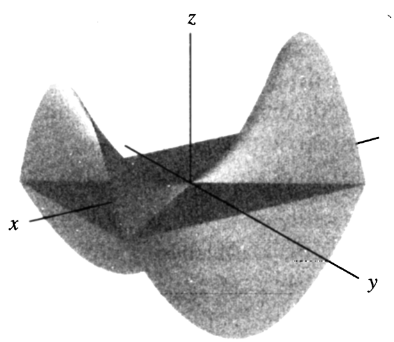


Figura 1.55: Gráfico de $f(x, y) = x^2 - y^2$ mostrando o plano $z = 0$

Uso de diagramas de contornos: a função de produção de Cobb-Douglas

Suponha que você tem um pequeno negócio de impressão e decide expandir porque tem mais encomendas do que pode manejar. Como você deveria expandir? Iniciar um turno noturno e contratar mais empregados? Comprar computadores mais caros mas mais rápidos que permitiriam a seus empregados atuais realizar o trabalho? Ou uma combinação das duas coisas?

Obviamente o modo de chegar a uma decisão na prática envolve outras considerações – tais como saber se você conseguiria ter um turno da noite com pessoal adequadamente treinado ou se há computadores mais rápidos disponíveis. No entanto você poderia modelar a quantidade P de trabalho produzido por seu negócio como uma função de duas variáveis: seu número total N de empregados e o valor total V de seu equipamento.

Como você esperaria que se comportasse uma tal função de produção? Em geral, ter mais equipamento e mais empregados permite que você produza mais. Porém, aumentar o equipamento sem aumentar o número de empregados aumentará a produção, mas não além de um certo ponto. (Se o equipamento já estiver sem utilização, ter mais não adianta.) Também aumentar o número de empregados sem aumentar o equipamento aumentará a produção, mas não além do ponto em que todo o equipamento está inteiramente utilizado, pois novos empregados não terão equipamento disponível.

Exemplo 7: Explique porque o diagrama de contornos na Figura 1.56 não modela o comportamento esperado da função de produção, mas o diagrama da Figura 1.57 sim.

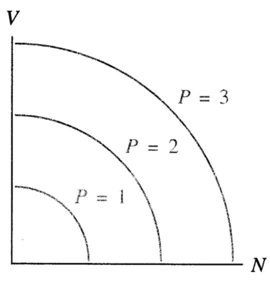


Figura 1.56: Contornos incorretos para a produção

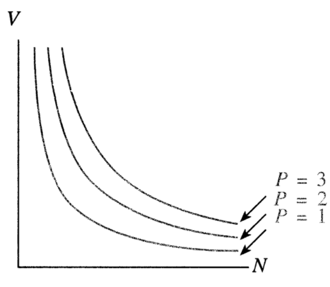


Figura 1.57: Contornos corretos para a produção

Solução: Olhe o diagrama na Figura 1.56. Fixando V num valor particular e deixando N crescer você se move para a direita no diagrama. Ao fazer isso você atravessa curvas de nível com valores de P cada vez maiores, o que significa que a produção aumenta indefinidamente. De outro lado, na Figura 1.57, quando você se move na mesma direção você se moverá quase paralelamente às curvas de nível, cruzando-as cada vez menos freqüentemente. Portanto a produção aumenta mais devagar quando N cresce com V fixo. Da mesma forma, se você fixa N e aumenta V, o diagrama na Figura 1.56 mostra a produção crescendo à taxa constante, ao passo que a Figura 1.57 mostra a produção crescendo mas à taxa decrescente. Assim a Figura 1.57 se ajusta melhor ao comportamento esperado da função de produção.

Fórmula para uma função de produção

Funções de produção com o comportamento qualitativo que desejamos são freqüentemente aproximadas por fórmulas da forma

$$P = f(N, V) = cN^{\alpha}V^{\beta}$$

onde P é a quantidade total produzida e c, α, e β são constantes positivas com $0<\alpha<1$ e $0<\beta<1$.

Exemplo 8: Mostre que as linhas de nível da função $P = cN^{\alpha}V^{\beta}$ tem aproximadamente a forma dos contornos da Figura 1.57.

Solução: As curvas de nível são as curvas em que P é igual a uma constante, digamos P_0, isto é, onde

$$cN^{\alpha}V^{\beta} = P_0$$

Resolvendo para V temos

$$V = \left(\frac{P_0}{c}\right)^{1/\beta} N^{-\alpha/\beta}$$

Assim V é ima função potência de N com expoente negativo e portanto seu gráfico tem a forma mostrada na Figura 1.57.

O modelo de produção Cobb-Douglas

Em 1928, Cobb e Douglas usaram uma função semelhante para modelar a produção de toda a economia dos Estados Unidos no primeiro quarto deste século. Usando estimativas governamentais para P, a produção anual total entre 1899 e 1922, para K, o investimento de capital total, e L, a força de trabalho total, concluíram que P era bem aproximado pela *função de produção de Cobb-Douglas*

$$P = 1{,}01L^{0.75}K^{0.25}$$

Essa função, verificou-se que modelava a economia dos Estados Unidos surpreendentemente bem, tanto para o período em que se baseou quanto por algum tempo depois.

Problemas para a Seção 1.4.

Para as funções no Problemas 1–9 esboce um diagrama de contornos com pelo menos quatro contornos indicados. Descreva em palavras os contornos e como estão espaçados.

1 $f(x,y) = x + y$

2 $f(x,y) = xy$

3 $f(x,y) = x^2 + y^2$

4 $f(x,y) = 3x + 3y$

5 $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 1$

6 $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

7 $f(x,y) = +\sqrt{x^2 + 2y^2}$

8 $f(x,y) = y - x^2$

9 $f(x,y) = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$

10 A Figura 1.58 é um diagrama para o pagamento mensal sobre um empréstimo de 5 anos para a compra de um carro, como função da taxa de juros e da quantia emprestada. Suponha que a taxa de juros é de 13% e que você decide tomar emprestados $6.000.
a) Qual é seu pagamento mensal?
b) Se a taxa de juros baixar para 11% quanto mais você pode tomar emprestado sem aumentar seu pagamento mensal?
c) Faça uma tabela de quanto você pode tomar emprestado, sem aumentar seu pagamento mensal, como função da taxa de juros.

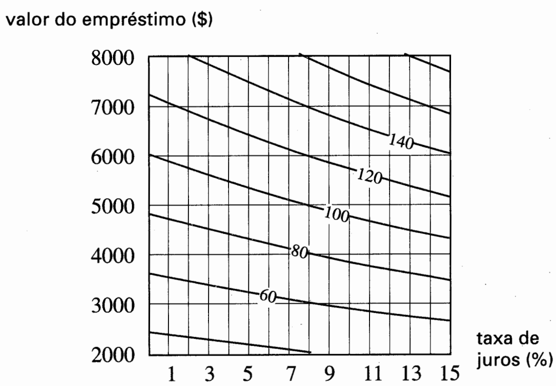


Figura 1.58

11 A Figura 1.59 mostra o mapa de contorno de uma colina com dois caminhos, *A* e *B*.
a) Em qual caminho, *A* ou *B*, a subida será mais íngreme?
b) Em qual caminho, *A* ou *B*, você provavelmente terá uma vista melhor dos arredores? (Supondo que sua visão não seja bloqueada por árvores.)
c) Perto de qual caminho é mais provável que haja um curso de água?

12 Cada um dos diagramas na Figura 1.60 mostra a densidade de população numa certa região. Escolha o diagrama que melhor corresponda a cada uma das situações seguintes. Muitas combinações são possíveis. Escolha alguma razoável e justifique sua escolha.
a) O centro do diagrama é uma cidade.
b) O centro do diagrama é um lago.
c) O centro do diagrama é uma usina de força.

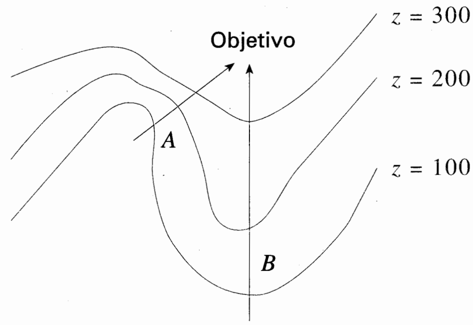


Figura 1.59

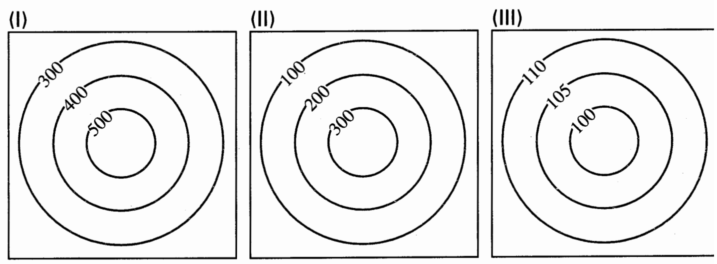


Figura 1.60

Para cada uma das superfícies nos Problemas 13–15 esboce um possível diagrama de contornos, marcado com possíveis valores de z. (Nota: há muitas repostas possíveis.)

13.

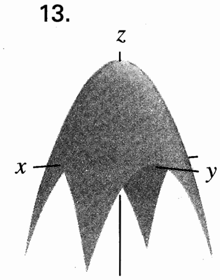


Figura 1.61

14.

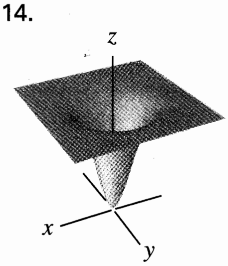


Figura 1.62

15.

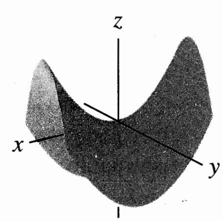


Figura 1.63

16 A Figura 1.64 mostra a densidade da população de raposas P(em raposas por quilômetro quadrado) para o sul da Inglaterra. Trace duas seções diferentes numa reta norte-sul e duas seções diferentes numa reta leste-oeste da densidade de população P.

17 Use um computador ou calculadora para esboçar um diagrama de contornos para a função corda vibrante

$$f(x,t) = \cos t \,\text{sen}\, 2x, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le \pi.$$

Use $c = -2/3, -1/3, 0, 1/3, 2/3$. (Você não poderá fazer isto algebricamente).

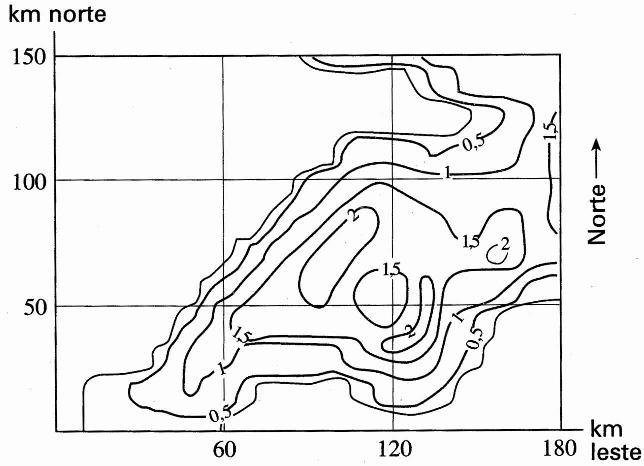


Figura 1.64: Densidade da população de raposas no sudoeste da Inglaterra

18 Na página 3 introduzimos a função da onda

$$h(x, t) = 150 + 30 \cos(0{,}5x - t)$$

Trace um diagrama de contornos usando $c = 4 \;\; 4{,}5 \;\; 5 \;\; 5{,}5 \;\; 6$ para essa função. Explique como seu diagrama se relaciona com as seções de h discutidas na página 3. Onde as curvas de nível são menos espaçadas? Mais espaçadas?

19 Trace diagramas de contorno para cada um dos gráficos de contentamento-pizza-cola dados no Problema 6 na página 13.

20 Uma manufatura vende duas mercadorias, uma a um preço de $3.000 a unidade e a outra a um preço $12.000 a unidade. Suponha que uma quantidade q_1 do primeiro tipo e uma quantidade q_2 do segundo tipo são vendidos a um custo total de $4.000 para o industrial.

a) Expresse o lucro, π, como função de q_1 e q_2.

b) Esboce curvas de lucro constante no plano-q_1q_2 para $\pi = 10.000$, $\pi = 20.000$ e $\pi = 30.000$ e a curva sem prejuízo-sem lucro $\pi = 0$.

21 A córnea é a superfície da frente do olho. Especialistas da córnea usam um SMT ou Sistema de Modelagem Topográfica para produzir um "mapa" da curvatura da superfície do olho. Um computador analisa a luz refletida no olho e traça curvas de nível unindo pontos de curvatura constante. As regiões entre essas curvas são coloridas com cores diferentes.

As duas primeiras imagens na Figura 1.65 são seções de olhos com curvatura constante, a menor sendo de cerca de 38 unidades, a maior cerca de 50. Em contraste, o terceiro olho tem curvatura variável.

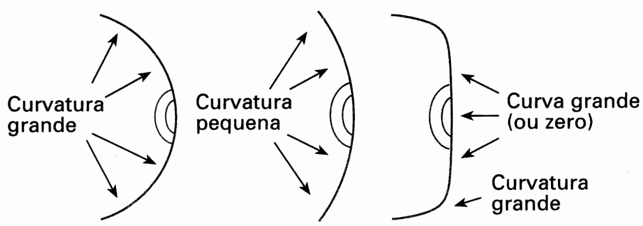


Figura 1.65: Olhos com diferentes curvaturas

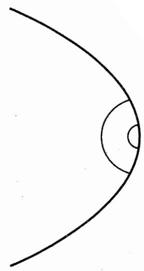


Figura 1.66

a) Descreva em palavras o aspecto do mapa SMT de um olho com curvatura constante.

b) Trace o mapa SMT de um olho com a seção na Figura 1.66. Suponha que o olho é circular quando visto de frente e a seção é a mesma em todas as direções. Ponha marcas numéricas razoáveis em suas curvas de nível.

22 Estabeleça uma correspondência entre as Tabelas 1.6–1.9 e os diagramas de contorno (I)–(IV) na Figura 1.67.

Tabela 1.6

$y\backslash x$	−1	0	1
−1	2	1	2
0	1	0	1
1	2	1	2

Tabela 1.7

$y\backslash x$	−1	0	1
−1	0	1	0
0	1	2	1
1	0	1	0

Tabela 1.8

$y\backslash x$	−1	0	1
−1	2	0	2
0	2	0	2
1	2	0	2

Tabela 1.9

$y\backslash x$	−1	0	1
−1	2	2	2
0	0	0	0
1	2	2	2

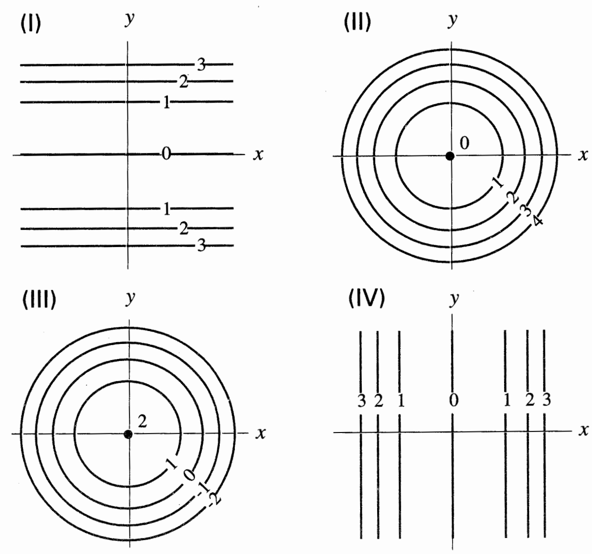


Figura 1.67

23 Estabeleça correspondência entre as superfícies (a)–(e) na Figura 1.68 com os diagramas (I)–(V) na Figura 1.69.

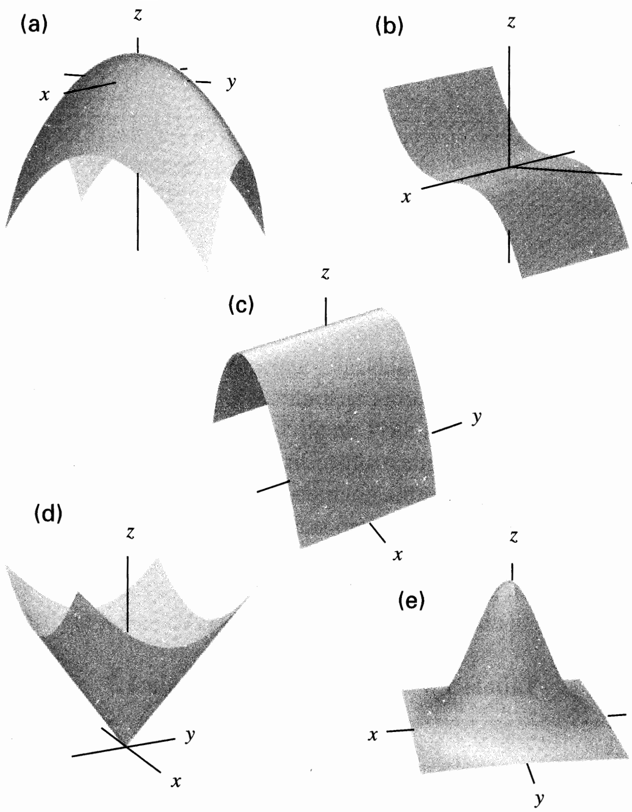


Figura 1.68

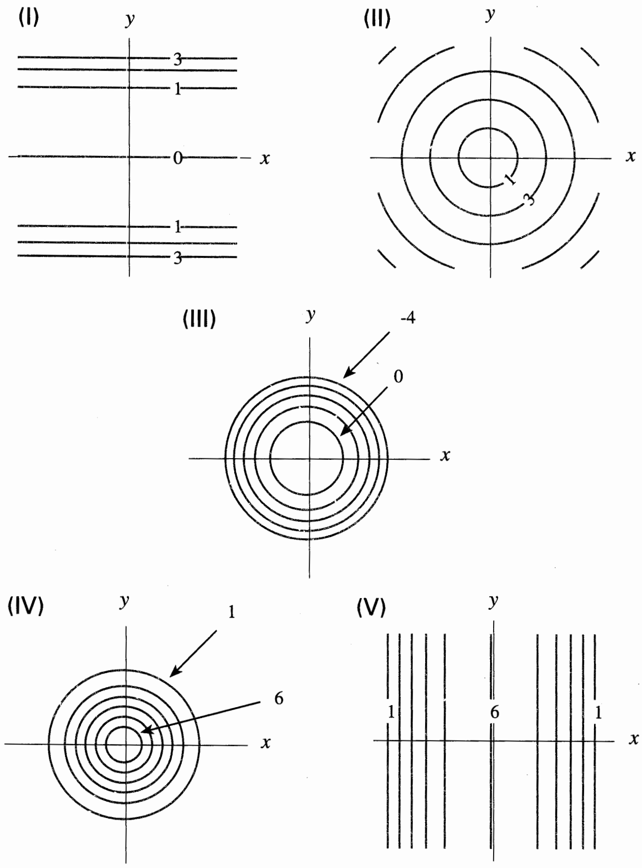


Figura 1.69

24 O mapa na Figura 1.70 é da tese de estudante de último ano do Prof. Robert Cook, Diretor do Arnold Arboretum de Harvard. Mostra curvas de nível da função que dá a densidade de espécie de pássaros em reprodução em cada ponto dos Estados Unidos, Canadá e México.

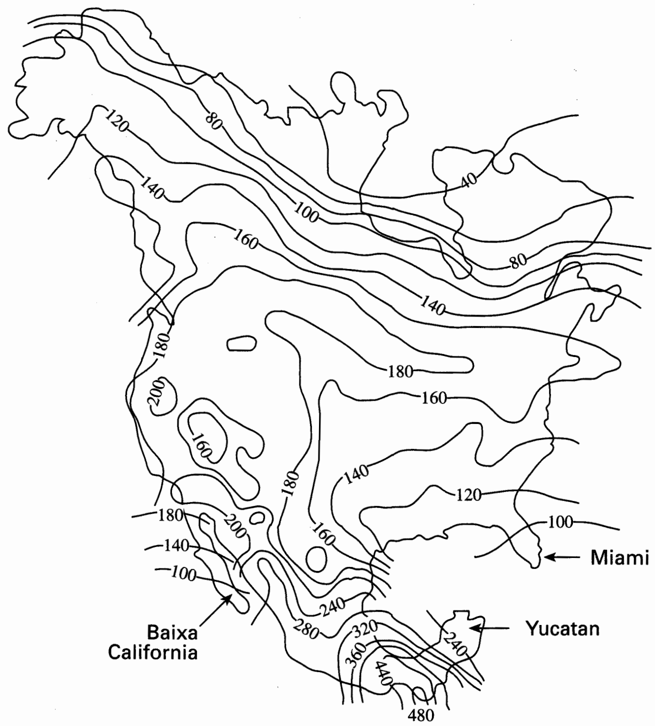


Figura 1.70

Usando o mapa na Figura 1.70 decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Explique suas respostas.

a) Indo do sul para o norte através do Canadá a densidade de espécies aumenta.

b) A densidade de espécies na área em volta de Miami é maior que 100.

c) Em geral penínsulas (por exemplo, Flórida, Baja Califórnia, Yucatan) têm menor densidade de espécies que as áreas em volta delas.

d) A maior taxa de mudança em densidade de espécies com relação à distância se encontra no México. Se você acha que isto é verdade, marque o ponto e a direção que dão a maior taxa de variação e explique porque você escolheu esse ponto e essa direção.

25 A temperatura T (em °C) em qualquer ponto da região $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$ é dada pela função

$$T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

a) Esboce curvas isotérmicas (curvas de temperatura constante) para $T = 100$°C, $T = 75$°C, $T = 50$°C, $T = 25$°C, e $T = 0$°C.

b) Suponha que um inseto que procura calor é colocado em qualquer ponto do plano-xy. Em qual direção ele deveria mover-se para aumentar sua temperatura mais depressa? Como se relaciona a direção com a curva de nível por esse ponto?