Fundamentos de economía minera

Juan Ignacio Guzmán

EDITORIAL REVERTÉ

Fundamentos de **economía minera**

Fundamentos de **economía minera**

Juan Ignacio Guzmán

Ingeniero Civil de Industrias
Doctor en Economía de Minerales

Pontificia Universidad Católica de Chile

EDITORIAL REVERTÉ

GEM
Gestión y Economía Minera Ltda.

Fundamentos de economía minera
© Juan Ignacio Guzmán Barros, 2019

Este libro ha sido publicado con el apoyo de GEM Ltda.

Esta edición:
© Editorial Reverté, Barcelona, 2019

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 2004
ISBN 978-84-291-2808-6

Edición e-book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2019
ISBN 978-84-291-9513-2

Maquetación: Patricia Reverté
Revisión de textos: Paloma Marín Arraiza

Propiedad de:
Editorial Reverté, S.A.
Calle Loreto 13-15, local B
08029 Barcelona
Tel: (+34) 93 419 3336
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo las excepciones previstas por la Ley 23/2006 de Propiedad Intelectual, y en concreto por su artículo 32, sobre 'Cita e ilustración de la enseñanza'. Los permisos para fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra pueden obtenerse en Cedro (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org).

1479

A Flavia, Sofía, Trinidad, Ferrán, Martí y Vicente,
para quienes día a día extraigo
(aunque no siempre de forma óptima) lo mejor de mí

Índice

Prefacio ..... **XI**

Notación ..... **XIX**

El autor ..... **XXIII**

Parte I. Introducción **1**

Capítulo 1. Conceptos básicos **3**

1.1 Economía de los recursos naturales 3
1.2 Economía minera 8
1.3 Geología y tipos de minerales 9
1.4 Cadena de valor en minería 11
1.5 Heterogeneidad del recurso y su rol en la planificación minera 12
1.6 Problemas resueltos 19

Capítulo 2. Los problemas de la explotación de minas **23**

2.1 Tipos de empresas mineras 23
2.2 Precio de los *Commodities* 25
2.3 Problema económico de la empresa minera 28
2.4 Deficiencias de la solución al problema en la actualidad 34
2.5 Problemáticas no económicas de la explotación de minas 36
2.6 Problemas resueltos 38

Parte II. Base Matemática 41

Capítulo 3. Principios de optimización dinámica 43

3.1 Reseña histórica 43
3.2 Definición de optimización intertemporal 44
3.3 Modelo general de optimización dinámica en tiempo discreto 45
3.4 Tipos de soluciones. 48
3.5 Formulación en tiempo continuo 50
3.6 Métodos de optimización dinámica 51
3.7 Aplicación en la industria minera. 51
3.8 Problemas resueltos 56

Capítulo 4. Cálculo de variaciones 61

4.1 Reseña histórica 61
4.2 Funcionales 63
4.3 Condición de primer orden para el cálculo de variaciones. 71
4.4 Cálculo de variaciones en múltiples variables. 84
4.5 Tres casos adicionales 93
4.6 Problemas resueltos 105

Capítulo 5. Programación dinámica 141

5.1 Introducción a la programación dinámica 141
5.2 Derivación matemática de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. . . . 149
5.3 Nota minera: el problema de Kenneth Lane 152
5.4 Otras aplicaciones de la programación dinámica 159
5.5 Problemas resueltos 160

Capítulo 6. Control óptimo. 177

6.1 Principales aplicaciones 177
6.2 Problema del control óptimo 178
6.3 Principio del máximo 180
6.4 Condiciones de transversalidad y condiciones iniciales 185
6.5 Condiciones de segundo orden o suficientes 187
6.6 Problema del control óptimo en la minería y su significado 189
6.7 Casos particulares 193
6.8 Problemas resueltos 200

Capítulo 7. Cálculo estocástico 215

7.1 Reseña histórica 215
7.2 Procesos estocásticos. 216
7.3 Proceso de Wiener. 220
7.4 Movimiento browniano con drift. 225

7.5 Cálculo estocástico de Itô 227
7.6 Proceso de Itô 228
7.7 Lema de Itô 238
7.8 Desigualdad de Jensen 243
7.9 Problemas resueltos 246

Capítulo 8. Optimización dinámica estocástica 269

8.1 Planteamiento del problema 270
8.2 Programación dinámica estocástica 274
8.3 Control óptimo estocástico 281
8.4 Problemas resueltos 287

Parte III. Problemas determinísticos 291

Capítulo 9. El mundo de Hotelling 293

9.1 Supuestos del mundo de Hotelling 293
9.2 Problema de la mina en el mundo de Hotelling 297
9.3 Precio de equilibrio en el mundo ideal de Hotelling 305
9.4 Regla de Hotelling como maximizador del bienestar social 310
9.5 Relajación de los supuestos de Hotelling 313
9.6 Otras extensiones teóricas del mundo ideal de Hotelling 324
9.7 Problemas resueltos 325

Capítulo 10. El problema de determinar la producción óptima 345

10.1 Las restricciones en minería 345
10.2 Planteamiento del problema 346
10.3 Relajando los supuestos del mundo ideal de Hotelling 351
10.4 Análisis de estabilidad 359
10.5 Estática comparativa 366
10.6 Problemas resueltos 370

Capítulo 11. El problema de determinar la inversión óptima 389

11.1 La inversión en minería 389
11.2 Determinación de la capacidad de producción mediante planificación minera 393
11.3 Resolución del problema mediante optimización dinámica 395
11.4 Problemas resueltos 402

Capítulo 12. El efecto de los impuestos y *royalties* 411

12.1 *Royalty* 412
12.2 Impuesto *unit-based* 414
12.3 Impuesto sobre la utilidad o impuesto sobre la renta 418

12.4 Impuesto sobre las ventas (*ad valorem*) 420
12.5 Impuesto híbrido 429
12.6 Impuestos mineros en Chile y en el resto del mundo 429
12.7 Problemas resueltos 432

Parte IV. Problemas estocásticos 439

Capítulo 13. Fuentes de incertidumbre en minería 441

13.1 Fuentes de incertidumbre en un proyecto minero 441
13.2 Relevancia de la incertidumbre de precios de *commodities* en la explotación minera 446
13.3 Mercados de *commodities* 448
13.4 Derivación conceptual del precio en la industria de los *commodities* minerales 449
13.5 Procesos estocásticos para cálculos de precios de *commodities* 456
13.6 Problemas resueltos 461

Capítulo 14. El problema de determinar la producción óptima bajo incertidumbre 471

14.1 La incertidumbre en el problema de optimización de la producción 471
14.2 El problema de la producción óptima con certidumbre 472
14.3 El problema de la producción óptima con incertidumbre 475
14.4 Problemas resueltos 494

Capítulo 15. El problema de determinar la exploración óptima 503

15.1 Introducción 503
15.2 El rol de la exploración 509
15.3 Esfuerzo de exploración y descubrimiento de recursos 513
15.4 Explotación y exploración óptima determinística 522
15.5 Explotación y exploración óptima estocástica 534
15.6 Problemas resueltos 542

Capítulo 16. Introducción a las opciones reales 551

16.1 Introducción 551
16.2 Opciones reales en minería 561
16.3 Oportunidad y *timing* de inversión 571
16.4 Un problema clásico en minería: Brennan y Schwartz (1985) 594
16.5 Inversión secuencial 617
16.6 Opciones de interés para futuras investigaciones 638
16.7 Problemas resueltos 667

Prefacio

En 2003 empecé mi doctorado en economía de minerales, inmediatamente después de haber terminado un pregrado en ingeniería de minas. Aún recuerdo cuando en uno de los cursos iniciales del doctorado, que dictaba John Tilton (quien, junto con Juan Pablo Montero fue mi director de tesis doctoral), me introdujeron por primera vez al «mundo de Hotelling».

Recuerdo mi primera impresión al ver (sin derivación alguna) la «regla de Hotelling» (respecto a que el precio de un *commodity* mineral «debería» crecer según la tasa de interés del mercado). Conceptualmente era muy potente y, pese a que el profesor no había hecho una referencia a lo que yo había estudiado con anterioridad en ingeniería de minas, inmediatamente me pareció que esta regla simple daba una estructura económica al concepto de costo de oportunidad desarrollado por Kenneth Lane en la década de 1960, y que, apenas unos pocos años antes (en 2000 para ser preciso), me habían enseñado mientras estudiaba ingeniería de minas.

La «regla de Hotelling» se estudia en economía de minerales; sin embargo, únicamente como explicación de la evolución de los precios de *commodities* minerales, pero nunca bajo una perspectiva de regla útil para explotar un yacimiento de forma óptima. La lógica detrás de su derivación es que el problema que enfrenta una mina es intertemporal, es decir, las decisiones pasadas condicionan el presente y, a través de las decisiones tomadas hoy, se condicionan a su vez las decisiones que se pueden tomar en el futuro.

Durante mi estudio inicial de la «regla de Hotelling» aprendí que había sido publicada más de tres décadas antes que el concepto de costo de oportunidad de Lane (1931 y 1964, respectivamente). Desde ese momento me pareció sorprendente que Lane no hubiese citado a Hotelling, ya que como economista jefe de Rio Tinto es probable hubiese tenido acceso, sino a toda, a buena parte de la literatura económica asociada a la explotación minera (no muy abundante por lo demás en ese entonces).

Nunca he aclarado esta omisión, pero en algún momento dejé de encontrarla relevante pues descubrí otra omisión de Lane incluso mayor, referida al no reconocimiento del uso de la programación dinámica en la derivación del conocido algoritmo de Lane (lo que discuto en el Capítulo 5 del libro), pese a que Richard Bellman la había desarrollado prácticamente una década antes. ¿Por qué Hotelling era completamente desconocido para la disciplina de ingeniería de minas, mientras que Lane parecía servir de base? En un principio me pareció que la respuesta lógica a esta pregunta provenía de los mismos supuestos que Hotelling había utilizado para derivar su famosa regla. Entre sus seis supuestos (detallados en el Capítulo 9) había uno que simplemente violaba todo lo que hasta ese momento había aprendido de minería. Para la derivación de su famosa regla, Hotelling había recurrido al supuesto de que el recurso que se explotaba era homogéneo. Es decir, cualesquiera fueran las propiedades de interés del mineral (ley, recuperación, impurezas, etc.) debían considerarse constantes a través de todo el depósito.

Entendiendo que la modelación en economía o en ingeniería muchas veces requiere de una simplificación de los supuestos para poder trabajarlos algebraicamente, y que muchas veces el costo de la menor precisión alcanzada al simplificar un problema es inferior a los beneficios en entendimiento de dicha simplificación, el supuesto de homogeneidad podría parecer inocuo. Sin embargo, en este caso, el no reconocer que el depósito mineral es heterogéneo me parecía simplemente imposible de digerir. Hotelling atentaba así contra el más básico de los elementos de la realidad minera: los minerales se distribuyen heterogéneamente dentro de un yacimiento.

Aunque el concepto de costo de oportunidad de Hotelling sigue siendo válido cuando el recurso es heterogéneo, como mostraría Lane posteriormente, la sola lectura del supuesto bajo el que se deriva la regla de Hotelling me parece que podría justificar la completa omisión de Hotelling en la literatura de la ingeniería de minas.

¿Pero por qué Hotelling erró tanto en la selección de su supuesto? Le he dado vueltas a esta pregunta durante más de catorce años y he llegado al convencimiento de que Hotelling simplemente no sabía lo crítico que era este supuesto en el mundo minero real. Después de todo, como estadístico y economista, Hotelling desconocía completamente la geología de los yacimientos o la práctica minera de ese entonces.

A su favor, no obstante, debe aclararse que, en el tiempo en el cual Hotelling publicó sus resultados, la disciplina minera contaba con un escaso avance en cuanto al reconocimiento de la heterogeneidad espacial de los yacimientos, hasta el punto de que disciplinas como la geoestadística o la planificación minera estaban a varias décadas de aparecer en la escena académica o práctica de la explotación de minas.

El llamado «modelo de bloques» de un yacimiento, donde cada «bloque» posee propiedades potencialmente distintas entre sí, fue el primer intento conceptual de incorporar la heterogeneidad de los depósitos minerales y marca, a mi juicio, un antes y un después en la disciplina de ingeniería de minas. Dicha innovación data de 1834 y la desarrolló el geólogo inglés Thomas Spowith, casi un siglo antes de

que se publicara el resultado de Hotelling. Sin embargo, no fue hasta que se publicó el algoritmo de Lerchs-Grosmann en 1965 que el modelo de bloques se popularizó como una forma práctica, y hoy en día imprescindible, para planificar en minería. Hotelling falleció en 1973, pero difícilmente estaba al tanto de estos desarrollos.

Así, cuando Hotelling publicó su artículo derivando la «regla de Hotelling», lo cierto es que la geología de los yacimientos era tan heterogénea como en la actualidad. Sin embargo, esta no era reconocida como un aspecto fundamental del negocio minero simplemente porque no se contaba con las herramientas ni conceptuales ni computacionales que permitieran incorporarlas en la explotación óptima de minas. Además, Hotelling no tenía posiblemente en mente determinar una regla de explotación óptima de una mina, aunque se lea explícitamente así de su artículo, sino más bien demostrar que aparecía un costo de oportunidad asociado a la explotación en el tiempo del mineral cuando el recurso era finito y que en el caso de los recursos infinitos no existía. La decisión de si explotar o no una unidad de mineral hoy debía ser entonces necesariamente respondida mirando al futuro y no con falta de proyección, como se hacía hasta ese entonces.

Aunque trabajé durante seis meses investigando la posibilidad de realizar mi tesis doctoral en el tema específico de la economía de los recursos agotables iniciada por Hotelling en su famoso artículo de 1931, lo cierto es que tuve que abandonar en su momento esta investigación. Dos factores jugaron en contra de continuar con una investigación en esta línea. Por un lado, el darme cuenta de que como área de investigación el *peak* se había producido en la década de 1970 y que a partir de la publicación del libro de Dasgupta y Heal (1979) parecía que nada más de interés podía investigarse en esta disciplina. En la década de 1990 e inicios de la década de 2000 son de hecho muy escasos los artículos en esta disciplina, y todos se refieren a extensiones más bien complementarias a la regla de Hotelling más que a quiebres significativos en el conocimiento en este problema. Menos aún, ninguno de los escritos ayudaba a indagar en la forma óptima de explotar recursos. La segunda razón para abandonar mi intención de realizar una tesis doctoral en esta área fue darme cuenta de que, pese a que mis directores de tesis conocían la teoría relativamente bien (e incluso uno de ellos había hecho aportes directos a la misma), no valoraban o comprendían del todo los problemas que intentaba explorar (más asociados a la explotación de minas que al efecto de los mercados de minerales). Los problemas expuestos escapaban bastante de sus temas de investigación, en ambos casos ligados exclusivamente a la economía y no a la ingeniería de minas.

Es así como hacia el fin de mis cursos e inicio de la investigación de doctorado como tal, tenía un tema completamente distinto, mucho más alineado con la disciplina en la cual me iba a doctorar: mi tema de tesis desarrollaba temas asociados a la organización industrial en las industrias de minerales. Sin embargo, nunca dejé de pensar en la explotación óptima de minas desde una perspectiva holística que mezclara conceptos de económica y de ingeniería.

Cuando me doctoré en 2007 empecé a trabajar en consultoría en minería, y, en un momento en el cual me encontraba trabajando para CRU, me dieron la oportunidad en la empresa de improvisar un tema de mi interés para presentar en el *Workshop on Operations Research in Mining* de 2008, congreso al que no solo terminarían asistiendo los principales exponentes de la planificación minera a nivel mundial, sino también ejecutivos de distintas compañías mineras de gran escala.

Aunque arriesgado, presenté un artículo en el cual desarrollaba una de las problemáticas fundamentales de la planificación minera moderna: la determinación del *pit* final en una mina a rajo. A pesar de que la mayoría de la industria minera descansaba en el supuesto de que el algoritmo de Lerchs-Grossman era una solución óptima para este problema, la incómoda verdad era que este algoritmo solo se hacía cargo de la problemática espacial y no temporal. Como demostré en mi presentación, si la tasa de descuento de la compañía era no nula, entonces probablemente la solución óptima de este problema no se podía derivar utilizando un algoritmo como el de Lerchs-Grossman. Si bien, antes de esta crítica ya existían voces disidentes en la academia con respecto a la pertinencia de la solución de Lerchs-Grossman, mi crítica caló hondo en la conciencia de varios académicos presentes y, en especial, de varios ejecutivos mineros ligados con la planificación minera de las principales compañías productoras.

Desafortunadamente, mi artículo era más una crítica que una base constructiva de trabajo para resolver el problema de la explotación óptima de minas, aunque reconocía algunas líneas de investigación futura de interés, particularmente referidas a la optimización de forma. Sin embargo, sentaba las bases de que el problema minero no era solo «espacial», como los partidarios de Lerchs-Grossman asumían, ni tampoco exclusivamente «temporal», como reconocían los partidarios de Lane. De hecho, el problema es «espacio-temporal» y no podía ser resuelto separando sus componentes espacial y temporal como se había hecho hasta la fecha. Aún hoy es la forma estándar de producir planes mineros en la práctica. Entre 2008 y 2011, mi trabajo como consultor y profesor asociado consumieron todas mis energías por lo que dejé de lado el problema de la explotación óptima de recursos minerales. Hacia 2011, sin embargo, empecé a estudiar por iniciativa propia la teoría general de la relatividad de Einstein y la teoría matemática asociada a la geometría Riemanniana. Ambas teorías presentan conceptos en los que el espacio se deforma al igual que se deforma la superficie de una excavación de una mina a medida que progresa en el tiempo. Estos estudios me permitieron entender la importancia de mezclar espacio y tiempo en un único marco conceptual para buscar definir y resolver correctamente el problema minero.

En 2012, se abrió una oportunidad fortuita para continuar el trabajo en esta interesante línea de investigación. Me contactó la coordinadora académica del actual Departamento de Minería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, donde había impartido clases desde que me titulé de ingeniería de minas en 2003, para

hablarme de la apertura de un nuevo curso titulado «Fundamentos de la economía de minerales». Aunque el nombre era idéntico al del curso que durante casi una década venía dictando John Tilton, lo cierto es que este curso estaba programado para dictarse en pregrado, a diferencia del curso de Tilton, que era de postgrado, y el programa era absolutamente libre. De hecho, me solicitó que, en caso de estar interesado en dictarlo, le entregara una propuesta de programa. Dado que esta era la oportunidad de introducir en ingeniería de minas la posibilidad de ir a los fundamentos teóricos (matemáticos) de la explotación óptima de yacimientos minerales, me embarqué en la tarea de proponer un programa entendía sería revolucionario en aquel momento.

Dicho programa no solo era revolucionario por tener contenidos inéditos en el mundo en una escuela de ingeniería de minas, sino porque una parte de los contenidos serían producto de mi propia investigación (en su mayoría sin publicar, ya se desarrolló durante mi trabajo en consultoría). Además, la matemática enseñada en la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, aunque reconocidamente exigente, es insuficiente para desarrollar en detalle el contenido que buscaba enseñar. Me propuse entonces incluir en el curso las bases matemáticas completas necesarias para el entendimiento de la teoría (Parte II de este libro) y cuyo único objeto era introducir al alumno a las herramientas matemáticas de la optimización dinámica, que era imprescindible para los contenidos de ese curso.

Dejé fuera del programa, fundamentalmente por requerir más tiempo que el disponible durante un semestre académico, la parte matemática más avanzada (optimización de forma y teoría del transporte óptimo, por citar un par de ejemplos). Aun así, desarrollé el curso con objeto de no solo transmitir mi crítica original de 2008 respecto al carácter espacio-temporal del problema de la explotación minera, sino de entregar además las herramientas y conceptos mínimos para resolver el problema espacio-temporal con matemáticas acotadas.

Para lo anterior, sin embargo, tuve que tomar ciertos compromisos. El primero es que para que la matemática sea más sencilla y «reveladora», salvo raras excepciones, el curso se desarrolló para espacio y tiempo continuo. El problema discreto, lejos de ser más sencillo como pudiera parecer al principio, exige recurrir rápidamente a métodos numéricos, que son menos explicativos que las fórmulas matemáticas. Aunque prácticamente ninguna referencia se desarrolla en estas páginas con respecto a la solución numérica discreta, lo cierto es que desde 2010 he desarrollado los elementos tanto a nivel teórico como práctico de la explotación de minas a rajo abierto tanto para espacio como para tiempo discreto. En esta línea, por ejemplo, he liderado el desarrollo de DeepMine, software de planificación minera estratégica que desde 2012 se ha aplicado exitosamente a más de cincuenta operaciones y proyectos mineros en Chile y en el extranjero.

Tras tres años impartiendo el curso de «Fundamentos de economía minera» (como se conoce en la actualidad, título más apropiado que el original) o simplemente FEM,

como le dicen mis alumnos, con ajustes significativos y nuevos desarrollos entre los distintos años, alcancé un programa y contenido que, a mi juicio, generan una base de estudio para cualquier interesado en el problema de la explotación óptima de minas (sea ingeniero u economista). En 2016, durante la cuarta edición del curso y habiendo alcanzado un nivel de comprensión teórico satisfactorio, me propuse escribir un libro basado en los manuscritos de las clases. Dado el escaso tiempo disponible para esto, me apoyé aquel año y el siguiente en los propios alumnos del curso, quienes transcribieron las clases dictadas en formato electrónico editable.

Aunque mi expectativa era que dichas transcripciones fuesen suficientes para materializar el libro, lo cierto es que terminaron siendo un impulso necesario para su ejecución, pero en ningún caso suficiente. El libro actual no puede ser considerado como una simple transcripción de mis clases realizada por mis alumnos. Entre las versiones entregadas por ellos y la versión final del libro no existe prácticamente nada al margen de mis clases manuscritas. Tampoco este libro puede ser simplemente considerado transcripciones de las clases manuscritas, aunque la estructura y contenidos principales provengan textualmente de mis clases. Más bien, este libro recoge mi mejor esfuerzo respecto a exponer en un tratado la base de lo que considero debiesen ser los «Fundamentos de Economía Minera» que durante los años he ido desarrollando, muchas veces considerando literatura dispersa sin un sentido de lógica común, y otras tantas desarrollando yo mismo parte de la teoría.

La desconexión entre la literatura asociada a la ingeniería de minas respecto a aquella de corte económico no deja de sorprenderme. Puesto que mi doctorado fue precisamente en economía de minerales, me dispuse desde ese momento a entender cuáles eran las conexiones lógicas entre ambas disciplinas, y este libro es, a mi juicio, el resultado de dicha búsqueda permanente.

Mi objetivo en este libro es ambicioso, ya que he intentado unificar la teoría de la explotación óptima de minas, mediante el uso de una estructura común y matemática. Aunque en algunos casos he logrado extender la teoría incluso más allá de su conocimiento actual, mi motivación al publicar el libro en su estado actual es contribuir a que futuras generaciones de ingenieros en minas y economistas puedan expandir la teoría de la economía minera hasta el punto de volverla operacional en la práctica de la explotación de minas. No tengo la menor duda de que, si esto se alcanza, no solo los investigadores que realicen los desarrollos nos permitirán expandir el conocimiento a niveles sustanciales (y con una importante cuota de belleza estética), sino que el conocimiento desarrollado servirá como una base útil para mejorar el negocio de la minería y, a través de este, el bienestar de la sociedad.

Por tanto, la unificación que presento en este libro es fruto de una década y media de pensamiento profundo, en la que, además, he desplegado todo mi conocimiento en ingeniería, economía y matemáticas (tengo títulos formales en las dos primeras y la tercera ha sido mi pasión por ya treinta años). Si he tenido éxito o no en este emprendimiento, solo los lectores y futuras generaciones de investigadores podrán

decirlo. Por el momento, espero este libro sirva para mejorar y modernizar el entendimiento que se tiene de la explotación óptima de minas.

Antes de cerrar este prefacio, me interesa aclarar algunos puntos y dar los agradecimientos respectivos. El primer punto se refiere al idioma elegido. A pesar de que el consejo de alguna gente fue que mi esfuerzo se debería concentrar en un libro en inglés, me parece que hoy en día una publicación como esta en castellano se justifica debido a que una fracción muy relevante de la minería a nivel mundial se desarrolla en países de habla hispana o donde el castellano es hablado como segunda lengua. Aunque no descarto que, dependiendo del éxito del libro, haya una traducción al inglés, lo cierto es que me parece que el idioma base de la minería mundial hoy en día es el castellano y la selección del idioma del libro es una apuesta en este sentido.

En cuanto a la complejidad de las matemáticas requeridas por el libro, desafortunadamente, no creo sea posible indagar en la teoría de la explotación de minas con matemáticas más simples. El problema es extremadamente complejo y por tanto es esperable que las matemáticas requeridas no sean triviales. Por lo mismo, he tratado de exponer toda aquella matemática que escapa de los contenidos mínimos de un programa tradicional de ingeniería o economía (incluyendo álgebra lineal, geometría, así como cálculo uni y multivariado) asumiendo que el lector no posee conocimiento previo.

Aunque, evidentemente, todos los errores que pueda contener el libro son de mi exclusiva responsabilidad, no puedo sino reconocer aquí el apoyo de innumerables personas que han hecho posible que este proyecto se materialice, así como que han influido de alguna u otra forma en mi concepción mental y me han permitido asentar mis conocimientos en la forma que se exponen en este libro.

Aunque definitivamente no puedo nombrarlos a todos, por la extensión necesaria para esto y por el riesgo de dejar de nombrar a algunos por equivocación, nada de esto sería posible si no hubiese sido por el apoyo constante y admiración personal que siento hacia mis directores de tesis doctoral, John Tilton y Juan Pablo Montero, quienes me guiaron en el proceso de aprender a investigar y pensar más allá de la base de conocimiento actual. El apoyo de los profesores del Departamento de Minería de la Pontificia Universidad Católica de Chile ha sido también permanente en la concepción de este libro.

Mis compañeros de trabajo en GEM, así como los distintos profesionales y ejecutivos de la minería con los que he tenido la oportunidad de trabajar en esta década y media de ejercicio profesional han sido invaluables fuentes de aprendizaje para formar mi visión expuesta en este libro.

Asimismo, los más de 200 alumnos de ingeniería de minas que han tomado mi curso han sido clave, no solo por el apoyo a la transcripción original de mis clases, sino, y no menos importante, por darme la oportunidad de desarrollar los conceptos mediante la explicación y defensa de estos. La alta motivación e intelectualidad de gran parte de estos alumnos, y en particular de quienes han sido ayudantes del curso

durante estos cinco años, han sido cruciales para el desarrollo constante del material aquí expuesto. Mención especial merece Matías Vergara, quien como ayudante del curso fue el primero en tener la visión del valor del contenido del curso para la elaboración de un libro como el presente.

Por su parte este libro no se habría podido publicar sin el apoyo de la empresa GEM, de la cual soy socio fundador, y que generosamente patrocinó esta publicación. Durante la década en la que he sido gerente general de esta empresa, he podido desarrollar no solo la teoría sino también las bases prácticas de la explotación óptima de minas. Desde 2013 contamos en la empresa con el software DeepMine, que concreta en la práctica gran parte de los desarrollos teóricos descritos en el libro, y con el cual hemos podido comprobar en más de cincuenta operaciones y proyectos el aporte de valor de incluir la optimización dinámica en el problema de la explotación de minas.

Agradezco también a Sebastián Cifuentes, alumno de magíster de la Pontificia Universidad Católica de Chile, y uno de los ayudantes del curso, por su ayuda con la edición final del borrador y la confección de prácticamente todas las figuras y tablas del libro.

Finalmente, mis sinceros agradecimientos al equipo de Editorial Reverté, y en especial a Patricia Reverté y Julio Bueno, por su minucioso y excelente trabajo de edición del borrador original.

Juan Ignacio Guzmán

Notación

Este libro ha sido escrito utilizando las reglas de ortografía de la Real Academia Española de 2010.

Todas las variables presentadas en el libro, sean temporales o espaciales, se encuentran definidas en espacio continuo. En casos excepcionales se desarrollan estas variables en tiempo y/o espacio discreto, pero cuando este es el caso se especifica para no generar confusión. El tiempo se expresa por t e, implícitamente, a menos que se indique otra cosa, el tiempo inicial viene dado por $t_0 = 0$. En cuanto al espacio N-dimensional, este se denota de acuerdo con R^N. Un punto en el espacio físico se describe por el vector $x = (x, y, z) \in R^3$. Nótese que en este caso x en negrita se reserva para variables vectoriales mientras que x sin negrita describe una variable escalar.

Las funciones continuas se denotan por C^0, mientras que las funciones diferenciables por C^1. De forma análoga las funciones α-ésimas diferenciables se denotan por C^α. Por su parte, las derivadas totales de la función $x(t)$ son referidas de forma indistinta como $x'(t)$, $\dot{x}(t)$ o $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$. La selección de una u otra forma se adapta de acuerdo a cada capítulo o sección, sin existir, necesariamente, una guía estricta en el uso de una u otra forma específica. Para el caso en que la función $x(t)$ se presenta en tiempo discreto, la diferencia de la variable por $\Delta x = x_{t+1} - x_t$. Los diferenciales (sobre funciones continuas) a su vez se denotan por dx en el caso de aquellos determinísticos y por dz para los estocásticos (diferenciales de Wiener).

La derivada parcial de una función $f(x, y)$ con respecto a x se expresa indistintamente por $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ o f_x, aunque, en general. se prefiere esta última forma (más moderna a la primera. Según esta última notación la segunda derivada parcial con respecto a x corresponde a f_{xx} (que en notación clásica corresponde a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$).

Debido a que el tópico fundamental del libro corresponde a la optimización dinámica, el interés en general consiste en encontrar variables que son funciones del tiempo, muchas veces se omitirá la dependencia temporal con el único objeto de hacer menos engorrosos el álgebra o la presentación. Así, variables como $q(t)$ o $S(t)$, de uso extensivo en el libro, serán muchas veces simplificadas y escritas simplemente como q o S, respectivamente. En algunos casos excepcionales se utilizará la notación q_t o S_t, pero en general esta es una notación menos extensiva. La justificación para mantener en algunos casos esta última notación es que todavía es de uso frecuente en la literatura.

El autor es consciente de que el entendimiento del lector aumenta en la medida que exista consistencia en la selección del nombre y notación de las variables usadas una y otra vez a lo largo de las páginas del libro. En general esta ha sido la predisposición al escribir, muchas veces llegando incluso a modificar la notación original de los artículos o libros consultados. Sin embargo, pretender absoluta consistencia en un libro que cuenta con alrededor de 700 páginas y que describe y utiliza decenas de variables no fue siempre posible.

Así, por ejemplo, el libro denota por $\mathrm{E}[\cdot]$ y a $\mathrm{Var}[\cdot]$ las esperanzas y varianzas matemáticas de una variable aleatoria, mientras que $\overline{x}$ describe el promedio o media aritmética de una variable (esto es $\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i$). A menos que se haya cometido un error tipográfico (que en una obra de este tamaño no puede descartarse *a priori*), el uso de esta notación debiese siempre mantenerse.

A su vez, el libro presenta una serie de variables económicas y financieras de uso extensivo en la literatura académica y la industria minera. Por eso, se ha tratado de mantener consistencia a lo largo de las páginas para denotar el precio del commodity a extraer (P), los costos de producción (C), los costos marginales de producción (C_q o C'), la utilidad instantánea (π) y la tasa de descuento (r). En el caso del funcional de mayor relevancia para esta obra, el Valor Actual Neto, este se puede denotar por sus siglas en castellano (VAN) o, cuando la exposición es puramente matemática, por J o V (este último caso en general se limita al Capítulo 16 debido a que esta es la notación preferida en el caso de la teoría de las opciones reales).

De forma general, las unidades de medida no desempeñan un papel relevante en la exposición (aunque sí en la práctica de la explotación de minas) debido a que el tratamiento es usualmente algebraico. Sin embargo, cuando se ha requerido para mejorar la exposición o plantear algunos problemas aplicados, se utiliza el Sistema Internacional de Unidades de Medida (SI).

Algunas letras mayúsculas se han intentado reservar (como los casos antes mencionados J o V) para variables de uso frecuente. Tal es el caso de H para denotar hamiltoniano, L para lagrangiano, S para reservas remanentes y T para la vida de la mina (*life of mine* o LOM). En el caso de las letras minúsculas el libro mantiene q para referirse a la producción de la mina.

Finalmente, algunas letras para denotar variables de interés se han tomado prestadas de otros alfabetos distintos al latino. Tal es el caso de τ para los impuestos, Ω para el volumen excavado y de þ para el *timing* óptimo de inversión. Esta última letra (*thorn*, del alfabeto inglés antiguo) es primera vez que se utiliza según el conocimiento del autor para referirse a esta variable, y su uso se justifica debido a que tanto t, T como τ se usaron para expresar otras variables.

El autor

Juan Ignacio Guzmán es Ingeniero Civil de Industrias Mención en Minería de la Pontificia Universidad Católica de Chile y doctor en Economía de Minerales por la misma universidad. Desde 2003 se ha desempeñado como consultor nacional e internacional de minería en más de 25 commodities minerales, incluyendo cobre, oro, litio, potasio, molibdeno, hierro, aluminio, petróleo, gas y yodo, entre otros. En 2006 fue profesor visitante en la Escuela de Economía y Negocios de la Colorado School of Mines en Estados Unidos. En 2008 fundó Gestión y Economía Minera Limitada (GEM), donde hoy se desempeña como gerente general. En GEM ha liderado alrededor de 250 estudios en los ámbitos de la economía, evaluación, estrategia y optimización para la industria minera en Chile y otra decena de países. Desde 2003 ha sido profesor de pre y postgrado en la Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad de Chile y Universidad de los Andes, en cursos asociados a la ingeniería industrial y de minas, así como a la economía de minerales.

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo se describen los conceptos básicos que se deben considerar para estudiar los fundamentos de la economía minera. En particular, esta disciplina se sitúa como parte de la economía de los recursos naturales, donde se relaciona con la economía de minerales, más tradicional y reconocida. A pesar de la relación entre ambas, el objeto de estudio no es idéntico. Por eso, este capítulo describe las principales diferencias entre ambas disciplinas, para luego reforzar la cadena de valor del proceso minero, introducir la terminología principal de las áreas afines, así como detallar la importancia de la heterogeneidad y distribución espacial de los *commodities* minerales en los yacimientos y su rol en el estudio de la economía minera.

1.1 Economía de los recursos naturales

La economía se divide en tres áreas principales, a saber: microeconomía, macroeconomía y econometría.

La economía de los recursos naturales es una las disciplinas de la microeconomía, además de otras como por ejemplo la organización industrial, la economía de la salud o la educación. La microeconomía es la parte de la economía que estudia el comportamiento económico de los agentes económicos individuales (los consumidores, las empresas, los trabajadores y los inversores), así como de los mercados en los que interactúan. La microeconomía considera las decisiones personales para cumplir ciertos objetivos propios, como puede ser la maximización de la satisfacción personal en el caso de las personas o de las utilidades o valor presente neto en el caso de las empresas.

La economía de los recursos naturales corresponde al estudio de cómo la sociedad asigna los recursos naturales escasos como reservas pesqueras, plantaciones de árboles, agua dulce, minerales, entre otros[1]. Dentro de los recursos naturales se pueden considerar los siguientes:

- Minerales.
- Forestales.
- Tierra.
- Plantas.
- Animales terrestres.
- Peces.
- Agua.
- Servicios meteorológicos.

Evidentemente, la tendencia es a pensar en que los recursos anteriores son todos de distinta naturaleza y, en este punto, sería crítico tener una forma de clasificarlos. Para tal fin, se presenta en la subsección siguiente la ecuación fundamental de los recursos naturales.

1.1.1 Ecuación fundamental de los recursos naturales

Sea S_t la cantidad de reservas de un recurso natural disponible para su explotación en el instante t. Sin pérdida de generalidad, se asumirá en un principio que el tiempo es discreto y, para efectos de la derivación de la ecuación, se asumirá la existencia de dos periodos distintos: 0 y 1. Durante el periodo 0, se explota una cantidad ΔS del recurso y en dicho periodo se suma al reservorio inicial una cantidad Q_0. De aquí, la relación fundamental entre dichas variables, denominada «ecuación fundamental de los recursos naturales», viene dada por:

$$S_1 = S_0 - Q_0 + \Delta S \tag{1.1}$$

La ecuación anterior no solo relaciona en el tiempo al *stock* o reserva (S) de un recurso natural con su flujo (Q), sino que el término ΔS entrega en sí mismo una forma simple de clasificación. De hecho, dependiendo del signo de este término se podrán clasificar los recursos en renovables ($\Delta S > 0$), no renovables ($\Delta S = 0$) y perecibles ($\Delta S < 0$).

Los recursos renovables son aquellos que se van reponiendo en el tiempo. De esta forma las cantidades en el reservorio del recurso están afectas al proceso de

[1] Debe distinguirse este concepto del de economía ambiental, cuyo objeto de estudio es la forma en que se disponen los residuos o desechos de la sociedad y la calidad resultante del agua, el aire y el suelo como receptores de dichos desechos. La economía ambiental también se encarga del estudio de la conservación de los ambientes naturales y la biodiversidad. Para una introducción a la economía ambiental, el lector puede consultar Field y Field (2016).

reposición propio. En el caso de los recursos biológicos (flora y fauna) el proceso de reposición guarda relación con la reproducción de dichos recursos.

Los recursos no renovables son aquellos que no se reponen, al menos no en una escala de tiempo humana. Los minerales son un buen ejemplo, pues el proceso de formación de los yacimientos en la Tierra, o de los elementos químicos en el espacio, ocurre a una escala temporal mucho mayor a la relevante para el ser humano. De hecho, los procesos de formación de depósitos minerales en la Tierra pueden tomar millones de años, mientras que la especie humana (*homo sapiens*) lleva existiendo no más de 300 000 años (Stringer y Galway-Witham, 2017).

Por último, los recursos perecibles son aquellos cuya reservas se agotan, total o parcialmente, con el paso del tiempo. Un ejemplo de esto son los glaciares, que por efecto del calentamiento global están derritiéndose en muchos casos. Incluso antes de considerar una explotación (o afectación) artificial, muchos glaciares están destinados a desaparecer.

En línea con los conceptos anteriores, es relevante mencionar el concepto de «agotabilidad». Se dice que un recurso es agotable cuando sus reservas pueden reducirse a cero y no volver a generarse más. Si bien se tiende a pensar en los recursos no renovables y perecibles como agotables, una simple revisión de la ecuación (1.1) basta para determinar que la agotabilidad no requiere que $\Delta S \leq 0$. Más bien, en una economía compuesta solo de dos periodos se requiere para garantizar agotabilidad únicamente que:

$$S_0 - Q_0 + \Delta S = 0 \tag{1.2}$$

La ecuación (1.2) permite entrever que, para que un recurso natural sea agotable, la tasa de extracción debe ser igual o mayor a las reservas iniciales más la tasa de reposición del recurso. De esta forma, aunque es trivial demostrar que tanto los recursos no renovables como perecibles deben ser agotables, los recursos renovables pueden también caer en esta categoría. De hecho, la historia de la Tierra está llena de casos de extinciones de especies animales y vegetales. Algunas de estas extinciones se deben a razones naturales, pero sin duda el hombre en su explotación, a veces desmedida, ha acabado con innumerables especies (Ceballos *et al.*, 2015).

La agotabilidad es en sí misma uno de los conceptos fundamentales en la economía minera, pues la empresa minera debe lidiar constantemente con el agotamiento del depósito o la calidad del recurso que explota.

Otro concepto clave es el de «reciclabilidad». Ciertos recursos no renovables son reciclables. Es decir, una vez que han sido extraídos y utilizados para un uso final, al alcanzar su ciclo de vida pueden volver a ser utilizados pese a que ahora ya no necesitan volver a extraerse. Este es el caso de metales como el cobre o el hierro, pero también de otros no metales como las gemas preciosas. Algunos *commodities* minerales no son, sin embargo, reciclables. Esto ocurre pues una vez extraídos son finalmente consumidos. Un ejemplo de *commodities* minerales que se consumen son

el petróleo, el carbón o el uranio utilizados en la generación de energía, así como el cloruro de potasio utilizado en fertilizantes.

La ecuación fundamental de los recursos naturales debe ser ajustada para dar cuenta de un recurso que posee un cierto nivel de reciclabilidad. De esta forma, si $0 < \alpha < 1$ es el nivel de reciclabilidad, es decir, la fracción del recurso extraído en $t = 0$ que se recicla en $t = 1$, entonces se tendrá que:

$$S_1 = S_0 - Q_0 + \alpha Q_0 \tag{1.3}$$

Nótese, sin embargo, que el término α no es como tal una tasa de reposición. De hecho, la cantidad de reservas en cualquier instante de tiempo no puede ser mayor a las reservas iniciales existentes del recurso.

Toda la exposición anterior depende de que el tiempo sea discreto. Pero ¿cómo cambiarían las ecuaciones si ahora el tiempo es continuo?

En un tiempo t cualquiera se debe cumplir que el cambio diferencial en las reservas ($\dot{S}_t$) sea idéntico a lo que sale o entra en el sistema (Figura 1.1)[2].

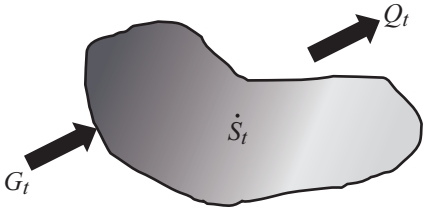


Figura 1.1 Representación gráfica del cambio de las reservas en tiempo continuo.

La Figura 1.1 considera que el recurso posee una tasa de reposición o generación G_t, que incrementa las reservas en cada instante de tiempo, mientras que simultáneamente se realiza una extracción de Q_t unidades del recurso. De aquí, la ecuación fundamental de los recursos naturales en tiempo continuo vendrá dada por:

$$\dot{S}_t = -Q_t + G_t \tag{1.4}$$

Nótese que en la ecuación anterior el subíndice t representa que la variable es función del tiempo, lo que alternativamente se puede escribir como Q_t o $Q(t)$[3]. La ecuación (1.4) en general representa una ecuación diferencial para S_t o $S(t)$, cuya solución viene dada por:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} [-Q(s) + G(s)]\mathrm{d}s \tag{1.5}$$

en donde t_0 corresponde al tiempo inicial.

---

2 En sistemas dinámicos como los descritos, el que describen las reservas remanentes es común utilizar la notación de Newton para derivada, (esto es, $\dot{S}$) en lugar de la notación dS/dt. En este libro se utilizarán ambas indistintamente.

3 En este último caso la ecuación (1.4) se escribiría $\dot{S}(t) = -Q(t) + G(t)$.

Un ejemplo de ecuación diferencial como la (1.4) es la ecuación logística, que expresa la relación entre el cambio de una población animal (por ejemplo, de peces) con respecto a una constante de crecimiento interno (r) y a una constante de capacidad máxima poblacional (K). Esta ecuación, presentada en 1838 por Verhulst (Verhulst, 1838), es:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = r\left(1-\frac{S}{K}\right)S \tag{1.6}$$

En la ecuación (1.6) la tasa de generación viene dada precisamente por el término $r\left(1-\frac{S}{K}\right)S$ (mientras que la tasa de extracción es nula, es decir nada se extrae de la población en un instante de tiempo dado), y en la actualidad es una de las formas funcionales preferidas para dar cuenta de la generación en sistemas biológicos. Como es de esperar, esta función tiene importantes aplicaciones en la economía de los recursos naturales, en particular en aquellos del tipo biológico.

Integrando la ecuación (1.6) según (1.5) se obtiene la siguiente solución:

$$S(t) = \frac{KS_0e^{rt}}{K + S_0(e^{rt} - 1)} \tag{1.7}$$

De la fórmula anterior queda claro que, sin fuerzas externas asociadas a una extracción, la población tenderá a su nivel máximo potencial K. Sin embargo, bastaría con que la tasa de extracción fuese lo suficientemente alta y el recurso se volviese agotable. Si la población llega a caer a 0, nunca más podrá regenerarse debido a que $S(t) = 0$ para todo t siempre que $S_0 = 0$.

1.1.2 Propósito de la economía de los recursos naturales

Como se detalla en Field (2008), la economía de los recursos naturales tiene como propósitos fundamentalmente los siguientes cuatro:

- Conservación.
- Tasa de explotación óptima.
- Derechos de propiedad.
- Distribución de rentas.

La conservación da cuenta de la posibilidad de mantener una cantidad suficiente de reservas para el uso de las generaciones futuras, considerando que el valor mismo de las reservas es positivo *per se*. La disciplina de la economía que trata en detalle esta problemática es la economía ecológica.

La tasa de explotación óptima de los recursos naturales es un área de la optimización estática y/o dinámica, que da cuenta de la determinación de las políticas óptimas (desde el punto de vista privado y/o social) de los recursos naturales. Ejemplos

clásicos en este sentido son el de determinar la tasa de explotación óptima de un mineral en una mina o de una cosecha en el caso de una plantación vegetal.

El estudio de los derechos de propiedad es significativo cuando las reservas del recurso no son completamente apropiables desde el punto de vista de los derechos privados. Un ejemplo de esto es un banco de peces en altamar, puesto que no existe necesariamente un dueño del recurso y más bien el derecho pertenece a aquel que lo explote primero. El problema de los derechos de propiedad es particularmente importante en el caso de los recursos que pueden ser considerados bienes públicos pero cuya explotación es privada, lo que se describe magistralmente en Hardin (1968) y se conoce como el «problema de los comunes» o la «tragedia de los comunes» (término original introducido por Hardin).

Finalmente, los recursos naturales suelen formar parte integral del capital natural de los países. Es por esto que muchas veces se gravan tributos especiales o *royalties* para distribuir en la sociedad las rentas que una explotación de dichos recursos pudiera conllevar.

El presente libro se limita a estudiar los recursos minerales desde la segunda de estas perspectivas, pero como se verá en las Partes III y IV, la tasa óptima de explotación conlleva un conjunto más rico de problemas. En el caso de la minería, a diferencia de otros recursos naturales, su estudio debe realizarse con un marco científico propio basado en las geociencias (geología, geotecnia, geometalurgia, etc.) e ingeniería de minas.

1.2 Economía minera

En la presente sección se hará uso del término «economía minera» para referirse a la disciplina que mezcla la economía de los recursos naturales, correspondiente a la determinación de la tasa óptima de explotación de una operación minera, con la ingeniería de minas y las geociencias. Esta fusión, aunque conceptualmente reconocida en la literatura, no cuenta con una aceptación como disciplina en sí misma y, desde este punto de vista, este libro plantea la necesidad y pertinencia de empezar a trabajar esta disciplina de forma independiente.

En la actualidad, la determinación de la tasa óptima de explotación de minas suele trabajarse en dos disciplinas distintas con casi nula comunicación entre sí: la economía de minerales y la planificación minera.

La economía de minerales entrega un contexto general al problema y, para alcanzar ecuaciones e intuiciones simples, se suele eliminar la mayor parte de las problemáticas reales de la explotación de yacimientos minerales, de forma que muchos de los resultados dejan de ser válidos en el mundo real o no es evidente cómo extrapolarlos al mundo real. Para una revisión en detalle de las políticas asociadas a la explotación de los recursos minerales en un contexto puramente de la economía de minerales, se puede consultar Tilton y Guzmán (2016).

Por su parte, la planificación minera es una disciplina de la ingeniería de minas, pero que cuenta con un escaso reconocimiento académico, pues ataca los problemas desde una base muy particular, al contrario de lo que sucede en la economía y, en particular, a la economía de minerales. Es decir, esta disciplina busca encontrar el plan minero de cada operación más que establecer una teoría robusta o serie de reglas operacionales con respecto a la óptima explotación de los recursos[4].

De hecho, esta sección busca contribuir con la discusión académica ya que, pese a que se podrían estudiar muchas de las problemáticas presentadas recurriendo solo a la economía de minerales, esta última no cuenta con las herramientas de geociencias e ingeniería aplicadas a una operación minera necesarias para resolver el problema planteado.

Recuadro 1.1

La economía de minerales como disciplina económica

La economía de minerales es una disciplina interdisciplinaria que involucra el estudio de la economía de los mercados de minerales, así como las industrias en los que operan, además de la forma en la que las firmas y actores se comportan y operan en dichos mercados.

La economía de minerales cubre, en su sentido más amplio, tres clases de *commodities*: energéticos, metales y no metales. Los minerales energéticos son el carbón, petróleo, gas natural y uranio. Desde el punto de vista de la literatura académica, estos son sin duda los *commodities* más estudiados. Por su parte, los metales cubren un amplio espectro de *commodities* (metales base, preciosos, livianos, etc.), y aplicaciones. Los no metales se han estudiado bastante menos, pese a ser de extremada relevancia para el ser humano moderno, pues sus usos incluyen no solo joyería (gemas), sino también fertilizantes, abrasivos y otros productos necesarios para el desarrollo de la industria.

Para una introducción relativamente exhaustiva de la economía de minerales, con un foco en los mercados de *commodities* metales y no metales, se puede consultar Tilton y Guzmán (2016). Para el caso de los *commodities* energéticos, se puede consultar Dahl (2014).

1.3 Geología y tipos de minerales

A diferencia de gran parte de los sectores productivos, la minería es única en el sentido de que los minerales —su insumo básico— se desarrollan de forma exógena a la voluntad o esfuerzo del hombre, en una escala temporal geológica que se extiende mucho más allá que la humana. Así, por ejemplo, Meyer (1985) muestra que mientras las formaciones de depósitos pórfidos de cobre es reciente en escala geológica (< 500 millones de años), la formación de depósitos estratificados de hierro se pro-

[4] Existen, sin embargo, teorías, conceptos y reglas utilizadas por la planificación minera, pero salvo raras excepciones son en general de escaso soporte matemático y teórico.

dujo entre 3000 y 2000 millones de años atrás. Esto explica, por ejemplo, por qué la cordillera de los Andes (que es relativamente joven en escala geológica) es rica en pórfidos de cobre, mientras que gran parte del hierro estratificado se encuentra en formaciones litológicas más antiguas en Brasil o en el oeste de Australia.

Meyer (1985) también discute cómo la distribución de la formación de depósitos de cromo, níquel, cobre y zinc muestra una gran variabilidad en cuanto al tiempo de formación, mientras que los depósitos de hierro, titanio, uranio, oro, plata, molibdeno, tungsteno y estaño son más restringidos. En cuanto a su distribución geográfica, los depósitos minerales de cobre, oro o plomo en general poseen una amplia distribución, mientras que otros minerales como el niobio, tungsteno o tierras raras se encuentran más restringidos.

La formación y distribución de los depósitos de minerales en el mundo es clave para el entendimiento de los mercados de minerales. Este entendimiento es tarea fundamental de los geólogos, quienes, en distintas disciplinas y especialidades, son capaces no solo de entender el proceso de formación de un depósito, sino también de determinar la cantidad y calidad de un mineral y los elementos que lo componen. La especialidad que contiene las técnicas, metodologías y estudios relevantes para el entendimiento de los depósitos minerales es la geología económica (Evans, 1997; Pohl, 2011; Arndt y Ganino, 2012).

A diferencia de otros recursos naturales como los bosques o el agua, la disposición y tamaño de los depósitos minerales no son conocidos *a priori*. De hecho, se requiere de un proceso de exploración intensivo en tiempo y recursos para identificar, delinear y cuantificar los recursos de un depósito mineral. No es de extrañar que la exploración geológica, que se encarga precisamente de todo esto, sea una de las actividades principales de la industria minera, al punto de que prácticamente todas las firmas industriales llevan a cabo algún nivel de exploración para descubrir, aumentar o mejorar su base de recursos.

El primer aspecto fundamental de la exploración geológica en búsqueda de depósitos minerales es el lugar donde realizarla. No solo este debe contar con un potencial geológico adecuado, de acuerdo al *commodity* de interés, sino que también el país receptor de la exploración debe contar con una legislación apropiada para que aquellos que realizan la exploración (altamente riesgosa por lo demás), en caso de tener éxito en el descubrimiento de recursos, sean capaces de usufructuar de la riqueza que genere una mina a partir de dichos depósitos. Aunque la mayoría de los países poseen legislaciones al respecto, muchas veces en la práctica la exploración no es posible, ya que, o bien no se cuenta con la posibilidad de adquirir licencias de exploración y/o explotación, o bien, aun habiendo adquirido la licencia, la inestabilidad de las instituciones en el país dificultan la apropiación de una parte suficiente de la riqueza que se genere. En algunas zonas geográficas existe incluso prohibición de explorar debido a acuerdos internacionales. Un ejemplo es el caso de la Antártida, que se encuentra protegida para efectos de exploración de recursos minerales hasta

que se revise el Protocolo al Tratado Antártico sobre Protección del Medio Ambiente en 2048. Otro caso en el cual existe una legislación internacional regulada por la Autoridad Internacional de los Fondos Marinos es el fondo submarino en aguas internacionales. Aunque *a priori* puede parecer extraño, existe una activa exploración para buscar minerales en la corteza oceánica (Marvasti, 2013).

En cuanto a los *commodities* minerales, no existe una clasificación estándar, aunque se suelen dividir en energéticos, metales y no metales (ver Recuadro 1.1). Considerando esta clasificación y con base en la Tabla 1.1 de Tilton y Guzmán (2016), el mercado de los *commodities* minerales en 2014 superó los 1,5 trillones de dólares en ventas, representando alrededor del 2 % del PIB mundial en dicho año.

1.4 Cadena de valor en minería

Una vez se han identificados los recursos minerales el siguiente paso es su transformación a un activo económico, proceso que consiste en la determinación del subconjunto de recursos que finalmente se convertirá en reservas. La función de conversión de recursos en reservas, o creación de tales reservas, se conoce en minería como «planificación minera». Esta disciplina se preocupa de determinar la estrategia óptima de explotación que sea factible desde el punto de vista operacional. Esta asignación dinámica tiene tres componentes principales. La primera se refiere a la tasa óptima de extracción. La segunda se conoce como el nivel de consumo de las reservas, y se refiere a la ley de corte óptima o LOM (*life of mine*) de las reservas. La tercera componente se relaciona con la ubicación espacial de la explotación en cada instante de tiempo, lo que se denominará en este libro como «lugar de recuperación».

Sin embargo, la agotabilidad de los recursos minerales explica solo parcialmente el problema de la planificación minera. Como Carlisle (1954) reconoció en un artículo también seminal, pero muy poco citado y expandido en la literatura económica si se compara con Hotelling (1931), la naturaleza de la distribución heterogénea de las calidades de un mineral en el depósito hace necesario diferenciar la tasa de extracción, estudiada generalmente en la teoría económica de los recursos agotables, del nivel de recuperación. Para Carlisle, el nivel de recuperación hace referencia a la proporción del recurso de mineral conocido que es finalmente explotado. Dicho nivel de recuperación puede ser visto simplemente como la fracción de los recursos finalmente convertidos en reservas. Así, este nivel está íntimamente ligado a dos conceptos ampliamente utilizados en la industria minera: ley de corte y LOM. El primer concepto es precisamente la ley de mineral que separa los recursos de las reservas. El segundo concepto corresponde al horizonte de tiempo en el que se espera extraer la totalidad de las reservas.

Como reconoce Carlisle, las decisiones de la tasa de extracción y nivel de recuperación se influencian mutuamente, aunque no hay una relación inherente entre ambas variables. Así, por ejemplo, siendo selectivos con aquellos recursos de mayor calidad, es posible alcanzar una alta tasa de extracción, pero generalmente el nivel de

la recuperación será bajo. En este sentido, una estrategia de alta selectividad de corto plazo, como «florear la mina» (*gutting or picking the eyes out* en inglés), conllevará generalmente un bajo nivel de recuperación de las reservas totales en el largo plazo. Por otro lado, un alto nivel de recuperación de las reservas puede darse si la tasa de extracción permanece constante o incluso disminuye en el tiempo.

El bajo impacto en la literatura académica que ha tenido el nivel de recuperación de Carlisle comparado con la tasa de extracción de Hotelling puede explicarse por al menos dos factores. El primer factor se refiere a que al considerar el nivel de recuperación es necesario involucrarse con la heterogeneidad de la calidad del recurso y, desde el punto de vista geológico, no existen dos depósitos idénticos. Por lo tanto, se dificulta el desarrollo a nivel conceptual de aspectos teóricos sobre algo que probablemente no pueda generalizarse y deba estudiarse en una base de caso a caso. El segundo factor se refiere a que la calidad misma no se encuentra distribuida espacialmente de forma homogénea en el depósito. Esto explica por qué muchas veces no es factible extraer las reservas *à la* Ricardo[5], es decir, desde la mayor a la menor calidad o por qué en las reservas se podría considerar mineral de menor calidad que algún otro que finalmente no se considera extraer.

1.5 Heterogeneidad del recurso y su rol en la planificación minera

Con objeto de simplificar la exposición considérese como ejemplo el caso en que la calidad del mineral pueda ser representada por una variable escalar única, la que sin pérdida de generalidad podríamos considerar que es la ley del mineral. De esta forma, es común pensar en la distribución de leyes en un depósito según una curva de distribución (nótese que esta no representa una variable aleatoria) como la que se muestra en la Figura 1.2. En la Figura 1.2 se representa la frecuencia con la que distintas leyes de mineral se obtienen en el depósito.

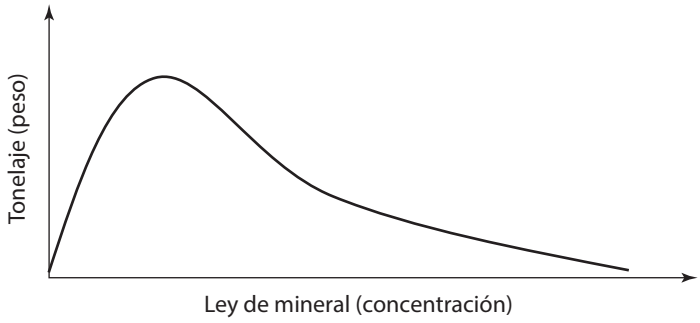


Figura 1.2 Distribución de la ley de mineral en un depósito.

[5] El economista inglés David Ricardo (1772-1823) sostenía que los recursos naturales se explotaban en general desde las calidades más altas a las más bajas. Para más información, consúltese Tilton (2003).

La Figura 1.3 muestra la curva tonelaje-ley de un depósito monoproducto[6] que representa la heterogeneidad del mineral en términos de su ley. Típicamente dos curvas se utilizan en este diagrama. La primera, decreciente, indica la cantidad de mineral (en unidad de peso) que puede conseguirse sobre una cierta «ley de corte». La segunda, creciente, ilustra la evolución de la ley media sobre la ley de corte que caracteriza al mineral que satisface esta restricción. Una teoría *à la* Carlisle requeriría de la introducción en la problemática de la economía de los recursos agotables de una curva de esta naturaleza.

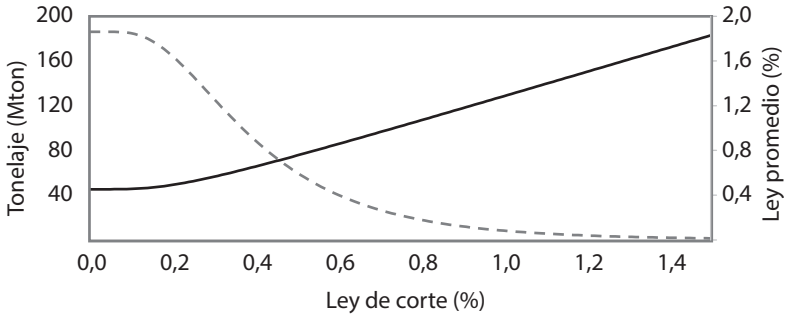


Figura 1.3 Ejemplo de una curva tonelaje-ley para una mina de cobre.

Otra forma de entender la heterogeneidad del recurso se representa en la Figura 1.4, que muestra una separación dependiendo del nivel de homogeneidad espacial y variabilidad temporal de los yacimientos minerales. Esta clasificación divide los yacimientos en cuatro tipos:

- I: Uniformes u homogéneos y estacionarios. Estos depósitos corresponden a yacimientos con leyes más o menos constantes en el espacio y cuya ley puntual en el depósito no varía con el paso del tiempo, ya sea por acciones naturales o propias de la explotación. Ejemplos de este tipo de yacimientos se encuentran en la explotación de la bauxita, el carbón y el hierro.
- II: No uniformes o heterogéneos y estacionarios. Estos depósitos están caracterizados por tener leyes variables en el espacio, pero con leyes puntuales en el depósito que no varía con el paso del tiempo, ya sea por acciones naturales o propias de la explotación. Ejemplos de este tipo de yacimientos aparecen en el caliche, cobre o platino, particularmente cuando la explotación se realiza a cielo abierto (rajo o canteras).
- III: No uniformes o heterogéneos y no estacionarios. Estos depósitos están caracterizados por tener leyes variables en el espacio, con leyes puntuales en las cuales

[6] En economía de minerales se conoce al *commodity* monoproducto explotado por una mina como «producto principal». Cuando dos o más productos deben considerarse en la planificación minera estos se refieren como «coproductos». Finalmente, cuando de la explotación de uno o más productos se deriva «por arrastre» otro *commodity*, este último se conoce como «subproducto».

hay una variación con el paso del tiempo, ya sea por acciones naturales o propias de la explotación. Ejemplos de este tipo de yacimientos aparecen en la explotación de salares (donde se extraen litio y potasio) u otros reservorios líquidos o gaseosos (donde se extraen gas natural o petróleo) o en la explotación por medio de *block caving*, pues el hundimiento produce un cambio de posición de las leyes puntuales en el tiempo.

- IV: Uniformes u homogéneos y no estacionarios. Estos depósitos están caracterizados por tener leyes constantes en el espacio, con leyes puntuales en las cuales hay una variación con el paso del tiempo, ya sea por acciones naturales o propias de la explotación. Como ocurre con el tercer tipo de yacimientos, aquí también se representan salares u otros reservorios líquidos o gaseosos.

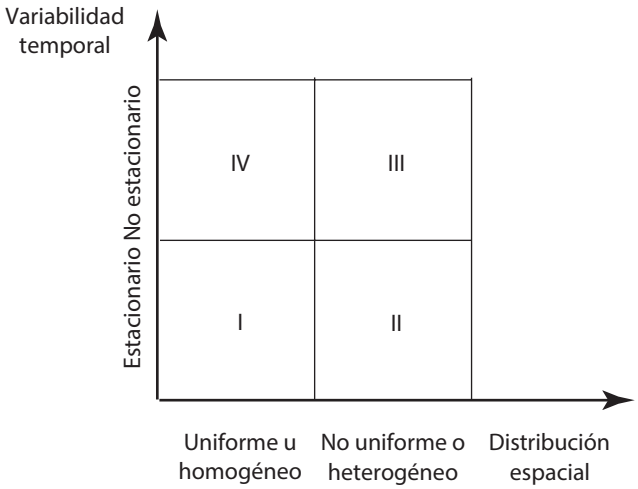
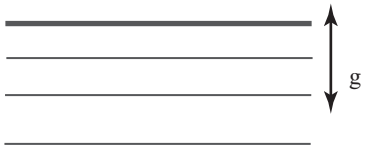
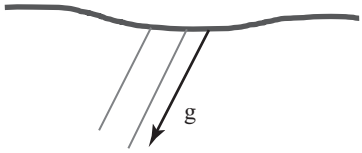
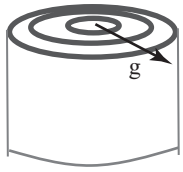
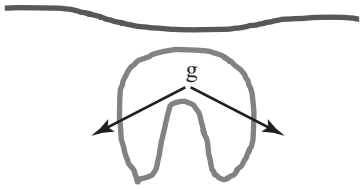
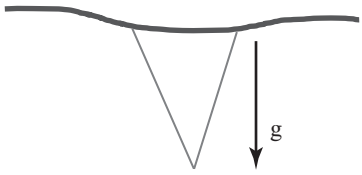
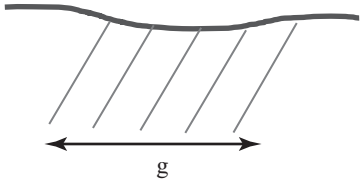
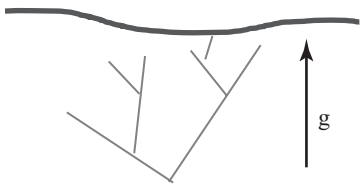


Figura 1.4 Distribución espacial y variabilidad temporal de leyes de mineral.

Respecto a la distribución espacial del mineral (yacimiento) en el espacio, la Tabla 1.1 muestra ocho depósitos conceptuales, así como la geometría y dirección de decrecimiento de leyes. En esta tabla también se especifican algunos ejemplos de *commodities* minerales que son explotados desde cada tipo de yacimientos.

Tabla 1.1 Geometrías típicas de depósitos y dirección de decrecimiento de leyes (g)
Fuente: Elaboración propia con base en Dill (2010) y otras fuentes

Tipo de depósito	Geometría y dirección de decrecimiento de leyes (g)	Ejemplos
Estratificado en roca		Bauxita Caliche (yodo↓ y nitratos↑) Carbón Hierro Níquel
Filón, vena o veta		Cobre Grafito Oro Plata Plomo Zinc
Estratificado en salar		Litio Potasio
Concéntrico		Berilio Cromo PGM (metales del grupo del platino)
Pórfido		Cobre Molibdeno Oro (subproducto) Plata (subproducto)
Pipa		Diamantes
Por capas		Cobalto
Árbol		Mercurio

Aunque Carlisle (1954) permanece en un terreno conceptual, la idea de introducir la tasa de recuperación de las reservas, que nace precisamente de la heterogeneidad del yacimiento, ha tenido bastante repercusión en minería. El trabajo de Kenneth Lane (1964)[7] se considera pionero en esta área. Aun cuando Lane deriva endógenamente un nivel de recuperación del recurso, solo incorpora la curva tonelaje-ley de forma homogénea en el espacio, no preocupándose de la forma en la que se realizará la explotación a lo largo de dicha curva. Implícitamente, Lane supone la existencia de todos los recursos «a la vista», es decir, disponibles para su extracción, contradiciendo esencialmente la naturaleza del problema minero.

La inclusión de una curva tonelaje-ley para la modelación económica de la explotación de un recurso agotable presenta dos problemas principales. El primer problema es que cada depósito tiene una curva tonelaje-ley única e irrepetible. Aunque las curvas pueden responder a una misma forma funcional en ciertos depósitos (por ejemplo, en pórfidos de cobre el autor ha podido testear positivamente el uso de una distribución de leyes lognormales)[8], cualquier función no dejaría de percibirse como arbitraria. De forma simultánea, aumenta considerablemente la modelación matemática, ya que posiblemente sin el uso de métodos numéricos no sea posible derivar resultados útiles para ser aplicados en su generalidad. El segundo problema radica en que, para ser usada en conjunto con una tasa de extracción, la curva tonelaje-ley debe ser acompañada de una regla exógena de explotación a lo largo de la curva. Aunque se podría optar a una explotación *à la* Ricardo, es decir, desde las leyes más altas a las leyes de menor calidad, esta y otras reglas no son completamente realistas. Cualquier regla realista deberá considerar, además la distribución espacial de la calidad, el método de explotación de la operación.

Como se ilustra en la Figura 1.5, la significativa dispersión de las leyes en un depósito, sumada al método de explotación del depósito, hacen imposible en la práctica satisfacer la regla de minar de la mayor a la menor ley durante la vida de la operación.

7 En el Capítulo 5 se desarrolla la teoría de Lane con base en la programación dinámica.

8 En Rossi y Deutsch (2014) se argumenta que la distribución de leyes de los elementos de interés es log-normal en muchos depósitos.

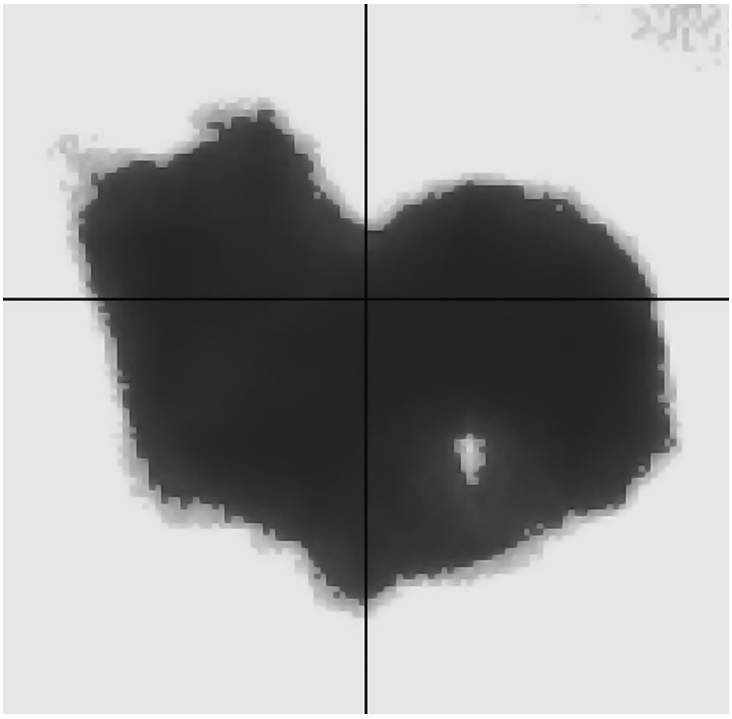


Figura 1.5 Ejemplo de distribución espacial de leyes de mineral (planta).

Como Carlisle, Lane no se ocupa de la distribución espacial de leyes del recurso. Aunque se han desarrollado algunos trabajos posteriores a Lane de corte económico y conceptual en los que se mezcla el tema de la agotabilidad con la heterogeneidad espacial del recurso. En todos los casos se asume una fuerte simetría espacial. Esto permite tratar el problema de la heterogeneidad espacial *à la* Carlisle. En esta línea se encuentran algunos artículos en los que se mezcla la teoría de los recursos agotables con la búsqueda de la ley de corte óptima de explotación, como Krautkraemer (1988) y Shinkuma y Nishiyama (2001).

Lo cierto es que no existe una teoría general para la problemática de la heterogeneidad espacial, como se encuentra desarrollada la teoría económica de los recursos agotables. Es decir, no hay ninguna referencia en la literatura como la «regla de Hotelling» que aplique a un yacimiento con calidades distribuidas heterogéneamente en el espacio. En el Capítulo 9 se derivan, por primera vez, al menos según el conocimiento del autor, algunas reglas para este fin.

Como innovación que permita ampliar la definición de Carlisle para incorporar la heterogeneidad del recurso, se propone la introducción del término «lugar de recuperación». Aunque íntimamente ligado a la tasa de recuperación de Carlisle, este último factor es más general y explica la posición en la que se realizará la extracción, así como el destino que tendrá dicha unidad (botadero, planta, *stock*).

Sin embargo, la inexistencia de una teoría general no impide que se puedan desarrollar casos particulares. De hecho, la determinación de la asignación dinámica óptima es un problema que se resuelve en prácticamente todas las minas. Para concretar, las bases de la planificación minera se encuentran hoy en día arraigadas netamente en el ámbito de la ingeniería y no de la economía, por considerarse un problema básicamente de optimización matemática y cuya solución solo puede ser encontrada en casos particulares (es decir, mina a mina).

Desde el punto de vista de la economía, el problema de encontrar el plan minero o secuencia de extracción óptima pasa por reconocer no solo el método de explotación (cielo abierto, subterráneo, aluvial, marino, etc.), sino también las tecnologías de procesamiento (concentración, lixiviación, etc.) y cualquier restricción técnico-operativa-financiera que pueda tener la operación. Una vez se hayan seleccionado, se debe identificar una función objetivo. Pensando en el problema de largo plazo, que es donde se definen precisamente las reservas, típicamente la función objetivo se refiere al valor del negocio, que puede representarse por el VAN (valor actual neto). No obstante, no es poco frecuente encontrarse en ciertas empresas e industrias de minerales con funciones objetivos distintas al realizar la planificación minera. Según la experiencia del autor, algunos objetivos buscados por las empresas al diseñar sus estrategias de explotación de sus recursos son el cumplimiento de cuotas de producción, la minimización de costos, el llenado de capacidad de planta o ley promedio del *commodity* alimentado a planta. Conocer la función objetivo de las firmas que conforman una industria es clave para entender la formación de la oferta en este mercado y, por tanto, es un aspecto que, aunque parezca trivial, merece la máxima atención.

Con la función objetivo definida y un conjunto de restricciones técnico-operativas-financieras, solo restan la determinación de un conjunto de parámetros para plantear el problema como uno de optimización matemática. Aun cuando se pueda plantear correctamente el problema, su complejidad y tamaño hacen en la práctica imposible contar con una solución matemáticamente óptima. De hecho, se ha demostrado matemáticamente que el problema de determinar la estrategia de extracción óptima en minería es de complejidad del tipo NP-Hard (Gleixner, 2008). Un problema se dice de complejidad del tipo NP-Hard cuando la comprobación de la solución correcta no se puede realizar en un tiempo finito. Esto plantea un paradigma, pues mientras la planificación minera es, por construcción, la función que busca encontrar la estrategia óptima, en la práctica no es posible comprobar la optimalidad de la solución. La forma de enfrentar en la práctica este paradigma es bien conocida en la industria y básicamente consiste en buscar un conjunto acotado de soluciones factibles al problema y testar cuál de ellas permite optimizar de mejor forma la función objetivo, a la vez que cumple todas las restricciones impuestas.

La complejidad del problema de planificación minera permite asegurar que las firmas mineras no son estrictamente racionales en el sentido neoclásico de la economía, es decir, no son maximizadoras de utilidad. Más bien, el criterio bajo el cual

se aceptan los planes mineros es uno de suficiencia. Este concuerda con la idea del Premio Nobel de Economía Herbert Simon respecto a que las firmas en lugar de optimizar buscan «satisfacer» (*satisficing* en inglés), ya que quien toma decisiones busca una solución satisfactoria más que una solución óptima (Simon, 1956). Pese a que, en la práctica y tras mucho esfuerzo, la solución alcanzada podría estar cercana al óptimo matemático[9], la imposibilidad de maximizar el VAN o cualquier función objetivo que la firma posea obliga a pensar en la firma minera como un ente no completamente racional (en el estricto sentido económico), al menos en lo que respecta a la escala en la que se toman decisiones. Y esto incluso asumiendo que la única fuente de «irracionalidad económica» es la complejidad del problema matemático.

Luego de definir la estrategia para desarrollar los recursos y transformarlos en reservas, el siguiente paso en la etapa de creación de valor en minería es invertir en aquellos activos necesarios para la explotación de dichos recursos. La inversión en minería es típicamente intensiva en capital, mano de obra y altamente específica en ubicación y características del depósito mineral a explotar.

Una vez identificado un depósito, medido sus recursos, estimado sus reservas e invertido en el desarrollo de la operación para llevar a cabo la explotación de este, el paso culminante es la explotación de las reservas. Este será precisamente el tema a desarrollar en este libro.

1.6 Problemas resueltos

Problema 1.1

Escondida, cuyo depósito es un pórfido de cobre, posee recursos conocidos, sobre una ley de cobre de 0,2 %, de 22 788 Mton en 2013 (incluidas las ya reservas extraídas ese año), con una ley promedio de cobre de 0,59 %. Por otro lado, las reservas totales se estiman en 8182 Mton a una ley promedio de cobre de 0,78 %, se incluyen reservas extraídas y por extraer. Si las leyes de los pórfidos de cobre se distribuyen según una distribución lognormal, estime la ley de corte de las reservas.

Solución

Se obtienen los siguientes datos:

Ítem	Ley de corte (%)	Ley media (%)	Tonelaje (Mton)
Recursos	0,2	0,59	22 788
Reservas	x	0,78	8182

[9] Distintos analistas consideran que la diferencia actual de los mejores procesos podría diferir en un rango no superior al 10 % del valor en la función objetivo si se considerara la solución óptima.

Además, se sabe que las leyes distribuyen según una distribución lognormal, que se define mediante la siguiente ecuación:

$$f(\mathrm{t}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln(\mathrm{t})-\lambda)^2}{\xi^2}}}{\sqrt{2\pi\xi t}}$$

Y cuyos parámetros ξ y λ se definen como sigue:

$$\xi = \sqrt{\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)}$$

$$\lambda = \ln(\mu) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)$$

donde μ corresponde a la ley media del yacimiento y σ a la desviación estándar. Por otro lado, $f(t)$ es una función densidad de probabilidad, por lo tanto, la integral en su dominio (de 0 a 100 %) debe ser 1. En otras palabras:

$$\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Además, el yacimiento posee recursos conocidos sobre una ley de corte 0,2 %, y cuya ley media es de 0,59 %, lo cual puede ser descrito mediante el centro de masa de la función en el intervalo 0,2 % a 100 %. Esto se refleja mediante la ecuación:

$$\frac{\int_{0,2}^{100} f(t)t\ \mathrm{d}t}{\int_{0,2}^{100} f(t)\ \mathrm{d}t} = 0{,}59\,\%$$

Por último, nos dicen que la ley media de las reservas es de 0,78 %, pero se debe encontrar la ley de corte de las reservas. Escrito de otra forma:

$$\frac{\int_{x}^{100} f(t)t\ \mathrm{d}t}{\int_{x}^{100} f(t)\mathrm{d}t} = 0{,}78\,\%$$

Cabe destacar que, con estas tres ecuaciones, y reemplazando $f(t)$ y sus valores correspondientes, se tiene un sistema de ecuaciones con incógnitas μ, σ y x. Resolviendo (en este caso utilizando el software matemático MAPLE), se obtiene que:

$$\mu = 0{,}5479$$
$$x = 0{,}4266$$
$$\sigma = -0{,}3783$$

De aquí la ley de corte de las reservas sería, redondeando, $x = 0{,}43\,\%$. Nótese que esta ley es relativamente alta cuando se compara con leyes de corte de minas más marginales que pueden llegar a 0,2 % o 0,3 %.

Con ello, reemplazando en las ecuaciones para ξ y λ se obtiene lo siguiente:

$$\xi = 0{,}6243$$
$$\lambda = -0{,}7965$$

Una manera de comprobar si los resultados obtenidos son correctos es calculando el valor esperado de la función en su dominio y comprobar que resulte igual a μ. Es decir, se debe cumplir lo siguiente:

$$\int_0^{100} f(t)t \ \mathrm{d}t = \mu$$

Evaluando dicha integral con los valores anteriormente obtenidos, se comprueba que μ es igual a 0,5479, lo cual se aproxima bastante al valor anteriormente obtenido.

Nota histórica: la derivación de las curvas de tonelaje-ley para un depósito de cobre en base a la información de los recursos y reservas solamente fue propuesta y validada empíricamente para un conjunto de más de treinta minas por el autor mientras trabajaba en GEM en 2014.

Capítulo 2

Los problemas de la explotación de minas

En este capítulo se describen los principales problemas de carácter económico que enfrentan las empresas mineras. En particular se analiza cómo las distintas empresas logran maximizar el valor de su negocio con base en los posibles objetivos de los dueños o accionistas de las mismas, con especial referencia a la explotación óptima de minas. Se realiza una breve descripción para entender la industria de los *commodities* minerales y la principal variable detrás del cambio de estrategia de extracción: el precio de venta del producto. Además, el problema que debe resolver la empresa minera involucra una serie de restricciones y consideraciones, que incluso pueden variar el objetivo perseguido con la extracción entre las distintas empresas.

2.1 Tipos de empresas mineras

Antes de iniciar el estudio de las problemáticas que enfrentan las empresas ligadas a la industria minera, se deben reconocer dos tipos: *juniors* y *majors*. A continuación, se exponen las principales características de cada una.

2.1.1 Empresas *junior*

Son aquellas empresas que se dedican fundamentalmente a la exploración o, a lo sumo, a la explotación de un único yacimiento. La gran mayoría de empresas *juniors* se limitan a vender la propiedad minera descubierta sin explotar, para seguir explorando otro yacimiento. En el caso de aquellas empresas que explotan un yacimiento,

es frecuente que lo hagan hasta una etapa intermedia de procesamiento y no a un producto considerado final. Así, por ejemplo, muchas empresas *junior* de cobre extraen el mineral y lo envían en forma de concentrado a distintas fundiciones, pero rara vez producen cátodos.

2.1.2 Empresas *major*

Se refieren a aquellas compañías que poseen y explotan múltiples yacimientos minerales y que concentran su negocio en la explotación minera. Por lo general, no se dedican a la exploración de nuevos yacimientos, sino a la compra de pertenencias mineras a compañías *junior* más pequeñas. Son grandes empresas diversificadas y, generalmente, también producen dos o más *commodities* minerales. A modo de ejemplo, pertenecen a este grupo empresas como BHP, Río Tinto, Vale, Norilsk Nickel y Anglo American, entre otras.

A pesar de lo anterior, existen empresas *major* con múltiples yacimientos y que se concentran en la extracción de un tipo de *commodity*. Este es el caso por ejemplo de Codelco o Antofagasta Minerals, que, aunque producen como subproductos molibdeno, plata y oro, mantienen como negocio principal la producción de cobre. En otras industrias de minerales es común contar con empresas especializadas, como en el caso del potasio (un ejemplo de empresa *major* en esta industria es PotashCorp) o el aluminio (por ejemplo, representada por Alcoa).

Recuadro 2.1

BHP: La empresa de minería metálica más grande del mundo

Fundada en 1885, BHP es una empresa minera de origen australiano que se dedica a la exploración, desarrollo, producción y procesamiento de minerales, gas y petróleo (Macklin y Thompson, 2010).

Hacia abril de 2017 contaba con más de cuarenta operaciones a nivel global, 65 000 empleados y una valorización de mercado ligeramente menor a los cien mil millones de dólares, lo que la convierte en la compañía pública productora de minerales (excluyendo petróleo) más grande del mundo (Forbes, 2018). Entre los metales que produce se encuentran cobre, oro, plata, molibdeno, zinc, uranio y plomo.

La empresa se organiza desde 2016 en cuatro divisiones principales: Minerals Australia, Minerals Americas, Petróleo y Marketing. La división Minerals Americas, encargada de las operaciones minerales en todo el continente americano, tiene su sede en Santiago de Chile. Dentro de su portafolio se encuentra Escondida, la mina de cobre con mayor producción del planeta, que concentra el 7,8 % de la producción mundial (dato de 2015).

Los múltiples desafíos que posee BHP son un buen ejemplo de lo variados que pueden llegar a ser los problemas que resuelve una empresa en la industria minera debido a la heterogeneidad de sus proyectos en cuanto a tamaño de producción, tipo de mineral a extraer, contexto sociopolítico y ubicación geográfica.

2.2 Precio de los *commodities*

Los *commodities* primarios se pueden definir como equivalentes al valor de la producción del sector primario, que comprende la agricultura, la ganadería, la silvicultura, la apicultura, la acuicultura, la caza, la pesca, la explotación forestal y la minería. De manera simple, abarcan todos los recursos naturales con poca o ninguna manipulación en su generación.

En los mercados competitivos, los precios de los *commodities* primarios no regulados, y en particular de los *commodities* minerales, se determinan por la intersección de las curvas de oferta y demanda. En general, existe una acentuada inestabilidad en los precios de estos recursos. Esto se debe a que la elasticidad precio de la demanda es bastante baja dado que el costo de estas materias representa una pequeña proporción del precio del producto terminado (Tilton y Guzmán, 2016).

Los *booms* de los *commodities* se definen como aumentos acentuados y simultáneos en el precio real de un amplio grupo de productos. Es por esto que, comúnmente, se dice que los precios de los *commodities* presentan «comovimiento» (Pindyck y Rotemberg, 1990). Desde la Segunda Guerra Mundial, se han detectado tres *booms*, con inicios en 1950-1951, 1973-1974 y 2003-2004, respectivamente, cuya característica común es que las industrias no fueron capaces de satisfacer el rápido crecimiento de la demanda (Radetzki, 2009).

La existencia de un negocio minero mueve a la industria minera y, para que esto suceda, se requiere la existencia física y demanda de materiales minerales como los *commodities*. El último *boom* en el precio de estos, registrado en el periodo 2004-2011 e interrumpido en 2008-2009 debido a la crisis financiera, así como el periodo de ajuste que le ha sobrevenido desde 2012 demuestran la necesidad de que las empresas ajusten los planes mineros de extracción y las condiciones operacionales y de inversión a los cambios en el mercado. De esta forma, pueden aprovechar las fluctuaciones del ciclo del negocio. Precisamente, una parte importante del esfuerzo de las empresas mineras se centra en el mejoramiento de los planes mineros con el fin de maximizar el valor del negocio ante los cambios reales y esperados en el precio de los *commodities* que explotan.

2.2.1 Mecanismos de fijación de precios

La determinación del precio de un producto mineral se ve afectado por una gran variedad de factores y, para cada mineral, se consideran distintos criterios. Generalmente, estos métodos incluyen características químicas, propiedades físicas y/o porcentajes de un componente clave según el uso que se le vaya a dar, entre otros.

A lo largo de la historia de los mercados de minerales, ha habido diversas formas de negociar y realizar transacciones. Además, los métodos de negociación y comercialización han evolucionado a la vez que el constante desarrollo de los países y los avances tecnológicos. Si bien los tipos de mercados son dinámicos y cambian

conforme a un conjunto amplio de variables, hoy en día se distinguen cuatro tipos de mercados principalmente, cada uno definido por características muy particulares. A continuación, se describen los cuatro tipos de mercados: bolsas especializadas, negociaciones *over-the-counter*, precios de productores y precios negociados entre el comprador y el vendedor. Asimismo, se presentan las condiciones principales que llevan a que un *commodity* se asocie a un tipo de mercado en particular.

2.2.1.1 Bolsas especializadas

La utilización de bolsas de valores especializadas como plataforma de comercialización se remonta a 1870 cuando los primeros *commodities* minerales se negociaron en la Bolsa de Metales de Londres (LME, por sus siglas en inglés). Hoy en día existen otras bolsas de igual importancia que la LME, como la Bolsa Mercantil de Nueva York (NYMEX, por sus siglas en inglés) y la Bolsa de Metales de Shanghái (SHMET, por sus siglas en inglés). Estas tres bolsas son los centros comerciales más importantes y conocidos en el mundo en cuanto a la comercialización de *commodities*. En la LME se negocian aluminio, aleación de aluminio, cobre, estaño, níquel, zinc, plomo, cobalto, molibdeno y barras de acero. Tanto en la NYMEX como en su división de *commodities,* la New York Commodity Exchange (COMEX), se negocian principalmente aluminio, cobre, oro, plata, platino, paladio y uranio. En la SHMET, aluminio, cobalto, cobre, estaño, níquel, oro, paladio, plata, platino, plomo y zinc.

2.2.1.2 *Over-the-counter* (OTC)

En contraste a las bolsas de valores, donde los *commodities* se negocian de forma anónima y se provee a los participantes de garantías en caso de que alguna de las contrapartes incumpla un contrato, el mercado OTC permite la negociación directa entre participantes con posiciones opuestas. Esto implica que el riesgo, incluyendo el riesgo de que alguno de los participantes incumpla el contrato, lo asumen exclusivamente las partes involucradas en la negociación. Un ejemplo de este tipo de mercado es el London Bullion Market Association (LBMA), donde se realizan las transacciones de la mayor fracción del negocio del oro y la plata en el mundo. Estos dos materiales también se negocian en bolsas de valores como NYMEX o SHMET. Otro ejemplo de este tipo de mercado es el London Platinum and Palladium Market (LPPM), encargado de la mayoría de transacciones de platino y paladio.

Es importante mencionar que la forma en la que se publican los precios de los mercados OTC difiere de la utilizada en las bolsas, que publican los precios de forma continua conforme a las negociaciones que van ocurriendo durante un día laboral. En el caso de las negociaciones OTC, las publicaciones ocurren una vez al día y el precio publicado es el resultado de balancear las cantidades indicadas en las órdenes de compra y venta del día. De este modo, el mercado OTC publica un precio de apertura (en inglés *opening price*).

2.2.1.3 Precio del productor

En el caso de ciertos productos minerales, son los productores quienes anuncian el precio al cual están dispuestos a vender sus productos. Este precio puede ser el resultado tanto de negociaciones entre los productores (colusión) como el precio al cual el líder está dispuesto a vender. Para que este tipo de mercado sea válido, muchos factores se deben satisfacer a favor del productor. Entre estos destacan que el número de productores sea reducido (lo que resulta en una posición con poder de mercado respecto a los compradores, que les permite influir en el precio), que la demanda por los productos sea global y/o que exista un alto nivel de especificación del producto mineral en negociación.

A lo largo de la historia, este tipo de mercados ha sido bastante común para una gran variedad de productos minerales, ya sean metálicos, químicos o industriales. Un ejemplo de lo anterior fue la comercialización durante décadas en América del Norte del aluminio, níquel, molibdeno, cobre, plomo y zinc. No obstante, durante las décadas de 1970 y 1980 se produjo un cambio en la forma de comercialización de estos metales debido principalmente a que la demanda cambió de regional a global y a que el número de participantes, fundamentalmente productores, creció. Como resultado, muchos mercados donde el productor fijaba el precio se desplazaron a bolsas de valores. Durante este periodo, las transacciones tanto de aluminio como de níquel comenzaron a realizarse en la LME. Actualmente, aún existe una gran variedad de *commodities* que se comercializan bajo un esquema de precio del productor, entre otros, gemas preciosas y no preciosas, metales del grupo del platino (rodio, iridio, etc.), potasio, minerales de boro o cemento.

2.2.1.4 Precio negociado

Este tipo de mercado está asociado a contratos bilaterales negociados directamente entre compradores y vendedores sin el respaldo de una institución que otorgue garantías entre las partes. Sin embargo, cuando los productores son numerosos, pequeños y dispersos, existe espacio para que terceros especializados pueden operar como intermediarios y compren la producción de un grupo de productores para luego negociar los términos de venta directamente con los consumidores finales. Un ejemplo es lo que ocurre entre productores de fertilizantes y distribuidores agrícolas. Este tipo de mercado, común actualmente, se observa cuando existen niveles de diferenciación medios o altos entre los productos comercializables (como el mineral de hierro o carbón), cuando se venden en cantidades relativamente pequeñas (como el ácido bórico, cadmio o niobio), y/o cuando son inadecuados para la negociación en bolsas de productos básicos por su heterogeneidad o especificidad (como las gemas preciosas). A pesar de que los precios se negocian directamente entre los participantes, existen diversas fuentes proveedoras de precios de referencia, lo cual juega un rol crítico en las negociaciones.

Por otra parte, cuando un producto mineral es producido y consumido por unas pocas empresas, la negociación del precio surge como el mecanismo idóneo para implementar. Algunos ejemplos clásicos de negociación de precios se ven en el mercado del acero laminado, donde unas pocas acerías producen el acero laminado en frío para abastecer tanto a la industria automovilística, que lo utiliza especialmente en la construcción de carrocerías, como al mercado de láminas u hojas de aluminio, cuya finalidad es la fabricación de latas de bebidas y envases de alimentos. Otros ejemplos son el mercado de ferroaleaciones a granel (como el ferromanganeso), ferroaleaciones utilizadas para producir aceros y aceros especiales como el tungsteno o el cobalto inoxidable, metales menores como el cadmio o el bismuto y productos a base de minerales como el carbonato de litio.

2.2.2 Volatilidad del precio

Existe una gran inestabilidad en los precios de los *commodities*, que se traduce en una alta volatilidad de los precios. Esto no solo es crítico para las empresas que producen o consumen minerales sino para los países que dependen de los ingresos generados por la minería (como Chile, Sudáfrica, Botsuana, Perú, entre otros).

Varios estudios sobre el tema de la inestabilidad del precio de los *commodities* han concluido que la volatilidad de estos es del mismo orden de magnitud que la volatilidad del tipo de cambio o del precio de las acciones (Labys, 1999).

Si se incluyen los efectos de la incertidumbre en la determinación de los precios de equilibrio de mercado, la trayectoria de precios estaría generada por un proceso estocástico y no por uno determinístico. En el Capítulo 13, se discutirá en detalle la modelación de los precios de los *commodities* minerales, basada en la matemática introducida en el Capítulo 6.

Para una discusión detallada sobre la volatilidad de los precios de los *commodities* minerales puede consultarse García y Guzmán (2018). En este artículo se revisa la volatilidad histórica de cincuenta *commodities* minerales en el periodo 1900-2014.

2.3 Problema económico de la empresa minera

Las empresas mineras en la práctica se verán siempre enfrentadas a problemas complejos al tomar decisiones para maximizar su beneficio económico. Por lo que es necesario generar modelos matemáticos (numéricos en la práctica) que representen esta realidad lo más fehacientemente posible, para poder acercarse al resultado óptimo y tomar la mejor decisión. A continuación, se presentan los conceptos para la elaboración de estos modelos y cómo se relacionan con el problema real.

2.3.1 Función objetivo

El problema del productor minero parte de la definición de utilidad, que se puede escribir matemáticamente para cada instante de tiempo, asumiendo que las inversiones se encuentran hundidas, de la siguiente forma:

$$\text{Utilidad}\ (Q_t) = \pi_t(Q_t) = \text{Ingresos}\ (t) - \text{Costos}\ (t) = P_t Q_t - C_t(Q_t) \qquad (2.1)$$

En esta ecuación Q_t es la producción del mineral de interés en un tiempo determinado t, P_t corresponde al precio de venta del mineral en el mismo periodo de tiempo y $C_t(Q_t)$ corresponde a una función de costos que depende de la producción.

En general, la operación minera buscará maximizar la utilidad de la mina. Sin embargo, en un contexto de múltiples periodos de tiempo, el problema consistirá en maximizar la suma de las utilidades[1] a lo largo de la vida útil de la mina. La vida útil se define en minería como LOM (*life of mine*) y en este libro se representará por T. Cabe destacar que la vida útil de la mina no necesariamente corresponde a una variable exógena al problema de optimización de la mina y, de hecho, muchas veces también deberá formar parte de la solución. Cuando este sea el caso, se considerará que el LOM es una variable endógena al problema.

2.3.2 Restricciones

Para lograr un modelo representativo del problema real enfrentado por los productores mineros, se deben considerar las restricciones a las que el problema de optimización se encuentra sujeto. A continuación, se verán las principales restricciones empleadas en este tipo de problemas. Estas restricciones se ampliarán considerablemente a partir del Capítulo 10 del libro.

Una de las restricciones más comunes al enfrentar el problema de cuánto producir es la agotabilidad de los recursos. Esta se expresa mediante la ecuación fundamental de los recursos naturales descrita en el capítulo anterior y que, en tiempo continuo, viene dada por:

$$\dot{S}_t = -Q_t + G_t \qquad (2.2)$$

En esta ecuación, como en el resto del libro, Q_t corresponde a la tasa de extracción del recurso en el tiempo t y G_t, a la generación de nuevas reservas posiblemente debido a la exploración en el caso de recursos no renovables y a la reproducción en el caso de recursos biológicos.

Luego, es necesario establecer las dimensiones de las reservas en el momento en que se inicia la explotación del mineral, por lo que se definen en el tiempo inicial según la siguiente ecuación:

$$S(0) = S_0 \qquad (2.3)$$

[1] Las utilidades deben descontarse de una forma apropiada, punto en el que se incidirá más adelante.

Esta restricción establece que S_0 es un valor fijo y conocido para las reservas en el instante previo al inicio de las operaciones de extracción.

En el caso particular en que $G_t = 0$, se tiene que la exploración de nuevas reservas es nula. Dado que no se puede extraer más que lo contenido en las reservas iniciales, se debe cumplir, en tiempo discreto, lo siguiente:

$$\sum_{t=0}^{T} Q_t \leq S_0 \tag{2.4}$$

Además, existirán ocasiones en las cuales será necesario establecer un límite en la capacidad de la producción, por lo que el valor de Q_t deberá estar acotado superiormente. Esta restricción vendrá dada por la capacidad de extracción máxima de la mina, representada generalmente por K[2]. A su vez, la producción de mineral no puede ser negativa[3]. Por lo tanto, la inecuación para la restricción en la capacidad de producción vendrá dada por:

$$0 \leq Q_t \leq \mathrm{K} \tag{2.5}$$

Finalmente, es necesario establecer una restricción de no negatividad para las variables que no pueden tomar valores menores a cero, como, por ejemplo, las reservas iniciales. En ese caso, se tendrá que:

$$S_0 \geq 0 \tag{2.6}$$

2.3.3 Tasa de descuento y VAN

Se define como tasa de descuento $r > 0$ aquella tasa de interés utilizada para calcular el valor presente de un flujo futuro (Brealey *et al.*, 2015). Este valor se descuenta periodo a periodo debido a la devaluación del dinero en el tiempo. En términos prácticos y desde el punto de vista del inversionista, se tiene que la tasa de descuento r es un indicador tanto del costo de oportunidad del inversionista como del riesgo propio del proyecto (Brealey *et al.*, 2015).

En las empresas mineras, la tasa de descuento es alrededor del 10 % anual. En general, las empresas *majors* tienen tasas que oscilan entre el 8 % y el 12 % anual.

---

2 En general la capacidad de producción puede considerarse a su vez una función del tiempo, esto es $K(t)$. Sin embargo, para efectos de simplificar la exposición se ha asumido en esta sección y gran parte del libro que dicha capacidad es constante.

3 Aunque existen operaciones mineras de inyección de minerales en la tierra, es un caso muy poco relevante y generalmente conlleva más que una decisión económica de la empresa. Como ejemplo de esto, se encuentra la explotación de litio y potasio en el salar de Atacama. Una de las empresas que operan aquí debe inyectar en el salar parte del litio que extraen para cumplir la exigencia asociada al contrato de explotación que poseen con el dueño, en este caso el Estado de Chile a través de la agencia gubernamental CORFO.

Por su parte, las empresas *juniors* poseen tasas de descuento entre el 6% y el 15% anual. Esta mayor variabilidad se debe o bien a que el costo de oportunidad del inversionista es muy alto o que la tasa se manipula para reflejar un valor de negocio alto, algo común en el caso de la venta de depósitos descubiertos o explorados por la empresa.

Dada la asociación entre la tasa de descuento y el riesgo del proyecto minero, es esperable que exista diferencia en este parámetro para distintos *commodities*. Así, por ejemplo, para el oro, la tasa de descuento (6% como mediana) generalmente es más baja que para el cobre (8% como mediana). Esto se debe a que el precio del oro, al ser un activo financiero, es completamente diversificable. Es decir, es posible construir un portafolio de papeles financieros que replican exactamente el riesgo asociado al precio. Por tanto, en teoría el riesgo puede ser anulado al invertir en un portafolio que replique a la inversa este riesgo[4].

A través del riesgo país, la tasa de descuento también dependerá del país donde se esté llevando a cabo la explotación minera. Por ejemplo, se puede considerar el caso de operar en Estados Unidos, donde los intereses de los inversionistas están fuertemente protegidos por distintas instituciones y hay reglas claras al respecto. En este caso el riesgo país es bajo. Por otro lado, y en comparación, hay países con mayor grado de inestabilidad política, donde se corren riesgos como la posible expropiación de la mina. Es común en minería que las empresas castiguen sus proyectos u operaciones en países con alto nivel de riesgo país frente a países con un bajo nivel de riesgo país.

La tasa de descuento depende también del tipo de proyecto. Así, generalmente, las empresas utilizarán una tasa distinta para una nueva mina (*greenfield*) o para la continuación de una mina ya operativa (*brownfield*). La justificación de una menor tasa en el caso de las minas *brownfield* radica en la existencia de cierta experiencia operativa y una relación ya establecida con la comunidad. Ambos elementos son fuentes de alta incertidumbre en un proyecto *greenfield*.

Otro factor significativo para estimar la tasa de descuento es el método de explotación. Generalmente una mina subterránea tendrá más riesgos que una mina a cielo abierto, por lo que su tasa de descuento podría ser más alta.

Una vez definida la tasa de descuento del proyecto u operación, es posible estimar el valor actual neto, comúnmente conocido por las siglas VAN. Este corresponde a la suma de los flujos futuros del proyecto, pero con los valores de cada periodo descontados de acuerdo a la tasa de descuento de la empresa para la mina en cuestión.

La existencia de una tasa de descuento positiva para el problema de maximizar el VAN será clave en la problemática enfrentada por la mina al generar sus planes

[4] Esto contrasta con el riesgo sistémico o no diversificable, que por definición no puede ser replicado en el mercado financiero. En general, la mayoría de los productos derivados de la minería contienen riesgos de esta naturaleza y, aun cuando el precio de los *commodities* pudiera parecer siempre diversificable porque se negocia en el mercado financiero, en gran parte responde a consideraciones propias del mercado en cuestión.

de extracción, como se discutirá en extenso en este libro. De hecho, esto explica por qué, aunque la mirada de la mina es en general de largo plazo, finalmente gran parte del esfuerzo se concentra en el primer año (o primeros años) de operación de la mina[5].

Una discusión importante respecto a la tasa de descuento, y que muchas veces en minería se da por entendida, es que sea constante en el tiempo. Si se considera esta tasa una función del tiempo, es decir, $r(t)$ se produce un problema de «inconsistencia intertemporal»[6]. Este problema se traduce en que las decisiones óptimas de las empresas cambian en el tiempo por el simple avance temporal y no porque haya cambios en los parámetros de evaluación del problema. Para saber más sobre esta problemática y la necesidad de contar con una tasa de descuento constante, puede consultarse Strotz (1955-1956).

Considerando el descuento de los flujos de caja futuros, la función objetivo que enfrenta una empresa minera racional, con una tasa de descuento r y en tiempo discreto viene dada por[7]:

$$\max_{Q_t,\, T} \ \text{VAN} = \sum_{t=0}^{T} \frac{\pi_t(Q_t)}{(1+r)^t} \tag{2.7}$$

Análogamente, en tiempo continuo la función anterior equivale a:

$$\max_{Q_t,\, T} \ \text{VAN} = \int_0^T e^{-rt}\pi_t(Q_t) \tag{2.8}$$

Cabe notar que, en ambos problemas, se ha asumido que no solo la cantidad producida por la empresa es optimizable, sino también su LOM. Asimismo, debe tomarse en cuenta que las tasas de descuento en (2.7) y (2.8) no son equivalentes, pues en el primer caso la tasa es discreta y en el segundo, continua.

2.3.4 Ejemplos clásicos de soluciones estáticas y dinámicas en minería

Todo lo anterior contrasta con una de las teorías clásicas de optimización estática en minería, utilizada para determinar la envolvente económica de la explotación (se discutirá en mayor detalle en el Capítulo 3). En este caso, la problemática es atem-

5 A modo de ejemplo, el autor ha podido comprobar en la práctica como regla empírica para minas operativas de cobre que el 60 % del VAN total se alcanza durante los primeros cinco años de operación; más del 80 % del VAN, durante los primeros diez años de operación y alrededor del 95 %, durante los primeros veinte años de operación.

6 Esto en el contexto minero podría ser explicado dado que el riesgo de una operación depende en cierta medida del ciclo de vida de la mina. Así, por ejemplo, una mina en una etapa inicial de explotación generalmente tendrá todos los riesgos propios de un proyecto, que no estarán presente cuando la operación se encuentre en régimen.

7 Una empresa se dice racional en el sentido neoclásico de la economía precisamente cuando busca maximizar su función de VAN (Auger y Guzmán, 2010).

poral o estática, por lo que, en general, la determinación de la envolvente económica consistirá en maximizar la suma de los flujos de caja no descontados de la operación en lugar de maximizar el VAN.

En el caso de la minería de rajo, el problema de determinar la envolvente económica es conocido como «problema del límite del *pit* final». Hasta la fecha, la planificación minera ha desarrollado diferentes métodos para encontrar el límite del *pit* final y maximizar así el valor económico de los depósitos, aunque en general dichos métodos se limitan a un contexto estático.

El algoritmo de Lerchs-Grossman es uno de ellos y permite diseñar la geometría del *pit* que arroja la máxima utilidad neta en una sección vertical (Hustrulid *et al.*, 2013). El método resulta llamativo, ya que elimina procesos de prueba y errores al diseñar manualmente el rajo en cada una de las secciones. La metodología es conveniente y ha llevado al desarrollo de programas que automatizan algunos aspectos del análisis de sensibilidad. Sin embargo, dada la naturaleza dinámica del problema, la solución encontrada por el algoritmo de Lerchs-Grossman es subóptima (Guzmán, 2008d).

Una aplicación de optimización dinámica en minería es el algoritmo de Lane (para más antecedentes consúltese el Capítulo 5). Consiste en determinar la ley de corte necesaria para discriminar entre mineral y lastre en el depósito, considerando el costo de oportunidad del dinero en el tiempo. El algoritmo de Kenneth Lane (1965) permite determinar leyes de corte para maximizar el VAN de la operación. Sin embargo, en la práctica, se suele aplicar de forma estática, porque el problema se resuelve periodo a periodo y sin considerar la intertemporalidad de las decisiones, punto crítico en la formulación conceptual de Lane.

Cabe mencionar que el algoritmo de Lane corresponde a un proceso iterativo, en el que el VAN y la ley de corte crítica son dependientes entre sí. El propósito es determinar la mejor estrategia de explotación del yacimiento con base en una política de leyes de corte que defina la cantidad de material y mineral a extraer en cada periodo de tiempo. La siguiente figura muestra la representación del cálculo del VAN.

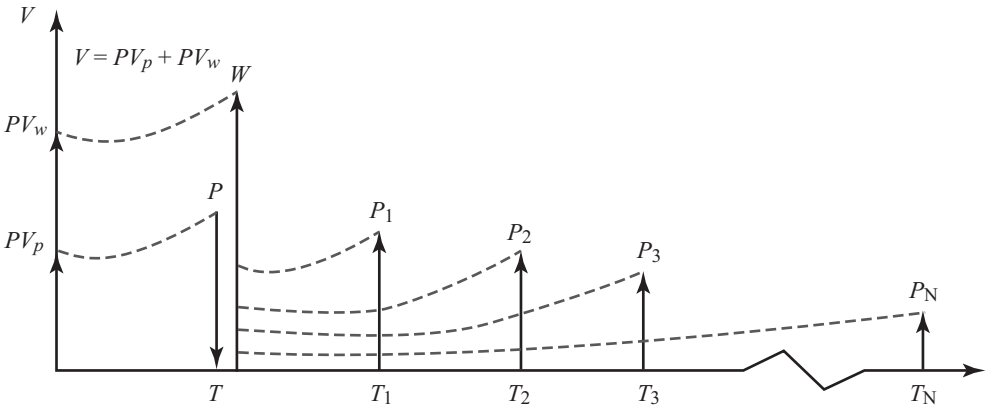


Figura 2.1 Cálculo del VAN.

El valor presente de todos los flujos generados en el proyecto es V. Este valor está compuesto de dos partes: la primera, PV_p, viene de la utilidad P obtenida en T y habiendo minado la cantidad Q_m; la segunda, PV_w proviene de las utilidades que se generaran al minar el material remanente. Además, W es el valor que acumula todos estos valores desde P_1 hasta P_N.

Sin embargo, como se mencionó en el capítulo anterior, Lane en ningún caso se ocupa de la distribución espacial de leyes del recurso. Pese a esto, este algoritmo sigue siendo utilizando ampliamente en la actualidad en *softwares* computacionales[8].

2.3.5 Funciones objetivo alternativas

Aunque es una práctica extendida en el mundo minero que las decisiones se tomen para maximizar el VAN de la operación en ciertas empresas y/o industrias de minerales, existen otras funciones objetivo utilizadas por las empresas productoras.

Entre las funciones objetivo empleadas por algunas empresas o industrias mineras utilizan[9] se encuentran:

- Minimización de los costos.
- Maximización del LOM.
- Maximización del flujo de caja de corto plazo.
- Maximización del precio de la acción de la empresa.

Es necesario destacar que ninguna de las anteriores funciones objetivo es completamente equivalente a maximizar el VAN de la operación. Puesto que la maximización del VAN es la función objetivo para la cual existe mayor soporte teórico y empírico, el presente libro se limitará a la exposición de este caso, al menos en el caso determinístico. Aun así, la teoría aquí presentada puede extenderse a cualquiera de estas otras especificaciones haciendo los cambios necesarios.

2.4 Deficiencias de la solución al problema en la actualidad

Cada negocio minero tiene definido sus objetivos estratégicos para sustentar su misión como empresa. Como se discutió en la sección anterior, el principal objetivo estratégico de la empresa minera es maximizar el valor de su negocio, es decir, el VAN.

Es muy importante entender la naturaleza de los problemas asociados a la solución que actualmente enfrentan las empresas mineras para conseguir la explotación óptima de sus recursos. Estos problemas se asocian a tres conceptos principalmente: intertemporalidad, recursividad y determinismo.

---

8 Para una función objetivo más realista en minería, que considere algunos aspectos de la heterogeneidad espacial del recurso y que se base en el aprendizaje de este curso, consúltese Ulhmann (2015).

9 Tras constatación por parte del autor.

El carácter intertemporal se refiere a que «lo que se haga en el presente afectará el futuro». Si hoy se fija una cantidad de producción Q_0, a la larga cambiará la restricción de agotabilidad en las decisiones futuras. Precisamente esta decisión de agotabilidad es la que liga las decisiones del pasado con las decisiones del presente y del futuro; por lo tanto, este es un problema de optimización dinámica (desarrollado en detalle en el Capítulo 3). En la aplicación actual de la planificación minera, muchas veces no se releva el carácter intertemporal de las decisiones y es común que se concatenen soluciones propias de problemas estáticos periodo a periodo.

Otro concepto importante que mencionar es la recursividad (ver Figura 2.2). Cuando se realiza el plan minero, se busca la estrategia óptima para determinar la secuencia de extracción. Cuando se dispone de los límites económicos de la explotación final y de las fases o sectores de dicha explotación (es decir, la secuencia de extracción), se debe definir cómo se van a extraer las reservas, por lo que se inicia una etapa de planificación de la explotación. Una vez determinado lo anterior, se procede a calcular el valor del negocio. Por ejemplo, en el caso de la explotación de un rajo, el problema recae en la determinación del *pit* final mediante el algoritmo de Lerchs-Grossman. Definido este límite, que forma parte solo del problema espacial de explotación, se lleva a cabo un diseño y se genera una optimización dinámica, dejando fuera el problema de determinar exactamente de qué forma (geométrica) se extraerán las reservas. Finalmente, se evalúa dicha secuencia para determinar el VAN de la operación. Como en principio esta recursividad no garantiza optimalizad, generalmente se establecen varios diseños distintos con objeto de seleccionar el de mayor VAN. El problema es que este proceso no solo no garantiza la convergencia al óptimo, sino que es bastante costoso en términos de recursos humanos y computacionales. Esto, sumado a la necesidad de contar con planes en ciertos periodos de tiempo, explica que los planificadores mineros solo puedan realizar y revisar un conjunto acotado de alternativas.

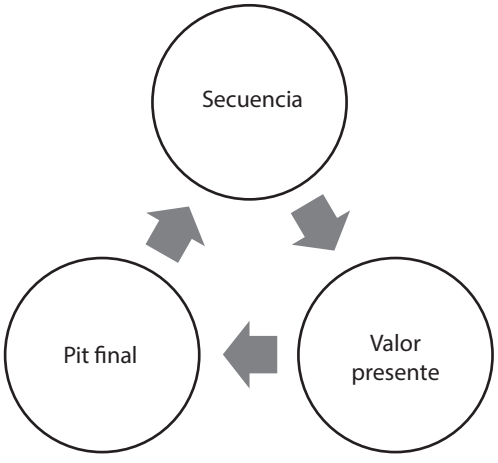


Figura 2.2 Concepto de recursividad.

Finalmente, el determinismo se refiere al supuesto utilizado en la práctica actual de la planificación minera de que los parámetros del problema son ciertos o determinísticos. En minería, la dificultad de utilizar un VAN determinístico radica en asumir que el VAN evaluado por los precios esperados, los costos, las leyes de mineral o la recuperación metalúrgica es igual al valor esperado del VAN, lo que es en general falso (ver detalles en el Capítulo 7).

Cuando el problema es de carácter estocástico, se debe derivar la distribución de probabilidad del VAN. Como se detallará en el Capítulo 8 y en la Parte III del libro, en condiciones de incertidumbre, las decisiones de las empresas siempre deben tratar de maximizar VAN esperado y no maximizar el VAN sobre la base de los valores esperados de los diversos parámetros que influyen en este indicador.

Para poder evaluar el impacto de cambios de variables de manera determinística en el VAN, es común que se utilice en la industria minera un análisis de sensibilidad. Aunque esto sin duda permite entender de mejor manera el impacto que un cambio en el escenario de negocio puede conllevar al valor de la mina, existen una serie de deficiencias que hacen que sea preferible un análisis de simulación más completo como la simulación de Montecarlo.

2.5 Problemáticas no económicas de la explotación de minas

Hasta el momento pudiera parecer que el problema de la empresa minera es puramente económico. Sin embargo, aunque la economía es fundamental en la existencia misma de la mina, la empresa minera enfrenta una serie de desafíos y problemáticas de diversa índole y cuya resolución es necesaria para permitir la existencia de la operación.

Un concepto que permite comprender lo anterior es el de «sostenibilidad empresarial», contenido dentro de las buenas prácticas que deben seguir las empresas mineras. La sostenibilidad empresarial consiste no solo en maximizar el valor económico de la operación, sino en tener en cuenta el valor que la mina aporta en el contexto medioambiental y social.

La sostenibilidad empresarial integra las tres dimensiones ilustradas en la Figura 2.3 en una visión estratégica más global, que considera a los *stakeholders* de la empresa. Los *stakeholders,* o grupos de interés, son todos aquellos a quienes afecta o puede afectar el cumplimiento de los objetivos de una organización (Freeman y McVea, 2001). Con este enfoque se busca asegurar la permanencia en el tiempo de la empresa y sus operaciones, dado que se consideran no solo los organismos o particulares inmersos directamente en el negocio, sino los intereses de todos aquellos involucrados en el proyecto. Por lo tanto, el principal objetivo para la empresa es gestionar los intereses y las relaciones de accionistas, ejecutivos, trabajadores, comunidad, organizaciones medioambientales, etc.

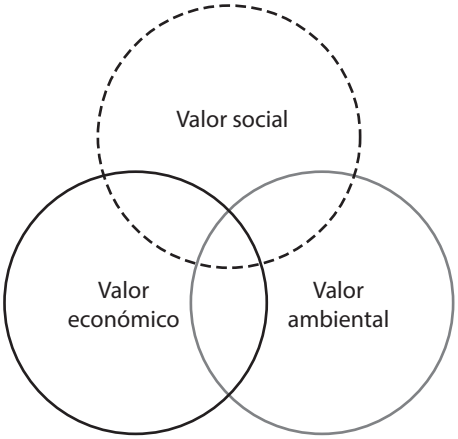


Figura 2.3 Principios que definen la sostenibilidad empresarial.

A continuación, se enumeran algunos de los retos y compromisos adquiridos por las compañías mineras para lograr sostenibilidad empresarial:

- Creación de valor y rentabilidad.
- Eficiencia operacional y productiva.
- Buen gobierno y comportamiento ético.
- Salud, seguridad y desarrollo personal y profesional de empleados.
- Apoyo a la comunidad.
- Protección del entorno.
- Control de emisiones contaminantes.
- Desarrollo de las sociedades involucradas en la operación.

Cuando se analiza el problema de la explotación de una mina desde la perspectiva de la comunidad, la función objetivo ya no es la maximización del VAN a partir de la venta del mineral extraído, sino la diferencia entre beneficios y costos ocasionados en la localidad cuando las autoridades permiten las operaciones mineras en esa zona.

Por ejemplo, puede darse el caso de que exista un conflicto entre las autoridades regionales en el que también participa la población local. Este conflicto se basa en aprobar (o no) el permiso de entrada en operación a una gran empresa minera en una zona muy cercana a la ciudad en cuestión. La historia de la explotación minera está llena de ejemplos en los cuales la comunidad local ha impedido la materialización de proyectos mineros o incluso la continuidad de operaciones de este tipo.

Aunque escapa del alcance de este libro, la problemática de la explotación óptima de minas desde una perspectiva social puede ser igualmente modelada a partir de los elementos desarrollados en este libro. Para este fin, será clave cuantificar tanto los beneficios como costos sociales de la explotación y después plantear el problema matemático con su respectiva función objetivo, así como las restricciones propias del problema.

2.6 Problemas resueltos

Problema 2.1

a) Una empresa minera desea determinar cuánto producir de un cierto mineral en cada periodo para maximizar su ingreso. Sea f la función de ingreso, $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f \in C^2(U)$, U cerrado. ¿Cuáles son las condiciones de primer y segundo orden que deben cumplir los candidatos a solución del problema?
b) Suponga que la empresa monopólica ha vendido 200 toneladas de mineral a la semana a 350 dólares por tonelada. Estudios han indicado que por cada 10 dólares de descuento que se ofrezca a los compradores, el número de toneladas vendidas se incrementará en 20 a la semana. Encuentre las funciones de demanda y de ingreso. ¿Qué tan grande debe ser el incentivo para maximizar su ingreso?

Solución

a) La condición de primer orden se refiere a aquellos valores dentro del dominio de la función $f'(x) = 0$. Como es un intervalo cerrado, los puntos extremos del intervalo no caen dentro del dominio donde $f'(x) = 0$; sin embargo, siguen siendo candidatos a solución del problema. Esta condición es necesaria pero no suficiente. El motivo es que podría existir un punto de inflexión que cambiara la concavidad de la curva.

   Para el caso de que se esté buscando el máximo, la condición de segundo orden establece que los candidatos encontrados anteriormente deben cumplir que $f''(x) < 0$. Si estos cumplen dicha condición, entonces se tiene definido el conjunto de puntos que cumplen con ser máximos locales. El máximo global se obtiene evaluando los puntos que cumplen con la condición de primer orden y con la condición de segundo orden en la función objetivo, así como evaluando los puntos extremos del intervalo. Así se comparan todos estos valores y se determina en definitiva el máximo global.
b) Sea q la cantidad de toneladas vendidas a la semana, entonces el incremento en las ventas es de $q - 200$. Por cada incremento de 20 toneladas vendidas, el precio disminuye 10 dólares. De modo que, por cada tonelada adicional vendida, la disminución en el precio es de $\frac{1}{20} \cdot 10$ y la función de demanda es la siguiente:

$$p(q) = 350 - \frac{10}{20}(q - 200) = 450 - \frac{1}{2}q$$

   La función de ingreso es:

$$I(q) = p(q)q = 450 - \frac{1}{2}q^2$$

Como $I'(q) = 450 - q$, se sabe que $I'(q) = 0$ cuando $q = 450$. Por la condición de primer orden, este valor de q da un máximo absoluto. Así el precio correspondiente es:

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$$

y el descuento es de 350 – 225 = 125. Por lo tanto, para maximizar el ingreso la empresa debe ofrecer una rebaja de 125 dólares.

Problema 2.2

Suponga que una empresa minera de un cierto *commodity* mineral que opera a rajo abierto está maximizando su utilidad a lo largo de la vida económica de la mina o LOM.

a) ¿Cómo plantearía el modelo en tiempo discreto, asumiendo que lo que se está maximizando es la utilidad en todo el periodo económico de la mina? (Plantee variables como precio, costo, cantidad producida, etc.).
b) Una condición comúnmente usada en la economía de recursos no renovables, es la condición de agotabilidad, expresada en tiempo discreto como:

$$S_t = S_{t-1} - q_{t-1}$$

Explique por qué es razonable introducir esta condición de agotabilidad en un modelo que maximiza la utilidad en todo el LOM de una mina a rajo abierto, plantee el modelo y responda en qué se diferencia este problema del anterior planteado.

Solución

a) Sea:

c_t: Costo unitario en $t \ \forall t = 0 \ldots T$

q_t: Producción en $t \ \forall t = 0 \ldots T$

p_t: Precio del commodity en $t \ \ \forall t = 0 \ldots T$

El modelo puede quedar planteado como:

$$\max_{0 \le q_t} \sum_{t=0}^{\text{LOM}} (p_t - c_t) q_t$$

Es decir, se convierte en una serie de problemas estáticos para escoger la producción en cada periodo y así maximizar la utilidad, donde lo que produzca hoy afecta solamente a la actual ganancia.

b) Sea:

$$
\begin{aligned}
&S_t \rightarrow \textit{Stock} \text{ del recurso en el tiempo } i && \forall t = 0 \ldots \text{LOM} \\
&c_t \rightarrow \text{Costo unitario de producción en } t && \forall t = 0 \ldots \text{LOM} \\
&q_t \rightarrow \text{Producción en } t && \forall t = 0 \ldots \text{LOM} \\
&p_t \rightarrow \text{Precio del } \textit{commodity} \text{ en } t && \forall t = 0 \ldots \text{LOM}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max_{0 \leq q_t} \sum_{t=0}^{\text{LOM}} (p_t - c_t) q_t \\
&\text{s.a} \\
&S_t = S_{t-1} - q_{t-1}
\end{aligned}
$$

Como se está explotando a rajo abierto, a medida que se va profundizando en la explotación, las distancias que se deben recorrer para transportar el material tronado son mucho mayores. Por lo tanto, se requiere de más equipo, más trabajadores, más gastos en sueldos, mayores servicios de mantenimiento, etc. Por esta razón, en general, el costo no va a depender solo de la evolución en el tiempo de los insumos, sino de las reservas remanentes (*stock)*.

Los costos también pueden depender de la producción, producto de la existencia, principalmente en la planta, de economías de escala cuyos múltiples subprocesos poseen un número fijo asociado a la mano de obra. De hecho, si la planta no está recibiendo mineral por algún problema que se presente en la mina, se deben seguir pagando los sueldos de los operarios. Por lo tanto, la estructura de costos de la mina asociada a la planta es fija en el corto plazo, pero no en el largo plazo.

En conclusión, el problema presentado es un problema intertemporal, donde lo hecho en el pasado determina el estado presente y lo que se haga en el presente determinará el estado futuro.

Parte II

Base Matemática

Capítulo 3

Principios de optimización dinámica

En este capítulo se describen los principales conceptos de la modelación de problemas de optimización dinámica y se presentan las variables y restricciones más comunes, así como la función objetivo típica propia de esta clase de problemas. El estudio en este capítulo contempla una mirada matemática que iniciará con una explicación de problemas en tiempo discreto para luego discutirlos en tiempo continuo. El objetivo de este capítulo es introducir al lector en los términos matemáticos que se utilizarán en el resto del libro, así como presentar su significado en el contexto minero y detallar cómo esta teoría se aplica a los problemas de la explotación óptima de minas.

3.1 Reseña histórica

La investigación matemática aplicada sufrió un fuerte impulso durante la Segunda Guerra Mundial. Importantes exponentes de diferentes ramas científicas contribuyeron al desarrollo de métodos matemáticos en busca de soluciones militares. Entre las múltiples áreas desarrolladas en este contexto, una de las disciplinas que vio la luz en este periodo fue precisamente la «investigación de operaciones» (OR, por sus siglas en inglés, *operations research*)[1]. Esta rama de la matemática trata principalmente el desarrollo de modelos, algoritmos y estadística con el objetivo de contribuir al proceso de toma de decisiones óptimas.

1 Esta disciplina también es conocida como investigación operativa, investigación operacional o programación matemática.

Todas estas herramientas matemáticas que se utilizaban para la guerra, se volvieron rápidamente útiles en otras áreas civiles[2]. Entre las aplicaciones que surgieron inmediatamente después de la Segunda Guerra Mundial, se encuentra la teoría de los procesos de decisión en múltiples pasos, introducida en 1952 por el matemático norteamericano Richard Bellman (1920-1984) y que entrega soluciones a la programación dinámica (desarrollada en detalle en el Capítulo 5).

Fue precisamente Richard Bellman, junto con su equipo de investigación, quien planteó diversos métodos para desarrollar y formular los problemas de la emergente programación dinámica. Para esto, desarrollaron el «principio de optimalidad» (ver Capítulo 5). El estudio realizado en esta materia permitió extender el alcance de la programación dinámica a los problemas de otras disciplinas científicas (entre las que se incluyen la ingeniería, la economía, la biología o la medicina), así como determinar las limitaciones y soluciones particulares en cada caso.

3.2 Definición de optimización intertemporal

Entre los problemas propios de la explotación óptima de minas, se destaca el problema de encontrar las cantidades a producir en cada instante de tiempo (Q_t), de forma que el VAN o la suma de los flujos de caja descontados a una tasa de descuento r, desde un tiempo inicial t_0 (típicamente referido como $t_0 = 0$) hasta un tiempo final T (LOM para efectos de una mina), sea máximo.

A continuación, se muestra el planteamiento matemático del problema anterior (ver Capítulo 2 para una derivación del problema):

$$\max_{Q_t} \sum_{t=0}^{T} \frac{\pi_t(Q_t)}{(1+r)^t} \tag{3.1}$$

s.a

$$\sum_{t=0}^{T} Q_t \leq S_0 \tag{3.2}$$

$$Q_t \geq 0 \quad \forall\ t = \{0, 1, \ldots, T\} \tag{3.3}$$

En este problema se ha asumido que el tiempo es discreto y la variable Q_t, que corresponde precisamente a la cantidad a optimizar, se considera como «variable de control» del problema. Se puede considerar que $\boldsymbol{Q} = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_T\}$ es el vector de cantidades en el tiempo.

La ecuación (3.2) representa la restricción de agotabilidad asociada a la explotación de un recurso no renovable, lo que condiciona que, para cada instante de tiempo hasta el final de la vida de la mina, la suma de las cantidades explotadas no supere al *stock* inicial del recurso (S_0).

[2] Este suele ser siempre el caso. Solo a modo de ejemplo, la propia ingeniería civil nació de la ingeniería militar (de ahí el término «civil» para referirse a obras de origen público y no militar).

Por otra parte, la ecuación (3.3) indica que la variable Q_t (para todo valor del tiempo) no puede ser negativa, dado que se trata de una explotación real de una mina y se asume que no se «inyecta» recurso en la tierra como parte de dicha explotación.

El problema anterior es una simplificación de lo que debe resolver en la práctica la empresa minera para asegurar una explotación óptima de su recurso[3]. Sin embargo, es suficiente para demostrar la naturaleza dinámica del problema. De hecho, la ecuación (3.2) relaciona las variables de control en el tiempo, de forma que la determinación de la cantidad por explotar en un tiempo cualquiera no pueda ser independiente del pasado o futuro de esta variable. De ahí que los problemas de optimización dinámica compartan la influencia de las decisiones del pasado en el proceso de toma de decisiones del presente. Asimismo, las decisiones que se tomen en el presente condicionan las decisiones que se tomarán en el futuro.

Por esto, las decisiones en un problema de optimización dinámico se denominan «intertemporales». Es decir, el valor que tome Q_t influirá en lo que ocurra con Q_s (con $s > t$). Esta es la principal característica de la optimización dinámica o intertemporal. Por el contrario, en la optimización estática las variables de control de un tiempo cualquiera no condicionan la selección de las variables de control en otros periodos de tiempo.

Con objeto de estudiar las propiedades básicas de los problemas de optimización dinámica, en la sección siguiente se plantea un problema general en tiempo discreto[4], que, aunque no posee una motivación minera propiamente, servirá para introducir más adelante el problema de la explotación óptima de minas.

3.3 Modelo general de optimización dinámica en tiempo discreto

3.3.1 Variables del problema

En un problema general de optimización dinámica las variables pueden dividirse, según su naturaleza, en los siguientes tres tipos:

- $\boldsymbol{x_t}$: Estado del sistema en el instante t. El estado de un sistema se refiere a una o varias propiedades que caracterizan el sistema dinámico a estudiar. A modo de ejemplo, en una operación minera de rajo se podría pensar que el estado corresponde a la topografía al final de cada año.
- $\boldsymbol{u_t}$: Variable de control en el instante t. Esta variable corresponde al conjunto de variables que controlan o modifican las variables de estado. Entre las variables de control típicas en el problema de explotación óptima de minas se encuentran el volumen a extraer y la ley de corte en cada periodo de tiempo. Continuando con el ejemplo anterior, si x_t es la topografía al final del periodo t, u_t podría corresponder al volumen total que se extrajo durante dicho periodo.

[3] Problemas más realistas y complejos se exponen en las Partes III y IV del libro.

[4] En la sección 3.5 se desarrolla el caso general en tiempo continuo.

- w_t: Variable de error o incertidumbre en un instante t. En general, en los sistemas dinámicos existen variables exógenas que son inciertas (al menos a los ojos de quien debe resolver el problema) y que quedan fuera del rango de control del optimizador. Por ejemplo, una variable incierta típica en una gran cantidad de mercados de minerales corresponde al precio del *commodity* que extrae una mina. En la práctica, para formular y resolver su problema, las minas realizan la optimización con base en un precio esperado para el futuro, pero esta simplificación genera distorsiones en la explotación óptima de la mina (discutido en detalle en la Parte IV del libro).

Para entender el rol de cada una de estas variables, se plantea el siguiente problema cotidiano. Considérese un viaje en automóvil desde Santiago a Viña del Mar. En este caso, se podría considerar como variable de control la velocidad del vehículo, que el automovilista (optimizador) controla usando el acelerador, el freno y manubrio; por lo tanto, habría tres variables de control asociadas a este vector. A su vez, la variable de estado podría estar asociada a la posición geográfica del vehículo en cada instante de tiempo. Por su parte, el estado del tráfico en la carretera, así como imprevistos en la misma (accidentes u obras de mantenimiento), se podrían considerar como una variable de error o incertidumbre.

Una posible función objetivo del problema anterior, y que generalmente el automovilista enfrenta, es la conducción óptima, es decir, minimizar el tiempo de locomoción. Si existe una única ruta factible, el problema de determinar la velocidad óptima para este objeto puede parecer simple. Sin embargo, las restricciones (por ejemplo, los límites de velocidad) y variables de error (por ejemplo, obstáculos en la carretera) hacen que el problema sea no trivial[5].

Una vez se han definido las variables de control, de estado y de error, se hace necesario definir la «política admisible» o acciones posibles en cada instante t. Esta se representa como $\boldsymbol{\pi} = (u_0, \ldots, u_t)$.

La política admisible contiene la información completa de las variables de control durante todo el horizonte de tiempo del problema. Aunque en la práctica se siguen infinitas políticas, para efectos de la optimización dinámica solo interesan aquellas que pueden ser declaradas admisibles. Así, por ejemplo, en el caso del viaje en automóvil entre Santiago y Viña del Mar, dos automovilistas distintos podrían haber realizado el camino siguiendo decisiones muy distintas en cada instante de tiempo. Incluso si el tiempo de viaje entre ambos fuese el mismo, posiblemente sus políticas, aunque admisibles, podrían ser distintas.

En el ejemplo de la explotación de una mina por medio de un rajo, lo anterior es equivalente a pensar que se podría llegar al *pit* final al cabo de un tiempo T de varias

[5] Si se utiliza como variable de control precisamente la ruta que optimiza el tiempo, algunos *software* que buscan resolver este problema son Waze o Google Maps. Aunque el autor desconoce el algoritmo que utilizan estos programas, posiblemente estos contengan algunas consideraciones de optimización dinámica.

formas distintas. Sin embargo, desde una perspectiva minera, la lógica operativa restringe una serie de desarrollos que por su naturaleza no deben admitirse.

3.3.2 Formulación del problema en tiempo discreto

Si se introducen todas las variables descritas en la subsección anterior en un modelo de optimización mediante una función objetivo $g_t = g_t(\boldsymbol{x_t}, \boldsymbol{u_t}(\boldsymbol{x_t}), \boldsymbol{w_t})$, un problema general de optimización dinámica quedaría representado por la ecuación (3.4).

$$\max_{\boldsymbol{\pi}\in\Pi} J_{\boldsymbol{\pi}} = E\left\{\sum_{k=0}^{T-1} g_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}_k), \boldsymbol{w}_k) + g_T(\boldsymbol{x_T})\right\} \tag{3.4}$$

donde la función que se busca maximizar es la función de beneficio o costo, que depende del estado inicial del sistema $\boldsymbol{x}_0$ (es decir, $J_{\pi}(\boldsymbol{x}_0)$). El término $g_T(\boldsymbol{x_T})$ es un valor residual. Se debe notar que, dada la presencia de una variable de incertidumbre en el problema, la resolución del mismo implica calcular un valor esperado de la función objetivo[6].

Para entender el valor residual hay que entender que existen ciertos problemas en minería y economía en los cuales se busca la política admisible óptima. Sin embargo, esta política no siempre se resuelve hasta un periodo suficientemente lejano (o infinito), sino, generalmente, hasta un momento en el cual el valor residual del sistema es suficientemente bajo (potencialmente puede ser cero).

Por ejemplo, considérese una explotación minera hasta la envolvente económica. Aunque al estimar el valor del yacimiento es común considerar solo el VAN de las reservas, es decir, el mineral contenido en la envolvente económica, parte del recurso remanente podría convertirse en el futuro en reservas. Esto se debe a posibles futuras mejoras de la tecnología de explotación o procesamiento o a que el precio del *commodity* mineral sea mayor al esperado en la actualidad. En cualquier caso, es razonable esperar que, aunque hoy se busque en una mina optimizar el VAN durante el LOM de la explotación, existirá un valor residual asociado que será una función de los recursos remanentes al final de la explotación.

Dado lo anterior, el problema definido en (3.4) es equivalente a encontrar una política admisible óptima $\boldsymbol{\pi}^*$ que maximice la función de beneficio o costo total (incluyendo el valor residual). Matemáticamente:

$$J_{\boldsymbol{\pi}^*}(\boldsymbol{x}_0) = \max_{\boldsymbol{\pi}\in\Pi} J_{\boldsymbol{\pi}}(\boldsymbol{x}_0) \tag{3.5}$$

Al modificar una o más variables de control del sistema, se cambia el estado del sistema en el periodo siguiente. A su vez, este cambio de estado podría generar un cambio en el valor de las variables de control. Por su parte, la existencia de una variable de incertidumbre podría introducir ruido, lo que en general alterará el estado del sistema. Una manera de representar esta relación es con la Figura 3.1, donde se

[6] En el Capítulo 7 y la Parte IV del libro se justifica esta elección.

aprecia cómo la relación entre las variables produce intertemporalidad en el proceso de toma de decisiones.

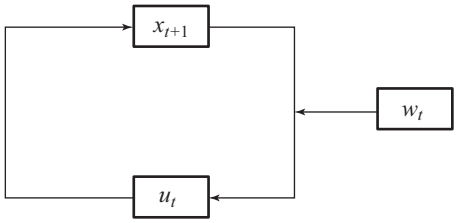


Figura 3.1 Representación gráfica de la relación entre las variables.

Un ejemplo del sistema anterior puede encontrarse en Bertsekas (1995). En este problema se tiene una empresa que debe controlar de mejor forma su inventario en el tiempo. Para esto, la empresa debe ordenar una cierta cantidad de un artículo en cada periodo de tiempo. El artículo en cuestión satisface una demanda estocástica y el objetivo de la empresa es minimizar el costo ocasionado al pedir una cantidad del producto antes de saber exactamente cuál será la demanda.

Las variables se definen como sigue:

- x_k: *Stock* del artículo disponible al principio del k-ésimo periodo.
- u_k: *Stock* del artículo ordenado (y entregado instantáneamente) al principio del k-ésimo periodo.
- w_k: Demanda durante el k-ésimo periodo con una distribución de probabilidades dada.

Se asume que $w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}$ son variables aleatorias independientes y que el exceso de demanda se satisface tan pronto como se renueva el inventario disponible. El *stock* evoluciona de acuerdo a la ecuación en tiempo discreto dada por:

$$x_{k+1} = x_k + u_k - w_k \tag{3.6}$$

La Figura 3.1 corresponde precisamente a una representa gráfica de una ecuación como la (3.6).

3.4 Tipos de soluciones

En optimización dinámica existen dos tipos de soluciones posibles:

- ***Open Loop* (OL):** Se define cuando la solución óptima solo depende del tiempo y no del estado del sistema, es decir, se tiene una solución del tipo $\boldsymbol{\pi}^*(t)$.
- ***Close Loop* (CL):** En este caso la solución óptima, además, depende del estado del sistema en el tiempo y de la incertidumbre presente. Esta solución es del tipo $\boldsymbol{\pi}_t^*(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{w}_t)$.