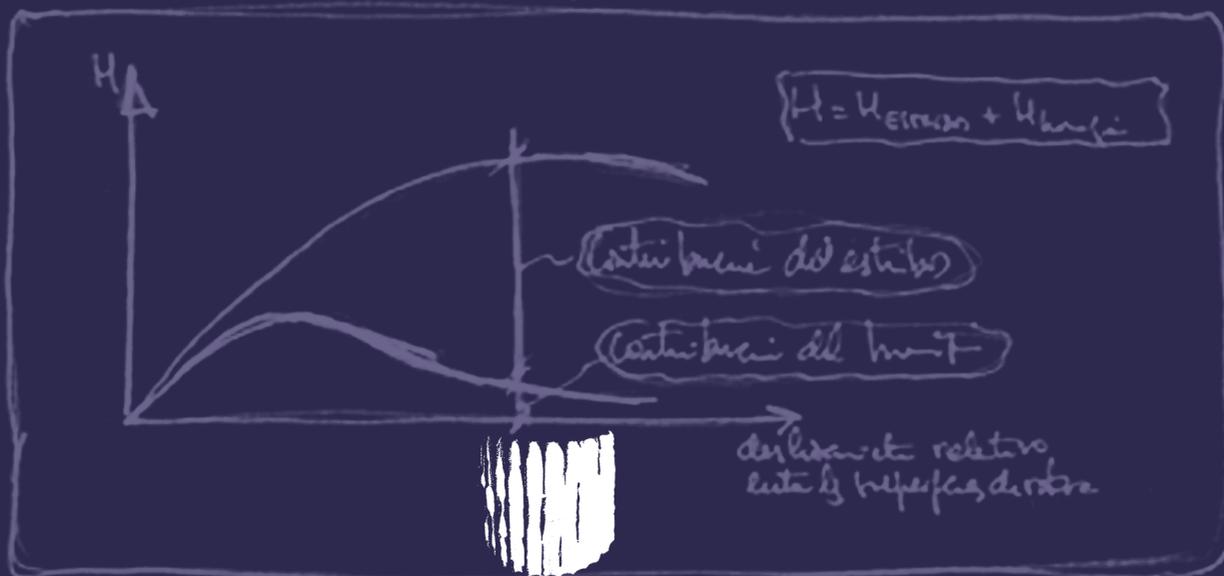




JAVIER RUI-WAMBA

# TEORÍA UNIFICADA DE ESTRUCTURAS Y CIMIENTOS UNA MIRADA TRANSVERSAL

En el caso de los edificios de hormigón armado, a la transmisión de esfuerzos rotacionales, contribuyen tanto los estribos como los brazos de los ejes de los pilares, y en particular mucho los segundos cuando, en estos casos, se trata de edificios de gran altura. En términos constructivos, dicha colaboración entre el hormigón y los estribos tendrá el efecto del esquema siguiente...



FUNDACIÓN  
ESTEYCO

Los pernos de conexión tienen un comportamiento similar, pero básicamente no cuentan en la colaboración de contribución del brazo. El esquema de comportamiento rotacional, por efecto del hormigón fue similar al presentado en el apartado de los efectos de desplazamientos relativos.

EDITORIAL REVERTÉ



# **TEORÍA UNIFICADA DE ESTRUCTURAS Y CIMIENTOS**

**UNA MIRADA TRANSVERSAL**



# TEORÍA UNIFICADA DE ESTRUCTURAS Y CIMIENTOS

UNA MIRADA TRANSVERSAL

Javier Rui-Wamba



FUNDACIÓN  
ESTEYCO

## **Teoría unificada de estructuras y cimientos. Una mirada transversal**

© Javier Rui-Wamba, 2020

*Esta edición:*

© Editorial Reverté, Barcelona, 2020

Edición en papel:

ISBN: 978-84-291-4436-9

Edición en e-book:

ISBN: 978-84-291-9588-0 (PDF)

Maquetación: Patricia Reverté

Revisión de textos: Mariló Caballer Gil

Gráficos: Jordi Morelló

Documentación e iconografía: Anna Caseras

Coordinación: Ilse Font

### **Propiedad de:**

Editorial Reverté, S.A.

Calle Loreto 13-15, local B

08029 Barcelona

Tel: (+34) 93 419 3336

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo las excepciones previstas por la Ley 23/2006 de Propiedad Intelectual, y en concreto por su artículo 32, sobre 'Cita e ilustración de la enseñanza'. Los permisos para fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra pueden obtenerse en Cedro (Centro Español de Derechos Reprográficos, [www.cedro.org](http://www.cedro.org)).

Impreso en España · *Printed in Spain*

Depósito Legal: B 19320-2020

# 1514

*Para Maria Teresa Ubach Servet-Corderroure*



“A mis compañeros de Esteyco, que me han acompañado en estos últimos 50 años de mi vida profesional y que me han enriquecido aportándome su valioso conocimiento y experiencia, en busca de la excelencia, formando parte todos de una empresa, que siempre ha tenido como objetivo marcar la diferencia en el mundo de la ingeniería y la arquitectura: *Trabajar para saber, saber para trabajar*.”

A mis queridos alumnos, con los que he tenido el privilegio de participar en su formación de excelentes ingenieros. Y a mis compañeros de profesión, con los que he compartido y debatido tantas experiencias e inquietudes sobre la ingeniería y las infraestructuras.

A los ingenieros de la Dirección General de Carreteras, del ADIF (MITMA) y de tantas administraciones locales y autonómicas que han contribuido desde el planeamiento, el proyecto, la construcción y el mantenimiento hasta el progreso de las infraestructuras y la formación de generaciones de profesionales de la ingeniería de nuestro país”.





### **Javier Rui-Wamba Martija**

Nace en Gernika en 1942. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos desde 1966 por la Universidad Politécnica de Madrid, se inicia profesionalmente en el Plan Sur de Valencia y en la oficina de Freyssinet de París (1969).

En 1970 funda la sociedad de ingeniería ESTEYCO que cuenta en la actualidad con un equipo pluridisciplinar de ciento ochenta profesionales y oficinas en Barcelona, Madrid, Bilbao, Bogotá, México, Chile y Brasil, y tiene presencia en numerosos países. Ha realizado más de ochocientos proyectos y direcciones de obras, y trabajos de I+D+i.

Durante diecisiete años, hasta 1991, fue profesor de Estructuras y Puentes Metálicos en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid. Además, ha sido profesor honorífico de la Universidad Politécnica de Cataluña y es frecuentemente invitado como conferenciante a nivel nacional e internacional.

Ha presidido la Asociación Española de Consultores en Ingeniería. En 1987 recibió la Medalla de la Asociación Técnica Española de Pretensado (ATEP) por la contribución al desarrollo del hormigón pretensado en España, y es miembro de honor de esta asociación. Ha recibido la Medalla al Mérito Profesional (1992) y la Medalla de Honor del Colegio Nacional de Ingenieros de Caminos (2013), así como la Medalla Idefonso Cerdá del Colegio de Ingenieros de Caminos de Cataluña (2015). En 1993 ganó el Premio Construmat, y el Premio ale Heavylift a “Toda una vida”. En 2016 obtuvo el Premio Nacional de Ingeniería Civil. Es miembro supernumerario de la Real Academia de Ingeniería.

Preside también la Fundación ESTEYCO, que creó en 1991.



# Índice

**PRÓLOGO XXIII****INTRODUCCIÓN XXIX**

Estructura y contenido XXX

**1 ANÁLISIS ESTRUCTURAL ELÁSTICO 1**

- 1.1 Preámbulo 2
- 1.2 Comportamiento elástico de piezas prismáticas 5
  - 1.2.1 Introducción 5
  - 1.2.2 Dedución de las expresiones que gobiernan el comportamiento elástico de piezas prismáticas solicitadas en flexión 6
  - 1.2.3 Criterio de signos 7
  - 1.2.4 Los teoremas de Mohr 10
  - 1.2.5 El teorema del influjo unitario 11
- 1.3 Respuesta tensional y deformacional de una sección cualquiera solicitada en flexión pura 16
  - 1.3.1 Introducción 16
  - 1.3.2 Determinación de las tensiones provocadas por un momento flector 16
  - 1.3.3 Ejes principales de inercia y fibra neutra 18
- 1.4 Respuesta tensional y deformacional de una sección solicitada por esfuerzos cortantes 26
  - 1.4.1 Introducción 26
  - 1.4.2 Acerca del significado de las tensiones tangenciales 27
  - 1.4.3 Secciones abiertas 27
    - 1.4.3.1 Expresión general del flujo de tensiones tangenciales en piezas prismáticas de sección abierta y pared delgada 27
  - 1.4.4 El concepto de "centro de esfuerzos cortantes" (c.e.c.) 32
    - 1.4.4.1 Determinación aproximada del centro de esfuerzos cortantes 39
  - 1.4.5 Secciones cerradas 40
    - 1.4.5.1 Consideraciones generales 40
    - 1.4.5.2 Metodología para deducir el flujo de tensiones tangenciales en un cajón unicelular 41
    - 1.4.5.3 Deformaciones producidas por esfuerzos cortantes 42
    - 1.4.5.4 Expresión general del flujo de tensiones generales en un cajón unicelular 44
- 1.5 La torsión 47
  - 1.5.1 Introducción 47
  - 1.5.2 Ideas básicas sobre la torsión 49
  - 1.5.3 Las deformaciones provocadas por la torsión: el alabeo 52
    - 1.5.3.1 El concepto de "alabeo" 52
    - 1.5.3.2 Formulación matemática del alabeo 56
    - 1.5.3.3 Alabeo de secciones cerradas 65
    - 1.5.3.4 Clasificación de secciones según su deformabilidad torsional 68
  - 1.5.4 La torsión uniforme 69
    - 1.5.4.1 Concepto 69
    - 1.5.4.2 La analogía de la membrana 70
    - 1.5.4.3 Determinación de la inercia de torsión,  $I_T$ , de una sección utilizando la analogía de la membrana 71
      - 1.5.4.3.1 Secciones macizas 71
      - 1.5.4.3.2 Secciones en cajón con una célula 72
      - 1.5.4.3.3 Secciones en cajón con varias células 73
    - 1.5.4.4 Fórmula aproximada de Saint-Venant para la determinación de la inercia de torsión en secciones macizas 79
  - 1.5.5 La torsión no uniforme 80
    - 1.5.5.1 Concepto 80
    - 1.5.5.2 Dedución de las expresiones que definen las tensiones y deformaciones originadas en la torsión no uniforme 81
    - 1.5.5.3 Analogía entre flexión y torsión no uniforme 84
    - 1.5.5.4 Sobre el concepto de "bimomento" 84
    - 1.5.5.5 Determinación del centro de torsión de una sección genérica 91
  - 1.5.6 La torsión mixta 103
    - 1.5.6.1 Concepto y formulación de la ecuación diferencial que gobierna la torsión mixta 103
    - 1.5.6.2 Solución de la ecuación diferencial 104

- 1.5.6.3 Algunos resultados 106
- 1.5.6.4 Método simplificado de cálculo 107
- 1.5.7 Síntesis de la torsión 109
- 1.6 Esfuerzos axiales 110
- 1.7 Esfuerzos combinados 111
  - 1.7.1 Introducción 111
  - 1.7.2 Núcleo central y rendimiento de una sección 112
  - 1.7.3 Análisis tensional y deformacional: el círculo de Mohr 114
- 1.8 Reacciones de apoyo 117
  - 1.8.1 Introducción 117
  - 1.8.2 Algunos significativos ejemplos 117

## 2 MATERIALES ESTRUCTURALES 125

- 2.1 Preámbulo y justificación 126
- 2.2 Materiales creados por seres humanos 135
  - 2.2.1 Aceros estructurales 135
    - 2.2.1.1 Introducción 135
    - 2.2.1.2 Breve noticia acerca de su origen y su fabricación 137
    - 2.2.1.3 La constitución de la materia 139
    - 2.2.1.4 El diagrama de fases Fe-C 141
    - 2.2.1.5 Singularidades de origen metalúrgico 144
    - 2.2.1.6 Tratamientos térmicos de los aceros 146
    - 2.2.1.7 Tipos y características de los aceros 147
    - 2.2.1.8 Otros tipos de aceros 149
      - 2.2.1.8.1 Aceros termomecánicos 149
      - 2.2.1.8.2 Aceros con resistencia mejorada a la corrosión 151
    - 2.2.1.9 Comportamiento mecánico del acero solicitado en tracción pura 152
    - 2.2.1.10 Tensiones de comparación 155
    - 2.2.1.11 La resiliencia del acero 165
    - 2.2.1.12 Tenacidad y mecánica de fractura 167
      - 2.2.1.12.1 Introducción 167
      - 2.2.1.12.2 Un poco de historia 167
      - 2.2.1.12.3 Criterio energético de Griffith 169
      - 2.2.1.12.4 Criterio tensional de Irwin 172
      - 2.2.1.12.5 Mecánica de fractura para materiales elastoplásticos. El concepto CTOD o COD 176
      - 2.2.1.12.6 La integral J 178
      - 2.2.1.12.7 Curvas resistencia-apertura de fisuras 179
    - 2.2.1.13 La fatiga 180
      - 2.2.1.13.1 Introducción 180
      - 2.2.1.13.2 Diagramas de Goodman 181
      - 2.2.1.13.3 Metodologías modernas 182
      - 2.2.1.13.4 Crecimiento de fisuras subcríticas 187
  - 2.2.2 Hormigones 188
    - 2.2.2.1 Breve noticia acerca de sus orígenes y características 188
    - 2.2.2.2 Propiedades genéricas de los hormigones 193
    - 2.2.2.3 Características mecánicas de los hormigones 194
      - 2.2.2.3.1 Introducción 194
      - 2.2.2.3.2 Ensayos de probetas comprimidas 196
      - 2.2.2.3.3 Ensayos a tracción del hormigón 197
      - 2.2.2.3.4 Mecánica de fractura: tenacidad del hormigón 199
      - 2.2.2.3.5 Ensayos de penetración 204
      - 2.2.2.3.6 Módulo de elasticidad del hormigón 205
      - 2.2.2.3.7 Módulo de Poisson,  $\nu$  205
      - 2.2.2.3.8 La fatiga de los hormigones 205
    - 2.2.2.4 Comportamiento de los hormigones solicitados pluritensionalmente 206
    - 2.2.2.5 Resistencia efectiva del hormigón 215
    - 2.2.2.6 Variabilidad de las características mecánicas del hormigón en el tiempo 219
    - 2.2.2.7 Variabilidad de las características deformacionales del hormigón en el tiempo 221

2.3	2.3	226
2.3.1	2.3.1	226
2.3.2	2.3.2	228
2.3.3	2.3.3	229
2.3.4	2.3.4	232
2.3.4.1	2.3.4.1	232
2.3.4.2	2.3.4.2	232
2.3.4.3	2.3.4.3	233
2.3.4.4	2.3.4.4	234
2.3.4.5	2.3.4.5	234
2.3.4.6	2.3.4.6	234
2.3.4.7	2.3.4.7	235
2.3.4.8	2.3.4.8	235
2.3.4.9	2.3.4.9	236
2.3.4.10	2.3.4.10	241
2.3.4.11	2.3.4.11	241
2.3.4.12	2.3.4.12	243
2.3.4.13	2.3.4.13	246
2.3.4.14	2.3.4.14	249
2.3.5	2.3.5	251
2.3.5.1	2.3.5.1	251
2.3.5.2	2.3.5.2	253
2.3.5.3	2.3.5.3	256
2.3.5.4	2.3.5.4	258
2.3.5.5	2.3.5.5	260
2.3.5.6	2.3.5.6	263
2.3.5.7	2.3.5.7	268
2.3.5.8	2.3.5.8	270
2.3.6	2.3.6	275
2.3.6.1	2.3.6.1	275
2.3.6.2	2.3.6.2	276
2.3.6.3	2.3.6.3	277
2.3.6.4	2.3.6.4	278
2.3.6.5	2.3.6.5	281
2.3.6.6	2.3.6.6	282
2.3.6.7	2.3.6.7	283

### 3 SISTEMAS ESTRUCTURALES DE ACERO Y HORMIGÓN 285

3.1	3.1	286
3.2	3.2	289
3.2.1	3.2.1	289
3.2.2	3.2.2	290
3.2.2.1	3.2.2.1	290
3.2.2.2	3.2.2.2	291
3.2.2.3	3.2.2.3	295
3.2.2.4	3.2.2.4	295
3.2.2.5	3.2.2.5	296
3.2.2.5.1	3.2.2.5.1	296
3.2.2.5.2	3.2.2.5.2	297
3.2.2.5.3	3.2.2.5.3	298
3.2.2.5.4	3.2.2.5.4	298
3.2.3	3.2.3	301
3.2.3.1	3.2.3.1	301
3.2.3.2	3.2.3.2	304
3.2.3.2.1	3.2.3.2.1	304
3.2.3.2.2	3.2.3.2.2	309
3.2.3.2.3	3.2.3.2.3	311

- 3.2.3.2.4 Análisis elásticos de soportes comprimidos con diferentes configuraciones 315
- 3.2.3.2.5 El concepto de "longitud equivalente de pandeo" 318
- 3.2.3.2.6 El pandeo según las antiguas normas alemanas y francesas: el método  $\omega$  320
- 3.2.3.2.7 La inestabilidad estructural según el Eurocódigo 3 322
- 3.2.3.2.8 Cargas equivalentes a la deformación de una barra comprimida 328
- 3.2.3.2.9 El pandeo de soportes compuestos 332
  - 3.2.3.2.9.1 Introducción 332
  - 3.2.3.2.9.2 La deformabilidad de las piezas compuestas 333
  - 3.2.3.2.9.3 Carga crítica y longitud de pandeo equivalente en piezas compuestas 334
  - 3.2.3.2.9.4 Determinación de esfuerzos en los enlaces de las piezas compuestas 338
- 3.2.3.2.10 Métodos aproximados para determinar la carga crítica de pandeo de Euler 340
- 3.2.3.3 El pandeo por torsión y por flexión y torsión de soportes comprimidos 342
  - 3.2.3.3.1 Introducción 342
  - 3.2.3.3.2 El pandeo por torsión 342
  - 3.2.3.3.3 El pandeo por flexión y torsión 345
- 3.2.3.4 El pandeo lateral de vigas 347
  - 3.2.3.4.1 Planteamiento general 347
  - 3.2.3.4.2 El pandeo lateral del cordón comprimido de un puente en celosía con tablero inferior 351
  - 3.2.3.4.3 Intestabilidad de un soporte sumergido en un medio elástico 354
- 3.2.3.5 Pandeo de placas: abolladura 355
  - 3.2.3.5.1 Introducción 355
  - 3.2.3.5.2 Análisis de la placa ideal: carga crítica de abolladura 356
  - 3.2.3.5.3 Comportamiento de la placa real en compresión y flexocompresión: el concepto de anchura eficaz 360
  - 3.2.3.5.4 La abolladura de la placa comprimida desde una perspectiva deformacional 369
  - 3.2.3.5.5 El cortante último 371
  - 3.2.3.5.6 Los métodos de Basler y de la Escuela de Cardiff 376
- 3.2.3.6 Secciones esbeltas flectadas: comportamiento poscrítico 383
  - 3.2.3.6.1 Introducción 383
  - 3.2.3.6.2 Métodos para determinar la capacidad resistente de una sección 385
  - 3.2.3.6.3 El concepto de secciones eficaces o reducidas 385
  - 3.2.3.6.4 Secciones esbeltas: análisis de su capacidad resistente a flexión 388
  - 3.2.3.6.5 Capacidad resistente de una chapa rigidizada comprimida 392
  - 3.2.3.6.6 Concepción y dimensionamiento de rigidizadores 401
  - 3.2.3.6.7 Esbelteces aconsejables para rigidizadores y chapas comprimidas 407
  - 3.2.3.6.8 Esbelteces límites en almas de vigas flectadas 409
- 3.3 Estructuras de hormigón armado 413
  - 3.3.1 Introducción compartida con las de hormigón pretensado 413
  - 3.3.2 Caracterización de los materiales 416
  - 3.3.3 Respuestas seccionales a solicitaciones individualizadas 417
    - 3.3.3.1 Solicitación de compresión, N, en piezas cortas 417
    - 3.3.3.2 Solicitación de tracción, T 418
      - 3.3.3.2.1 Introducción 418
      - 3.3.3.2.2 Comportamiento resistente y deformacional de un tirante de hormigón armado 419
      - 3.3.3.2.3 El mecanismo de fisuración y el concepto de "adherencia" 422
      - 3.3.3.2.4 Armaduras mínimas: control de fisuración y condición de ductilidad 427

- 3.3.3.2.5 Acerca del origen de las fisuras y de las estrategias para controlarlas 431
      - 3.3.3.2.6 Aperturas tolerables de fisuras 440
    - 3.3.3.3 Solicitación de flexión,  $M$  443
      - 3.3.3.3.1 Consideraciones generales 443
      - 3.3.3.3.2 El diagrama momento-curvatura comentado 444
    - 3.3.3.4 Solicitación de cortante 455
      - 3.3.3.4.1 Introducción 455
      - 3.3.3.4.2 Comportamiento de una viga solicitada por esfuerzos cortantes 457
      - 3.3.3.4.3 Comportamiento plástico de una viga de hormigón armado 460
      - 3.3.3.4.4 Métodos avanzados de análisis 463
      - 3.3.3.4.5 Reflexiones ingenieriles acerca de los esfuerzos de cortante 468
      - 3.3.3.4.6 Vigas sin armaduras transversales 471
      - 3.3.3.4.7 La verificación del cortante según diferentes normativas 477
      - 3.3.3.4.8 La transferencia de esfuerzos cortantes o rasantes entre dos superficies en contacto 484
      - 3.3.3.4.9 Punzonamiento 488
    - 3.3.3.5 Solicitación de torsión,  $M_T$  494
      - 3.3.3.5.1 Comportamiento de piezas solicitadas en torsión 494
      - 3.3.3.5.2 Caracterización del comportamiento torsional 496
  - 3.3.4 Interacción de esfuerzos 499
    - 3.3.4.1 Flexión y compresión,  $N$ - $M$  499
    - 3.3.4.2 Flexión y cortante ( $M$  y  $V$ ) 506
    - 3.3.4.3 Flexión, cortante y torsión ( $M$ ,  $V$  y  $M_T$ ) 507
  - 3.3.5 Deformabilidad de elementos flectados 508
  - 3.3.6 Inestabilidad y pandeo 513
    - 3.3.6.1 Introducción 513
    - 3.3.6.2 El concepto de inestabilidad en soportes de hormigón armado 515
    - 3.3.6.3 Diagramas "reducidos" de interacción  $N$ - $M$  516
    - 3.3.6.4 Diagramas de interacción  $N$ - $M$  en función de la esbeltez del soporte 521
    - 3.3.6.5 El método de los coeficientes de reducción 522
    - 3.3.6.6 El método de la columna-modelo CEB-FIP (1978) 524
    - 3.3.6.7 La influencia de las coacciones a giros y desplazamientos en el comportamiento de soportes comprimidos 525
    - 3.3.6.8 Unas reflexiones finales acerca de las normativas 530
- 3.4 Estructuras de hormigón pretensado 531
  - 3.4.1 A modo de preámbulo 531
  - 3.4.2 Los orígenes del pretensado 532
  - 3.4.3 Aceros para pretensar: cables, barras y alambres 534
  - 3.4.4 El concepto del pretensado, análisis del comportamiento de un tirante traccionado 535
  - 3.4.5 El pretensado con cables curvos 540
    - 3.4.5.1 Introducción 540
    - 3.4.5.2 Análisis del comportamiento de una viga isostática pretensada 541
  - 3.4.6 El pretensado de vigas continuas 545
    - 3.4.6.1 Geometría de los cables 545
    - 3.4.6.2 Los momentos hiperestáticos de pretensado 546
  - 3.4.7 Losas postensadas 549
  - 3.4.8 Las pérdidas de pretensado 554
    - 3.4.8.1 Introducción 554
    - 3.4.8.2 Las pérdidas por rozamiento 554
    - 3.4.8.3 Pérdidas por penetración de cuña 555
    - 3.4.8.4 Pérdidas debidas al acortamiento elástico del hormigón 556
    - 3.4.8.5 Pérdidas diferidas de pretensado 556
  - 3.4.9 Tecnologías del pretensado 559
    - 3.4.9.1 Breve reseña historicista 559
    - 3.4.9.2 Sistema Freyssinet con anclajes de mortero zunchado 559
    - 3.4.9.3 Sistemas actuales de pretensado 561

- 3.5 Las estructuras mixtas de hormigón y acero 566
  - 3.5.1 Introducción 566
  - 3.5.2 Esbozos biográficos 567
  - 3.5.3 Análisis seccional 569
  - 3.5.4 Análisis global de una viga 572
  - 3.5.5 La eficiencia de las estructuras mixtas 574
  - 3.5.6 Dimensionamiento de la conexión 576
    - 3.5.6.1 Consideraciones previas 576
    - 3.5.6.2 Dispositivos de conexión 576
    - 3.5.6.3 Características de los pernos conectadores 578
    - 3.5.6.4 Comportamiento de un perno aislado 579
    - 3.5.6.5 Capacidad resistente de un perno aislado 580
    - 3.5.6.6 Distribución de pernos conectadores 581
    - 3.5.6.7 Efecto de la fluencia, la retracción y los gradientes de temperatura 584
    - 3.5.6.8 La resistencia a la fatiga de un perno conectador 585
  - 3.5.7 Armaduras transversales 585
  - 3.5.8 Platabandas unidas a una losa de hormigón 586
  - 3.5.9 Posibilidades de utilización del pretensado 587
  - 3.5.10 Soportes mixtos 588
    - 3.5.10.1 Introducción 588
    - 3.5.10.2 Descripción y crítica del método propugnado en el Eurocódigo 4 590
    - 3.5.10.3 Método unificado de análisis de un soporte mixto 592
    - 3.5.10.4 La cuestión de la adherencia 595

#### 4 TRANSFERENCIA DE FUERZAS 621

- 4.1 Preámbulo general 622
- 4.2 Uniones en estructuras de acero 623
  - 4.2.1 Uniones roblonadas 623
  - 4.2.2 Uniones con tornillos ordinarios 624
    - 4.2.2.1 Características de los tornillos ordinarios 624
    - 4.2.2.2 Tipologías de uniones con tornillos ordinarios 625
    - 4.2.2.3 Dimensionamiento de uniones con tornillos ordinarios 626
  - 4.2.3 Uniones con tornillos de alta resistencia pretensados 628
    - 4.2.3.1 Introducción 628
    - 4.2.3.2 Características de los tornillos de alta resistencia 628
    - 4.2.3.3 Comportamiento de las uniones con T.A.R. pretensadas 630
    - 4.2.3.4 Uniones en torres eólicas de acero 633
    - 4.2.3.5 Verificación de uniones con T.A.R. pretensados 634
  - 4.2.4 Uniones soldadas 635
    - 4.2.4.1 Introducción 635
    - 4.2.4.2 Procedimientos de soldadura 636
    - 4.2.4.3 Defectos en la soldadura 637
    - 4.2.4.4 Dimensionamiento de las uniones soldadas 638
- 4.3 En estructuras de hormigón armado 641
  - 4.3.1 Introducción 641
  - 4.3.2 Barras aisladas ancladas al hormigón 642
  - 4.3.3 Barras agrupadas 646
  - 4.3.4 Anclajes dispuestos en hormigones endurecidos 648
  - 4.3.5 Empalme de barras por solape 649
  - 4.3.6 Nuevos dispositivos de anclaje y solape de barras 650
- 4.4 En estructuras de hormigón pretensado 651
- 4.5 En estructuras mixtas de hormigón y acero 651
- 4.6 Entre estructuras y terreno de cimentación 652
  - 4.6.1 Introducción 652
  - 4.6.2 Cimentaciones superficiales 653
    - 4.6.2.1 Consideraciones previas 653
    - 4.6.2.2 Deformabilidad del terreno de cimentación: interacción suelo-estructura 655
    - 4.6.2.3 Comportamiento de una viga flotante 658
    - 4.6.2.4 Capacidad resistente del terreno de cimentación 660

- 4.6.3 Cimentaciones profundas 667
  - 4.6.3.1 Consideraciones previas 667
  - 4.6.3.2 Comportamiento del pilote aislado solicitado por un axil centrado 668
  - 4.6.3.3 Equilibrio de encepados pilotados y pilas-pilote 673
  - 4.6.3.4 Eficiencia de los grupos de pilotes 674
  - 4.6.3.5 La contribución de los encepados 677
  - 4.6.3.6 Pilotes solicitados por cargas horizontales y por momentos aplicados en cabeza 678
- 4.6.4 Micropilotes 681
- 4.6.5 Anclajes activos al terreno 682
- 4.7 Sistemas de contención de tierras 685
  - 4.7.1 Introducción 685
  - 4.7.2 Muros de contención de tierras 686
    - 4.7.2.1 Muros de piedra, de hormigón en masa o ligeramente armados 686
    - 4.7.2.2 Muros de hormigón armado 687
    - 4.7.2.3 Muros pantalla 690
      - 4.7.2.3.1 Consideraciones generales 690
      - 4.7.2.3.2 Criterios de dimensionamiento 691
    - 4.7.2.4 Muros geosintéticos 692
    - 4.7.2.5 Muros con rellenos granulares reforzados 693
  - 4.7.3 Entibaciones 693
  - 4.7.4 Cajones rellenos de tierras 694
  - 4.7.5 Estructuras enterradas 696
    - 4.7.5.1 Consideraciones previas 696
    - 4.7.5.2 Estructuras construidas a cielo abierto 697
      - 4.7.5.2.1 Bóvedas 697
      - 4.7.5.2.2 Tuberías enterradas 698
      - 4.7.5.2.3 Galerías de servicio 699
      - 4.7.5.2.4 Pasos inferiores 699
    - 4.7.5.3 Túneles perforados 700
      - 4.7.5.3.1 Consideraciones generales 700
      - 4.7.5.3.2 Metodología del proyecto de un túnel: condiciones de contorno y elogio de la geología 702
      - 4.7.5.3.3 Los túneles en la historia 704
      - 4.7.5.3.4 Diferentes tipos de construcciones enterradas 705
      - 4.7.5.3.5 Concepción de obras subterráneas 706
      - 4.7.5.3.6 Acerca del dimensionamiento de túneles y sus revestimientos 709
  - 4.7.6 Estribos de puentes 713

## 5 DISPOSITIVOS DE APOYO 719

- 5.1 Relato historicista 720
- 5.2 Apoyos de neopreno zunchado 726
  - 5.2.1 Características generales 726
  - 5.2.2 Comportamiento tensional y deformacional: criterios de dimensionamiento 726
  - 5.2.3 Colocación de aparatos de apoyo 730
- 5.3 Otros tipos de dispositivos de apoyo 731
- 5.4 Rótulas Freyssinet 731
- 5.5 La pila dúctil 734

## 6 CONCEPCIÓN, DIMENSIONAMIENTO, VERIFICACIÓN DE ZONAS SINGULARES: EL MÉTODO *STRUT AND TIE* (BIELAS Y TIRANTES) 739

- 6.1 Preámbulo general 740
- 6.2 El método *strut and tie* en las estructuras de hormigón 741
  - 6.2.1 Definición y localización de las zonas D y B 741
  - 6.2.2 Vigas de gran canto 742
  - 6.2.3 Transmisión de cargas puntuales 744
  - 6.2.4 Singularidades en vigas flectadas 745
  - 6.2.5 Ménsulas de soportes 747

- 6.2.6 Encuentros de vigas con soportes 748
- 6.2.7 Anclajes de vigas pretensadas y postensadas 750
- 6.2.8 Zapatas en cimentaciones directas y sobre pilotes 750
- 6.2.9 Geometrías y capacidad resistente de bielas y tirantes 750
- 6.2.10 Diferentes nudos en los encuentros de bielas y tirantes 751
- 6.3 Las zonas D en las estructuras de acero 753
  - 6.3.1 Introducción 753
  - 6.3.2 Criterios generales para la concepción y la verificación de nudos 754
  - 6.3.3 Nudos de pórtico 756
  - 6.3.4 Ménsulas cortas 757
  - 6.3.5 Bases de soportes 759
  - 6.3.6 Apoyos de vigas 760
  - 6.3.7 Diafragmas de apoyo en secciones en cajón 761

## 7 LA SEGURIDAD ESTRUCTURAL 763

- 7.1 Introducción 764
- 7.2 Funcionalidad estructural 764
- 7.3 La vida útil de una estructura 766
- 7.4 Coste y seguridad estructural 768
- 7.5 Las incertidumbres asociadas a las estructuras 769
- 7.6 Breve historia de la seguridad 774
  - 7.6.1 La seguridad estructural desde la Antigüedad hasta el siglo XIX 774
  - 7.6.2 El método determinista de las tensiones admisibles 775
  - 7.6.3 Seguridad y probabilismo 776
  - 7.6.4 Fiabilidad estructural 781
  - 7.6.5 Sobre el concepto de riesgo y su aceptabilidad 782
- 7.7 Teoría de los estados límite 783
  - 7.7.1 Introducción 783
  - 7.7.2 Situaciones de proyecto 784
  - 7.7.3 Estados límite 785
  - 7.7.4 Criterios de aplicación 787
  - 7.7.5 Formatos de verificación 790
  - 7.7.6 Algunos valores de referencia para la verificación de los estados límites de servicio 793
  - 7.7.7 Estado límite de desplazamientos en puentes de carretera 795

## 8 LA DINÁMICA ESTRUCTURAL 799

- 8.1 Preámbulo general 800
  - 8.1.1 Introducción 800
  - 8.1.2 Destellos biográficos 802
  - 8.1.3 Reflexiones sobre la ingeniería dinámica 803
  - 8.1.4 Clasificación de las solicitaciones 807
  - 8.1.5 Contenido y estructuración general del capítulo 808
- 8.2 Sistemas con un único grado de libertad (1GDL) 811
  - 8.2.1 Introducción 811
  - 8.2.2 La estática: un caso particular de la dinámica estructural 812
  - 8.2.3 Vibraciones libres sin amortiguamiento 813
  - 8.2.4 Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso 818
  - 8.2.5 Vibraciones sin amortiguamiento provocadas por solicitaciones armónicas 821
  - 8.2.6 Vibraciones amortiguadas provocadas por solicitaciones armónicas 824
    - 8.2.6.1 Comportamiento y respuesta estructural 824
    - 8.2.6.2 Reacción de apoyo,  $R_T(t)$ , y coeficiente de transmisibilidad,  $T_R$  827
  - 8.2.7 Vibraciones amortiguadas provocadas por solicitaciones periódicas no armónicas 828
  - 8.2.8 Vibraciones provocadas por solicitaciones aperiódicas o impulsivas 829
    - 8.2.8.1 Comportamiento y respuesta estructural 829
    - 8.2.8.2 Respuesta a un impulso unitario y deducción de la integral de Duhamel 830
    - 8.2.8.3 Análisis en el dominio frecuencial: la transformada de Fourier 832
  - 8.2.9 Sistemas generalizados con un único grado de libertad, 1GDL 834

- 8.3 Sistemas con dos grados de libertad (2GDL) 839
  - 8.3.1 Introducción 839
  - 8.3.2 Análisis de un sistema 2GDL, sin amortiguamiento 840
  - 8.3.3 El concepto de "coordenada principal" 842
  - 8.3.4 Vibraciones armónicas forzadas 843
  - 8.3.5 Sistemas amortiguados 845
- 8.4 Sistemas con múltiples grados de libertad (MGDL) 845
  - 8.4.1 Introducción 845
  - 8.4.2 Ecuaciones de equilibrio de sistemas MGD 846
  - 8.4.3 Fundamentos del análisis modal 847
- 8.5 Vibraciones de sistemas continuos 850
- 8.6 Método aproximado de Rayleigh 852
- 8.7 Método aproximado de Rayleigh-Ritz 853
- 8.8 Formulación de Dunkerley 854
- 8.9 Influencia del esfuerzo axial sobre las frecuencias de vibración 855

## 9 ACCIONES SOBRE LAS ESTRUCTURAS 857

- 9.1 Introducción 858
- 9.2 Sobre la temporalidad de las acciones 860
- 9.3 Incertidumbres asociadas a los modelos estructurales 862
- 9.4 Descripción y caracterización de procesos aleatorios 865
  - 9.4.1 Consideraciones generales 865
  - 9.4.2 Caracterización estadística de procesos aleatorios 865
  - 9.4.3 Desarrollo en serie y transformada de Fourier 870
  - 9.4.4 Función de densidad espectral de potencia 871
  - 9.4.5 Espectros de potencia y densidad espectral de potencia 872
  - 9.4.6 Vibraciones aleatorias 874
- 9.5 Acciones debidas al viento 876
  - 9.5.1 Acerca de la naturaleza del viento 876
  - 9.5.2 El viento desde la perspectiva meteorológica 878
  - 9.5.3 La caracterización del viento 881
    - 9.5.3.1 Consideraciones generales 881
    - 9.5.3.2 La velocidad del viento 881
  - 9.5.4 Cargas de viento estáticas en una corriente incidente turbulenta 889
  - 9.5.5 Fenómenos aerodinámicos en estructuras 890
- 9.6 Oleaje y corrientes marinas y fluviales 893
  - 9.6.1 Introducción 893
  - 9.6.2 Clasificación de las ondas 894
  - 9.6.3 Descripción matemática del oleaje 894
  - 9.6.4 Las olas como procesos aleatorios 895
  - 9.6.5 Especificaciones de la ola de proyecto 897
  - 9.6.6 Cálculo de las fuerzas de oleaje 897
- 9.7 Acciones sísmicas 898
  - 9.7.1 Introducción 898
  - 9.7.2 La naturaleza de los movimientos sísmicos 900
  - 9.7.3 El registro de las acciones sísmicas 903
  - 9.7.4 Estrategia para analizar el comportamiento de estructuras solicitadas sísmicamente 904
  - 9.7.5 El concepto de espectro de respuesta 905
  - 9.7.6 Las acciones sísmicas según el Eurocódigo 8 908
  - 9.7.7 Respuesta a sistemas elastoplásticos 911

## 10 ALGUNAS TIPOLOGÍAS ESTRUCTURALES DE ESPECIAL INTERÉS 917

- 10.1 Consideraciones generales 918
- 10.2 Torres eólicas 919
  - 10.2.1 Introducción 919
  - 10.2.2 Las alas, o palas, de las torres eólicas 924
  - 10.2.3 Los aerogeneradores que coronan las torres eólicas 926
    - 10.2.3.1 Introducción 926

- 10.2.3.2 El buje (*hub*) 927
- 10.2.3.3 La góndola, o *nacelle* 928
- 10.2.3.4 El tren de potencia (*drive train*) 928
- 10.2.3.5 La multiplicadora (*gearbox*) 928
- 10.2.3.6 El eje de alta velocidad (*high speed shaft*) 929
- 10.2.3.7 El generador 930
- 10.2.3.8 Sistemas de orientación (*yaw system*) 930
- 10.2.3.9 Sistema de control (*control system*) 931
- 10.2.3.10 Protecciones contra descargas eléctricas 932
- 10.2.4 Torres *on shore* de acero 932
  - 10.2.4.1 Consideraciones generales 932
  - 10.2.4.2 Concepción de las torres tubulares de acero 933
  - 10.2.4.3 Dimensionamiento de las torres de acero 933
    - 10.2.4.3.1 Acciones 933
  - 10.2.4.4 Análisis estructural 936
  - 10.2.4.5 Uniones entre tramos 938
- 10.2.5 Torres *on shore* prefabricadas de hormigón 942
  - 10.2.5.1 Introducción 942
  - 10.2.5.2 Concepción de las torres eólicas de hormigón 944
    - 10.2.5.2.1 Geometría 944
    - 10.2.5.2.2 Sistemas constructivos y criterios de dimensionamiento 945
- 10.3 Cimentaciones de torres eólicas *on shore* 946
  - 10.3.1 Consideraciones previas 946
  - 10.3.2 Evaluación genérica del comportamiento de las zapatas 947
  - 10.3.3 Identificación de superficies de control 947
  - 10.3.4 Evaluación del comportamiento de las superficies de control 948
  - 10.3.5 Análisis de los factores determinantes en la verificación de las zapatas 951
  - 10.3.6 Sobre la capacidad a cortante y punzonamiento de las estructuras de hormigón armado 952
    - 10.3.6.1 Zapatas o losas sin armaduras de cortante 952
    - 10.3.6.2 Zapatas o losas con armadura de cortante 953
  - 10.3.7 Un hecho significativo que no debe pasar desapercibido 955
  - 10.3.8 Cimentaciones prefabricadas con jabalcones 955
- 10.4 Puentes y viaductos integrales y semiintegrales 957
  - 10.4.1 Introducción 957
  - 10.4.2 Viaductos integrales 959
  - 10.4.3 Sobre las similitudes y diferencias de los puentes de carretera y de los viaductos ferroviarios 962
  - 10.4.4 La génesis de los viaductos integrales 963
  - 10.4.5 Análisis del comportamiento de viaductos integrales 965
    - 10.4.5.1 Características de un viaducto integral 965
    - 10.4.5.2 Anatomía de un viaducto integral 967
      - 10.4.5.2.1 Preámbulo 967
      - 10.4.5.2.2 Configuración general 967
  - 10.4.6 Estribos de viaductos integrales 970
    - 10.4.6.1 Introducción 970
    - 10.4.6.2 Estribos para viaductos de altura moderada 971
    - 10.4.6.3 Geometría de estribos 972
    - 10.4.6.4 Estribos desacoplados 973
    - 10.4.6.5 Estribos bajos y viaductos semiintegrales 976
    - 10.4.6.6 Reflexiones sobre detalles constructivos en viaductos integrales y semiintegrales 977
  - 10.4.7 Criterios para la monitorización de viaductos integrales 981
  - 10.4.8 Sobre costes de construcción y mantenimiento 982
  - 10.4.9 Pautas para el proyecto de viaductos integrales 983
- 10.5 Vía-placa en trazados ferroviarios 986
  - 10.5.1 Introducción 986
  - 10.5.2 Vía-placa en viaductos ferroviarios 987
    - 10.5.2.1 La evolución de la relación vía-tablero 987
    - 10.5.2.2 Experiencias internacionales 988

- 10.5.3 El comportamiento del carril soldado 989
  - 10.5.3.1 Una breve mirada al pasado 989
  - 10.5.3.2 Problemática del comportamiento del carril soldado 990
  - 10.5.3.3 Influencia de la presencia de un viaducto en el comportamiento de los carriles largos soldados 993
  - 10.5.3.4 Sobretensiones en carriles provocadas por las variaciones de temperaturas en el entorno de viaductos 994
- 10.5.4 Recomendaciones para dimensionar viaductos ferroviarios 997
  - 10.5.4.1 Reflexiones genéricas 997
  - 10.5.4.2 Evaluación de las tensiones adicionales provocadas por las variaciones de temperatura en los carriles largos soldados 997
  - 10.5.4.3 Sobretensiones en los carriles provocados por el frenado y el arranque 999
  - 10.5.4.4 Sobretensiones en los carriles provocados por la deformabilidad vertical del tablero 1001
- 10.5.5 Descripción del sistema Rheda en viaductos 1001
- 10.6 Criterios para la concepción y el dimensionamiento de viaductos ferroviarios 1004
  - 10.6.1 Objetivos 1004
  - 10.6.2 Pautas para el proyecto 1004
  - 10.6.3 Procesos constructivos 1009
  - 10.6.4 Integración paisajística y ambiental 1009
  - 10.6.5 Bases de cálculo 1010
  - 10.6.6 Interacción vía-estructura 1011
  - 10.6.7 Solución vía-placa en viaductos 1013
- 10.7 Depósitos de gas natural licuado, GNL 1014
  - 10.7.1 Introducción 1014
  - 10.7.2 Antecedentes 1015
  - 10.7.3 Concepción de los depósitos de GNL 1016
  - 10.7.4 Una mirada al futuro 1019

## **11 REFLEXIONES SOBRE EL COSTE 1021**

- 11.1 El coste de las estructuras 1022
  - 11.1.1 Introducción 1022
  - 11.1.2 La estructura de los costes estructurales 1023
  - 11.1.3 Algunas observaciones sobre precios unitarios 1024

## **ANEJOS 1025**

- Ingenieros de referencia 1026
- Libros de referencia 1029
- Obras de referencia 1031
- Biografía estructural de Javier Rui-Wamba 1037

CRÉDITOS FOTOGRÁFICOS 1057

BIBLIOGRAFÍA 1065

# **Prólogo**

El libro que tiene en sus manos es un libro único. Nace de un sueño, y solo un soñador se aventuraría a explicar como nunca antes lo que muchas veces se ha explicado.

Para escribirlo, Javier Rui-Wamba ha invertido doce años, pero hacerlo posible es la labor de toda una vida: una vida de entrega y pasión por la profesión de ingeniero, en la que durante cinco décadas ha reunido en la valiosa biblioteca de Esteyco –su Esteyco– cerca de 8.000 volúmenes dedicados a la ingeniería, de los que una mayoría se refieren a la ingeniería estructural y geotécnica. Una pléyade creciente de libros siempre escogidos, de marcado carácter internacional y en multitud de idiomas, a los que se suman constantemente las mejores revistas especializadas en las que Javier Rui-Wamba no deja de bucear, seleccionando los artículos o noticias de más interés, aquellos que periódicamente distribuye por la oficina. Así, quienes hemos tenido el privilegio de crecer profesionalmente en la estela de Javier Rui-Wamba hemos podido disfrutar de una amplia y cuidada selección internacional de los mejores libros y publicaciones en el ámbito de la ingeniería de estructuras y sus cimientos.

Solo sobre una base así me atrevería a afirmar –como he hecho sin miedo a equivocarme– que es éste un libro único. Lo es, en primer lugar, por el ambicioso objetivo que persigue y alcanza: la mirada transversal y holística de la ingeniería estructural, con la que ya su título nos atrapa.

Las últimas décadas han sido testigos de un vertiginoso avance en muchas áreas de la ingeniería, espoleado por una accesibilidad inusitada a conocimientos, información y herramientas que progresan sin cesar. El desarrollo de materiales de construcción nuevos o mejorados, la disponibilidad de más capaces y sofisticados medios de construcción o las actuales posibilidades de análisis y diseño asistido por ordenador, que generaciones anteriores de ingenieros no habrían siquiera imaginado, son solo algunos de los avances de los que cabría esperar que impulsaran y transformarían las destrezas y los logros de los ingenieros estructurales de hoy y de mañana.

Sin embargo, cabe poner en duda que ello quede reflejado en la generalidad de nuestros proyectos y obras, vistos a la luz de las de aquellos que nos precedieron. Son escasas las respuestas a los problemas que vienen en forma de nuevas o mejores soluciones, y la innovación o la enriquecedora amalgama entre disciplinas parecen a menudo estar más desincentivadas que lo contrario.

Acaso esta aparente contradicción tenga que ver con una pujante especialización, a la que el ingeniero se ve hoy frecuentemente empujado, que le permite saber cada vez más, pero de cada vez menos cosas. La bendición de una creciente cantidad de conocimientos más y más accesibles y detallados tiene la contrapartida de derivar en un número igualmente creciente de ramas para la formación y la práctica profesional, en las que proliferan innumerables normas, herramientas o publicaciones específicas.

Así, esos admirables progresos que se efectúan corren el riesgo de quedar aislados en el campo concreto en el que se originaron; la innovación corre el riesgo de verse amedrentada por la reglamentación, y los departamentos universitarios que forman a los ingenieros pueden convertirse en compartimentos en los que la enseñanza de las estructuras se disperse y desmenuce más de lo deseable. El ingeniero, en definitiva, corre el riesgo de ver mermada su visión global y, con ella, su capacidad para afrontar problemas que no acostumbran a plegarse ante artificiosas fronteras entre especialidades.

Con este libro, Javier Rui-Wamba regala al ingeniero estructural un antídoto ante dichos riesgos.

Un tratamiento profundamente didáctico, riguroso y exhaustivo que con vocación generalista abarca los grandes campos de la ingeniería estructural, cosiéndonos con un hilo de transversalidad tan inédito como oportuno, que enriquecerá tanto a estudiantes como a ingenieros dedicados a proyectar estructuras; así como, en particular, a los profesores que asumen la elevada misión de dar a las nuevas generaciones de ingenieros estructurales una formación amplia y sólida. Un planteamiento que fomenta un aprendizaje de las estructuras con carácter integral y pluridisciplinar, que contribuye a situar el conocimiento especializado en un marco más general y estimulante.

Diversos son los soportes irrenunciables de la competencia y la aptitud del ingeniero estructural, entre otros: la lógica de los flujos de fuerzas y su transferencia, el conocimiento de los distintos materiales entre los que puede, y debe, contarse el terreno que es prolongación de nuestras estructuras, la capacidad para concebir y verificar los sistemas que les dan forma –ya sean de acero, hormigón o mixtos–, la comprensión de los medios y métodos constructivos que las hacen posibles, el entendimiento de las acciones que las solicitarán o de los criterios de seguridad que les son exigibles, la consciencia de sus costes y de la necesidad de integración en el entorno. Solo si se posibilita dicha visión global se está dotando al ingeniero de la perspectiva para tomar decisiones adecuadas y para acertar en el enunciado de los problemas a los que se enfrente, primer y fundamental paso para su resolución.

Javier Rui-Wamba nos muestra cómo tan estimulante reto se facilita al identificar y entender lo mucho que tienen en común todas las estructuras, cualquiera que sea su función o el material con el que se construyan; algo que con frecuencia queda oculto entre las diferencias históricamente establecidas en su enseñanza, su análisis o su reglamentación. Como esencial vehículo de esa mirada transversal, el libro reivindica y clarifica la importancia de los fundamentos, no siempre visibles pero siempre presentes: raíces comunes de disciplinas que a menudo se ven artificialmente separadas, y que Javier Rui-Wamba reúne bajo la esclarecedora luz del mismo foco.

Los conceptos de equilibrio y compatibilidad de deformaciones, o el de la siempre deseable ductilidad, que suele ser responsable de aunarlos en la práctica de un buen diseño, son algunos de los conceptos esenciales que reaparecen a medida que el libro va recorriendo distintas áreas de la ingeniería estructural, cohesionando el completo y valioso cuerpo de conocimiento y de criterio ingenieril que ofrece.

Así, y a modo de ejemplo, el lector comprenderá las enriquecedoras analogías que existen en la transferencia de esfuerzos rasantes ala-alma en vigas de hormigón armado y en las conexiones acero-hormigón de vigas mixtas; asimilará la unidad conceptual que hay detrás del estudio de la inestabilidad de soportes comprimidos metálicos o de hormigón, en didáctico contraste con las diferencias entre sus formulaciones de cálculo; visualizará cómo el método *strut and tie* –originalmente desarrollado para estructuras de hormigón– tiene mucho que decir a la hora de estudiar zonas singulares de estructuras metálicas o mixtas; o entenderá que los análisis y criterios de diseño de la situación pluritensional que se genera en el alma de una viga sometida a cortante –aparentemente tan dispares en estructuras metálicas y de hormigón– tienen fundamentos comunes, en los que cabe basar criterios asimilables a ambos casos que faciliten la comprensión y el tratamiento práctico de un fenómeno complejo.

Ese carácter visionario –si se compara con los métodos más habituales de enseñanza y con la división y aparente independencia de las normas y los códigos que acompañan al ingeniero en su práctica profesional– tiene otro claro ejemplo en el modo en el que el libro incorpora el terreno al listado de materiales esenciales que el ingeniero de estructuras debe conocer para plantear adecuadamente el enunciado del problema estructural al que se enfrenta. El libro reúne y fundamenta órdenes de magnitud y simplificaciones prácticas de gran utilidad; sin renunciar a tratar con rigor las especificidades que gobiernan la compleja respuesta y la caracterización del terreno, raramente recogidas en tratados no exclusivamente geotécnicos. Todo ello sin pretender sustituir el necesario diálogo entre especialistas y disciplinas; muy al contrario: promoviéndolo y facilitándolo, para que ese terreno fronterizo en el que conviven sea lugar de fructífero entendimiento.

Esa vocación unificadora, que a lo largo del libro genera vasos comunicantes entre distintos campos de la ingeniería estructural y que contribuye a relacionar y asentar conceptos, convive con un tratamiento profundo de cada uno de dichos campos y sus especificidades, rebosante de cuidadas e ilustrativas figuras y gráficas, con múltiples ejercicios y ejemplos prácticos. Recoge las más relevantes referencias a la normativa aplicable, convenientemente acompañadas de explicaciones sobre la razón de ser de su articulado, que ayudan a su comprensión y a dotar al ingeniero de criterio para afrontar los casos, no

tan infrecuentes, en los que resulte necesario o beneficioso salir del amparo de soluciones normalizadas sancionadas por la reglamentación.

He afirmado que es este un libro único por ese inédito planteamiento de generalidad y didáctica transversalidad. Lo es también por la difícilmente repetible historia de capacidad, experiencia y generosidad que hay detrás de su autoría. Una singularidad no podría entenderse sin la otra.

A lo largo del libro late en efecto el especial modo en el que se aúnan, en la persona de Javier Rui-Wamba, el brillante profesor y el prolífico ingeniero. Quien esto escribe no ha cesado de cruzarse en su día a día profesional con ingenieros que, al oír mencionar a Rui-Wamba, han recordado con admiración y agradecimiento sus clases en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, en la que durante diecisiete años fue profesor de la cátedra de Puentes y Estructuras Metálicas. A esa experiencia docente, Javier Rui-Wamba suma una amplia experiencia activa, y a menudo protagonista, en diversos comités nacionales e internacionales que han dado origen a normativas de referencia sobre distintos tipos de estructuras: desde el Comité Europeo del Hormigón (CEB), cuando generó el valioso Código Modelo 1990 –probablemente, la mejor y más influyente norma de hormigón estructural que se haya escrito– pasando por la comisión internacional redactora del Eurocódigo-4 para estructuras mixtas, hasta los distintos equipos que el propio Javier Rui-Wamba coordinó para dar lugar a las Recomendaciones para el diseño de Puentes Metálicos (RPM-95) y Puentes Mixtos (RPX-95), o la Guía para la Concepción de Puentes Integrales de Carreteras.

Pero lo que multiplica y proyecta el valor de esa extraordinaria y diversa experiencia docente o normativa es sin duda la amplísima y exitosa trayectoria de Javier Rui-Wamba llevando esos conocimientos a la realidad de la práctica profesional y de la obra construida, liderando a un equipo multidisciplinar que ha proyectado innumerables estructuras de todo tipo en más de una treintena de países, con toda clase de materiales, con frecuencia de gran complejidad y siempre de gran diversidad. Javier Rui-Wamba ha sido pionero en el uso y la introducción en nuestro país de varias técnicas o diseños innovadores que hoy se han normalizado, desde los primeros usos en España de forjados de casetones recuperables, hormigones de muy alta resistencia o losas postesadas, hasta realizaciones pioneras en puentes integrales de ferrocarril o torres eólicas de gran altura. Esa trayectoria le ha granjeado numerosos premios y reconocimientos; entre otros muchos, la Medalla de Honor del Colegio de Ingenieros o el Premio Nacional de Ingeniería Civil, el más alto galardón que otorga el Ministerio de Fomento.

En ese fecundo recorrido, Javier Rui-Wamba ha predicado con el ejemplo sobre las bondades de esa visión generalista y transversal que promulga. Le he visto anticipar con profético acierto la ventaja del hormigón en el diseño de torres eólicas para las que la ortodoxia pedía acero, o la ventaja del acero en el diseño de un puente ferroviario para el que la ortodoxia pedía hormigón. Le he visto trasladar con gran éxito ideas originadas para estructuras de madera a torres eólicas, ideas originadas para torres eólicas a las pilas de puente, e ideas originadas para pilas de puente a los mejores aparatos de apoyo, que son aquellos cuya necesidad puede evitarse, por esbozar solo algunos ejemplos.

La sobresaliente labor profesional de Javier Rui-Wamba le ha llevado a convertirse en el primer miembro electo de la Real Academia de Ingeniería, siendo su libro *Aforismos estructurales* –inspirado en su discurso de ingreso en la Academia– de obligada y estimulante lectura para los que trabajamos en torno a la ingeniería estructural y un buen reflejo del carácter humanista de Javier Rui-Wamba. Carácter que impregna también este libro, como se muestra en los interesantes extractos biográficos que lo salpican y ayudan al lector a apreciar las historias humanas que hay detrás de los grandes avances y conocimientos de la ingeniería que el libro recoge y pone didácticamente a su alcance.

Solo quien se ha enfrentado a la realidad de tantos y tan variados diseños estructurales sabrá dar a los necesarios conocimientos académicos una conveniente orientación práctica, que se va plasmando a lo largo del libro en forma de criterios de diseño, prácticos órdenes de magnitud de referencia y constructivas advertencias sobre los riesgos más habituales a los que se enfrentan hoy quienes conciben y diseñan las estructuras del mañana.

“Los ingenieros somos gestores de incertidumbres”; “La ductilidad es puente sobre nuestra ignorancia”; “No se debe calcular una estructura que no se sepa dibujar ni se deben emplear fórmulas cuyo significado físico se desconoce”; “No se puede conocer el estado tensional de una estructura”; “No se debe resolver por ordenador un problema sin saber obtener antes una aproximación manual, ni debe darse por buena su resolución numérica sin visitar esa estimación previa”. Son algunos de los aforismos acuñados por Javier Rui Wamba que a lo largo del libro fundamentan valiosos consejos y lecciones prácticas que se repiten porque aplican a la generalidad de campos de la ingeniería estructural.

Esa singular combinación de talento y amplia experiencia, tanto docente como profesional, es desde luego una condición necesaria para la génesis de un libro como este, pero no suficiente. Ha de llegar acompañada de un extraordinario espíritu de generosidad y amor por el conocimiento que, desde la atalaya de una trayectoria de más de cincuenta años colmada de éxitos y reconocimientos, rechace cualquier atisbo de conformismo para aventurarse en un reto de tanto calado y ambición. Este reto ha nacido de un sueño que para hacerse realidad ha requerido cerca de un centenar de los inconfundibles Pilot V5 de Javier Rui-Wamba, con los que ha generado alrededor de 3.000 páginas manuscritas, cuajadas de formulaciones y figuras, base de un libro en el que Javier Rui-Wamba y un estrecho grupo de colaboradores han invertido 9.000 horas de trabajo intelectualmente fértil. La inteligencia y la genialidad que hay detrás de este libro solo lo han llevado a la luz acompañadas de una inquebrantable capacidad de trabajo, impulsada por un afán de compartir conocimiento para el progreso de la ingeniería y la profesión. Es el legado de un ingeniero irrepetible, reflejo del lema que ha presidido su trayectoria: «Trabajar para saber, saber para trabajar».

**José Serna**

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Director de Tecnología de ESTEYCO



# Introducción

Estructura y contenido

## Estructura y contenido

Las estructuras no se calculan, se sienten. Por eso este libro no trata, aún cuando pueda aparentarlo, del cálculo de estructuras. Pretende ser un instrumento para comprenderlas, con la inestimable e imprescindible ayuda de los cálculos. Porque su autor comparte, en buena medida, la opinión de quienes piensan que solo se sabe lo que se puede cuantificar.

Pero la cuantificación no puede ser la auténtica finalidad del saber estructural. Debe ser la consecuencia que se deriva de dicho saber. Y, a este respecto, es mucho más intuitivo, y arraiga con más rapidez y profundidad en la mente del ingeniero, plantear todo el análisis estructural y el comportamiento de los materiales desde bases deformacionales claras. Porque son las deformaciones las que realmente existen y son perceptibles. Y es, a partir de ellas, cómo se pueden deducir tensiones y esfuerzos –conceptos abstractos– que utilizamos como estrategia para verificar comportamientos y para justificar las hipótesis estructurales que empleamos habitualmente.

Los libros y las normas que tratan de estructuras suelen tener muy diferentes índices que, normalmente, reflejan la orientación de sus contenidos, la importancia que conceden a los diferentes capítulos y la intencionalidad que subyace en el orden escogido, e incluso pueden informar acerca de la especialización y las preferencias de los autores. El índice de un libro o una norma de estructuras es la manifestación de la lógica del pensamiento que habrá presidido su redacción. Por eso no hay dos índices iguales, porque las estructuras son una realidad compleja, que se puede enfocar desde muy diversos puntos de vista. El escogido en este caso se esboza en este apartado previo, desde el que se pretende explicar cual ha sido el hilo conductor que ha enhebrado los diferentes capítulos, subrayando, al hacerlo, las intenciones que han motivado su redacción.

En el texto se hace referencia, en primer lugar, a las estructuras planas constituidas por elementos rectos, vigas y pilares; que, en su configuración más general, constituirán un entramado estructural con nudos, apoyos y zonas singulares en los puntos de aplicación de las cargas o en los lugares en los que cambia bruscamente su geometría. Por ello, la estructura real siempre se puede modelizar mediante un sistema de barras, nudos, apoyos y zonas singulares (Figura 0.1).

El peso propio de la estructura y las cargas aplicadas provocan desplazamientos reales que, a su vez, se pueden asociar a tensiones normales,  $\sigma$ , y tangenciales,  $\tau$ . La resultante del campo tensional, en una sección perpendicular a la directriz del elemento estructural, define los esfuerzos –flectores, cortantes, axiles y torsores, diferentes en cada sección– que se utilizan como instrumento eficazísimo para analizar el comportamiento de la estructura y justificar su dimensionamiento. Tal dimensionamiento no se deduce, en general, de los cálculos, sino que resulta de un proceso interactivo: el ingeniero concibe la estructura y hace un primer dimensionamiento del conjunto estructural. Lo hace basándose en su experiencia y en la de muchos otros que, a lo largo de la historia de la humanidad, han construido estructuras en cierto modo similares que se han comportado correctamente. Estima los esfuerzos, las tensiones, las deformaciones y otros parámetros –como la fisuración en el hormigón, o las vibraciones en estructuras solicitadas por solicitaciones dinámicas– que controlan la adecuación de la estructura a los objetivos que se deben alcanzar.

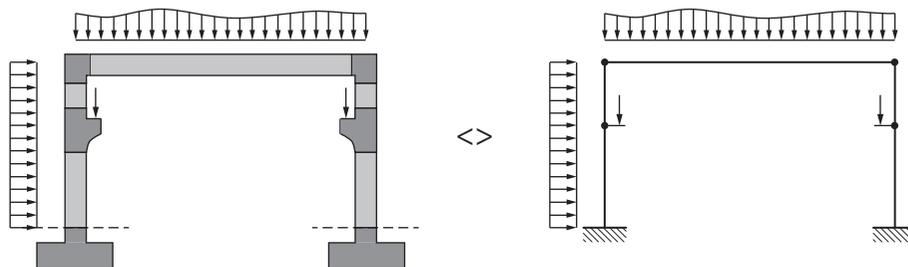


Figura 0.1 Modelo de barras para un pórtico genérico.

El ingeniero estructuralista o asimilado dibuja, asimismo, a una escala adecuada para poder “sentirla”, la estructura dimensionada previamente. Con todo el detalle que sea necesario si son los detalles los que pueden ser determinantes en su comportamiento. Y teniendo también muy presentes los condicionantes constructivos que, en ocasiones, son relevantes para seleccionar tipologías, materiales y procedimientos ejecutivos.

Después, y solo después, modeliza la estructura y, con la ayuda de programas de ordenador, obtiene una detallada cuantificación de desplazamientos, esfuerzos, estados tensionales y reacciones de apoyo del esquema estructural modelizado. En el que, en general, no se suele abordar el comportamiento de nudos y zonas singulares de la estructura, que requerirán análisis complementarios y específicos, para los cuales suele ser menos probable disponer de programas de cálculo fiables y eficientes. Por otra parte, es labor esencial del ingeniero analizar los resultados de los cálculos de ordenador, identificando y prestando atención prioritaria a los que son esenciales, sin dejarse aturdir por la ingente cantidad de datos que facilitan los programas modernos. Sabiendo que pueden existir errores en la introducción de datos que alimentan al programa o, en mucha menor medida, por errores intrínsecos al programa o por su inadecuación al problema planteado; por ejemplo, al caracterizar las condiciones de apoyo. Para ello, para evitar errores y profundizar además en el análisis de los datos del cálculo detallado y en el conocimiento de la estructura, el ingeniero debe contrastar los resultados del cálculo con las sus propias previsiones. Es esencial hacerlo y es, por tanto, indispensable tener órdenes de magnitud de esfuerzos, reacciones de apoyo y deformaciones antes de proceder a realizar cálculos detallados de ordenador.

El contenido de este libro tiene precisamente la intención de facilitar al ingeniero los instrumentos y las guías para concebir estructuras eficientes y realizar predimensionamientos fiables. Y, con tal finalidad, se ha establecido el orden y el contenido de los capítulos que lo configuran.

Los dos primeros capítulos tratan de la flexión; analizándose, para ello, el comportamiento de una viga recta, de sección constante, cargada en su plano de simetría y constituida por un material de características indefinidamente elásticas. Se aísla una rebanada, de espesor diferencial, solicitada por un momento flector y un esfuerzo cortante. De la condición de equilibrio y compatibilidad de deformaciones se deducen las expresiones que gobiernan el comportamiento de la viga y que relacionan cargas aplicadas ( $q$ ), esfuerzos concomitantes ( $M$ ,  $Q$ ), desplazamientos, pendientes y curvaturas ( $y$ ,  $y'$ ,  $y''$ ), tensiones normales ( $\sigma$ ) y tangenciales ( $\tau$ ), con las características del material considerado indefinidamente elástico y caracterizado por su módulo de elasticidad longitudinal ( $E$ ) y transversal ( $G$ ) cuya definición requiere, por otra parte, la presencia del coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), otra característica intrínseca del material.

En síntesis, el planteamiento del apartado de este capítulo es el que se describe a continuación.

Las formulaciones anteriores, fáciles de deducir y retener, son las que esencialmente gobiernan el cálculo de cualquier estructura de comportamiento indefinidamente elástico. No debe pasar desapercibido el hecho de que la metodología que permite su sencilla deducción se basa en la imposición de un virtual giro rotacional en la rebanada definido por dos valores, que son las incógnitas del problema que se trata de resolver: las deformaciones unitarias ( $\epsilon_s$ , en la fibra superior, y  $\epsilon_i$  en la fibra inferior). Aceptando –lo que es una aproximación utilísima para facilitar el análisis– que las secciones planas antes de la deformación se mantienen planas después. Se trata de la hipótesis que formuló J. Bernoulli en su publicación *Acta Eruditorum* en 1694 y que, muy posteriormente, a principios del siglo XIX, utilizó Navier para desarrollar su metodología para el análisis de piezas prismáticas. Por ello, la hipótesis de planeidad de las secciones antes y después de la deformación se suele conocer también como “hipótesis de Bernoulli-Navier” y también –olvidando injustamente su origen– como “hipótesis de Navier”. Definida la deformada de la sección, por sus valores  $\epsilon_s$  e  $\epsilon_i$  tendremos, automáticamente, un campo tensional,  $\sigma = E \cdot \epsilon$ , actuando sobre la sección. Dicho campo tensional equivale, por otra parte, al momento flector,  $M$ , aplicado.

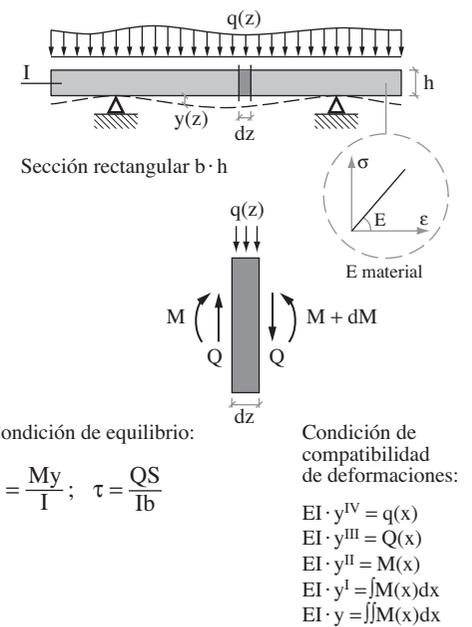


Figura 0.2 Comportamiento de una viga flectada.

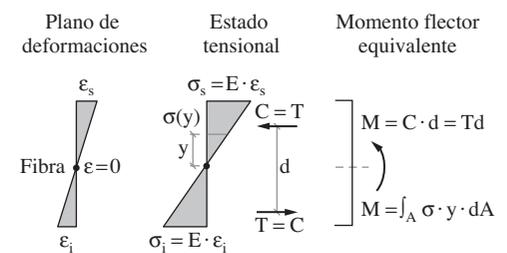


Figura 0.3 Equilibrio de una sección.

Estos planteamientos son igualmente válidos cualquiera que sea la geometría de la sección y son, al tiempo, independientes de la naturaleza isostática o hiperestática de la estructura que se está analizando, porque se basan en el principio universal de equilibrio aplicado a materiales indefinidamente elásticos y caracterizados exclusivamente por su módulo de elasticidad,  $E$ , o de Young. Serían también conceptualmente aplicables a estructuras con secciones de geometría variable, aunque en esos casos, lógicamente, la expresión de  $I$ , función de  $z$ , quedaría dentro del signo integral, de manera que tendríamos:

$$y' = \frac{1}{E} \int \frac{M(z)}{I(z)} \cdot dz \quad y = \frac{1}{E} \iint \frac{M(z)}{I(z)} \cdot dz$$

O lo que es lo mismo, a efectos prácticos podríamos sustituir la ley de momentos flectores  $M(z)$  por otra ley  $M(z)/I(z)$ , dar después a  $I$  el valor unidad y aplicar idéntica metodología.

La expresión general que relaciona tensiones normales,  $\sigma$ , con el momento flector de componentes  $M_x$  y  $M_y$  a una sección cualquiera es:

$$\sigma_z = \frac{M_x (I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x) + M_y (I_{xy} \cdot y - I_x \cdot x)}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2}$$

En el texto se deduce dicha expresión utilizando una metodología muy simple que conviene retener porque es de un gran interés práctico y permite determinar estados tensionales en secciones sencillas o complejas sin recurrir a fórmulas, aunque utilizando el método que ha permitido su deducción. Se provocan dos giros virtuales consecutivos: uno alrededor del eje  $X$  de la sección y otro alrededor del eje  $Y$ , ejes perpendiculares que se cruzan en el centro de gravedad de la sección. Al giro en relación con el eje  $XX$  le corresponde un estado tensional determinado y de inmediata deducción. La resultante de las tensiones correspondientes equivale a un momento  $M_{xx}$  y a otro  $M_{yx}$ . Análogamente al giro en relación con el eje  $YY$  le corresponden momentos  $M_{yy}$  y  $M_{xy}$ . Tendremos, pues, dos incógnitas (el valor de los giros  $\theta_x$  y  $\theta_y$  aplicados) y dos ecuaciones de equilibrio de momentos externos e internos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Giro } \theta_x : M_{xx} + M_{yx} = M_x \\ \text{Giro } \theta_y : M_{yy} + M_{xy} = M_y \end{array} \right\} \vec{M}_x + \vec{M}_y = M, \text{ Momento flector aplicado}$$

En el apartado correspondiente se incluyen ejercicios con los que se pretende subrayar la sencillez y la utilidad de estos conceptos.

Por otra parte, la metodología utilizada ayuda a comprender la deformabilidad de la pieza. Cuando no existe simetría, el plano de aplicación de las cargas no coincide con el plano deformacional: la flexión esviada está asociada a la disimetría de secciones. La metodología empleada nos permite recordar conceptos, como los de producto de inercia,  $I_{xy}$ , ejes principales de inercia, posición de la fibra neutra, así como los métodos gráficos que permiten su determinación y que son análogos —los círculos de Mohr— a los utilizados para analizar estados tensionales.

A partir de la esencial fórmula deducida  $EI \cdot y'' = M$  se establecen, con toda sencillez, los dos teoremas de Mohr, que son de una gran utilidad práctica, fáciles de recordar y de aplicar, para determinar deformadas —desplazamientos, pendientes y curvaturas— de los elementos estructurales analizados. En el texto se recuerdan los dos teoremas y se plantean algunos ejercicios de aplicación práctica. En particular, los teoremas de Mohr pueden ser muy útiles para determinar las reacciones de estructuras hiperestáticas. Y es por esta razón, también, por lo que se pone énfasis en estos sencillos y útiles teoremas. Porque —y hay más adelante un capítulo específico que trata de ello—, si se conocen las reacciones de apoyo de una estructura, se conoce lo esencial de su comportamiento, ya que ello permite deducir, con toda facilidad y fiabilidad, los esfuerzos que actúan en cada sección y, a partir de ellos, se pueden deducir los estados tensionales en el conjunto de la estructura y las deformaciones de los elementos que la componen. Porque, así como la metodología utilizada para analizar el comportamiento de una sección de un elemento flectado parte de unas deformaciones para llegar a unos momentos —resultado de la integración de

las tensiones asociadas a aquellas deformaciones—, en la práctica profesional, el proceso se invierte: hay que determinar los esfuerzos provocados por las cargas actuantes en la estructura y después deducir las tensiones correspondientes y, cuando el caso lo requiera, determinar la deformada de la estructura por la acción de las solicitaciones.

Los esfuerzos cortantes, que son los protagonistas del capítulo siguiente, tienen un significado físico muy preciso. Nacen de la exigencia de equilibrio de una rebanada y son la derivada del momento flector, como se ha visto en el primer capítulo y se recuerda en el presente.

Por otra parte, el análisis de la influencia del esfuerzo cortante no puede limitarse, como en el caso del flector, al del comportamiento de una sección. Al tratarse de un esfuerzo que nace de la variación a lo largo de la pieza del momento flector, interviene la tercera dimensión, lineal, del elemento estructural que hay que analizar en su conjunto, o al menos, en un tramo suficientemente significativo.

Así como el análisis de la respuesta provocada por el flector está gobernada por la sencilla expresión (Figura 0.4):

$$\sigma = E \frac{\Delta(dz)}{dz} = E_C$$

la fórmula que relaciona tensiones y deformaciones asociadas al cortante es (Figura 0.5):

$$\tau = G_\gamma$$

Son necesarias dos parejas de tensiones tangenciales  $\tau$  para que el elemento diferencial pueda estar en equilibrio. Dos de ellas estarán paralelas al plano de la sección, y las otras dos en dirección perpendicular al eje del elemento estructural. La deformación provocada por las tensiones tangenciales distorsiona la geometría de ángulos rectos del elemento diferencial. El conjunto de la rebanada se distorsiona (Figura 0.6) también como consecuencia de la presencia o la aplicación del cortante.

Por consiguiente, tras la deformación tangencial, la sección no se mantiene plana; lo que entra en contradicción con la hipótesis de Bernoulli, en la que se basan los análisis del comportamiento de una sección solicitada por un flector. Este hecho, digno de ser constatado y recordado, no impide que se acepten los resultados que se obtienen con estas metodologías como suficientemente precisos para la mayor parte de las aplicaciones prácticas. Las deformaciones por cortante son muy pequeñas, en general, en relación con las que provocan los fletores. En el texto se aborda, también, dicha cuantificación.

Es imprescindible, por otra parte, observar y retener que así como el módulo de elasticidad longitudinal,  $E$ , caracteriza el comportamiento del material “ideal”, indefinidamente elástico, solicitado por un momento flector, en el caso del cortante, y de las tensiones tangenciales asociadas, el parámetro que caracteriza el comportamiento del material es el módulo de elasticidad transversal,  $G$ , que se relaciona con el anterior con otro parámetro intrínseco al material que es el coeficiente  $\nu$  de Poisson en honor de quien lo planteó por primera vez.

$$\tau = G \cdot \gamma \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

A partir de estas formulaciones, la respuesta de una sección de un elemento estructural, construido con un material “ideal” indefinidamente elástico, solicitado por un esfuerzo cortante, se deduce con toda sencillez planteando la insoslayable condición de equilibrio del elemento infinitesimal solicitado simultáneamente por tensiones normales que van variando a lo largo de la directriz de la pieza y por las tensiones tangenciales concomitantes. Para ello, se analiza una sección de pared delgada de manera que la distribución de tensiones tangenciales en su pequeño espesor se pueda considerar uniforme.

A partir de esta condición de equilibrio y utilizando la fórmula general de la flexión deducida en el capítulo anterior, se obtiene la expresión más genérica del flujo de tensiones tangenciales ( $q = \tau \cdot t$ ) en el espesor de la pieza:

$$q = \tau \cdot t = \frac{Q_y}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot (I_y \cdot S_x - I_{xy} \cdot S_y) + \frac{Q_x}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot (I_{xy} \cdot S_x - I_x \cdot S_y)$$

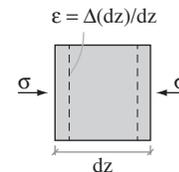


Figura 0.4 Relación tensiones normales-deformaciones.

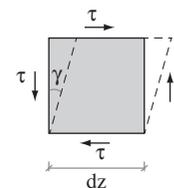


Figura 0.5 Relación tensiones tangenciales-distorsionales.

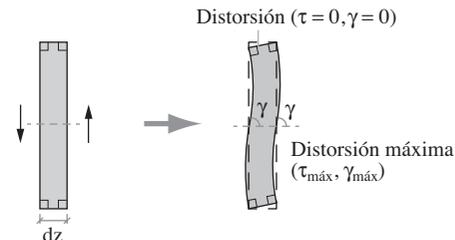
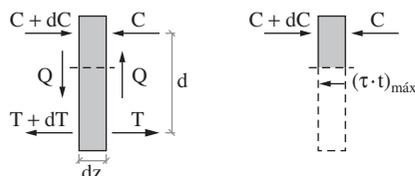


Figura 0.6 Distorsión de una rebanada.



**Figura 0.7** Equilibrio de rebanada solicitada por esfuerzos cortantes.

En dicha expresión aparece el concepto de momentos estáticos ( $S_x$  y  $S_y$ ), característico de la sección que determina la ley de variación de las tensiones tangenciales a lo largo de su altura, con valores nulos en sus bordes y máximos al nivel de su centro de gravedad.

En el texto se pone énfasis en el significado físico del flujo de tensiones tangenciales: esfuerzos rasantes longitudinales que aseguran el equilibrio de un trozo de pieza, entre dos planos de secciones transversales.

En el caso más sencillo, de sección simétrica, con cargas aplicadas en el plano vertical que pasa por su centro de gravedad, el esfuerzo rasante  $q$  se reduce a la expresión:

$$q = \tau \cdot t = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x}$$

cuyo valor máximo, al nivel del centro de gravedad (Figura 0.7), se puede expresar también, como:

$$q_{\text{máx}} = (\tau \cdot t)_{\text{máx}} = dC = \frac{dM}{d} = \frac{Q \cdot dz}{d}$$

El brazo de palanca,  $d$ , es la distancia entre las resultantes,  $C = T$ , de las tensiones normales que equilibran el momento flector aplicado. Tiene por valor  $d = S_{\text{máx}}/I_x$ , y es otra característica intrínseca a la geometría de sección y un índice de su eficiencia para enfrentarse a los momentos que la solicitan. Cuando la masa de la viga se concentra en sus bordes superior e inferior –como es el caso de las celosías– el valor de  $d/h$  se hace igual a 1. En el caso de una sección maciza circular, en el que la masa se concentra, donde menos falta resistente hace,  $d/h$  se reduce a  $3\pi/16 = 0,6$ .

Se incluyen en el texto diversos ejercicios de aplicación práctica. En algunos se utiliza la expresión general ya deducida. En otros se aplican los conceptos que han permitido la deducción de dicha expresión, sin recurrir a formulaciones.

De las reflexiones asociadas brota el esencial concepto de “centro de esfuerzos cortantes”, que en capítulo posterior se identificará también con el centro de torsión: punto de la sección por donde debe pasar ineludiblemente el plano que contiene las cargas aplicadas para que se produzcan exclusivamente esfuerzos de flexión –flectores y cortantes– y la torsión esté ausente.

La forma de resolver los ejercicios propuestos pone de manifiesto las posibilidades y la riqueza del diálogo entre tensiones normales y tangenciales concomitantes, del que brota la solución del problema planteado, y que exige tener muy presente el significado de ambos campos tensionales.

Este capítulo incluye unos apartados finales que tratan de la respuesta tensional de secciones cerradas a solicitaciones de cortante. Anteriormente se habían analizado secciones abiertas, en cuyos bordes no existían tensiones tangenciales; lo que facilitaba las determinaciones tensionales sin recurrir a consideraciones deformacionales: la condición de equilibrio era suficiente. En cierto modo, las secciones abiertas tienen el carácter de isostáticas. Y las cerradas son hiperestáticas, y para abordar su análisis, se recurre a una metodología análoga a la que se utiliza en las vigas hiperestáticas para determinar las reacciones hiperestáticas de apoyo. Son metodologías, por tanto, similares con las que el ingeniero está familiarizado.

Por ello, se aborda de una forma muy intuitiva y sencilla la deformación de una sección solicitada por un esfuerzo cortante; lo que, por otra parte, es una fuente de enseñanzas.

Siempre que el plano de cargas no contenga el centro de esfuerzos cortantes se producirán esfuerzos de torsión; en general, no deseados, porque no son imprescindibles para el equilibrio de la pieza, sino que suelen ser consecuencia de detalles inadecuados en los puntos de aplicación de cargas o en la configuración de apoyos.

En todo caso, la torsión es un esfuerzo muy frecuente que se hace presente, incluso, en elementos comprimidos y genera un nuevo –y poco conocido– esfuerzo que se conoce como “bimomento”. La introducción al capítulo de torsión hace referencia a todo ello y se basa, como también era el caso de los apartados anteriores de flexión y cortante, en la hipótesis de un material “ideal” indefinidamente elástico.

A pesar de todo, la aparente complejidad de las fórmulas que gobiernan la torsión figura con pocas explicaciones en algunas normativas; lo que contribuye a hacerla tan incomprensible que muchos renuncian a tratar de entender lo que significa este esfuerzo y renuncian

al hacerlo a comprender las estructuras que, sin la torsión, quedan fatal e innecesariamente mutiladas. Se trata, sin embargo, de un concepto lleno de lógica y cuyas formulaciones se deducen, ¡cómo no!, de imponer las condiciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones. Por ello, en el texto, antes de desarrollar formulación alguna, se expone la esencia de la torsión y los dos posibles mecanismos que aseguran el equilibrio entre la torsión aplicada a secciones de paredes delgadas, y en particular a una pieza recta con sección en I; lo que es de gran ayuda para explicar dichos mecanismos: el de la “torsión uniforme”, que solamente genera tensiones tangenciales,  $\tau_u$ , que se autoequilibran a lo largo de la directriz de la sección delgada, y el de “torsión no uniforme”, que genera tensiones normales,  $\sigma_w$ , y tangenciales,  $\tau_w$ , concomitantes, porque, como en el mecanismo de flexión, la presencia de tensiones normales –aunque sean de origen torsional– variando a lo largo de la pieza, está ineludiblemente vinculada a la existencia de tensiones tangenciales concomitantes.

Naturalmente, la existencia de tensiones normales como consecuencia del mecanismo de torsión no uniforme provoca –a su vez– deformaciones unitarias en el sentido longitudinal de la pieza. El concepto físico de alabeo se trata con minuciosidad porque su comprensión es imprescindible para abordar su formulación. A lo que se dedica el apartado siguiente de este capítulo, en el que se deduce la formulación, muy simple, del alabeo unitario,  $w$  –otra característica geométrica de la sección– y la expresión de los desplazamientos longitudinales,  $w$ , correspondientes:

$$w = \theta'(\omega_s - \omega_l)$$

siendo  $\theta'$  la derivada del giro torsional  $\theta$ ,  $\omega_s$  y  $\omega_l$ , los alabeos unitarios en los extremos de la pieza abierta que gira alrededor del centro o eje de torsión –en la torsión no forzada– que coincide, por otra parte, con el centro de esfuerzos cortantes.

Diversos ejemplos sirven para familiarizarse con la aplicación de las formulaciones del alabeo, sin perder de vista su sentido físico y resaltando, para ello, la relación potencial que existe entre alabeos,  $w$ , tensiones normales,  $\sigma_w$ , y las tensiones tangenciales asociadas a  $\tau_w$ , que se generan cuando el alabeo está impedido; es decir, cuando las deformaciones longitudinales de la pieza están coaccionadas.

El alabeo de las secciones en cajón, que prolonga el análisis torsional de las secciones abiertas de paredes delgadas, tiene una problemática similar a la que planteaban las secciones cerradas solicitadas por un esfuerzo cortante. Y la metodología seguida para resolver el problema planteado de “hiperestaticidad seccional” es, también, análogo. En la exposición y el desarrollo de este apartado se ponen de manifiesto las condiciones que se deben cumplir para que una sección en cajón no alabee, pero también se explica que, en todo caso, en este tipo de secciones, la importancia de eventuales alabeos es reducida y que el mecanismo predominante suele ser el de la torsión uniforme.

Como síntesis de lo expuesto con anterioridad se establece una clasificación de secciones atendiendo a su deformabilidad torsional: las que se alabean y las que no lo hacen en ningún caso. La fórmula que gobierna la torsión uniforme, o torsión de Saint-Venant, es:

$$\theta' = \frac{M_T}{GI_T}$$

que recuerda a la fórmula de la flexión:

$$y'' = \frac{M_f}{EI}$$

Con apoyo de la utilísima y expresiva “analogía de la membrana”, desarrollada por el científico alemán L. Prandtl, se pueden deducir las tensiones tangenciales provocadas por la torsión uniforme en secciones abiertas o cerradas y deducir también la inercia de torsión,  $I_T$ , mediante la expresión, para el caso de las secciones abiertas:

$$I_T = \frac{2M_T \cdot A}{\oint_L \tau \cdot ds}$$

y, mediante la “fórmula de Bredt”, para las secciones en cajón monocelulares:

$$I_T = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

Para secciones con varias células, la “analogía de la membrana” permite plantear, también, una metodología muy clara y eficiente que está recogida en uno de los apartados de este capítulo, que va acompañado de ejercicios en los que se subrayan los conceptos y formulaciones teóricas antes expuestos.

Se hace referencia también en el texto a la utilísima “fórmula aproximada de Saint-Venant” para determinar la inercia de torsión,  $I_T$ , de secciones macizas, y a la interesante reflexión que pudo conducir a su deducción:

$$I_T = \frac{A^4}{40I_p} \quad (A, \text{área de la sección}, I_p, \text{inercia polar})$$

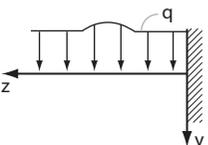
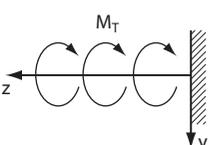
Siempre a partir de las condiciones de equilibrio de un elemento diferencial, se establecen las fórmulas que permiten relacionar, en el mecanismo de la torsión no uniforme, las cargas actuantes sobre un elemento estructural, las tensiones normales  $\sigma_\omega$  y tangenciales  $\tau_\omega$  correspondientes y los esfuerzos que se producen a lo largo de la viga: momentos torsores  $M_\omega = M_T$  y un nuevo tipo de esfuerzo, característico de la torsión no uniforme, al que se conoce como “bimomento”, y que se expresa como:

$$B_\omega = \int_0^z M_T \cdot dz = \int_0^m \sigma_\omega \cdot \omega \cdot t \cdot ds$$

El significado físico del bimomento queda claramente expuesto en el texto, y la deducción, lógica y sencilla, de un esfuerzo, poco conocido y frecuentemente ignorado que como todos corresponde a la integral de las tensiones que actúan en el conjunto de una sección.

En el texto se deducen las expresiones que figuran en el cuadro adjunto con la analogía entre las magnitudes que aparecen en el análisis de la flexión ( $M$ ,  $Q$ ) y en el caso de la “torsión no uniforme” y que ayuda a comprender mejor este mecanismo, el más complejo de la torsión, relacionándolos con conceptos con los que se suele estar mucho más familiarizado.

El concepto de bimomento,  $B_\omega$ , es el protagonista de uno de los apartados del capítulo, subrayándose su significado físico con comentarios y ejercicios en los que se manifiesta con claridad la necesidad de su existencia como consecuencia de las exigencias de equilibrio.

FLEXIÓN		TORSIÓN NO UNIFORME	
Coordenada	y	Coordenada sectorial o alabeo unitario	$\omega$
Momento estático	$S_x = \int_0^m y \cdot t \cdot ds$	Momento sectorial	$S_\omega = \int_0^m y \cdot t \cdot ds$
Inercia de flexión	$I_x = \int_0^m y^2 \cdot t \cdot ds$	Inercia de alabeo	$I_A = \int_0^m \omega^2 \cdot t \cdot ds$
Deformación por flexión	$y'' = \frac{M_f}{E \cdot I_x}$	Deformación por torsión	$\theta''' = \frac{M_T}{E \cdot I_A}$
Tensiones normales	$\sigma_z = \frac{M_f \cdot y}{I_x}$	Tensiones normales	$\sigma_\omega = \frac{B_\omega \cdot \omega}{I_A}$
Flujo de tensiones tangenciales	$q = \tau \cdot t = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x}$	Flujo de tensiones tangenciales	$q_\omega = \tau_\omega \cdot t = \frac{M_T \cdot S_\omega}{I_A}$
 <p>Esfuerzos cortantes</p>	$Q_y = \int_0^z q_y \cdot dz$	 <p>Momentos torsores</p>	$M_T = \int_0^z m_T \cdot dz$
Momentos flectores	$M_x = \int_0^z Q_y \cdot dz$ $M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA$	Bimomento	$B_\omega = \int_0^z M_T \cdot dz$ $B_\omega = \int_A \sigma_\omega \cdot \omega \cdot dA$

A modo de recordatorio y de síntesis se reproduce, también, el cuadro en el que se relacionan los diferentes esfuerzos que pueden actuar en una sección.

ESFUERZO	SÍMBOLO	DIMENSIÓN	TENSIÓN	EQUIVALENCIA	CARACTERIZADA
Tracción	T	F	$\sigma_T$	$T = \int_A \sigma_T \cdot dA$	Tracción
Compresión	N	F	$\sigma_N$	$N = \int_A \sigma_N \cdot dA$	Compresión
Cortante	Q	F	$\tau_f$	$Q = \int_A \tau_f \cdot dA$	Flexión
Momento flector	$M_f$	F·L	$\sigma_f$	$M_f = \int_A \sigma_f \cdot y \cdot dA$	Flexión
Momento torsor	$M_T$	F·L	$\tau_\omega$	$M_T = \int_A \tau_\omega \cdot d\omega$	Torsión
Bimomento	B	F·L	$\sigma_\omega$	$B = \int_A \sigma_\omega \cdot \omega \cdot dA$	Torsión

En otro apartado del capítulo se establece la fórmula para la determinación del “centro de torsión” de una sección y se concluye –como no podría ser de otra manera– que coincide con el “centro de esfuerzos cortantes”.

Diversos ejercicios comentados ayudan a comprender los conceptos, en su resolución diferentes puntos de vista, y sirven como referencia para cuantificar valores asociados a la torsión no uniforme. En uno de los ejercicios –sección abierta cuadrada de paredes delgadas– se utilizan cuatro diferentes métodos para determinar el centro de esfuerzos cortantes o centro de torsión; lo que debería estimular una fructífera reflexión sobre similitudes y complementariedades entre todos ellos.

Se han analizado independientemente la respuesta torsional de secciones que no se alabean y que responde al mecanismo de la “torsión uniforme”,  $M_u$ , así como la respuesta de secciones en las que siendo  $I_A \gg I_T$  el mecanismo de respuesta es el de la “torsión no uniforme”. En general, la respuesta de un elemento estructural será la de la “torsión mixta”: en parte el mecanismo de respuesta será el de la torsión uniforme,  $M_u$ , y en parte el de la torsión no uniforme,  $M_\omega$ . De manera que la expresión que gobierna la “torsión mixta” será:

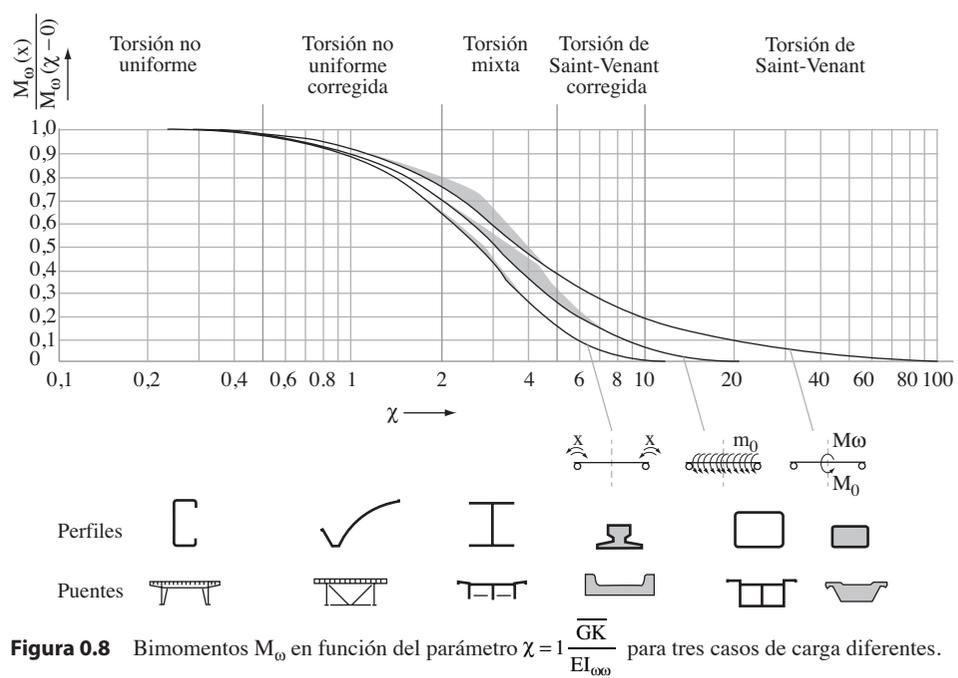
$$M_T = M_u + M_\omega = GI_T \theta' - EI_A \theta''$$

que en el caso de momentos torsores uniformes,  $m_T$ , aplicados a lo largo de la directriz del elemento estructural analizado se convierte en:

$$m_T = EI_A \theta^{IV} - GI_T \theta''$$

La solución de esta ecuación diferencial, a la que se hace referencia en el texto subrayando las condiciones de contorno que corresponden a diferentes tipos o configuraciones de apoyos nos define la geometría rotacional,  $\theta$ , del elemento estructural analizado solicitado en torsión. A partir de ahí, se conoce en qué porcentajes –que pueden variar en cada sección– intervienen los dos mecanismos de respuesta posible; es decir los valores de  $M_u$  y  $M_\omega$  que actúan en cada sección; y se obtienen, aplicando las fórmulas ya deducidas, las tensiones actuantes en cualquier sección debido a los esfuerzos de torsión aplicados al elemento estructural objeto del estudio.

El capítulo de torsión concluye con la exposición de un método aproximado –de indudable interés pedagógico– que permite estimar en secciones, en I, en que los dos mecanismos de respuesta torsional pueden estar presentes y el orden de magnitud de la proporción en que intervienen ambos mecanismos. Se incluye, también, un valioso gráfico para tres diferentes casos de carga tomado del magnífico libro de Kollbrunner sobre la torsión.



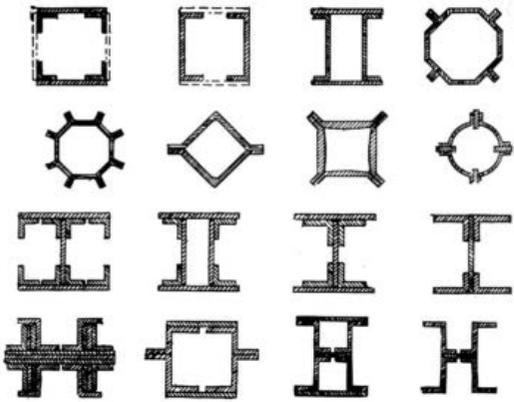
**Figura 0.8** Bimomentos  $M_{\omega}$  en función del parámetro  $\chi = 1 \frac{\overline{GK}}{EI_{\omega\omega}}$  para tres casos de carga diferentes.

# Capítulo 1

## **Análisis estructural elástico**

- 1.1 Preámbulo
- 1.2 Comportamiento elástico de piezas prismáticas
- 1.3 Respuesta tensional y deformacional de una sección cualquiera solicitada en flexión pura
- 1.4 Respuesta tensional y deformacional de una sección solicitada por esfuerzos cortantes
- 1.5 La torsión
- 1.6 Esfuerzos axiales
- 1.7 Esfuerzos combinados
- 1.8 Reacciones de apoyo

## 1.1 Preámbulo



**Figura 1.1** Secciones compuestas por perfiles laminados según un catálogo comercial del siglo XIX.

Son innumerables los textos de resistencia de materiales o de cálculo de estructuras que abordan el comportamiento de una pieza prismática, constituida por un material indefinidamente elástico, caracterizado por un módulo de elasticidad,  $E$ , que permanece inalterable cualquiera que sea la magnitud de las cargas teóricas que solicitan al elemento estructural objeto del análisis.

La metodología empleada para su análisis proviene de los avances que, en el campo de las matemáticas y de la física, tuvieron lugar en los siglos XVII y XVIII, cuando aún no se habían inventado los materiales que hoy utilizamos de manera generalizada para crear estructuras funcionales, seguras y perdurables. La revolución industrial inglesa nos trajo perfiles laminados de acero (Figura 1.1) con los que se pudieron concebir tipologías estructurales antes nunca vistas, constituidas por piezas prismáticas que se combinaban formando entramados de vigas y pilares, que fueron el esqueleto de muchas y muy variadas construcciones que configuraron el paisaje del siglo XIX.

En el siglo XX, la invención del hormigón, armado primero y pretensado después, permitió la creación de tipologías nuevas: las estructuras laminares, por ejemplo; aunque los entramados constituidos por piezas prismáticas tuvieron, y tienen todavía, una presencia relevante en un panorama estructural, en el que la viga solicitada en flexión fue, y continúa siendo, protagonista destacada.

Como veremos en los apartados siguientes de este primer capítulo, las fórmulas esenciales que gobiernan la flexión de una viga de sección constante, simétrica respecto al plano en el que se aplican las cargas, son:

$$\begin{aligned} EI \cdot y^{IV} &= q(z) \\ EI \cdot y''' &= Q(z) \\ EI \cdot y'' &= M(z) \\ EI \cdot y' &= \int M(z) \cdot dz \\ EI \cdot y &= \int \left( \int M(z) \cdot dz \right) \cdot dz \end{aligned}$$

Estas expresiones, fáciles de deducir y recordar, relacionan las características del material, la geometría de la sección, las cargas aplicadas, los esfuerzos flectores,  $M$ , y cortantes,  $Q$ , con los desplazamientos,  $y$ , de la viga; así como, con sus sucesivas derivadas,  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y^{IV}$ . Todos los análisis tradicionales de estructuras flectadas están sintetizados en estas fórmulas, presentadas aquí en su formato más elemental.

Existen materiales, como los elastómeros, que se comportan elásticamente pero no linealmente: cuando se descarga la probeta ensayada se anula la deformación del material, vuelve a su posición inicial, pero su módulo de elasticidad no permanece constante durante el proceso de carga y descarga. En este libro se ha optado por mantener la denominación de “materiales elásticos”, para recordar las raíces de las metodologías tradicionales utilizadas en el análisis de piezas prismáticas que presuponen comportamientos indefinidamente elásticos, sin límites tensionales ni deformacionales.

Para su deducción, se parte, como en seguida veremos, de la demostración de la ecuación central:

$$EI \cdot y'' = M(z)$$

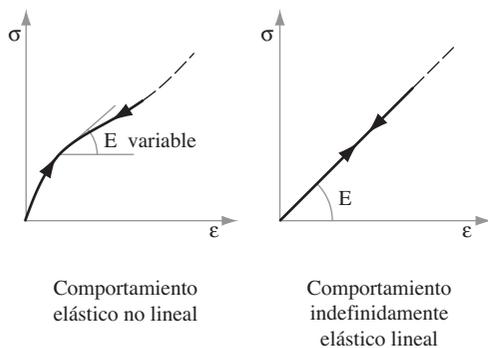
Al derivarla una vez se obtiene  $EI \cdot y''' = Q(z)$ , y al hacerlo nuevamente,  $EI \cdot y^{IV} = q(z)$ . En el otro sentido, por integración, se determina la pendiente  $y'(z)$ , primero, y la deformada  $y(z)$  de la pieza, después.

Dicha ecuación central se deduce aplicando las dos condiciones esenciales que presiden todo análisis estructural: la de equilibrio y la de compatibilidad entre tensiones y deformaciones cuya relación caracteriza el material utilizado.

La **condición de equilibrio** exige que el conjunto de las cargas actuantes sobre la globalidad o sobre cualquier parte de una estructura que queramos virtualmente aislar –acciones



Penn Station. Nueva York, 1910.



**Figura 1.2** Relaciones  $\sigma$ - $\epsilon$ .

externas, peso propio, reacciones de apoyo, esfuerzos internos en las secciones que son las fronteras de la parte estructural aislada— deben autoequilibrarse.

La **condición de compatibilidad** es la segunda exigencia ineludible asociada al comportamiento de la estructura y a la naturaleza del material estructural utilizado. La caracterización de los materiales reales puede ser tarea muy compleja, que ha sido y es objeto de inacabables estudios e investigaciones. La comunidad ingenieril, como en tantos otros temas, ha tenido que acordar formulaciones y planteamientos simplificados recogidos en las normas para caracterizar los materiales que emplea en la práctica el ingeniero. Lógicamente, considerar cómo se hace en las formulaciones clásicas de la resistencia de materiales, que los materiales son indefinidamente elásticos, facilita enormemente los cálculos estructurales; lo que explica la amplísima aceptación de dicha hipótesis. Pero la historia de las estructuras es también, como en capítulos posteriores se resalta, el relato en la evolución de la forma de caracterizar materiales complejos, como el acero y el hormigón: del material abstracto indefinidamente elástico, se pasó a definir el límite elástico como frontera de su comportamiento, antes de plantear su caracterización como material elastoplástico y de profundizar en su comportamiento dúctil o frágil.

Por otra parte, los métodos clásicos de la resistencia de materiales aplicada a piezas prismáticas se basan en otra hipótesis simplificadora propuesta en el siglo XVII por Bernouilli y rescatada ciento cincuenta años después por Navier, dándole mayor coherencia: las secciones planas antes de la deformación se mantienen planas después de la deformación. Esta hipótesis de Bernouilli, a la que con frecuencia se conoce como “hipótesis de Navier”, facilita extraordinariamente los cálculos y conduce a resultados aproximados que se consideran suficientemente precisos. Aun cuando las deformaciones debidas a esfuerzos cortantes y de torsión no cumplan dicha condición, que en todo caso solo es de aplicación en piezas prismáticas o asimilables a ellas, porque se trata de metodologías basadas en análisis de secciones que no pueden utilizarse; por ejemplo, para evaluar el comportamiento de suelos o rocas, donde el indispensable análisis espacial hace protagonista al “punto” y justifica la utilización de métodos basados en los elementos finitos. De todos modos, también en el caso de suelos y rocas, la condición de equilibrio es insoslayable y de gran utilidad práctica. Y también lo es el cumplimiento de la condición de compatibilidad, por más que la caracterización del terreno suele ser especialmente compleja. Lo que no impide que en muchísimas aplicaciones prácticas se acepten comportamientos indefinidamente elásticos.

En el siguiente apartado se demuestran las expresiones que sintetizan el comportamiento elástico de las piezas prismáticas de las que se deducen los teoremas de Mohr, de tanta utilidad práctica. Se expone también el teorema del influjo unitario como herramienta para determinar esfuerzos y desplazamientos.

Después se estudian sucesivamente las respuestas tensionales y deformacionales de secciones de piezas prismáticas solicitadas por esfuerzos individualizados de flexión, cortante y de torsión.

En el caso de la flexión pura, la respuesta de una sección de forma cualquiera basada en el equilibrio o la equivalencia entre el momento aplicado y las tensiones normales asociadas da ocasión a explicar conceptos tradicionales como el de radio de curvatura, el de ejes principales de inercia y el de fibra neutra. Diversos ejercicios desarrollados desde la perspectiva del equilibrio ponen de manifiesto las posibilidades que ofrece el uso en la práctica de dicho concepto.

También la condición de equilibrio permite abordar el cálculo de tensiones tangenciales y el de deformaciones angulares en secciones solicitadas por esfuerzos cortantes. El fundamental concepto de “centro de esfuerzos cortantes” surge casi espontáneamente de las exigencias del equilibrio seccional; que, así mismo, permite exponer el concepto físico de las tensiones tangenciales y su interacción con las tensiones normales que varían a lo largo de la directriz de la pieza. Lo que, por otra parte, anuncia que la respuesta de una viga a solicitaciones de cortante —que siempre van acompañadas de variaciones de momentos— no puede tener carácter seccional. Al tratar de los sistemas de estructuras de acero laminado y de hormigón armado surge esta compleja cuestión



La “condición de equilibrio” y la “condición de compatibilidad” son, desde luego, protagonistas de este capítulo que trata de comportamientos estructurales puramente elásticos, pero impregnan también todas las páginas de este libro. Porque son condiciones insoslayables y universales que se han de cumplir cualquiera que sea el material estructural utilizado (hormigones, aceros, suelos y rocas), el sistema estructural escogido (de acero laminado, de hormigón armado, pretensado, mixtas), el tipo de análisis que se lleve a cabo (elástico, elastoplástico o plástico) o la naturaleza de las cargas (estáticas o dinámicas). Presiden también el estudio de los problemas relacionados con inestabilidades y con vibraciones, el análisis de estructuras solicitadas sísmicamente, la evaluación del comportamiento de nudos y zonas singulares de la estructura y de los dispositivos de transferencia entre partes de estructuras (uniones atornilladas, soldadas, pernos conectadores, anclajes por adherencia, acopladores...) de las cargas al terreno de cimentación (zapatas, pilotes, muros, anclajes). En especial la “condición de equilibrio”, la más fácil de sentir, debe estar profundamente arraigada en la mente del ingeniero, porque ha de ser también una inestimable herramienta en el proceso de concepción y dimensionamiento de una estructura y en la evaluación de su comportamiento.

y se pone en evidencia el rigor de los análisis seccionales que aún hoy utilizamos generalizadamente.

La torsión, de la que se ocupa extensamente el apartado 1.5, produce no pocas confusiones entre los ingenieros que se aproximan por primera vez a este concepto. Pero, una vez más, las exigencias de la condición de equilibrio facilitan la comprensión de la respuesta estructural a cargas que generan este tipo de esfuerzos. El análisis deformacional de secciones abiertas o en cajón solicitadas en torsión puede provocar alabeos –es decir, deformaciones longitudinales– que, cuando están coaccionados, son origen de tensiones longitudinales que unidas a las tangenciales caracterizan la “torsión no uniforme”. Mientras que la “torsión uniforme” propia de las secciones, abiertas o cerradas, que no se alabean solo necesita de tensiones tangenciales para equilibrar el esfuerzo de torsión aplicado. Los casos intermedios, los de la torsión mixta, son lógicamente también posibles. En el texto se deducen las expresiones generales que gobiernan el comportamiento de piezas prismáticas solicitadas en torsión y que pueden dar origen a este amplio abanico de escenarios tensionales y deformacionales; expresiones que, por otra parte, serán utilizadas para estudiar el “pandeo por flexión y torsión”, que es el modo de inestabilidad más general que se puede producir en soportes de acero comprimidos, como veremos en el apartado 3.2.3.3.

El axil es el último esfuerzo que se analiza individualmente. Provoca deformaciones y tensiones, de tracción o de compresión, uniformes en toda la sección. La posición de la resultante de dichas tensiones coincide con su centro de gravedad que así queda definido. Si la pieza prismática es compuesta y está constituida por materiales con diferente módulo de elasticidad, como el hormigón y el acero en barras o perfiles, las deformaciones uniformes en toda la sección generan tensiones diferentes en los materiales utilizados en la proporción que define la relación entre sus módulos de elasticidad.

En la práctica, todas las secciones de una estructura estarán solicitadas por diversos esfuerzos concomitantes y por estados pluritensionales. Tratándose de un material indefinidamente elástico, sin limitación tensional ni deformacional, la superposición de esfuerzos no tiene trascendencia teórica alguna: las deformaciones provocadas por los esfuerzos individualizados se suman, y las tensiones también. Con los materiales reales no sucederá así y, por ello, se exponen en este apartado conceptos como el de “núcleo central” y el de “rendimiento de una sección”, que ayuden a evaluar el comportamiento de las solicitadas por esfuerzos simultáneos de flexión y compresión.

El círculo de Mohr será también de valiosísima utilización para analizar estados pluritensionales en materiales reales, como veremos en los capítulos 2 y 3.

El último apartado de este primer capítulo está dedicado a las reacciones de apoyo; lo que no suele ser habitual en los tratados tradicionales de resistencia de materiales, al menos, con el enfoque aquí adoptado. El análisis del comportamiento de una pieza prismática se basa en el conocimiento de los esfuerzos que actúan en cada sección. Pero para conocer dichos esfuerzos provocados por las cargas externas aplicadas en una viga hay que conocer cuáles son las reacciones de apoyo que aseguran su equilibrio global. Cuando se trata de una viga isostática, la deducción de dichas reacciones es muy sencilla; aunque en el texto se expone algún elemental ejercicio que, sin embargo, puede provocar confusiones y que, en todo caso, pone de manifiesto el interés de las reflexiones deformacionales asociadas a la determinación de las reacciones de apoyo. Cuando se trata de vigas hiperestáticas, la determinación de dichas reacciones puede ser más incierta; sobre todo, cuando influye la deformabilidad del terreno al que se transfieren las reacciones de apoyo. Las estructuras pilotadas también exigen reflexiones que no suelen abundar acerca de los itinerarios por los que discurren las cargas aplicadas a la estructura para llegar al terreno de cimentación que envuelve a los pilotes. Los ejemplos esbozados en el texto subrayan, en definitiva, la importancia que tiene el conocimiento de las reacciones de apoyo para comprender el comportamiento estructural en su conjunto y poder evaluarlo.

## 1.2 Comportamiento elástico de piezas prismáticas

### 1.2.1 Introducción

En este apartado se deducen, en primer lugar, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de una pieza prismática flectada para el caso más sencillo en el que dicha pieza tiene canto constante y las cargas aplicadas están contenidas en el plano de simetría de la sección.

La deducción se basa en el análisis de los efectos deformacionales que provoca la rotación de una rebanada diferencial de la pieza solicitada por dos momentos iguales pero de sentidos contrarios aplicados en sus caras, frontal y dorsal. La consiguiente deformación unitaria en una fibra de la sección situada a la distancia  $y$  del eje de rotación  $x-x$  valdrá  $\varepsilon_z = y/R_x$  siendo  $R_x$  el radio de curvatura de la deformada. Las tensiones consiguientes en el material indefinidamente elástico que estamos considerando serán  $\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot y/R_x$ , y tendremos una distribución lineal de tensiones que se anulará en el eje de rotación, o fibra neutra, teniendo sentidos contrarios a uno u otro lado de dicho eje.

La integración de este estado tensional en el conjunto de la sección permite deducir la expresión del momento  $M_x = EI_x/R_x$ , correspondiente al giro caracterizado por el radio de curvatura  $R_x$ . La inercia  $I_x$  expresa la influencia de la geometría de la sección en el estado tensional  $\sigma_z$  generado por el momento aplicado con el que está en equilibrio o es equivalente. Así resulta:

$$\sigma_z = \frac{E \cdot y}{R_x} = \frac{M_x \cdot y}{I_x} \quad \therefore \quad M_x = \frac{EI_x}{R_x}$$

y como la curvatura  $\chi$ , inversa del radio de curvatura  $R_x$ , es aproximadamente igual a  $y''$ , derivada segunda de la deformada, se llega a la fórmula central:

$$EI \cdot y'' = M_x(z)$$

de la que, por derivada o por integración, se deducen el resto de las expresiones que en conjunto gobiernan el comportamiento de la pieza prismática que se analiza.

Los signos de tensiones y momentos pueden provocar confusiones, y se requiere una reflexión como la incluida en el apartado 1.2.3.

Se ha destinado un breve apartado a enunciar los dos teoremas de Mohr, porque siendo de sencilla deducción a partir de la ecuación  $EI \cdot y'' = M_x$ , son fáciles de recordar y pueden ser de gran utilidad para determinar giros y desplazamientos y para deducir reacciones y esfuerzos en vigas isostáticas o hiperestáticas.

También se incluye un apartado final dedicado al teorema del influjo unitario, basado en conceptos energéticos y que, entre los numerosísimos métodos que con el tiempo han propuesto ilustres personalidades para determinar manualmente esfuerzos y desplazamientos de estructuras, es el que se suele considerar más útil y, por ello, suele estar recogido en la mayoría de textos y manuales que se ocupan de estas cuestiones.

Los ejercicios propuestos con soluciones detalladamente comentadas servirán para familiarizarse con los conceptos expuestos.



**Bernouilli, Jacob**  
(Basilea, 1654 - 1705)



Nieto de Jacob el Viejo (1598-1634), patriarca de una excepcional saga de científicos que en 1622, huyendo de las persecuciones religiosas de la época, fijó su residencia en Basilea. Allí nació su único hijo, Nicolás, que tuvo doce descendientes, de los que tan solo cuatro llegaron a la edad adulta. Entre ellos, nuestro Jacob y su hermano menor Johan I, padre de Daniel (1700-1780), que en su *Hidrodinámica* publicada en 1738 expuso los fundamentos de la mecánica de fluidos. Este tuvo por discípulo a Leonard Euler.

Jacob Bernouilli dio un decisivo impulso al cálculo diferencial esbozado por Leibniz (1646-1716), con quien mantuvo una fructífera correspondencia. Como Galileo, Mariotte y otros científicos que se interesaron por la resistencia de las vigas prismáticas, Jacob estudió sus deformadas y, por primera vez, dedujo la flecha de una viga y su relación con sus radios de curvatura. Para ello supuso que una sección inicialmente plana de una viga se mantenía plana después de ser cargada. Hipótesis que no siendo sino una aproximación a la realidad aún hoy es la base de análisis seccionales de las estructuras prismáticas. Se le atribuyen también el estudio pormenorizado de la espiral logarítmica y otros análisis matemáticos, y su libro *Ars Conjectandi* (El arte de la conjetura) dedicado a la teoría de las probabilidades se considera su obra más relevante.



**Navier, Claude-Louis**  
(Dijon, 1785 - París, 1836)



Ingeniero de Puentes y Caminos, y físico. Fue discípulo de Fourier y sustituyó a Cauchy como profesor de Mecánica Aplicada en la Escuela Politécnica. Tras un viaje de estudios a Inglaterra para conocer las estructuras construidas por Telford y Brunel, publicó el primer tratado de la historia sobre puentes colgantes. Debido a las dudas que suscitaban los colapsos de algunos puentes construidos con esa tipología innovadora, el que proyectó para el Palacio de los Inválidos de París fue demolido.

Navier publicó una teoría general de la elasticidad (1821) en la que recuperó la hipótesis de Bernouilli, por lo que hoy se la conoce también como hipótesis de Navier o de Bernouilli-Navier. Se interesó además por los canales de navegación y por la teoría del calor de Fourier. Pero su aportación más perdurable fue la deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes, protagonistas de la dinámica de fluidos.

## 1.2.2 Deducción de las expresiones que gobiernan el comportamiento elástico de piezas prismáticas solicitadas en flexión

Consideremos una rebanada diferencial de una pieza prismática, de sección constante (Figura 1.3), con las cargas,  $q(z)$ , aplicadas en su plano de simetría.

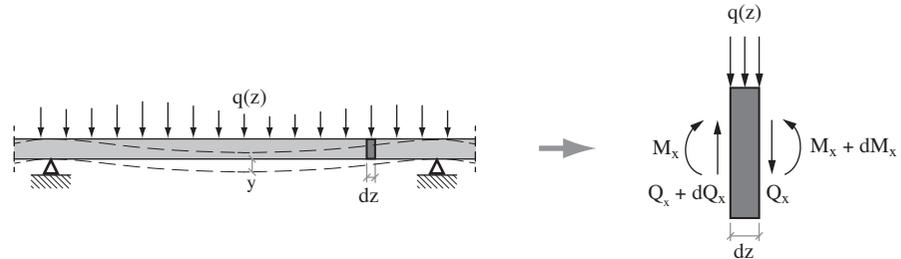


Figura 1.3 Equilibrio de una rebanada en la pieza prismática flectada.

Del equilibrio de las fuerzas y los momentos que actúan sobre la rebanada se deduce que la carga externa es igual a la derivada del esfuerzo cortante  $Q(z)$  que, a su vez, coincide con la derivada del momento flector  $M(z)$ :

- $q(z) = \frac{dQ(z)}{dz}$
- $Q(z) = \frac{dM(z)}{dz}$

Por otra parte, los momentos  $M(z)$  aplicados provocan en la rebanada una rotación diferencial,  $d\phi$ , a la que corresponde (Figura 1.4) un radio de curvatura  $R_x = OA$ . Consecuentemente, la fibra de ordenada  $y$  se habrá alargado siendo su deformación unitaria:

$$\varepsilon_z = \frac{B_1B_2 - A_1A_2}{A_1A_2} = \frac{(R_x + y)d\phi - R_x \cdot d\phi}{R_x \cdot d\phi} = \frac{y}{R_x}$$

Teniendo en cuenta la “condición de compatibilidad” que caracteriza el material indefinidamente elástico que se está considerando ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ) se deduce la tensión correspondiente:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = \frac{E \cdot y}{R_x}$$

El conjunto de las tensiones  $\sigma_z$ , linealmente distribuidas, provocadas por la deformación de la rebanada, es equivalente (Figura 1.5) al momento  $M_x$  aplicado en cada una de sus dos caras, frontal y dorsal. La formulación de dicho momento será la siguiente:

$$M_x = \int_A dM_x = \int_A \sigma_z \cdot dA \cdot y = \int_A \frac{E \cdot y^2}{R_x} \cdot dA = \frac{E}{R_x} \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E \cdot I_x}{R_x}$$

siendo  $I_x = \int_A y^2 dA$  la inercia de la sección en relación con el eje de giro, o fibra neutra.

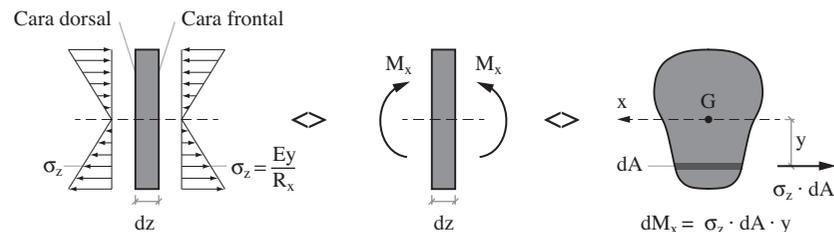


Figura 1.5 Equivalencia entre tensiones y momentos flectores.

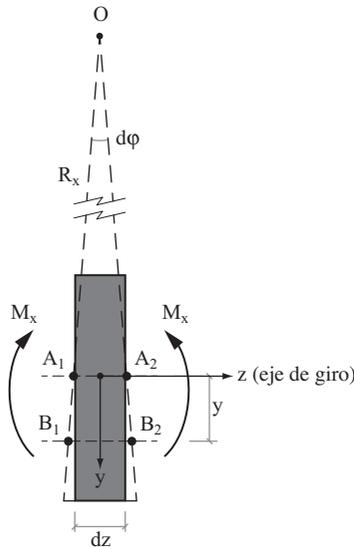


Figura 1.4 Deformación de la rebanada solicitada por un momento flector.



El radio de curvatura se puede escribir como:

$$R_x = \frac{y}{\varepsilon_y} = \frac{h}{\varepsilon_s + \varepsilon_i}$$

siendo  $h$  el canto de la viga, y  $\varepsilon_s/\varepsilon_i$  las deformaciones unitarias en los bordes de la sección. Si, por ejemplo, tenemos una viga de acero con un perfil IPE 500 solicitada por unas tensiones máximas  $\sigma_s = \sigma_i = 210$  MPa, a las que corresponden

$$\varepsilon_s = \varepsilon_i = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{210}{210.000} = 1\text{‰}$$

el radio de curvatura de la sección será:

$$R_x = \frac{h}{1/1.000 + 1/1.000} = \frac{1.000 h}{2} = 500 h = 50 \text{ m}$$

Por otra parte, aunque la expresión más general de la curvatura  $\chi = 1/R_x$  de la viga es:

$$\chi = \frac{1}{R_x} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

en la práctica estructural, para vigas con las esbelteces habituales, la influencia del término  $(y')^2$  se considera intrascendente y, en consecuencia, se acepta como suficientemente aproximada la expresión:

$$\chi = \frac{1}{R_x} \simeq y''$$

Por tanto:

$$M_x = \frac{E \cdot I_x}{R_x} \simeq E \cdot I_x \cdot y''$$

Por derivación o integración de esta expresión y recordando que  $Q(z) = dM_x(z)/dz$  y  $q(z) = dQ(z)/dz$  se obtienen las cinco fórmulas que gobiernan el comportamiento elástico de las piezas prismáticas de sección constante solicitadas por cargas  $q(z)$  aplicadas en su plano de simetría:

$$\begin{aligned} EI \cdot y^{IV} &= q(z) \\ EI \cdot y''' &= Q(z) \\ EI \cdot y'' &= M_x(z) \\ EI \cdot y' &= \int M_x(z) \cdot dz \\ EI \cdot y &= \int \left( \int M_x(z) \cdot dz \right) \cdot dz \end{aligned}$$

### 1.2.3 Criterio de signos

Para establecer los ejes de coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que identifican cualquier punto de una pieza prismática se adopta la tradicional “regla de los tres dedos de la mano derecha” (Figura 1.6).

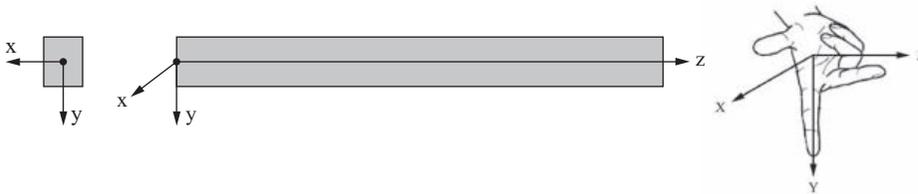


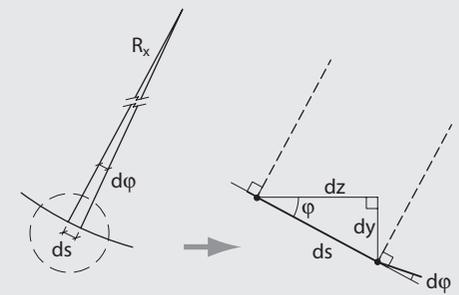
Figura 1.6 Criterio de signos para los ejes coordenados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

El eje  $z$  coincide con la directriz de la pieza, y los ejes  $x$  e  $y$ , perpendiculares a él, permiten situar cualquier punto de su sección transversal.

El signo de las cargas que actúan y de las reacciones de apoyo que las equilibran corresponden al sentido de los ejes coordenados: serán positivas cuando estén orientadas en el sentido positivo de los ejes.

Los momentos aplicados en una sección y sus rotaciones tendrán el signo que establece la también tradicional “regla del sacacorchos”. Un momento  $M_x$  se suele representar (Figura 1.7) mediante una flecha con doble cabeza y tendrá signo positivo cuando esté orientada en el sentido positivo del eje  $x$ , que señala también el movimiento de penetración o avance del sacacorchos. Dicho momento está contenido en un plano  $y$ - $z$ , perpendicular al eje  $x$  alrededor del cual gira la sección (en el mismo sentido que el sacacorchos en su movimiento) y provoca una distribución de tensiones, equivalente al momento aplicado, que serán de tracción por debajo del eje  $x$ - $x$  de rotación y que tendrán signo positivo y pasarán a ser tensiones de compresión y a tener signo negativo, en

#### ►► Deducción de la expresión general del radio de curvatura, $R_x$



$$\bullet ds = R_x \cdot d\varphi = \sqrt{dz^2 + dy^2} = \sqrt{1+(y')^2} \cdot dz$$

$$\bullet \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dz} \quad \therefore \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (y')$$

Recordando que:

$$\frac{d}{dz} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} f(z)) = \frac{1}{1+f(z)^2} \cdot f'(z)$$

tendremos:

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{1+(y')^2} y''$$

y, en consecuencia:

$$R_x = \frac{ds}{dz} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = \sqrt{1+(y')^2} \left[ \frac{(1+y'^2)}{y''} \right] = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$



Si consideramos una viga solicitada por dos momentos  $M$  iguales y contrarios, aplicados en sus extremos, la ley de flectores en toda su longitud será uniforme y, por lo tanto, de acuerdo con la expresión simplificada  $M_x = EI_x \cdot y''$ , la deformada de la viga tendría forma parabólica. En cambio, si se hubiese considerado para  $R_x$  su expresión general, la deformada habría sido un círculo. En la práctica, con los valores de las esbelteces  $L/h$  que se adoptan para las vigas, las flechas que se obtienen en ambos casos son muy parecidas.

la mitad de la sección, por encima de la fibra neutra en zona de coordenadas,  $y$ , también con signo negativo.

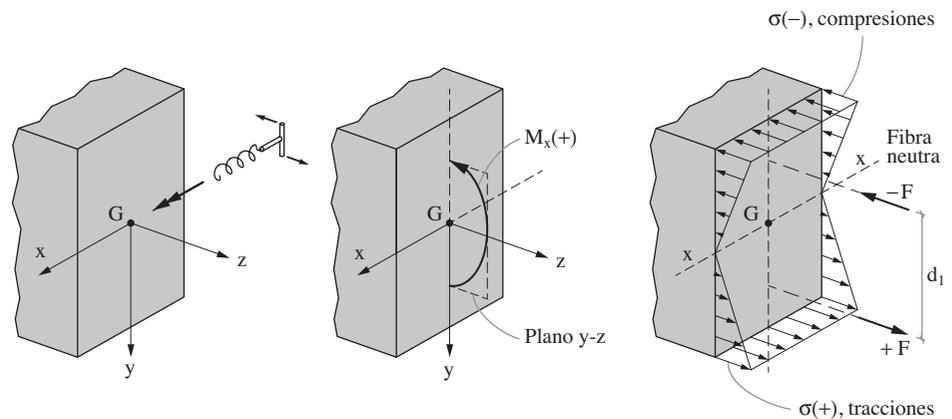


Figura 1.7 Criterio de signos de momentos y tensiones equivalentes.

En el caso representado tenemos un momento  $M_x$  externo que actúa sobre una sección que podemos denominar “frontal” porque “mira” hacia adelante, en el sentido creciente del eje  $z$ . No se plantean dudas sobre los signos asignables al momento aplicado, a las tensiones equivalentes ni a la rotación consiguiente de la sección.

Sin embargo, los momentos externos que estamos considerando no tienen realidad física. Son consecuencia de las deformaciones que provocan las cargas aplicadas a la estructura y las reacciones de apoyo que las equilibran; deformaciones que, a su vez, inducen un estado tensional en la sección considerada –mediando la relación entre tensiones y deformaciones que caracteriza al material estructural utilizado–, cuya resultante equivale a una pareja de fuerzas ficticias  $\pm F$ , iguales y contrarias, separadas por el “brazo de palanca”,  $d_1$ , de manera que se verifique la condición  $M_x = F \cdot d_1$ .

Tampoco los momentos flectores y los esfuerzos cortantes tienen realidad física. Son artificios creados por los ingenieros para facilitar los análisis estructurales que, en definitiva, tienen por objeto la determinación de las deformaciones tangibles provocadas por las cargas solicitantes; deformaciones a las que corresponden tensiones cuya integración a nivel seccional equivalen a los momentos y fuerzas que identifican los flectores y cortantes que actúan en las dos caras, frontal y dorsal, de una rebanada de espesor infinitesimal de la pieza prismática flectada.

Analicemos desde esta perspectiva el caso más sencillo de la viga isostática uniformemente cargada (Figura 1.8).

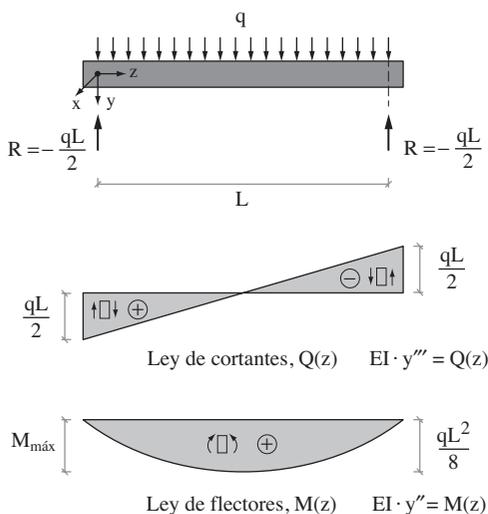


Figura 1.8 Cortantes y flectores en una viga isostática uniformemente cargada.

Con el convenio de signos adoptado, las cargas tendrán signo positivo, y las reacciones de apoyo  $R = -qL/2$  que las equilibran negativo, al ir dirigidas en sentido contrario. La ley de cortantes que corresponde a la ya deducida expresión  $EI \cdot y''' = Q(z)$  tendrá signo positivo en la mitad izquierda de la viga, entre  $z = 0$  y  $z = L/2$ , por cuanto el momento  $M = Q \cdot dz$  corresponde a dicho signo según la adoptada regla del sacacorchos. En cambio, en la otra mitad de la viga, entre  $z = L/2$  y  $z = L$ , los cortantes tendrán signo negativo, aun cuando las dos reacciones de apoyo, que coinciden en valor absoluto con los esfuerzos cortantes extremos, tengan signo negativo.

Los momentos flectores tendrán signo positivo en toda la longitud de la viga, porque equivalen a tensiones  $\sigma_z$  de tracción en la parte inferior de la sección. Sin embargo, el radio de curvatura  $R_x$  de la deformada, dada su concavidad, tendrá signo negativo por dirigirse hacia arriba. De manera que en las expresiones deducidas a partir de la condición de equilibrio de la rebanada para las tensiones y los flectores hay una incoherencia en cuestión de signos. Rigurosamente hablando, las expresiones deducidas tendrían que tener signo negativo, es decir:

$$\sigma_z = -\frac{E_y}{R_x} \quad EI \cdot y'' = \frac{EI}{R_x} = -M$$

En la práctica, esta cuestión no suele tener consecuencias si el ingeniero tiene presente el significado físico de tensiones, deformaciones y esfuerzos que resultan de las formulaciones genéricas, por lo que conviene profundizar, desde esta perspectiva, en conceptos y criterios asociados al equilibrio (Figura 1.9) de la viga isostática que estamos considerando.

Las secciones 1 y 2 representadas, ubicadas en posiciones simétricas al centro de la viga y de coordenadas  $z_1$  y  $z_2 = L - z_1$ , respectivamente, dividen a la viga en tres tramos: dos laterales y uno central, cuyo equilibrio podemos analizar individualizadamente.

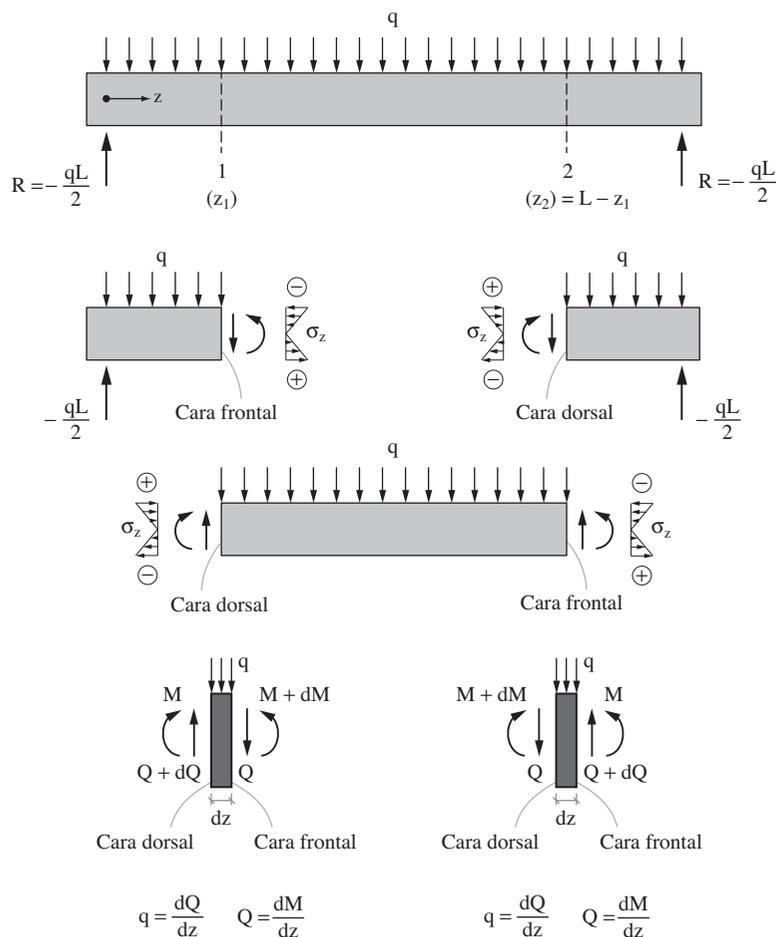


Figura 1.9 Equilibrio de la viga.

El extremo de coordenada  $z_1$  del tramo lateral izquierdo es la cara frontal de la sección 1 y mira hacia adelante, hacia el sentido creciente del eje de las  $z$ . Sobre dicha cara frontal, para asegurar el equilibrio del tramo, actúa una fuerza hacia abajo,  $Q$ , con signo positivo de valor  $Q = qL/2 - qz_1 = q(L - 2z_1)/2$ .

En el tramo lateral derecho, la sección situada en  $z_2 = L - z_1$  define como frontera la cara dorsal, que mira hacia atrás, por la espalda del tramo, hacia el origen del eje de ordenadas. La fuerza vertical será también positiva y tendrá, lógicamente, el mismo valor  $q(L - 2z_1)/2$  del tramo lateral homólogo, mientras que el momento, también de igual valor absoluto  $M = qz_1(L - z_1)/2$  habrá cambiado de signo. En ambas caras, frontal y dorsal, la ley de las tensiones longitudinales,  $\sigma_z$ , serán iguales pero tendrán signos cambiados.

El tramo central, entre secciones de coordenadas  $z_1$  y  $z_2 = L - z_1$ , está acotado a su izquierda por una cara dorsal que es el espejo en el que se refleja la cara frontal del tramo lateral izquierdo; y a su derecha, por la cara frontal, reflejo de la dorsal del tramo lateral contiguo. En ambas caras de este tramo central, los valores de las fuerzas y los momentos y el signo que les corresponde son inequívocos.

Consideremos ahora el equilibrio de la rebanada de espesor infinitesimal,  $dz$ , que se sitúa en el entorno de las secciones  $z_1$  y a la que se puede considerar como frontera o elemento de transición entre el tramo lateral izquierdo y el tramo central. La cara dorsal de la rebanada será lógicamente el reflejo de la cara frontal del tramo lateral y análogamente su cara frontal será la dorsal del tramo central de la viga. Las fuerzas y los momentos, en cada cara de la rebanada serán iguales, y contrarias a las de las caras homólogas de los tramos lateral y central contiguos. En la cara frontal, el momento será  $M + dM$ , debido al incremento de los flectores para valores de  $z$  comprendidos entre el origen y el centro de la viga. El equilibrio de la rebanada exige el cumplimiento de las condiciones previamente deducidas  $q = dQ/dz$  y  $Q = dM/dz$ .

En la rebanada correspondiente a  $z_2 = L - z_1$ , la situación es análoga y se deducen también las mismas expresiones que relacionan las cargas, los cortantes y los flectores sin que se produzcan incoherencias con los signos, como ocurre en las formulaciones que relacionan tensiones, curvaturas o radios de curvatura, momentos y rigideces; en las que rigurosamente debían figurar signos  $+/-$  para recordar que puede ser cualquiera de ellos, según se esté evaluando la cara frontal o la dorsal a ambos lados de una sección determinada:

$$\sigma = \pm \frac{E_y}{R_x} \quad EI \cdot y'' = \pm M_x$$

El buen juicio del ingeniero permite obviar esta cuestión, siempre que tenga muy presente el significado físico de las formulaciones utilizadas y el origen de sus deducciones.

#### 1.2.4 Los teoremas de Mohr

La expresión que relaciona la flexión de una viga con la pendiente,  $y'$ , de su deformada y con la ley de momentos:

$$EI_x \cdot y' = \int M_x \cdot dz$$

enuncia el **primer teorema de Mohr**:

“El giro relativo entre dos secciones A y B de la deformada de una pieza prismática (Figura 1.10) es igual al producto de  $1/E \cdot I_x$  por el área de la ley de momentos flectores comprendida entre ambas secciones”. Es decir:

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI_x} \int_A^B M_x \cdot dz$$

Por otra parte (Figura 1.11), la rotación diferencial  $d\theta = M_x/EI_x \cdot dz$  de una rebanada situada en  $z$  produce en la sección situada a una distancia  $(L_{BA} - z)$  un desplazamiento de valor:

$$dy = \frac{M_x}{EI_x} \cdot (L_{BA} - z) \cdot dz$$

expresión que, integrada, enuncia el **segundo teorema de Mohr**:

$$\int_A^B dy = \delta_{AB} = \frac{1}{EI_x} \cdot \int_A^B M_x \cdot (L_{BA} - z) \cdot dz$$

“La distancia desde un punto B a la tangente a la directriz en otro A, separado,  $L_{BA}$ , es igual a  $1/EI_x$  veces el momento estático, con relación con el punto B del área de momentos flectores comprendido entre A y B”.

La aplicación de estos dos sencillos teoremas, fáciles de recordar, permite la solución manual de muchos problemas de resistencia de materiales y, por otra parte, ayuda a comprender y a sentir la deformabilidad de una estructura.

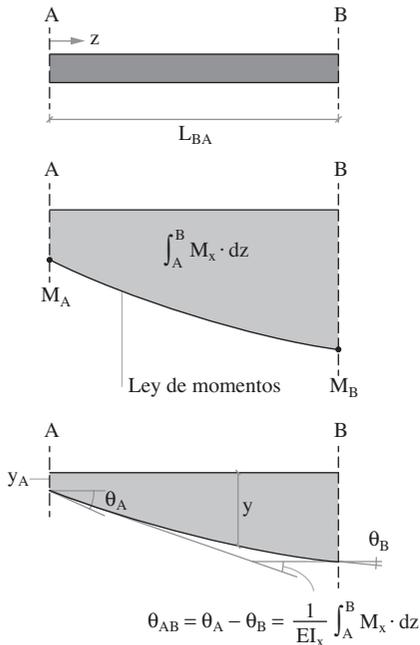


Figura 1.10 Primer teorema de Mohr.

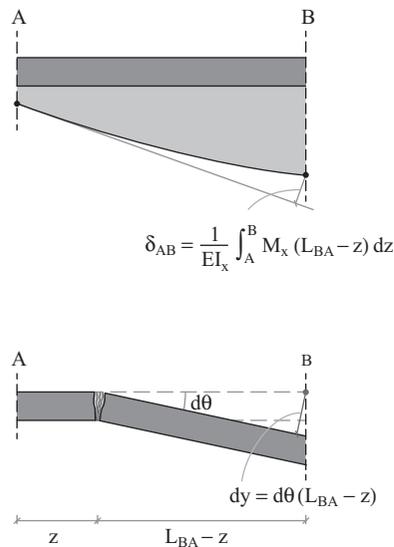


Figura 1.11 Segundo teorema de Mohr.

### 1.2.5 El teorema del influjo unitario

Son numerosísimos los procedimientos que a lo largo del tiempo se han ido desarrollando para determinar esfuerzos y desplazamientos en vigas, pórticos, celosías y todo tipo de estructuras. Ilustres nombres como los de Clapeyron, Betti, Maxwell, Castigliano, Willot, Culmann, Ritter, Cremona, Cross, Kani y tantos otros están asociados a métodos específicos de cálculo. No pocos se basan en planteamientos de naturaleza energética. Todos se sustentan en las condiciones de equilibrio y compatibilidad. Algunos tan solo son aplicables a estructuras de comportamiento indefinidamente elástico. Todos están relacionados, por cuanto parten de las mismas exigencias. Nacieron en épocas, más o menos pretéritas, en las que los cálculos se tenían que hacer inevitablemente a mano.

La disponibilidad actual de ordenadores programados con gran potencia de cálculo está haciendo pasar a la historia muchos de estos métodos y está impulsando la utilización de otros, como los elementos finitos, de propósito más general. Es, sin embargo, incuestionable el valor pedagógico de estos métodos de otras épocas, que ocupan un amplio espacio en los numerosísimos libros que han ayudado a formarse a muchísimas generaciones de ingenieros, y siguen siendo útiles porque también hoy se deben hacer algunos sencillos cálculos manuales para tener órdenes de magnitud de los esfuerzos y desplazamientos de una estructura, como ayuda en su concepción, en su dimensionamiento previo y en el control de los resultados detallados realizados con ordenador. En tal sentido, hemos recordado aquí los teoremas de Mohr y sus aplicaciones. Y, entre los métodos energéticos, sintetizaremos a continuación el teorema del influjo unitario, que siendo –en opinión de algunos autores– el más eficiente, de hecho suele ser el más frecuentemente expuesto en los libros y manuales clásicos de cálculo de estructuras.

El teorema del influjo unitario, basado en el concepto de energía, iguala la correspondiente al desplazamiento de un influjo unitario virtual –fuerza o momento– aplicado en un punto determinado de una estructura, a la que se corresponde con la generada por los esfuerzos internos debidos a las cargas aplicadas menos la asociada a las reacciones de apoyo en los casos en que se haya inducido un movimiento –asentamiento, por ejemplo–, en alguno de ellos (Figura 1.12).

La ecuación general del equilibrio energético será:

$$1 \cdot \delta_1 = \oint_L (N_1 \cdot \epsilon_N + Q_1 \cdot \gamma_Q + M_1 \cdot \chi_M) dz - R \cdot u_R$$

En los casos en que no existan desplazamientos de los apoyos ( $u_R = 0$ ) y en los que la influencia de las deformaciones provocadas por los axiles,  $\epsilon_N$ , y los cortantes,  $\gamma_Q$ , puedan despreciarse, tendremos la expresión simplificada:

$$1 \cdot \delta_1 = \oint_L M_1 \cdot \chi_M \cdot dz = \oint_L M_1 \cdot \frac{M}{E \cdot I} \cdot dz$$

La integral  $\oint_L M_1 \cdot M \cdot dz$  del producto de los momentos,  $M_1$ , provocados por la carga virtual unitaria, y los momentos,  $M$ , generados por las cargas reales aplicadas en la estructura, suelen figurar en numerosos manuales. En el caso elemental de una viga isostática de rigidez  $EI$  constante solicitada por una carga puntual,  $P$ , aplicada en el centro del vano, en la Figura 1.13, se resume la determinación de la flecha en el centro del vano.

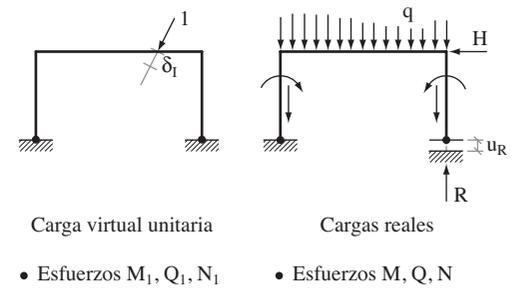


Figura 1.12 Teorema del influjo unitario.

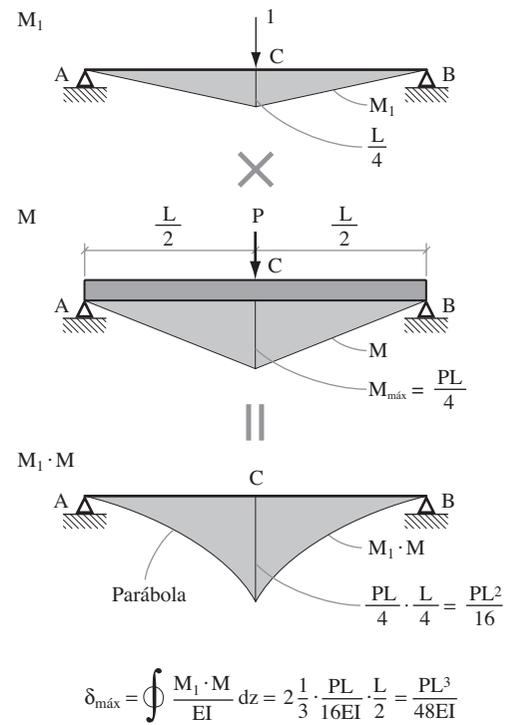
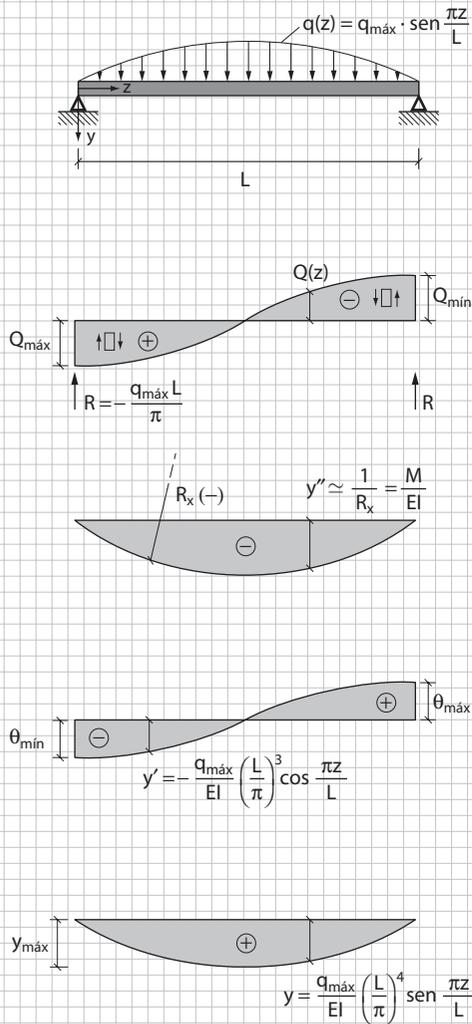


Figura 1.13 Aplicación del teorema del influjo unitario.

$$\delta_{\max} = \oint \frac{M_1 \cdot M}{EI} dz = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{PL}{16EI} \cdot \frac{L}{2} = \frac{PL^3}{48EI}$$

## Ejercicio 1.1

Determinar esfuerzos, giros y desplazamientos de una viga isostática de sección constante solicitada por una carga senoidal aplicada en su plano de simetría.



$$EI \cdot y^{IV} = q_{\text{máx}} \cdot \text{sen} \frac{\pi z}{L}$$

$$EI \cdot y''' = Q(z) = -q_{\text{máx}} \left(\frac{L}{\pi}\right) \cos \frac{\pi z}{L}$$

$$Q = 0 \quad \text{para } z = L/2$$

$$Q_{\text{máx}} = q_{\text{máx}} \cdot L/\pi \quad \text{para } z = 0$$

$$Q_{\text{mín}} = -q_{\text{máx}} \cdot L/\pi \quad \text{para } z = L$$

$$\text{Reacciones: } R = -q_{\text{máx}} \cdot L/\pi$$

Los cortantes tendrán signo positivo en la mitad izquierda de la viga, en el intervalo  $0 \leq z < L/2$  y signo negativo para  $L/2 < z \leq L$ .

$$EI \cdot y'' = q_{\text{máx}} \cdot \text{sen} \frac{\pi z}{L} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2$$

$$M_{\text{máx}} = \pm q_{\text{máx}} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2$$

El radio de curvatura,  $R_x = 1/y''$ , es, en este caso, siempre negativo, aunque la pareja de momentos que conforman el flector asignable a una sección pueda tener signos positivos o negativos, según se esté considerando su cara frontal o la dorsal.

$$EI \cdot y' = \int M dz = -q_{\text{máx}} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \cos \frac{\pi z}{L}$$

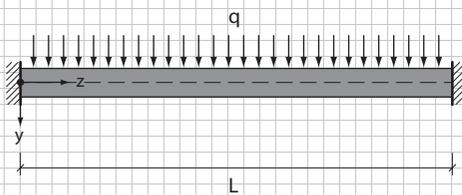
$$\theta_{\text{máx, mín}} = \pm \frac{q_{\text{máx}}}{EI} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3$$

$$EI \cdot y = \int \left( \int M dz \right) dz = q_{\text{máx}} \left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \cdot \text{sen} \frac{\pi z}{L}$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{q_{\text{máx}}}{EI} \left(\frac{L}{\pi}\right)^4$$

## Ejercicio 1.2

Viga biempotrada de sección constante uniformemente cargada en su plano de simetría. Determinación de esfuerzos y deformaciones. Por aplicación de las ecuaciones generales de la flexión elástica.



• Ecuaciones:

$$EI \cdot y^{IV} = q$$

$$EI \cdot y' = q \frac{z^3}{6} + c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 z + c_3$$

$$EI \cdot y''' = q \cdot z + c_1$$

$$EI \cdot y'' = q \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2$$

$$EI \cdot y = q \frac{z^4}{24} + c_1 \frac{z^3}{6} + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 z + c_4$$

Condiciones de contorno: desplazamientos y giros nulos en ambos extremos

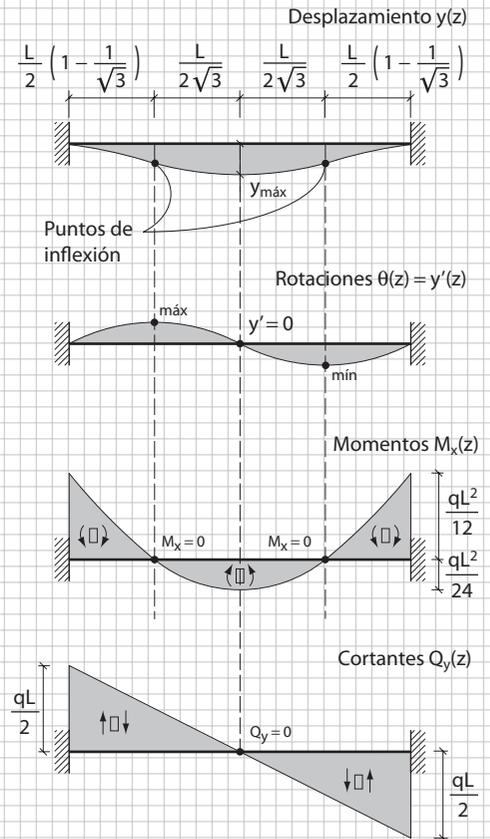
$$z = 0, y_0 = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

$$z = 0, y'_0 = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

$$z = L, y_L = 0 \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -\frac{qL}{2} \\ c_2 = \frac{qL^2}{12} \end{array} \right.$$

$$z = L, y'_L = 0$$

- Ecuación de la deformada:  $y(z) = \frac{q \cdot z^2}{24 \cdot EI} (z-L)^2$
- Desplazamiento máximo:  $y_{\text{máx}} = \frac{q \cdot L^4}{384 \cdot EI}$  para  $z = \frac{L}{2}$
- Pendiente de la deformada:  $y'(z) = \frac{q \cdot z}{12 \cdot EI} (2 \cdot z^2 - 3 \cdot L \cdot z + L^2)$   
 $y' = 0$  para  $z=0, z = \frac{L}{2}, z=L$
- Puntos de inflexión de la deformada:  $y'' = -\frac{M_x}{EI_x} = 0$   $z = \frac{L}{2} \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$
- Momentos flectores:  $(EI \cdot y'' = -M_x)$   $M_x = -\frac{q}{12} \cdot (6 \cdot z^2 - 6 \cdot z \cdot L + L^2)$   
 $z=0, z=L$   $M_{x,\text{máx}} = -\frac{q \cdot L^2}{12}$   
 $z = \frac{L}{2}$   $M_{x,\text{mín}} = \frac{q \cdot L^2}{24}$
- Esfuerzos cortantes:  $(EI \cdot y''' = -Q_y)$   $Q_y = -q \cdot \left( z - \frac{L}{2} \right)$   
 $z=0, z=L$   $Q_{y,\text{máx}} = \pm \frac{q \cdot L}{2}$   
 $z = \frac{L}{2}$   $Q_y = 0$
- Reacciones de apoyo:  $z=0, z=L$   $\begin{cases} R = -\frac{q \cdot L}{2} \\ M = \pm \frac{q \cdot L^2}{12} \end{cases}$



Los puntos de inflexión de la deformada, situados a distancias  $\pm L/2\sqrt{3}$  del centro de la viga, coinciden con los puntos de momento nulo y con los valores máximos de las pendientes. En el centro del vano, al ser nula la pendiente de la curva de momentos flectores, se anula también el cortante.

**Ejercicio 1.3**

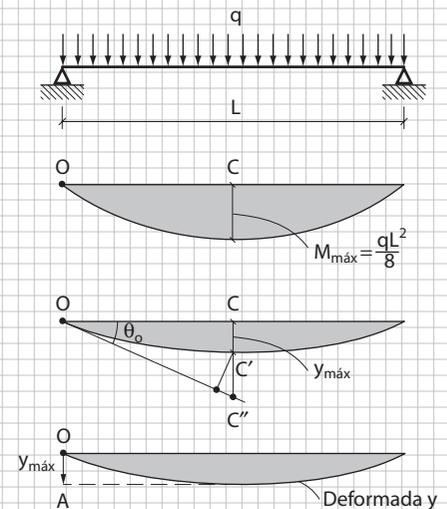
**Determinar los giros en apoyos y la flecha en el centro de una viga isostática uniformemente cargada, aplicando los teoremas de Mohr.**

En el centro de la viga, por simetría, la tangente a la deformada será nula y, por tanto, por aplicación del primer teorema de Mohr tendremos:

$$\theta_0 - \theta_{L/2} = \theta_0 = \frac{M_{\text{máx}} \cdot L}{3EI_x}$$

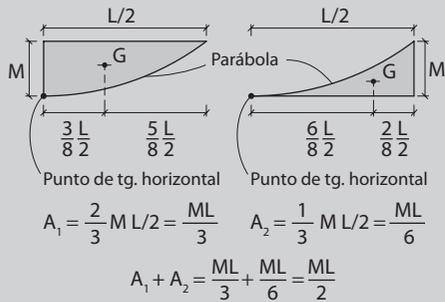
Por otra parte, la flecha máxima  $y_{\text{máx}} = CC'$  en el centro de la viga será (siendo  $\cos \theta_0 \approx 1$ ):

$$y_{\text{máx}} = CC' = \theta_0 \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{C'C''}{\cos \theta_0} \approx \theta_0 \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{EI_x} \cdot C'C''$$





Para facilitar la aplicación de los teoremas de Mohr, conviene recordar los valores de las áreas encerradas por una parábola y la posición del centro de gravedad de dichas áreas en dos casos característicos:



Según el segundo teorema de Mohr, la distancia perpendicular desde el punto  $C'$  hasta la tangente a la deformada en el origen (recta  $OC''$ ) valdrá:

$$C'C'' = \frac{M \cdot L}{\underbrace{3}_{\text{área de momentos entre O y L/2}}} \cdot \frac{3L}{\underbrace{16}_{\text{distancia del c. de g. del área de momentos a L/2}}} = \frac{M \cdot L^2}{16}$$

Por lo tanto,

$$y_{\text{máx}} = \frac{M \cdot L}{3EI_x} \cdot \frac{L}{2} - \frac{M \cdot L^2}{16EI_x} = \frac{5M_{\text{máx}} \cdot L^2}{48EI_x} = \frac{5q}{384}$$

En este caso, dado que la tangente de la deformada en el centro de la viga es horizontal, la flecha máxima será igual a la distancia  $OA$  desde el punto  $O$  hasta dicha tangente. Si aplicamos directamente el segundo teorema de Mohr tendremos:

$$y_{\text{máx}} = OA = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{M \cdot L}{\underbrace{3}_{\text{área de momentos flectores entre o y L/2}}} \cdot \frac{5L}{\underbrace{16}_{\text{distancia del c. de g. del área de flectores al punto O}}} \right] = \frac{5M \cdot L^2}{48EI_x} = \frac{5q \cdot L^4}{384EI_x}$$

#### Ejercicio 1.4

**Determinar los giros en apoyos y la flecha en el centro de una viga isostática, de longitud  $L$ , solicitada por momentos iguales y contrarios en sus extremos.**

De acuerdo con el primer teorema de Mohr, el giro en  $O$  será:

$$\theta_0 = \frac{M \cdot L}{2EI_x}$$

Aplicando, como en el ejemplo anterior, el segundo teorema de Mohr tendremos como flecha máxima de la deformada:

$$y_{\text{máx}} = OA = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{M \cdot L}{\underbrace{2}_{\text{área de flectores}}} \cdot \frac{L}{\underbrace{4}_{\text{distancia del c. de g. del área de flectores al punto O}}} \right] = \frac{M \cdot L^2}{8EI_x}$$

#### Ejercicio 1.5

**Determinar la ley de momentos flectores y la flecha máxima en el centro de una viga biempotrada uniformemente cargada.**

Como la rotación se debe anular en apoyos:

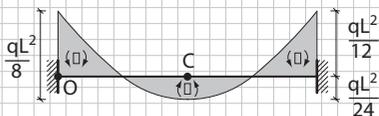
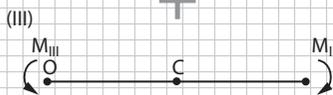
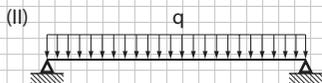
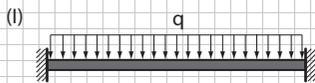
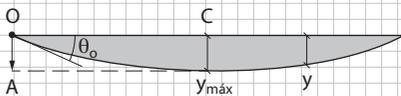
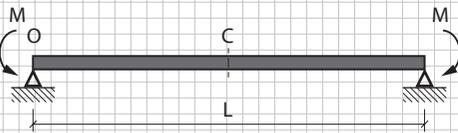
$$\theta_1 = 0 = \frac{q \cdot L^2 / 8}{3EI_x} - \frac{M_{III} \cdot L}{2EI_x} \quad \therefore \quad M_{III,0} = \frac{q \cdot L^2}{12}$$

En el centro de la viga:

$$M_{III,C} = \frac{q \cdot L^2}{8} - \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{q \cdot L^2}{24}$$

La flecha en el eje  $C$  de la viga será:

$$f_1 = f_{II} - f_{III} = \frac{5q \cdot L^4}{384EI_x} - \frac{M_{III} \cdot L^2}{8EI_x} = \frac{5q \cdot L^4}{384EI_x} - \frac{q \cdot L^4}{96EI_x} = \frac{q \cdot L^4}{384EI_x}$$



**Ejercicio 1.6**

**Viga biempotrada con una carga puntual aplicada en el centro: determinar la ley de momentos y la flecha máxima**

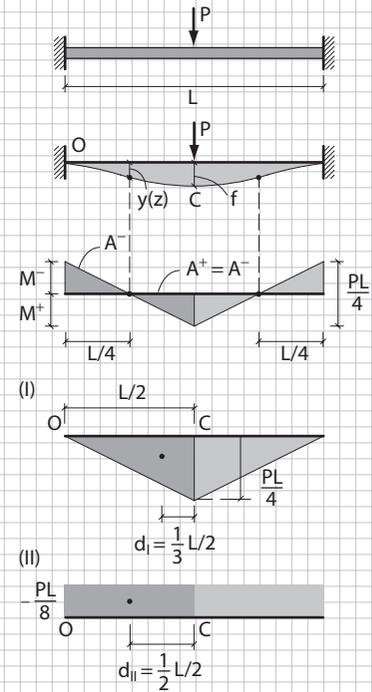
De acuerdo con el primer teorema de Mohr, el ángulo entre el punto de inflexión y el empotramiento será igual a  $1/EI_x$  por el área de momentos, entre dichos puntos. Como además por simetría la tangente en el centro del vano será también horizontal, dicho ángulo será también igual a  $1/EI_x$  por el área de momentos entre dicho punto y el centro del vano. Y, para que ello ocurra, el momento de empotramiento tiene que ser igual al momento en el centro del vano:

$$M^- = M^+ = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot L}{4} = \frac{P \cdot L}{8}$$

y el punto de inflexión ( $M = 0$ ) estará situado a  $L/4$  del empotramiento y del centro de la viga.

Por otra parte, la flecha en el centro del vano, de acuerdo con el segundo teorema de Mohr, la distancia desde el centro de la viga deformada y la tangente, horizontal en este caso, a su deformada en el empotramiento, será igual al momento estático del área de flectores entre los dos puntos en relación con el centro de la viga, su flecha máxima será tal que:

$$EI_x \cdot y_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot L}{4} \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot L}{4} \cdot \frac{L}{2} = \frac{P \cdot L^3}{96} - \frac{P \cdot L^3}{64} = -\frac{P \cdot L^3}{192}$$



**Ejercicio 1.7**

**Determinar el giro en los apoyos de una viga biarticulada, sometida a la acción de un momento en uno de los apoyos.**

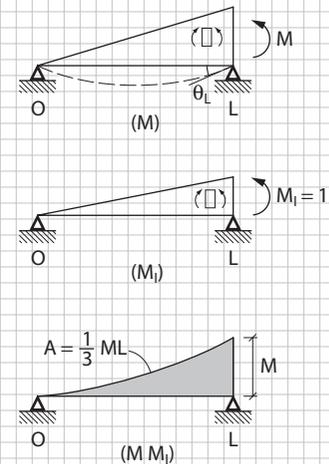
**A: Por aplicación de los teoremas de Mohr.**

Segundo teorema:  $\theta_0 = \frac{\delta}{L} = \frac{1/2 \cdot M \cdot L}{EI_x \cdot L} \cdot \frac{L}{3} = \frac{M \cdot L}{6 \cdot EI_x}$

Primer teorema:  $\theta_0 + \theta_L = \frac{M \cdot L}{2 \cdot EI_x}$ ;  $\theta_L = \frac{M \cdot L}{2 \cdot EI_x} - \theta_0 = \frac{M \cdot L}{3 \cdot EI_x}$

**B: Por aplicación del teorema del influjo unitario.**

$$\theta_L = \int_0^L M_1 \frac{M}{EI_x} \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{M \cdot L}{EI_x}$$





Las hipótesis comúnmente admitidas en la resistencia clásica de materiales (planeidad de la sección, elasticidad indefinida del material, pequeñas deformaciones...) no son sino aproximaciones al comportamiento real de un elemento estructural que, además, no será exactamente igual al que tendrá otro análogo aunque se encuentre sometido, aparentemente, a idénticas cargas. El ingeniero debería tenerlo siempre presente y estar prevenido contra la tentación de considerar como una verdad absoluta los valores, generalmente con muchos decimales, que se suelen presentar al final de un largo proceso de cálculo de una complicada estructura, y de creerse en posesión de la certeza en relación con su estado tensional. Y esto no es así porque, además de las limitaciones comentadas, en todas las estructuras se producen unas tensiones internas prácticamente desconocidas que se suman a las producidas por las acciones externas que actúan sobre la pieza analizada.

Así, por ejemplo, en el caso de las estructuras metálicas, podemos tener significativas tensiones internas que se generan en el proceso de laminación como consecuencia de gradientes térmicos inevitables. Los procesos de soldadura provocan, así mismo, tensiones difíciles de evaluar y que pueden alcanzar valores muy importantes. Las variaciones de temperatura ambiente pueden ser origen, también, de tensiones que no siempre se tienen en cuenta en los cálculos. Por ello, se puede decir que el estado tensional real de una pieza es generalmente desconocido. Gracias a las posibilidades de plastificación de los materiales, la presencia de estas tensiones internas no reducen su capacidad resistente aunque aumenten el riesgo de roturas frágiles o de roturas por fatiga.

De manera que, paradójicamente, si podemos considerar aceptables los resultados obtenidos de análisis elásticos que no permiten conocer con rigor el comportamiento de una estructura, es gracias a las características plásticas de los materiales, explícitamente ignoradas en muchos casos.

## 1.3 Respuesta tensional y deformacional de una sección cualquiera solicitada en flexión pura

### 1.3.1 Introducción

En este apartado se deducirán las expresiones generales con las que se determinan las tensiones y deformaciones provocadas exclusivamente ( $Q = 0$ ) por un momento aplicado sobre una sección de forma cualquiera de una pieza prismática.

Para deducir dichas expresiones que relacionan tensiones, rotaciones y momentos, se analizará, primero, la respuesta de una sección de geometría cualquiera a los giros asociados a los radios de curvatura  $R_x$  y  $R_y$  provocados por la flexión. Dichos giros o rotaciones provocan unas deformaciones longitudinales,  $\epsilon_z$ , que se deducen con gran sencillez aceptando la hipótesis de Bernoulli. Deducidos los valores de  $\epsilon_z$  tendremos también los valores de las tensiones normales,  $\sigma_z = E \cdot \epsilon_z$ . El conjunto de las tensiones provocadas por las rotaciones impuestas tienen que ser equivalentes o estar en equilibrio con el momento que actúa en la sección que se está analizando.

De este planteamiento, sencillo de recordar y de una gran utilidad práctica, surgen conceptos como los de ejes principales de inercia de la sección y el de la fibra neutra, alrededor de la cual rota la sección y en el que, lógicamente, las tensiones son nulas.

Los ejercicios que se incluyen al final de este apartado resaltan los conceptos fundamentales asociados a la flexión pura y muestran cómo se pueden obtener resultados, aplicando las metodologías que han servido para la deducción de las fórmulas generales, pero sin necesidad de recurrir a ellas.

Las expresiones que se van a deducir son válidas cualquiera que sea el material estructural en sus rangos de comportamiento elástico. Algunos materiales, como los aceros, responden linealmente hasta que se alcanzan tensiones próximas a las que identifican su límite elástico. En el caso del hormigón armado, la rigidez,  $EI$ , se reduce significativamente en cuanto se producen las primeras fisuras; lo que ocurre, en general, para cargas pequeñas que pueden provocar tracciones del orden del 10% de las tensiones de compresión que puede resistir el material. En el hormigón pretensado se retrasa la fisuración. El efecto de la precompresión equivale a un incremento de la tensión de tracción que puede aceptar el hormigón antes de fisurarse; lo que eleva considerablemente el rango de cargas para las que su comportamiento puede considerarse elástico.

### 1.3.2 Determinación de las tensiones provocadas por un momento flector

En el apartado 1.2.2 se ha mostrado cómo una rotación –caracterizada por el radio de curvatura  $R_x$ – alrededor del eje  $x$  que pasa por el centro de gravedad de una sección produce en un punto de coordenadas  $(x, y)$  un estado tensional definido por la expresión:

$$\sigma_z = \frac{E \cdot y}{R_x}$$

Dicha tensión  $\sigma_z$  aplicada en el área diferencial,  $dA$ , produce una fuerza diferencial  $dF = \sigma_z \cdot dA$ , cuya integral extendida a toda el área de la sección determina el momento  $M_x = \int_A dF \cdot y$ , que equilibrará o será equivalente –según se considere la cara frontal o dorsal de la sección– al estado de tensiones generado por el giro asociado al radio de curvatura,  $R_x$ .

Cuando la sección es simétrica, dicho giro o rotación provoca tensiones que solo conllevan la existencia del momento  $M_x$ , pues, por simetría,  $M_y = 0$ . En el caso más general de una sección disimétrica, la rotación alrededor del eje  $x$  que estamos considerando generará, además, un momento  $M_y = \int_A dF \cdot x$ .

Con el criterio de signos (Figura 1.14) expuesto en el apartado 1.2.3 y aceptando la hipótesis de planeidad de la sección tendremos:

$$dM_x = \sigma_z \cdot dA \cdot y = \frac{E \cdot y^2}{R_x} dA$$

$$dM_y = -\sigma_z \cdot dA \cdot x = -\frac{E \cdot x \cdot y}{R_x} dA$$

La integración de dichos momentos diferenciales en el conjunto de la sección define los momentos totales  $M_x$  y  $M_y$  inducidos por el **giro rotacional alrededor del eje x**:

$$M_x = \int_A dM_x = \frac{E}{R_x} I_x; \quad M_y = \int_A dM_y = -\frac{E}{R_x} I_{xy}$$

siendo por definición,  $I_x$ , la inercia de la sección, e  $I_{xy}$ , su producto de inercia:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_{xy} = \int_A xy dA$$

Análogamente, un **giro de la sección alrededor del eje y** induciría un estado tensional:

$$\sigma_z = -\frac{E \cdot x}{R_y}$$

y unos momentos:

$$M_x = -\frac{EI_{xy}}{R_y} \quad M_y = \frac{EI_y}{R_y}$$

siendo  $I_y = \int_A x^2 dA$ .

Como cualquier giro genérico de una sección se puede considerar como suma de los producidos alrededor de los ejes x e y, tendremos como expresiones generales de la flexión:

$$M_x = \frac{EI_x}{R_x} - \frac{EI_{xy}}{R_y} \quad (1)$$

$$M_y = \frac{EI_y}{R_y} - \frac{EI_{xy}}{R_x} \quad (2)$$

siendo las deformaciones y las tensiones correspondientes:

$$\varepsilon_z = \frac{y}{R_x} - \frac{x}{R_y}$$

$$\sigma_z = \frac{E \cdot y}{R_x} - \frac{E \cdot x}{R_y}$$

Para hacer directamente explícitas las relaciones entre las tensiones,  $\sigma_z$ , y los momentos,  $M_x$  y  $M_y$ , transformaremos las ecuaciones (1) y (2) eliminando  $R_x$  y  $R_y$ . Con tal finalidad, es útil considerar separadamente las influencias de  $M_x$  y  $M_y$  para combinarlas después.

Suponiendo que  $M_y = 0$ , tendremos:

$$\frac{1}{R_x} = M_x \cdot \frac{I_y}{E \cdot (I_x I_y - I_{xy}^2)}$$

$$\frac{1}{R_y} = M_x \cdot \frac{I_{xy}}{E \cdot (I_x I_y - I_{xy}^2)}$$

Las tensiones  $\sigma_z$  generadas por el momento  $M_x$  tendrán por expresión:

$$\sigma_z = \frac{E \cdot y}{R_x} - \frac{E \cdot x}{R_y} = M_x \cdot \frac{I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

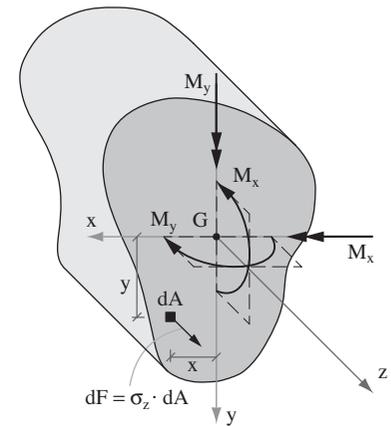


Figura 1.14 Convenio de signos en la cara frontal de una sección disimétrica.



Cuando se aplica a una sección cualquiera un momento  $M_x$ , contenido en un plano perpendicular al eje  $x$  que pasa por su centro de gravedad, el movimiento de la sección se compone de un giro alrededor del eje  $x$ , así como de otro alrededor del eje  $y$ . Cada giro genera tensiones normales según el eje  $z$ , que se suman para conformar una distribución tensional que equivaldrá o estará en equilibrio, según se mire, con el momento aplicado. Dicha distribución será tal que, en una línea que define la posición de la fibra neutra y que pasa por el centro de gravedad de la sección, las tensiones se anulan. Pero dicha fibra neutra únicamente será perpendicular al plano que contiene al momento cuando coincide con uno de los ejes principales de inercia de la sección.

A análoga expresión se llega en el caso  $M_x = 0$ , cuando solo actúa sobre la sección el momento  $M_y$ ; de modo que, en el caso más general, cuando  $M_x \neq 0$  y  $M_y \neq 0$ , si se suman las tensiones, se llega a la **fórmula general de flexión**:

$$\sigma_z = \frac{M_x(I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x) - M_y(I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y)}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

En el caso particular de una sección simétrica, con  $I_{xy} = 0$ , resulta:

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{I_x} - \frac{M_y \cdot x}{I_y}$$

### 1.3.3 Ejes principales de inercia y fibra neutra

En la fibra neutra, eje alrededor del cual gira una sección, las tensiones provocadas por la flexión tienen que ser nulas.

Desde otro punto de vista (Figura 1.15), las tensiones provocadas por la flexión cambiarán de signo en la fibra neutra, siendo de compresión las que se encuentran a un lado, y de tracción las del otro lado. La resultante de las compresiones,  $C$ , será igual y de signo contrario a la de las tracciones,  $T$ , y el momento será igual al producto de dicho par de fuerzas por la distancia,  $d$ , entre ellas: su “brazo de palanca”.

$$M = C \cdot d = T \cdot d$$

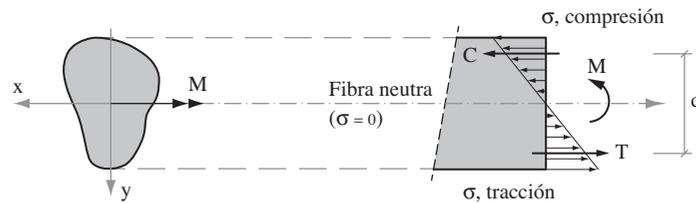


Figura 1.15 Sección simétrica solicitada a flexión.

Cuando la sección sea disimétrica y los ejes  $x$  e  $y$  no sean los principales de inercia ( $I_{xy} \neq 0$ ), la ecuación de la fibra neutra se deduce anulando el numerador de la fórmula general de la flexión, de manera que  $\sigma_z = 0$ :

$$M_x(I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x) - M_y(I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y) = 0$$

La fibra neutra será, por tanto, una recta con una pendiente,  $m$ , de valor:

$$m = \frac{y}{x} = \frac{M_y \cdot I_x + M_x \cdot I_{xy}}{M_x \cdot I_y + M_y \cdot I_{xy}}$$

Esta expresión pone de manifiesto que el plano de la resultante de los momentos aplicados  $M_x$  y  $M_y$  no es perpendicular a la fibra neutra; lo que sí ocurriría si se hubiesen escogido como ejes de referencia los principales de inercia, para los que  $I_{xy} = 0$ .

Para determinarlos consideraremos que  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$  son las inercias de una sección disimétrica (Figura 1.16) en relación con unos ejes coordenados cualesquiera,  $x$  e  $y$ , que se cortan en su centro de gravedad. En unos nuevos ejes coordenados  $x_1$  e  $y_1$ , que forman un ángulo  $\alpha$  con los anteriores, la relación entre las coordenadas de un punto cualquiera,  $P$ , en ambos sistemas será:

$$x_1 = PB = PA + AB = PR \cdot \sin \alpha + RG \cdot \cos \alpha = y \sin \alpha + x \cos \alpha$$

$$y_1 = PC = RA - RD = PR \cdot \cos \alpha - RG \cdot \sin \alpha = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

En consecuencia, tendremos las relaciones inerciales siguientes:

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA = I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

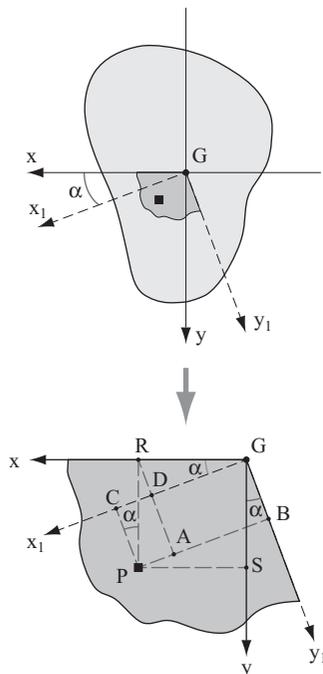


Figura 1.16 Relación entre ejes coordenados de referencia.

Es importante observar que la suma de inercias es un invariante de la sección:

$$I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1}$$

Para determinar el ángulo  $\alpha$  que define la inclinación de los ejes principales de inercia, a los que denominaremos  $\xi$  y  $\eta$ , bastará con igualar a cero la expresión del producto de inercia, cuyo resultado será:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Como, por otra parte, el ángulo  $\alpha$  define los valores máximos y mínimos de  $I_\xi$  e  $I_\eta$  que corresponden a los ejes principales de inercia, se puede determinar también si se anulan las derivadas  $dI_\xi/d\alpha$  o  $dI_\eta/d\alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_\xi}{d\alpha} &= -I_x \cdot \operatorname{sen} 2\alpha + I_y \cdot \operatorname{sen} 2\alpha - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0 \\ \frac{dI_\eta}{d\alpha} &= I_x \cdot \operatorname{sen} 2\alpha - I_y \cdot \operatorname{sen} 2\alpha + 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0 \end{aligned} \right\} \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Por lo tanto, los ejes principales de inercia,  $\xi$  y  $\eta$ , que forman el ángulo  $\alpha$  con los ejes originales  $x$  e  $y$ , se distinguen porque las inercias de la sección se hacen máximas o mínimas y su producto de inercia  $I_{\xi,\eta}$  se anula.

Si se introduce el valor de  $\alpha$  en las expresiones de  $I_{x_1}$  y de  $I_{y_1}$ , se obtienen las expresiones de  $I_\xi$  y de  $I_\eta$  correspondientes a los ejes principales de inercia:

$$I_\xi = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_\eta = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Estas expresiones verifican la condición  $I_\xi + I_\eta = I_x + I_y$ . Se comprueba fácilmente también que el denominador  $(I_x I_y - I_{xy}^2)$  de la expresión general de  $\sigma_z$ , la “constante de inercia” de la sección, cumple la igualdad:

$$I_x I_y - I_{xy}^2 = I_\xi I_\eta$$

Las formulaciones analíticas que definen la posición de los ejes principales y de los valores máximos y mínimos de las inercias correspondientes se pueden representar gráficamente utilizando el “círculo de Mohr” (Figura 1.17), tal como se hace también, como veremos más adelante, para analizar las variaciones de las tensiones y deformaciones en cualquier punto de un elemento estructural.

Dicha representación puede producir equívocos respecto al sentido en el que rotan los ejes  $x$  e  $y$  para convertirse en los principales de inercia  $\xi$ - $\eta$ . La mejor manera de evitarlos es comprender el comportamiento de la sección, teniendo presente, como se hace en los ejercicios propuestos, la exigencia del equilibrio entre el conjunto de las tensiones y el momento –o los momentos– que los induce.

A este respecto es instructivo analizar visualmente (Figura 1.18) el caso de la sección  $\perp$  que protagoniza el ejercicio 1.8 que se presenta a continuación. Es obvio que uno de los ejes principales de inercia,  $\eta$ - $\eta$ , atravesará las dos alas de la sección, de manera que el momento  $M_\eta$  que generará las tensiones  $\sigma_z$  al producirse su rotación alrededor de dicho eje sea nulo. Lógicamente, el otro eje principal de inercia,  $\xi$ - $\xi$ , será perpendicular al anterior pasando por el centro de gravedad de la sección. La inercia  $I_\eta$  tendrá el valor mínimo, y la  $I_\xi$ , el máximo. Análoga reflexión identifica inequívocamente también las posiciones de los ejes principales de inercia en los otros tres casos representados.

Como veremos en el apartado 1.7.3, la metodología que se utiliza para identificar mediante el círculo de Mohr los ejes principales de una sección y cuantificar las inercias correspondientes, máxima y mínima, es idéntica a la que se utiliza en el análisis de las tensiones, normales y tangenciales, que actúan en un elemento diferencial de una estructura.

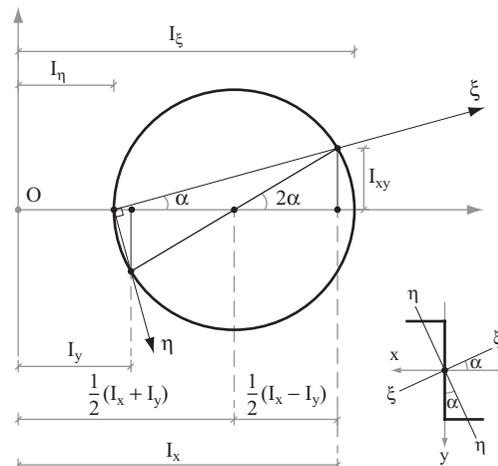


Figura 1.17 Representación inercial para la sección  $\perp$  utilizando el círculo de Mohr.

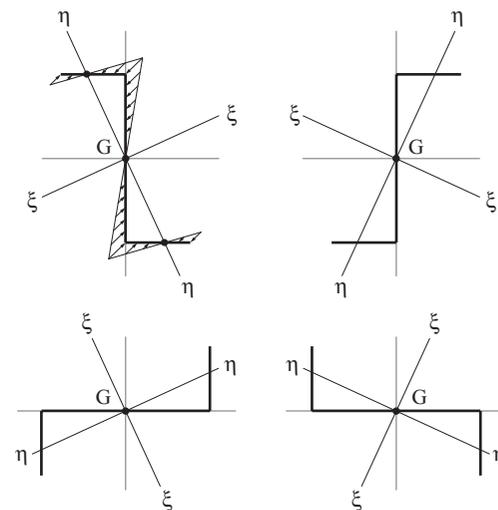
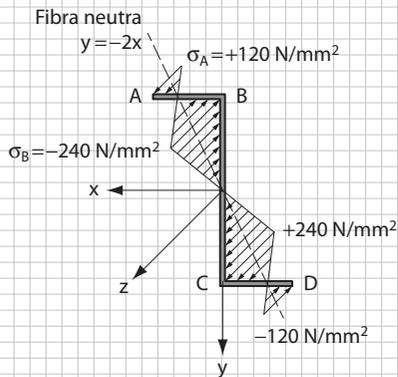
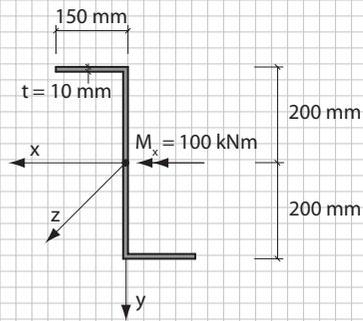
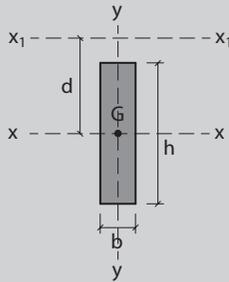


Figura 1.18 Posición de los ejes principales de inercia.



### Inercia de un rectángulo de dimensiones $b \cdot h$



$$I_x = \frac{1}{12} b \cdot h^3 \quad I_y = \frac{1}{12} h b^3$$

Para calcular la inercia alrededor del eje  $x_1-x_1$ , desplazando la distancia  $d$ , aplicamos el teorema de Steiner:

$$I_{x_1} = I_x + A_{\text{rectángulo}} \cdot d^2 = \frac{1}{12} b \cdot h^3 + (b \cdot h) \cdot d^2$$

Cuando  $d = h/2$ :

$$I_{x_1} = \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) b h^3 = \frac{1}{3} b h^3$$

### Ejercicio 1.8

Determinar para la sección  $\Gamma$  representada el estado tensional inducido por un momento  $M_x = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , y los ejes principales de inercia.

A: Utilizando las fórmulas generales de la flexión.

$$\sigma_z = \frac{M_x(I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x) - M_y(I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y)}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

En el caso que nos ocupa:  $M_x = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$  y  $M_y = 0$ .

Las inercias de la sección  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$  valdrán:

$$I_x = 2 \cdot 150 \cdot 10 \cdot 200^2 + \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 400^3 = 1,733 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 150^3 = 2,25 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = -2 \cdot 150 \cdot 10 \cdot 200 \cdot 75 = -4,5 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Si introducimos estos valores en la fórmula general de la flexión, tendremos:

$$\sigma_z = \frac{M_x(I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x)}{I_x I_y - I_{xy}^2} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot (2,25 \cdot 10^7 \cdot y + 4,5 \cdot 10^7 \cdot x)}{1,733 \cdot 10^8 \cdot 2,25 \cdot 10^7 - (-4,5 \cdot 10^7)^2} = \frac{2,25y + 4,5x}{1,875}$$

$$\sigma_z = 1,2y + 2,4x, \quad \left( \sigma_z \text{ en } \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, x \text{ e } y \text{ en mm} \right)$$

• Valores de la tensión normal  $\sigma_z$  en puntos característicos de la sección:

$$\text{Punto A: } x = 150; y = -200 \quad \sigma_{z,A} = -240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = +120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Punto B: } x = 0; y = -200 \quad \sigma_{z,B} = -240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Punto C: } x = 0; y = 200 \quad \sigma_{z,C} = +240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Punto D: } x = -150; y = 200 \quad \sigma_{z,D} = 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

• Posición de la fibra neutra para  $M_x = 100 \text{ kN} \cdot \text{m} = \sigma_z = 0 \quad \therefore \sigma_z = 0 \quad \therefore 2,25y + 4,5x = 0 \rightarrow y = -2x$

• Ejes principales de inercia de la sección:  $\text{tg } 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot (-4,5 \cdot 10^7)}{2,25 \cdot 10^7 - 1,733 \cdot 10^8} = 0,6 \rightarrow \alpha = 15,4^\circ$

$$\text{Inercias principales } I_{\text{máx}} \text{ e } I_{\text{mín}}: \quad I_{\text{máx, mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\text{máx, mín}} = \frac{1,733 \cdot 10^8 + 2,25 \cdot 10^7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1,733 \cdot 10^8 - 2,25 \cdot 10^7}{2}\right)^2 + (-4,5 \cdot 10^7)^2} \begin{cases} I_{\text{máx}} = 1,857 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \\ I_{\text{mín}} = 1,010 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

• Representación del círculo de Mohr:

$$\text{OD} = I_x = 1,733 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \quad \text{OE} = I_{\text{máx}} \approx 1,9 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\text{OB} = I_y = 2,25 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \quad \text{OA} = I_{\text{mín}} \approx 1 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\text{DM} = I_{xy} = 4,5 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \quad \alpha \approx 15,4^\circ$$

- Radios de curvatura de los desplazamientos provocados por el momento  $M_x = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ :

$$R_x = \frac{E \cdot y_{\text{máx}}}{\sigma_{zx}} = \frac{210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 200 \text{ mm}}{240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 175 \text{ m}, \left( R_x = \frac{h}{\varepsilon_x + \varepsilon_y} = \frac{0,4}{2 \cdot 1,14 \cdot 10^{-3}} = 175 \text{ m} \right)$$

$$R_y = \frac{E \cdot x_{\text{máx}}}{\sigma_{zy}} = \frac{210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 150 \text{ mm}}{360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 87,5 \text{ m}, \left( R_y = \frac{0,3}{2 \cdot 1,71 \cdot 10^{-3}} = 87,5 \text{ m} \right)$$

A partir de estos radios de curvatura podemos calcular las flechas  $f_x$  y  $f_y$  que se producirían, por ejemplo, en el centro de una viga de 5 m de luz solicitada en sus extremos por momentos  $M_x = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

Al ser  $M_x$  constante, la deformada será una parábola. Su expresión, en relación con los ejes con origen en el centro de la deformada, es:

$$y = \frac{4f}{L^2} \cdot x^2 \rightarrow y'' = \frac{1}{R} = \frac{8f}{L^2} \rightarrow f_{\text{máx}} = \frac{L^2}{8R}$$

Por tanto, las flechas verticales,  $f_y$ , y horizontales,  $f_x$ , provocadas por la flexión en el centro de la viga serán:

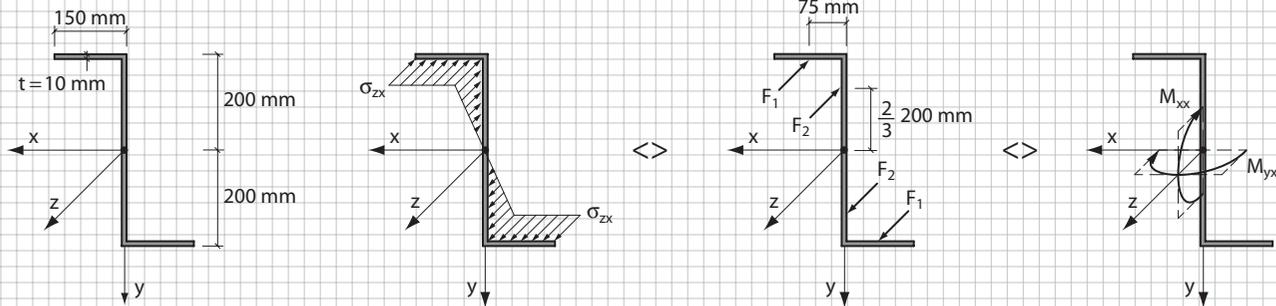
$$f_y = \frac{L^2}{8R_x} = \frac{5.000^2}{8 \cdot 175.000} = 17,8 \text{ mm}$$

$$f_x = \frac{L^2}{8R_y} = \frac{5.000^2}{8 \cdot 87.500} = 35,7 \text{ mm}$$

**B: Aplicando los conceptos que sirvieron para deducir las fórmulas generales de la flexión.**

El momento  $M_x$  provocará un giro alrededor del eje x-x, y otro alrededor del eje y-y.

El giro alrededor del eje x-x genera las tensiones  $\sigma_{zx}$  representadas, con las consiguientes resultantes  $F_1$  y  $F_2$ , en las alas y el alma de la sección, que a su vez equivalen a los momentos  $M_{xx}$  y  $M_{yx}$ :

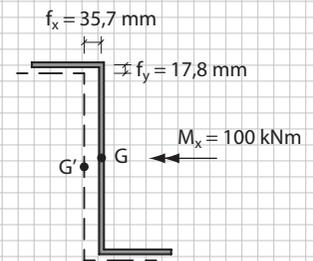
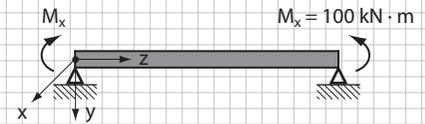
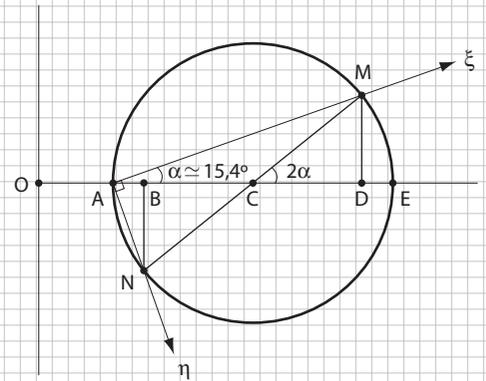
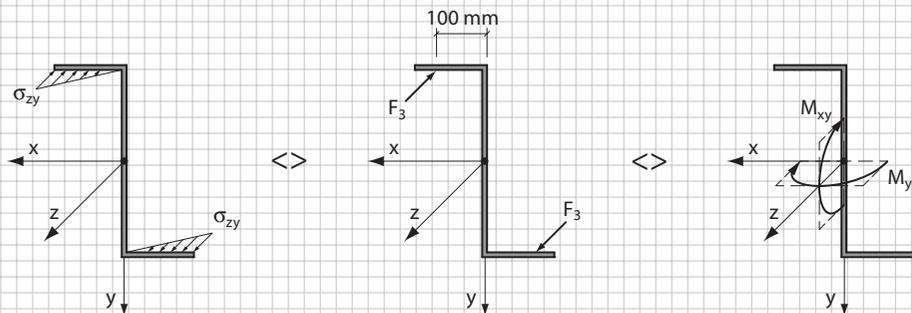


$$F_1 = \sigma_{zx} \cdot 150 \cdot 10 = 1.500 \cdot \sigma_{zx} \rightarrow M_{xx} = F_1 \cdot (-400) + F_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-400) =$$

$$= -600.000 \cdot \sigma_{zx} - 266.667 \cdot \sigma_{zx} = -8,67 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zx}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \sigma_{zx} \cdot 200 \cdot 10 = 1.000 \cdot \sigma_{zx} \rightarrow M_{yx} = F_1 \cdot 2 \cdot 75 = 1.500 \cdot \sigma_{zx} \cdot 150 = 2,25 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zx}$$

( $F_1, F_2$  en N,  $\sigma_{zx}$  en  $\text{N}/\text{mm}^2$ , y  $M_{xx}, M_{yx}$  en  $\text{N} \cdot \text{mm}$ )



$$F_3 = \frac{1}{2} \sigma_{zy} \cdot 150 \cdot 10 = 750 \cdot \sigma_{zy} \begin{cases} M_{xy} = 750 \cdot \sigma_{zy} \cdot (-400) = -3 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zy} \\ M_{yy} = 750 \cdot \sigma_{zy} \cdot 2 \cdot 100 = 1,5 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zy} \end{cases}$$

Los momentos resultantes de los giros alrededor de los ejes x-x e y-y serán:

$$\begin{aligned} M_x &= M_{xx} + M_{xy} = -8,67 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zx} - 3 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zy} \\ M_y &= M_{yx} + M_{yy} = 2,25 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zx} + 1,5 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zy} \end{aligned}$$

Las condiciones de equilibrio entre los momentos equivalentes a las tensiones provocadas por los giros y los momentos externos aplicados ( $M_x = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_y = 0$ ) serán:

- Condición  $M_y = 0$

$$M_y = 0 = 2,25 \cdot 10^5 \sigma_{zx} + 1,5 \cdot 10^5 \sigma_{zy} \quad \therefore \quad \sigma_{zx} = -\frac{2}{3} \sigma_{zy}$$

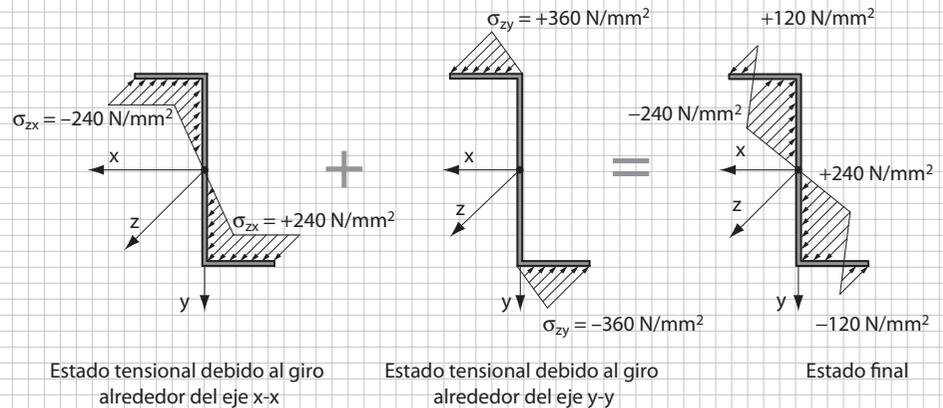
- Condición  $M_x = 10^8 \text{ N} \cdot \text{mm}$

$$M_x = 10^8 \text{ N} \cdot \text{mm} = -8,67 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zx} - 3 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zy} = -8,67 \cdot 10^5 \left( -\frac{2}{3} \sigma_{zy} \right) - 3 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zy} = 2,78 \cdot 10^5 \cdot \sigma_{zy}$$

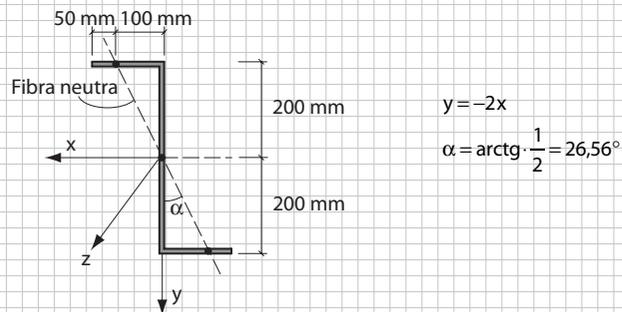
Por lo tanto,

$$\sigma_{zy} = \frac{10^8}{2,78 \cdot 10^5} = 360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}; \quad \sigma_{zx} = -\frac{2}{3} (360) = -240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Finalmente, superponiendo los dos estados tensionales  $\sigma_{zx}$  y  $\sigma_{zy}$  tendremos el estado final al que se encuentra sometida la sección.



La posición de la fibra neutra queda definida por los puntos de la sección con tensión normal  $\sigma_z$  nula.



**C: Deducción de los resultados directamente a partir del concepto de equilibrio.**

Como  $M_y = 0$ , la distribución tensional en las alas del perfil debe ser tal que el momento de la resultante de tensiones en relación con el eje  $y$ -y se anule. Para que tal cosa ocurra tiene que existir un cambio en el signo de las tensiones que produce en las alas el momento exterior aplicado  $M_x$ , y por consiguiente habrá un punto de tensiones nulas situado a una distancia  $x$  del borde exterior de las alas, por el que pasa, y define, la fibra neutra o el eje de rotación.

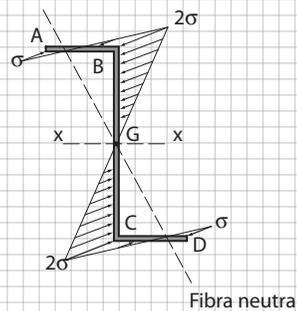
La distribución tensional, como se puede observar en los gráficos, equivale a una ley triangular con tensiones en un sentido de valor máximo  $\sigma_A$  en el extremo A, y tensiones, en sentido contrario, con un valor máximo  $\sigma_B$ , en el extremo B.

$$\text{Para que } M_y \text{ se anule: } F_A \cdot \frac{2}{3} \cdot L = F_B \cdot \frac{1}{3} \cdot L \quad \therefore \quad F_B = 2 \cdot F_A$$

$$\text{y, por tanto, } \sigma_B = 2\sigma_A \quad \text{y} \quad x = \frac{L}{3} = \frac{150}{3} = 50 \text{ mm}$$

La fibra neutra ( $\sigma_z = 0$ ) pasará por el punto donde se anulan las tensiones en el ala estudiada  $x = 100$ ,  $y = -200$  y por el centro de gravedad de la pieza, que coincide con el origen del sistema de coordenadas considerado ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ).

Por tanto, la fibra neutra tendrá por ecuación  $y = -2x$  y la ley de tensiones tomará la forma:



El momento debido a las resultantes de tensiones en relación con el eje  $x$ - $x$  tiene que igualarse a  $M_x = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

Contribución de las tensiones de las alas al  $M_x$ :

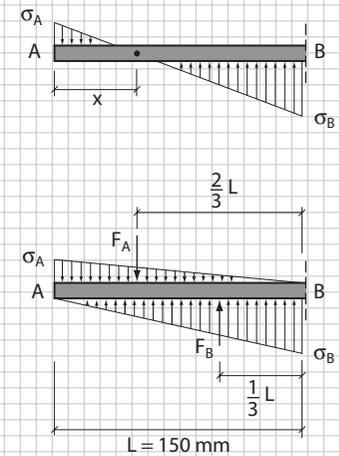
$$M_{x,\text{alas}} = \left[ -\frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot 150 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 2\sigma \cdot 150 \cdot 10 \right] \cdot 400 = 3 \cdot 10^5 \sigma$$

Contribución del alma:

$$M_{x,\text{alma}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sigma \cdot 200 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 400 = 5,33 \cdot 10^5 \sigma$$

En consecuencia, la condición de equilibrio, exige:

$$3 \cdot 10^5 \cdot \sigma + 5,33 \cdot 10^5 \cdot \sigma = 10^8 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad \therefore \quad \sigma = 120 \text{ N/mm}^2$$



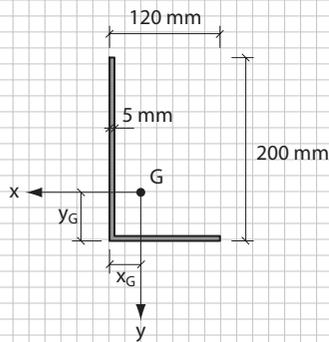
## Ejercicio 1.9

Determinar para el perfil en L representado, el estado tensional, la posición de la fibra neutra, así como los giros producidos por la aplicación de un momento flector  $M_x = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

Posición del centro de gravedad G de la sección:

$$x_G = \frac{120 \cdot 5 \cdot 60}{(200 \cdot 5 + 120 \cdot 5)} = 22,5 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{200 \cdot 5 \cdot 100}{(200 \cdot 5 + 120 \cdot 5)} = 62,5 \text{ mm}$$



## A: Por aplicación de criterios de equilibrio.

Sobre la sección solo actúa el momento  $M_x = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , situado en un plano vertical. El momento en el plano perpendicular es nulo:  $M_y = 0$ .

Por consiguiente, la resultante de las tensiones provocadas por el momento  $M_x$  en el ala horizontal BC en relación con la línea vertical AB tendrá que anularse, lo que exige que la distribución tensional entre B y C varíe linealmente. En estas condiciones, como hemos visto en el ejercicio anterior:

$$\sigma_B = 2\sigma_C \quad x = \frac{1}{3}120 = 40 \text{ mm}$$

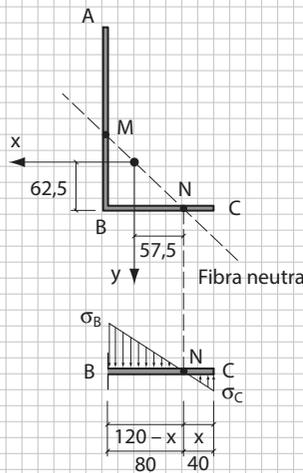
De manera que el punto N, de tensión nula, se sitúa a 40 mm del borde C del ala horizontal. Y como la fibra neutra pasa también por el centro de gravedad ( $x = 0, y = 0$ ), su expresión analítica será:

$$y = mx = \frac{6,25}{(-5,75)}x = -1,087x$$

El punto M de corte de la fibra neutra (que pasa por N y por G) con el ala vertical tendrá por ordenada:

$$y_M = -1,087 \cdot 22,5 \simeq -24,5 \text{ mm} \quad BM = 62,5 + 24,5 = 87 \text{ mm}$$

$$AM = 200 - 87 = 113 \text{ mm}$$



En consecuencia, sabiendo que la variación de tensiones es lineal entre A y B, tendremos:

$$\sigma_A = \frac{113}{87}\sigma_B = \frac{113}{87} \cdot 2 \cdot \sigma_C = 2,6 \cdot \sigma_C$$

La distribución de tensiones provocadas por un momento,  $M_x$ , contenido en un plano vertical será la mostrada en la figura lateral.

Para determinar las tensiones correspondientes al esfuerzo aplicado  $M_x = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , tomaremos momentos de su resultante en el ala vertical AB en relación con el ala horizontal BC.

$$\text{Tramo AM: } M_{x, \text{alma AM}} = \frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot \sigma \cdot 113 \cdot 5 \cdot \left(87 + \frac{2}{3}113\right) = 1,19 \cdot 10^5 \sigma$$

$$\text{Tramo MB: } M_{x, \text{alma MB}} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sigma \cdot 87 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}87 = -12,615 \sigma$$

Si se impone la condición de equilibrio:

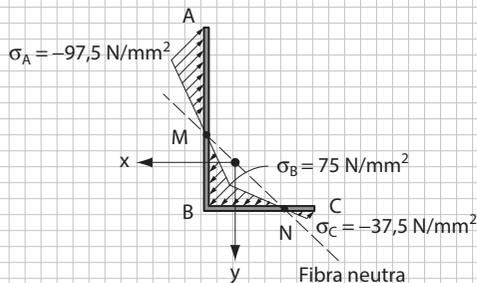
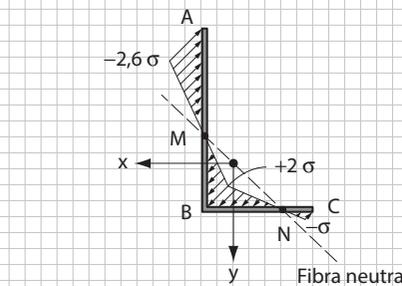
$$M_x = M_{x, \text{alma AM}} + M_{x, \text{alma MB}} \quad 4 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = (1,19 \cdot 10^5 - 1,26 \cdot 10^4) \cdot \sigma \rightarrow \sigma \simeq 37,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

por lo tanto:

$$\sigma_A = -2,6\sigma = -97,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_B = 2\sigma = 75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_C = -\sigma = -37,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



**B: Por aplicación de la expresión general de la flexión.**

$$I_{x, \text{ala}} = 120 \cdot 5 \cdot 62,5^2 = 2.343.750 \text{ mm}^4$$

$$I_{x, \text{alma}} = \frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 200^3 + 200 \cdot 5 \cdot (100 - 62,5)^2 = 4.739.583 \text{ mm}^4$$

$$I_x = I_{x, \text{ala}} + I_{x, \text{alma}} = 7,08 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y, \text{ala}} = \frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 120^3 + 120 \cdot 5 \cdot (60 - 22,5)^2 = 1.563.750 \text{ mm}^4$$

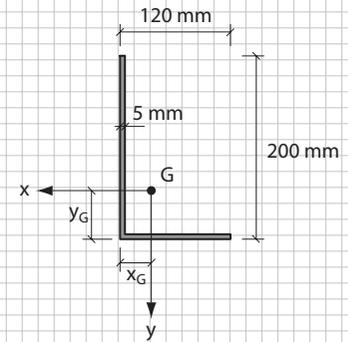
$$I_{y, \text{alma}} = 200 \cdot 5 \cdot 22,5^2 = 506.250 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_{y, \text{ala}} + I_{y, \text{alma}} = 2,07 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy, \text{ala}} = 120 \cdot 5 \cdot (-60 + 22,5) \cdot (+62,5) = -1.406.250 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy, \text{alma}} = 200 \cdot 5 \cdot (22,5) \cdot (-100 + 62,5) = -843.750 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = I_{xy, \text{ala}} + I_{xy, \text{alma}} = -2,25 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



La fórmula general de  $\sigma_z$ , dado que  $M_y = 0$ , será:

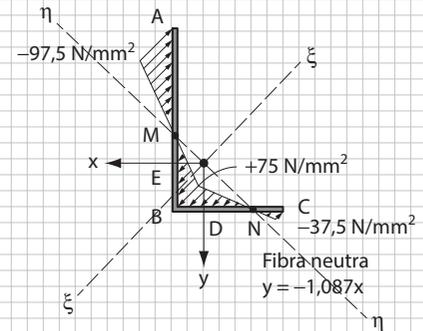
$$\sigma_z = \frac{M_x(I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x)}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad \sigma_z = \frac{4 \cdot 10^6 (2,07 \cdot 10^6 \cdot y + 2,25 \cdot 10^6 \cdot x)}{9,6 \cdot 10^{12}} = 0,8625y + 0,9375x$$

( $\sigma_z$  en N/mm<sup>2</sup>, para x e y en mm)

Ecuación de la fibra neutra:  $\sigma_z = 0 \rightarrow y = -1,087x$

Los valores característicos de las tensiones serán:

Punto A: $x = 22,5; y = -137,5$	$\sigma_{z,A} = -97,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Punto D: $x = 0; y = 62,5$	$\sigma_{z,D} = 53,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Punto B: $x = 22,5; y = 62,5$	$\sigma_{z,B} = 75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Punto E: $x = 22,5; y = 0$	$\sigma_{z,E} = 21,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Punto C: $x = -97,5; y = 62,5$	$\sigma_{z,C} = -37,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$		



**C: Por determinación de los ejes principales de inercia y representación del círculo de Mohr.**

Aplicando las fórmulas deducidas anteriormente:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{-2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2 \cdot 225}{708,3 - 207,0} = 0,898 \quad \therefore \alpha = 20,96^\circ$$

$$I_{\text{máx, min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\text{máx, min}} = \frac{(7,08 + 2,07) \cdot 10^6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7,08 \cdot 10^6 - 2,07 \cdot 10^6}{2}\right)^2 + (-2,25 \cdot 10^6)^2}$$

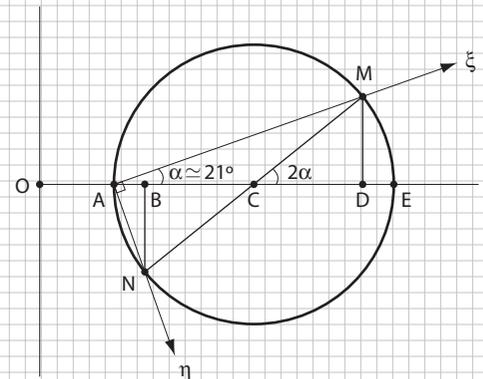
$$I_{\text{máx}} = 7,94 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\text{mín}} = 1,21 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Círculo de Mohr:

$$OD = I_x = 7,08 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad OB = I_y = 2,07 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad DM = I_{xy} = -2,25 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$OE = I_{\text{máx}} \approx 7,94 \cdot 10^6 \text{ mm}^4; \quad OA = I_{\text{mín}} \approx 1,21 \cdot 10^6 \text{ mm}^4; \quad \alpha \approx 21^\circ$$



## 1.4 Respuesta tensional y deformacional de una sección solicitada por esfuerzos cortantes

### 1.4.1 Introducción

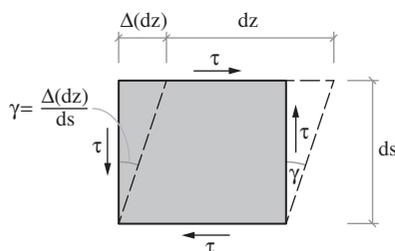
Como ya se ha recordado en apartados anteriores, los esfuerzos cortantes son inseparables de los momentos flectores, y se relacionan por la expresión derivada de la condición de equilibrio de la rebanada de la pieza prismática:

$$Q = \frac{dM}{dz}$$

Un momento está asociado a un estado de tensiones normales al plano de la sección sobre la que actúa, cuya resultante equilibrará al momento aplicado o será globalmente equivalente a dicho momento –según se esté considerando la cara dorsal o la frontal de la rebanada estudiada–.

De la misma manera, un esfuerzo cortante “genera” un estado de tensiones tangenciales cuya resultante lo equilibra o le es equivalente. Dichas tensiones están, a su vez, asociadas a deformaciones angulares con las que se relaciona mediante la clásica expresión:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$



**Figura 1.19** Tensiones tangenciales y desplazamientos angulares.

equivalente a la  $\epsilon = \sigma/E$  de la flexión –lo que hace más fácil recordarla– siendo  $\gamma$  la deformación angular,  $G = E/2(1 + \nu)$ , el módulo de elasticidad transversal del material, y  $\nu$  su coeficiente de Poisson (Figura 1.19).

La determinación de las fórmulas generales que definen las tensiones tangenciales consecuencia de la aplicación en una sección de un esfuerzo cortante se basan, como en el caso de los momentos flectores, en la condición de equilibrio de un elemento diferencial como el representado. La condición de compatibilidad entre tensiones y deformaciones se impone al aceptarse la relación  $\gamma = \tau/G$ , como característica del comportamiento del elemento solicitado por las tensiones tangenciales.

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurra en el análisis de la flexión pura ( $Q = 0$ ,  $M \neq 0$ ), para el cortante no se considera la hipótesis de Bernoulli de planeidad de la sección antes y después de la deformación. De hecho, tras la aplicación del esfuerzo, la sección no se mantiene plana pues, obviamente, al variar  $\tau$  varía  $\gamma$ . Es una evidente contradicción de los análisis elásticos que, sin embargo, se asume por no tener, en general, mayor importancia práctica. Aunque, como veremos más adelante, no son infrecuentes los casos (vigas Vierendeel, vigas en celosía, soportes metálicos empesillados...) en los que explícitamente hay que tener en cuenta las deformaciones provocadas por los esfuerzos cortantes y establecer metodologías específicas para hacerlo.

Por otra parte, en el rango de comportamiento elástico de los materiales, los efectos de ambos esfuerzos, flector y cortante, se pueden tratar independientemente; para posteriormente analizar la interacción entre los estados tensionales respectivos por medio de los criterios de comparación, en el caso del acero, y de procedimientos de interacción, más o menos explícitos, en el caso de secciones de hormigón estructural.

En cuanto a las estructuras de acero, las piezas que se utilizan –perfiles laminados o piezas formadas por chapas– suelen ser de paredes delgadas y, por ello, las formulaciones contempladas en las normas correspondientes consideran este tipo de secciones. Pero, tratándose de planteamientos en fase elástica, dichas formulaciones son también de aplicación en las estructuras de hormigón armado, en fases previas a la fisuración, y sirven asimismo como referencia cuando las cargas superan el umbral en el que se inicia la formación de fisuras.

En este apartado, analizaremos en primer lugar el caso de las secciones abiertas de pared delgada para estudiar después las cerradas –los tubos o vigas en cajón, de una o varias células–, que son de uso relativamente frecuente; en particular, en los puentes.

### 1.4.2 Acerca del significado físico de las tensiones tangenciales

Las tensiones tangenciales, equivalentes al esfuerzo cortante que actúa en una sección, son consecuencia de la presencia de tensiones normales generadas por los momentos flectores que van variando a lo largo de la directriz de la pieza.

El momento,  $dM$ , equivale a una distribución de tensiones normales,  $d\sigma$ , que deben estar en equilibrio con las tensiones tangenciales que genera el esfuerzo cortante  $Q$ . Despreciando los términos diferenciales de segundo orden, tendremos, en efecto (Figura 1.20):

$$Q \cdot dz = dM$$

Así por ejemplo, el ala AB de la viga en I esquematizada (Figura 1.21), solicitada por tensiones no equilibradas  $d\sigma$ , generará en el corte BB' un estado de tensiones tangenciales  $\tau$ , o de rasantes  $q = \tau \cdot t$ , que equilibrará a la resultante de las tensiones  $d\sigma$ :

$$\int_A^B d\sigma \cdot t \cdot dx = - \int_B^{B'} \tau \cdot t \cdot dz$$

En cualquier otro corte longitudinal de la viga se generarán también un conjunto de tensiones tangenciales que equilibrarán las tensiones normales  $d\sigma$  actuando sobre la parte de la sección aislada por el corte longitudinal y provocadas por el momento flector diferencial  $dM$ .

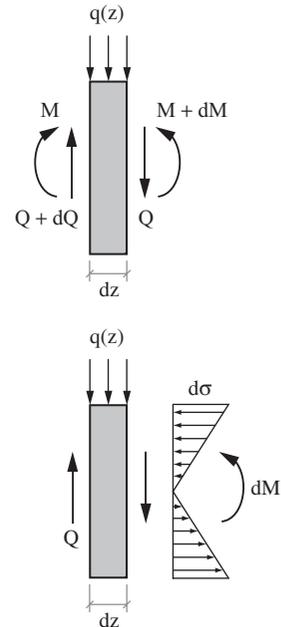


Figura 1.20 Equilibrio de una rebanada.

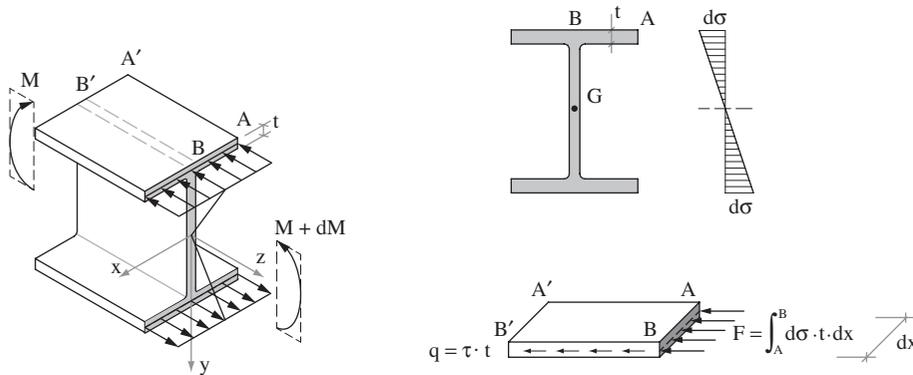


Figura 1.21

Es esencial comprender y, por tanto, sentir el significado físico de los esfuerzos cortantes que equilibran los momentos flectores descompensados a uno y otro lado de una rebanada y que inducen, al tiempo, dicha descompensación. Como lo es también visualizar con claridad las tensiones tangenciales que se generan para equilibrar las tensiones normales provocadas por los momentos flectores que van variando a lo largo de la sección.

### 1.4.3 Secciones abiertas

#### 1.4.3.1 Expresión general del flujo de tensiones tangenciales en piezas prismáticas de sección abierta y pared delgada

Consideraremos una pieza simétrica, abierta, de sección constante y espesor pequeño,  $t(s)$ , que puede variar, a lo largo de la línea media de la sección, solicitada en flexión simple por un momento flector,  $M$ , y por un esfuerzo cortante,  $Q$ .

Aceptaremos que el flujo de tensiones tangenciales es paralelo a la línea media de la sección de pared delgada y que su valor se mantiene constante en el espesor de la pieza.

Aislemos un elemento diferencial de dimensiones  $dz$ , según el eje de la pieza, y  $ds$ , siendo  $s$  la coordenada curvilínea, con origen en uno de los bordes de la sección.

El elemento diferencial considerado estará sometido a las tensiones tangenciales y normales esquematizadas en la Figura 1.22.

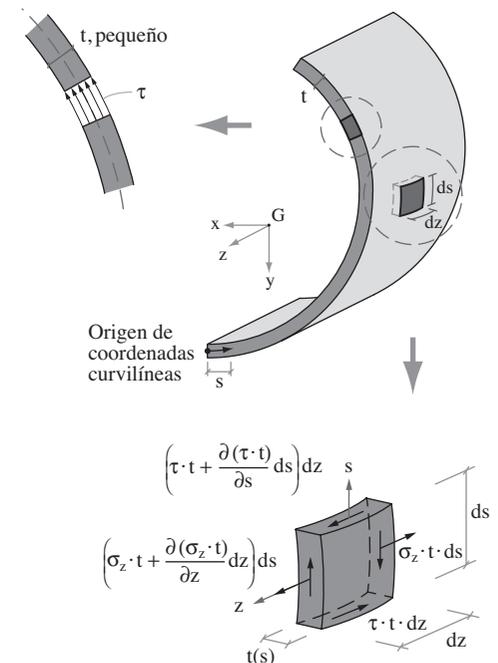
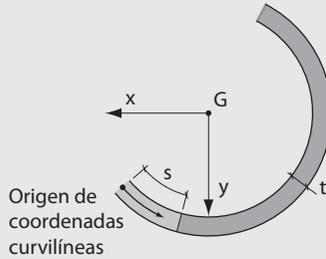


Figura 1.22 Equilibrio de un elemento diferencial.



Las expresiones contenidas bajo el signo integral corresponden a los momentos estáticos, en relación con los ejes  $x$  e  $y$ , del área de la sección comprendida entre el origen y la coordenada curvilínea,  $s$ .



Momento estático respecto del eje  $x$ :

$$S_x = \int_0^s y \cdot t \cdot ds$$

Momento estático respecto del eje  $y$ :

$$S_y = \int_0^s x \cdot t \cdot ds$$

De la condición de equilibrio de las fuerzas actuantes sobre el elemento diferencial despreciando los términos de segundo orden, se tiene:

$$\left( \frac{\partial(\sigma_z \cdot t)}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot ds + \left( \frac{\partial(\tau \cdot t)}{\partial s} \cdot ds \right) \cdot dz = 0$$

y, teniendo en cuenta que el espesor  $t$  solo depende de  $s$ , se deduce:

$$\frac{\partial(\tau \cdot t)}{\partial s} = -t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

Derivando la ecuación general de  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = \frac{M_x (I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x) - M_y (I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y)}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

tendremos:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[ \frac{dM_x}{dz} (I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x) - \frac{dM_y}{dz} (I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y) \right]$$

Recordando que:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad \text{y} \quad \frac{dM_y}{dz} = -Q_x$$

resulta:

$$\frac{\partial(\tau \cdot t)}{\partial s} = \frac{-t}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot [Q_y (I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x) + Q_x (I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y)]$$

que, una vez integrada, se transforma en:

$$\tau \cdot t = -\frac{Q_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[ I_y \int_0^s y \cdot t \cdot ds - I_{xy} \int_0^s x \cdot t \cdot ds \right] - \frac{Q_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[ I_x \int_0^s x \cdot t \cdot ds - I_{xy} \int_0^s y \cdot t \cdot ds \right]$$

Por tanto, la expresión general que define el esfuerzo rasante  $q = \tau \cdot t$  en una pieza abierta de sección delgada solicitada por esfuerzos cortantes  $Q_x$  y  $Q_y$  será:

$$q = \tau \cdot t = -\frac{Q_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} (I_y \cdot S_x - I_{xy} \cdot S_y) - \frac{Q_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} (I_x \cdot S_y - I_{xy} \cdot S_x)$$

En el caso particular de que los ejes de coordenadas coincidan con los ejes principales de inercia ( $I_{xy} = 0$ ) y que solo actúe sobre la sección el esfuerzo cortante  $Q_y$  de eje vertical ( $Q_x = 0$ ), la expresión anterior se simplifica y se convierte en la más frecuentemente utilizada:

$$q = \tau \cdot t = -\frac{Q_y \cdot S_x}{I_x}$$

En este caso, el valor máximo del flujo de tensiones tangenciales será:

$$q_{\text{máx}} = (\tau \cdot t)_{\text{máx}} = -\frac{Q_y \cdot S_{x, \text{máx}}}{I_x}$$

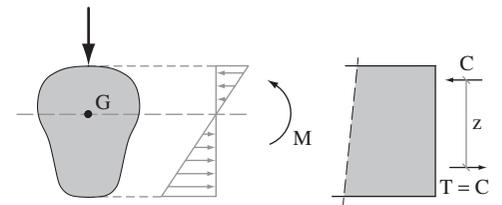
que se puede expresar también como  $q_{\text{máx}} = -\frac{Q_y}{z}$  con  $z = \frac{I_x}{S_{x, \text{máx}}}$

$S_{x, \text{máx}}$  es el momento estático de la sección a nivel de su centro de gravedad, y  $z$  es la expresión del brazo de palanca o la distancia entre las resultantes de compresiones y tracciones provocadas por el momento flector que varía a lo largo de la pieza y cuya derivada es el esfuerzo cortante. Se ha mantenido la denominación tradicional de  $z$  para el brazo de palanca; pero cabe advertir que, obviamente, dicho valor –que es una característica de la sección– no tiene nada que ver con la coordenada longitudinal de la pieza que se está analizando:

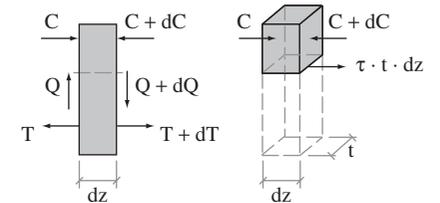
$$q_{\text{máx}} \cdot dz = (\tau \cdot t)_{\text{máx}} \cdot dz = dC$$

$$q_{\text{máx}} = \frac{dC}{dz} = \frac{dM/z}{dz} = \frac{Q}{z}$$

Es interesante, en la práctica, retener esta expresión que ayuda a recordar, también, el significado físico de las tensiones tangenciales y la relación entre flectores y cortantes.



Tensiones normales y resultantes

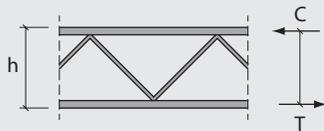


Equilibrio de la rebanada

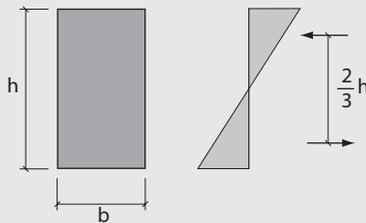
Figura 1.23



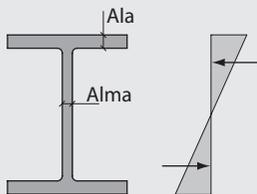
El “brazo de palanca”,  $z$ , está relacionado con el concepto de rendimiento de una sección y depende exclusivamente de sus características geométricas. Para alguno de los casos más habituales en la práctica tendremos:



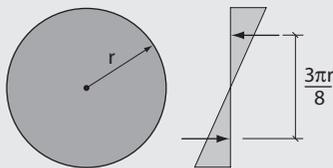
- Viga en celosía:  
 $z = h$  (distancia entre los cordones comprimidos y traccionados)



- Sección rectangular:  
$$z = \frac{I_x}{S_{x, \text{máx}}} = \frac{\frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3}{\frac{1}{8} \cdot b \cdot h^2} = \frac{2 \cdot h}{3}$$

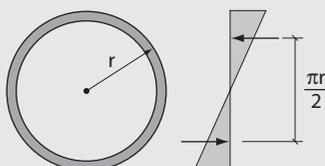


- Sección en I:  
Depende de la importancia relativa que tenga el área del alma en relación con el área de las alas. Estará comprendido lógicamente entre  $2/3 h$  y  $h$ .  
Cuanto menor sea el área del alma, mayor será el valor de  $z$  hasta hacerse  $h$  cuando dicha área se anula. La viga “sin alma” aunque no desalmada, es una celosía que equivale a una viga con un alma de espesor nulo.

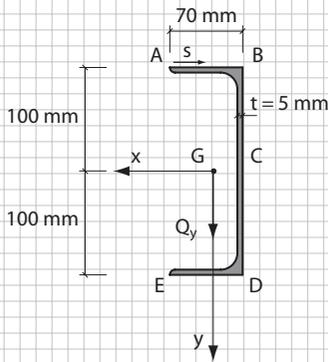


- Sección circular:  
$$z = \frac{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4}{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}} = \frac{3 \cdot \pi \cdot r}{8} \simeq 1,178r \simeq 0,589 \cdot (2r)$$

Lógicamente, este es un valor inferior al  $2h/3 = 0,666 h$  correspondiente a la sección rectangular.



- Sección tubular de radio  $r$  y espesor de pared  $t \ll r$ :  
$$z = \frac{\pi \cdot t \cdot r^3}{2 \cdot t \cdot r^2} = \frac{\pi \cdot r}{2} = \frac{\pi}{4} (2r) \simeq 0,785(2r)$$



### Ejercicio 1.10

Aplicando la fórmula general, determinar el estado de tensiones tangenciales  $\tau$  que se generan en una sección I como la esquematizada, solicitada por un esfuerzo cortante  $Q_y$  de eje vertical.

En este caso ( $Q_x = 0$  y  $I_{xy} = 0$ ) la fórmula general del flujo de esfuerzos cortantes queda reducida a:

$$q = \tau \cdot t = \frac{-Q_y \cdot S_x}{I_x} \quad \text{siendo } S_x = \int_0^s y \cdot t \cdot ds$$

Considerando el borde A como origen de las coordenadas curvilíneas ( $s_A = 0$ ), los valores del momento estático,  $S_x$ , en los puntos más característicos de la sección, serán:

- Entre los puntos A y B:  $y = -100 \text{ mm}$   $0 \leq s \leq 70 \text{ mm}$

$$S_x = \int_0^s y \cdot t \cdot ds = y \cdot t \int_0^s ds = -100 \cdot t \cdot s = -500 \cdot s$$

en A,  $s_A = 0$ ,  $S_{x,A} = 0$   
 en B,  $s_B = 70$ ,  $S_{x,B} = -35.000 \text{ mm}^3$   
 entre A y B,  $S_x$  varía linealmente

El flujo de tensiones tangenciales o esfuerzos rasantes,  $q = \tau \cdot t$  (unidades, F/L), será  $q_{AB} = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 500 \cdot s$

- Entre los puntos B y D:  $y = -100 \text{ mm}$ , para  $s \leq 70 \text{ mm}$ ,  $y = s - 170 \text{ mm}$ , para  $70 \leq s \leq 270 \text{ mm}$

$$S_x = \int_0^s y \cdot t \cdot ds = \int_0^{70} y \cdot t \cdot ds + \int_{70}^s y \cdot t \cdot ds = -100 \cdot 70 \cdot t + \int_{70}^s (s - 170) t \cdot ds = \left[ 2.450 - 170s + \frac{s^2}{2} \right] t$$

Se trata de una ley parabólica de momentos estáticos, con valores característicos:

$$\begin{aligned} \text{en B, } s_B = 70 \text{ mm} \quad S_{x,B} &= \left( 2.450 - 170 \cdot 70 + \frac{70^2}{2} \right) t = -35.000 \text{ mm}^3 \\ \text{en C, } s_C = 170 \text{ mm} \quad S_{x,C} &= \left( 2.450 - 170 \cdot 170 + \frac{170^2}{2} \right) t = -60.000 \text{ mm}^3 \\ \text{en D, } s_D = 270 \text{ mm} \quad S_{x,D} &= \left( 2.450 - 170 \cdot 270 + \frac{270^2}{2} \right) t = -35.000 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

En resumen, el flujo de tensiones tangenciales será  $q_{BD} = \frac{-Q_y}{I_x} \left( 2.450 - 170 \cdot s + \frac{s^2}{2} \right) \cdot t$ , siendo la ley de variación parabólica y simétrica respecto al eje horizontal x.

- Entre los puntos D y E:  $y = 100 \text{ mm}$   $270 \leq s \leq 340 \text{ mm}$

$$S_x = \int_0^s y \cdot t \cdot ds = \int_0^{270} y \cdot t \cdot ds + \int_{270}^s y \cdot t \cdot ds = -7000 \cdot t + \int_{270}^s 100 \cdot t \cdot ds = (100s - 34.000) \cdot t$$

Ley lineal de momentos estáticos, con valores característicos

$$\begin{aligned} \text{en D, } s_D = 270 \text{ mm} \quad S_{x,D} &= (100 \cdot 270 - 34.000) \cdot t = -35.000 \text{ mm}^3 \\ \text{en E, } s_E = 340 \text{ mm} \quad S_{x,E} &= (100 \cdot 340 - 34.000) \cdot t = 0 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

En resumen, el flujo de tensiones tangenciales, en este tramo, tendrá por expresión:

$$q_{DE} = \frac{-Q_y}{I_x} (100 \cdot s - 34000) \cdot t$$

flujo simétrico en relación con el tramo AB, pero con sentido contrario, como se ve en el gráfico que sintetiza los valores calculados.

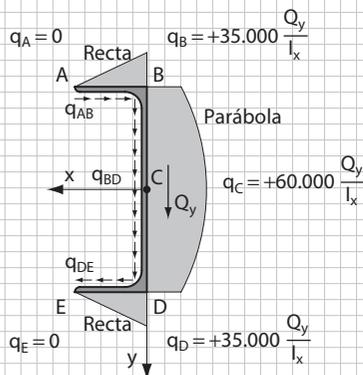
Verificación:

$$S_{x,A} = \frac{70 \cdot 5}{2} \cdot 100 = 35.000 \text{ mm}^3$$

área del ala superior      distancia al c. de g.

$$S_{x,B} = 35.000 + \frac{100 \cdot 5}{2} \cdot \frac{100}{2} = 35.000 + 25.000 = 60.000 \text{ mm}^3$$

área de la mitad del alma      distancia al c. de g.





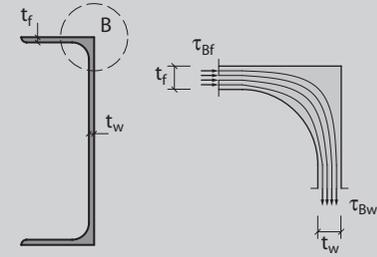
Cuando el espesor de la pared es constante, la ley de variación de las tensiones tangenciales,  $\tau = q/t$ , coincide lógicamente con la de los esfuerzos rasantes. En otro caso, la tensión tangencial variará en los puntos en los que el espesor cambia.

Esto suele ocurrir, por ejemplo, en las esquinas de perfiles en los que el espesor de las alas difiere, siendo en general más grande que el espesor de las almas. En la sección dibujada, el flujo de tensiones cumplirá la condición:

$$q_{B, \text{ala}} = q_{B, \text{alma}}$$

$$\tau_{Bf} \cdot t_f = \tau_{Bw} \cdot t_w$$

que es análoga a la que impone el agua circulando por un tubo, en la zona de un codo que origina un cambio brusco de sección: el caudal debe mantenerse constante, al igual que el flujo  $q$  de tensiones tangenciales cuando se produce un cambio de espesor de la sección. Las líneas de flujo, por otra parte, se concentrarán en la curva interna del quiebro.



Fijémonos ahora en el equilibrio de la sección que estamos analizando.

El flujo de tensiones tangenciales calculado tiene que estar en equilibrio, o ser equivalente al esfuerzo cortante aplicado,  $Q_y$ , de eje vertical.

Las resultantes de tensiones y de esfuerzos rasantes  $q = \tau \cdot t$  en las alas tendrán para ello que anularse y serán iguales en magnitud pero de signo contrario:

$$H = \frac{1}{2} \tau_B \cdot t \cdot AB = \frac{1}{2} q_B \cdot AB = \frac{1}{2} 35.000 \cdot 70 \cdot \frac{Q_y}{I_x} = 1,225 \cdot 10^6 \frac{Q_y}{I_x}$$

Por su parte, la resultante de tensiones tangenciales, y esfuerzos rasantes, en el alma BD de la sección valdrá:

$$V = \tau_B \cdot t \cdot BD + \frac{2}{3} (\tau_C - \tau_B) \cdot t \cdot BD = \frac{1}{3} BD \cdot (2q_C + q_B) = 10,33 \cdot 10^6 \frac{Q_y}{I_x}$$

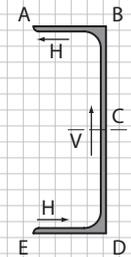
En resumen:

$$V = 10,33 \cdot 10^6 \frac{Q_y}{I_x}$$

$$H = \pm 1,23 \cdot 10^6 \frac{Q_y}{I_x}$$

La resultante vertical,  $V$ , tendrá que ser igual al cortante aplicado  $Q_y$ . Por lo tanto, se tiene que cumplir que  $I_x = 10,33 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$  y, en efecto, la inercia del perfil es:

$$I_x = 2 \cdot 70 \cdot 5 \cdot 100^2 + \frac{1}{12} 200^3 \cdot 5 = 10,33 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



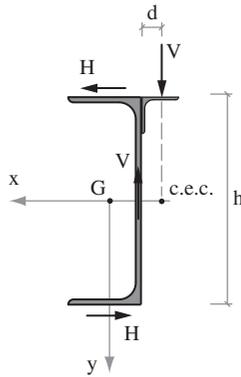


Figura 1.24 Centro de esfuerzos cortantes.

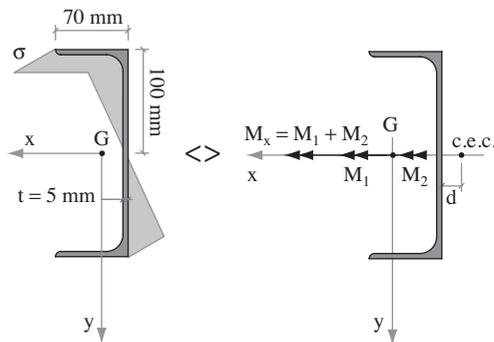


Figura 1.25 Equilibrio de la sección.



Obsérvese que como  $\sigma = \frac{M_x \cdot 100}{I_x}$

$$M_x = \frac{\sigma \cdot I_x}{100} = M_{\text{alás}} + M_{\text{alma}} = 103.333 \cdot \sigma$$

y, por tanto, se confirma que  $I_x = 10,33 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$  (valor calculado en el ejercicio 1.6).

#### 1.4.4 El concepto de “centro de esfuerzos cortantes” (c.e.c.)

Para que el esfuerzo vertical  $V$  que resulta de la integración de los flujos tensionales de una sección en I esté en equilibrio, la posición del cortante aplicado,  $Q_y$ , tiene que ser tal que anule el momento correspondiente al par de fuerzas  $H$  generadas en las alas del perfil. La condición de equilibrio se expresa como  $H \cdot h = V \cdot d$ , y la distancia del punto de aplicación del cortante –el denominado “centro de esfuerzos cortantes”– al plano del alma de la viga será:  $d = H \cdot h / V$  y con los valores del ejercicio 1.10:

$$d = \frac{H \cdot h}{V} = \frac{1,23 \cdot 10^6}{10,33 \cdot 10^6} \cdot 200 = 23,7 \text{ mm}$$

Si no estuviese aplicada en esta posición, la carga produciría también esfuerzos de torsión, cuyo valor sería el cortante multiplicado por la distancia del plano vertical de aplicación de cargas al centro de esfuerzos cortantes. Así, si el cortante estuviese aplicado –como es relativamente habitual si no se ha pensado en ello– en el plano del alma de la viga, la sección estaría solicitada por un momento torsor,  $M_T = Q_y \cdot d$ . Para que tal cosa no suceda, habría que prever un dispositivo de apoyo adecuado; por ejemplo, el que se muestra en la Figura 1.24.

El concepto de “centro de esfuerzos cortantes” es esencial. Corresponde a una característica de la sección, por cuanto solo depende de su geometría y está asociado a la ausencia o presencia de esfuerzos torsores actuando sobre la sección y superponiéndose a los de flexión y cortante provocados por las cargas externas si la resultante de estas no pasa por dicho punto característico.

La identificación del c.e.c se basa en la exigencia de equilibrio entre el esfuerzo cortante que actúa en una sección y las tensiones tangenciales inducidas que equivalen o equilibran a dicho esfuerzo.

Por otra parte, como las tensiones tangenciales son consecuencia del desequilibrio de las tensiones normales a ambos lados de una rebanada de la pieza solicitada en flexión, cabría preguntarse si del análisis de distribución de tensiones normales provocadas por la flexión no surge también el concepto de “centro de esfuerzos cortantes”. Y, en efecto, como no podría ser de otra manera, el equilibrio de momentos, del exterior aplicado y del que corresponde a la respuesta de la sección, permite determinar la posición del c.e.c, como se verifica a continuación:

- Equilibrio entre resultante de tensiones normales y momento aplicado (Figura 1.25):

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_{\text{alás}} = \sigma \cdot 70 \cdot 5 \cdot 200 = 70.000 \cdot \sigma \\ M_2 &= M_{\text{alma}} = \frac{1}{2} \sigma \cdot 100 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 200 = 33.333 \cdot \sigma \end{aligned} \right\} M_x = M_{\text{alás}} + M_{\text{alma}} = 103.333 \cdot \sigma$$

La posición del plano del momento aplicado,  $M_x$ , se situará a una distancia,  $d$ , del alma tal que se cumpla la condición:

$$\begin{aligned} M_{\text{alás}} \cdot \frac{70}{2} &= M_x \cdot d \\ d &= \frac{70.000 \sigma \cdot 70/2}{103.333 \sigma} = 23,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

Por otra parte, el “diálogo” entre las tensiones normales,  $\sigma$ , y tangenciales,  $\tau$ , provocadas por la flexión puede ayudar a comprender el comportamiento de la sección y a determinar las leyes de variación de ambos conjuntos tensionales, como se podrá comprobar en los ejercicios que se desarrollan a continuación.

Conviene, en cualquier caso, adelantar que, como se verá en dichos ejercicios, el c.e.c. coincide con la posición del centro de gravedad en las secciones con simetría simple o doble. Y que, en secciones constituidas por dos planos que se cortan, la condición de equilibrio exige que el c.e.c. coincida con el punto de corte de los dos planos (Figura 1.26).

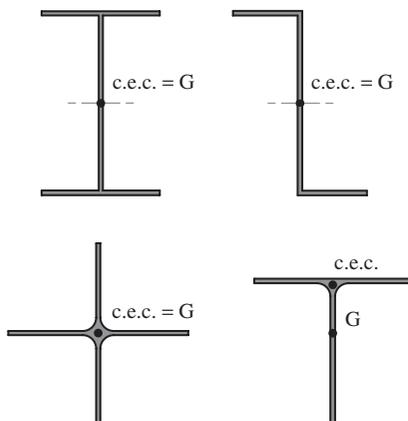


Figura 1.26 Posición del centro de esfuerzos cortantes en diferentes secciones.

**Ejercicio 1.11**

**Determinar las tensiones tangenciales en una sección en L para un cortante vertical  $Q_y$  que pasa por el centro de esfuerzos cortantes.**

**A: Por aplicación de las fórmulas generales.**

Por simetría, el c.e.c. coincide con el c.d.g. de la sección en L. Al estar únicamente solicitada por un cortante vertical  $Q_y$ , la fórmula general del flujo tensional se reduce a:

$$q = \tau \cdot t = \frac{Q_y}{I_{x'y'} - I_{xy}^2} \cdot (I_y \cdot S_x - I_{xy} \cdot S_y)$$

- Características inerciales de la sección:

$$I_x = I_{x, alas} + I_{x, alma} = 2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 200^2 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 400^3 = 13,333 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_{y, alas} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 100^3 = 0,667 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = 100 \cdot 1 \cdot (+50) \cdot (-200) + 400 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 + 100 \cdot 1 \cdot (-50) \cdot (+200) = -2,0 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$(I_{x'y'} - I_{xy}^2) = 4,899 \cdot 10^{12} \text{ mm}^8$$

Por tanto:

$$q = \tau \cdot t = \frac{Q_y}{4,89 \cdot 10^{12}} \cdot 10^6 \cdot (0,667 \cdot S_x + 2 \cdot S_y) = \frac{Q_y}{4,89} \cdot (0,667 \cdot S_x + 2 \cdot S_y) \cdot 10^{-6}$$

- Valores de los momentos estáticos  $S_x$  y  $S_y$  tomando por origen de la coordenada s el punto A:

En A:  $S_{x,A} = S_{y,A} = 0$

En B:  $S_{x,B} = 100 \cdot 1 \cdot (-200) = -20.000 \text{ mm}^3$       variación lineal entre A y B

$S_{y,B} = 100 \cdot 1 \cdot (+50) = 5.000 \text{ mm}^3$       variación parabólica entre A y B

En C:  $S_{x,C} = -20.000 + 200 \cdot 1 \cdot (-100) = -40.000 \text{ mm}^3$       variación parabólica entre B y C

$S_{y,C} = 5.000 + 200 \cdot 1 \cdot (0) = 5.000 \text{ mm}^3$       constante entre B y C

- Valores de las tensiones tangenciales  $\tau$  en los puntos característicos de la sección ( $Q_y$  en N):

$\tau_A = 0$

$\tau_B = \frac{Q_y}{4,89} \cdot 10^{-6} \cdot (-0,67 \cdot 20.000 + 2 \cdot 5.000) = -\frac{Q_y}{4,89} \cdot 10^{-2} \cdot 0,33 \text{ N/mm}^2$

$\tau_C = \frac{Q_y}{4,89} \cdot 10^{-6} \cdot (-0,67 \cdot 40.000 + 2 \cdot 5.000) = -\frac{Q_y}{4,89} \cdot 10^{-2} \cdot 1,67 \text{ N/mm}^2$

La ley de variación de  $\tau$  en el ala AB será la representada en el esquema.

La resultante de las tensiones tangenciales se tiene que anular y, para ello, el área de la contribución a las tensiones de  $S_x$  debe ser igual y contraria a la de  $S_y$ . En efecto:

$$H = \int_B^A (\tau \cdot t) \cdot ds = \frac{Q_y}{4,89} \cdot 10^{-2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 1,33 \cdot 100 + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 100 \right) = 0$$

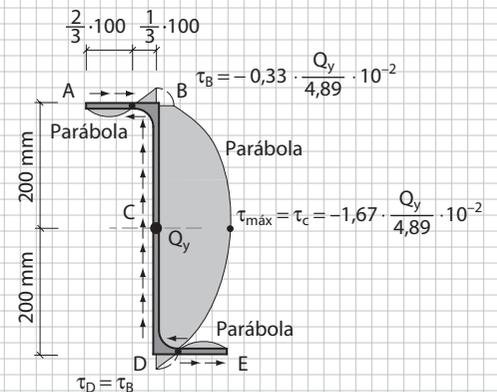
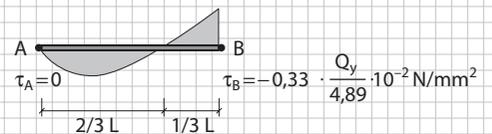
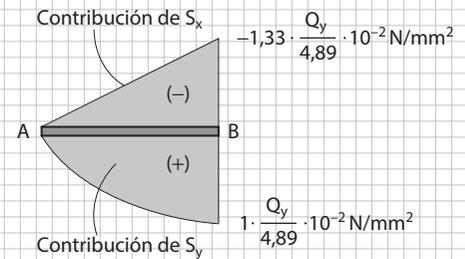
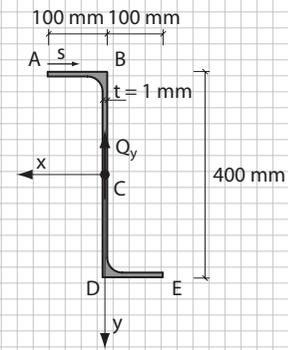
Además, el punto de tensiones tangenciales en el ala AB nula se sitúa a  $(2/3) \cdot L$  del punto A y a  $(1/3) \cdot L$  de B, siendo L la longitud de las alas del perfil. El área encerrada por las tensiones tangenciales positivas será igual y contraria a la encerrada por las tensiones tangenciales negativas.

En definitiva, la ley de variación de las tensiones tangenciales y sus valores característicos en la sección estudiada será la indicada sobre el esquema de la sección en L.

La resultante  $H = H_1 - H_2$  en las alas se anula como hemos visto:  $H_1 = H_2$ . A idéntica conclusión se habría llegado sin hacer cálculo alguno porque, si  $H_1$  fuese diferente de  $H_2$ , existiría una resultante de fuerzas horizontales en las alas superior e inferior que tendría el mismo sentido en ambas; lo que conllevaría la existencia de un momento torsional adicional en la sección provocada por las cargas externas que, para ello, deben estar desplazadas en relación con el c.e.c. y no deben pasar por él.

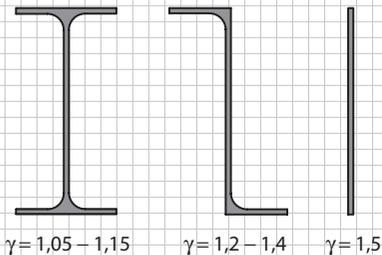
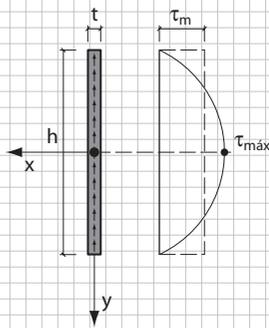
Además, la resultante de dichas tensiones en el alma de la viga tiene que coincidir, o ser igual y contraria según el signo de las tensiones tangenciales, con el esfuerzo cortante aplicado,  $Q_y$ . Confirmémoslo:

$$V = \frac{Q_y}{4,89} \cdot 10^{-2} \left[ 0,33 \cdot 400 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (1,67 - 0,33) \cdot 400 \cdot 1 \right]; \quad V = \frac{Q_y}{4,89} \cdot 10^{-2} (132 + 357) = Q_y$$





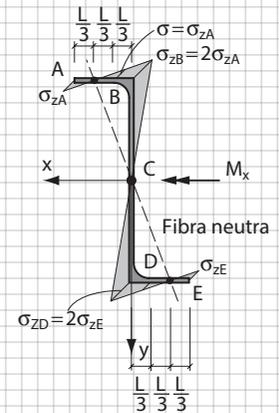
Como ya se ha comentado anteriormente, el signo, positivo o negativo, tanto de las tensiones normales como de las tangenciales, depende de si se representa la **respuesta tensional** de la sección al esfuerzo aplicado, flector o cortante, o si lo que se muestra son las **tensiones equivalentes** a los esfuerzos aplicados. Lo que es trascendente es el **signo relativo** de las tensiones a lo largo de la sección y, por ello, el ingeniero debe tener siempre presente el concepto de equilibrio que subyace en todos estos planteamientos. En tal sentido, el significado del signo más es que las tensiones "positivas" se oponen a las del signo contrario.



**B: A partir de las tensiones tangenciales deducidas determinar la ley de tensiones normales provocadas por un momento flector  $M_x$  concomitante con el cortante  $Q_y$ .**

A una distribución parabólica de las tensiones tangenciales corresponden variaciones lineales de las tensiones normales. Por otra parte, las tensiones tangenciales máximas en las alas y en el alma coinciden con puntos de tensiones normales nulas, que en las alas se sitúa a  $L/3$  de sus bordes libres. A  $2L/3$  se sitúa el punto en el que la tensión normal se iguala con  $\sigma_{ZA}$ , por lo que las tensiones tangenciales  $\tau$  se anulan. La tensión normal en B tiene que ser el doble de la tensión en el extremo A, aunque de signo contrario. La posición de la fibra neutra queda también inequívocamente definida en el gráfico.

Estos resultados coinciden, naturalmente, con los deducidos anteriormente para la sección análoga que hemos analizado, y ponen de manifiesto que existe un "diálogo" entre las tensiones normales y las tangenciales como consecuencia de su origen común.



### Ejercicio 1.12

**Determinar el estado de tensiones tangenciales,  $\tau$ , que se genera en una sección rectangular de dimensiones,  $h \cdot t$ , solicitada por un esfuerzo cortante,  $Q_y$ , paralelo a su dimensión mayor,  $h$ .**

La distribución de tensiones tangenciales será parabólica con valores nulos en los extremos de la sección y máximo en el centro:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Q_y \cdot S_{x, \text{máx}}}{I_x \cdot t} = \frac{Q_y \cdot 1/2 h \cdot t \cdot h/4}{\frac{1}{12} t \cdot h^3 \cdot t} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h \cdot t} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A_{\text{alma}}} = \frac{3}{2} \tau_{\text{media}}$$

Obsérvese que la tensión máxima es 1,5 veces la tensión tangencial media determinada suponiendo una distribución uniforme de tensiones tangenciales.

En el ejercicio anterior, la tensión media en el alma sería:  $\tau_m = \frac{Q_y}{A_{\text{alma}}} = \frac{Q_y}{400 \cdot 1} = \frac{Q_y}{4} \cdot 10^{-2}$

Y la relación entre  $\tau_{\text{máx}}$  y  $\tau_m$  en dicho caso valdría  $\frac{\tau_{\text{máx}}}{\tau_m} = \frac{1,67/4,89}{1/4} = 1,37$

Este coeficiente de 1,37, más reducido que el 1,5 del caso de la sección delgada rectangular, pone de manifiesto la influencia de las alas sobre la configuración de la respuesta de la sección al cortante.

Es evidente que el alma absorbe tensionalmente la componente paralela al plano del alma del esfuerzo cortante aplicado, cualquiera que sea la geometría de la sección. Por ello, el ingeniero podrá tener siempre un orden de magnitud de la tensión tangencial máxima si divide el cortante por el área del alma y multiplica la tensión media resultante por un coeficiente de forma aproximado,  $\gamma$ , que dependerá de la configuración de la sección y del valor relativo del área de las alas y del alma.



En realidad, la distribución de tensiones tangenciales en la anchura del alma no es uniforme. La elasticidad demuestra que dichas tensiones son mayores en los bordes y que su distribución depende, en una sección rectangular, de la relación entre altura,  $h$ , y el ancho,  $b$ , así como del coeficiente de Poisson,  $\nu$ , del material. Para  $\nu = 0,3$ , los valores máximos de la tensión tangencial serían:

$$\tau_{\text{máx}} = \alpha \cdot \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}$$

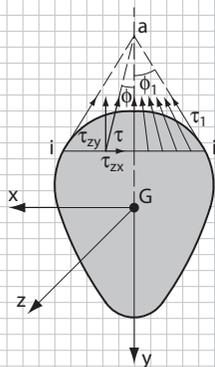
siendo  $\alpha \rightarrow 1,033 \quad 1,126 \quad 1,396 \quad 1,988$

para  $\frac{b}{h} \rightarrow 0,5 \quad 1 \quad 2 \quad 4$

Por otra parte, en el caso de secciones simétricas que no sean rectangulares, las tensiones tangenciales tienen dos componentes: una vertical  $\tau_{zy}$  y otra horizontal  $\tau_{zx}$ . Y su dirección en los bordes es tangente al perímetro de la sección, de acuerdo con lo que muestra el esquema adjunto.

La expresión de  $\tau_{zy}$ , supuesta también una distribución uniforme en la anchura del nivel de la sección considerada, será la anteriormente deducida:

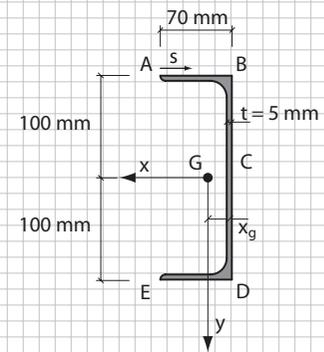
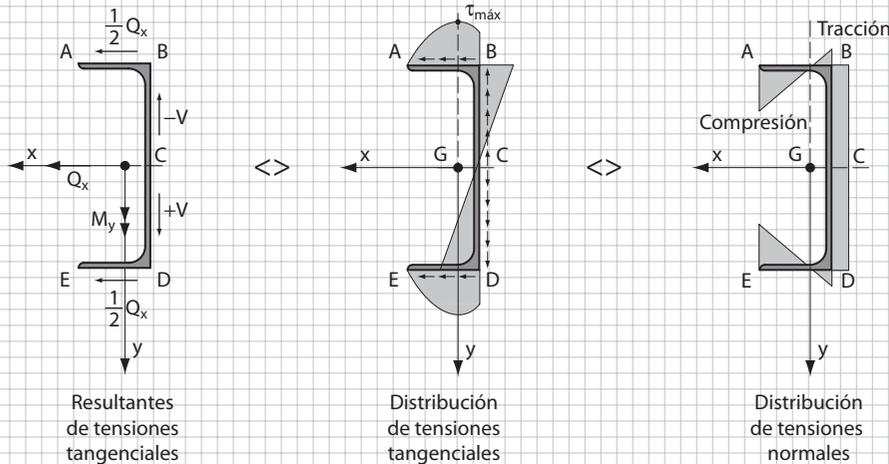
$$\tau_{zy} = \frac{Q S_i}{I_x \cdot b_i}$$



### Ejercicio 1.13

**Determinar el estado tensional provocado por la aplicación de un cortante de eje horizontal  $Q_x$  en la sección en J del ejercicio 1.10, y deducir, a partir de él, las tensiones normales provocadas por un flector concomitante  $M_y$ .**

Para que exista equilibrio entre el cortante horizontal  $Q_x$  y las tensiones tangenciales que genera, su flujo solamente se podrá representar en el esquema, puesto que la distribución de tensiones normales debidas al momento concomitante es también la representada.



En las alas de la sección, la ley de tensiones tangenciales será parabólica con un máximo en la vertical del centro de gravedad, G, donde las tensiones normales se anulan. En el alma, la variación será lineal, máxima en los bordes B y D, y se anulará en el centro, donde las tensiones tangenciales cambiarán de sentido y de signo. Lógicamente, por simetría, la posición del centro de esfuerzos cortantes se ubicará en el eje horizontal que pasa por en el centro de gravedad, y es en este eje donde se situará el cortante correspondiente a la flexión sin torsión.

La distribución de tensiones normales,  $\sigma_z$ , correspondientes a un momento flector,  $M_y$ , concomitante con el cortante,  $Q_x$ , será la correspondiente a una rotación de la sección alrededor del eje y-y; tendremos, por tanto, el estado tensional representado. La variación de tensiones será lineal en las alas, y se anulará en su encuentro con el eje vertical que contiene al centro de gravedad, y constante en el alma BD. Lo que es coherente con la ley de distribución de las tensiones tangenciales provocadas por el cortante concomitante que actúa en la sección: variación lineal en el alma y distribución parabólica en las alas, con un máximo en el eje y-y.

- Valores cuantitativos:

Puesto que  $I_{xy} = 0$ , utilizaremos la expresión:  $\tau \cdot t = -\frac{Q_x \cdot S_y}{I_y}$

Posición del centro de gravedad de la sección: por simetría, se sitúa en la línea media horizontal del alma a distancia  $x_g$  de esta:

$$x_g = \frac{2 \cdot 70^2 / 2 \cdot 5}{(2 \cdot 70 + 2 \cdot 100) \cdot 5} = 14,4 \text{ mm}$$

- Valor del momento estático  $S_y$  en los puntos más característicos de la sección:
  - En los que se encuentran en la vertical del centro de gravedad:

$$S_{y, \text{máx}} = \frac{(70 - 14,4)^2}{2} \cdot 5 = 7.728 \text{ mm}^3$$

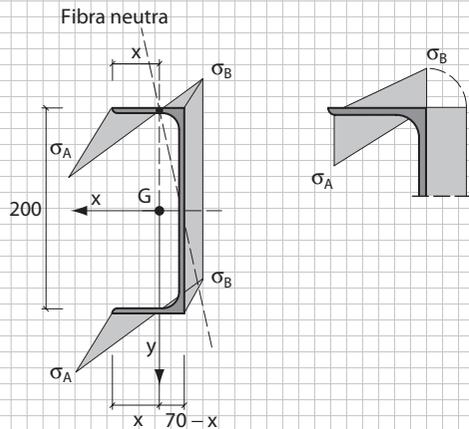
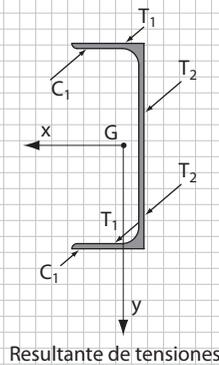
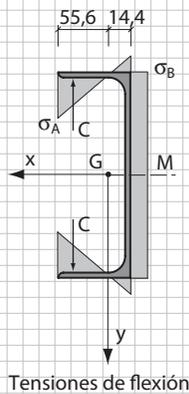
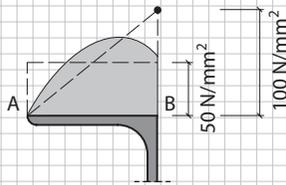
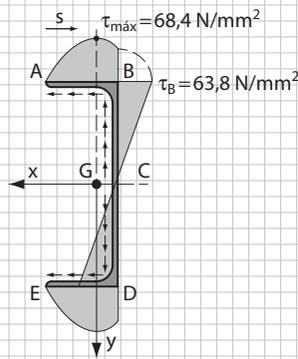
- En el punto B (así como en el D):

$$S_{y, B} = 7.728 - \left( \frac{14,4^2}{2} \cdot 5 \right) = 7.210 \text{ mm}^3$$

o bien, comenzando por G, donde  $\tau = 0$ , obtenemos  $S_{y, B} = 100 \cdot 5 \cdot 14,4 = 7.200 \text{ mm}^3$

- Valor de la inercia  $I_y$ :

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (70 - 14,4)^3 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 14,4^3 \cdot 5 + 200 \cdot 5 \cdot 14,4^2 = 790.245 \text{ mm}^4$$



- Valor de las tensiones tangenciales en puntos característicos:

$\tau_A = \tau_E = 0$  por ser extremos libres del perfil.

$\tau_C = 0$  por equilibrio, las tensiones deben cambiar de signo en este punto.

Considerando que el cortante  $Q_x = 35$  KN.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Q_x \cdot S_y}{t \cdot I_y} = \frac{35.000 \text{ N} \cdot 7.728 \text{ mm}^3}{5 \cdot 790.245 \text{ mm}^4} = -68,4 \text{ N/mm}^2$$

En los bordes B y D del ala,  $\tau_B = \frac{-35.000 \text{ N} \cdot 7.210 \text{ mm}^3}{5 \cdot 790.245 \text{ mm}^4} = -63,8 \text{ N/mm}^2$

valor que se puede obtener, asimismo, de la relación:

$$\tau_B = \tau_{\text{máx}} \frac{S_{y,B}}{S_{y,\text{máx}}} = -68,4 \cdot \frac{7.210}{7.728} = -63,8 \text{ N/mm}^2$$

Las siguientes observaciones ayudarán a comprender la relación de los diferentes conceptos y parámetros que entran en juego en la flexión.

- El valor de la tensión tangencial en las alas, supuesta una distribución uniforme de tensiones, sería:

$$\tau_m = \frac{\frac{1}{2} Q_x}{A_{\text{ala}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 35.000}{5 \cdot 70} = 50 \text{ N/mm}^2$$

y supuesta una distribución linealmente creciente  $\tau_{\text{máx}} = 2 \cdot 50 = 100 \text{ N/mm}^2$

El valor máximo real,  $68,4 \text{ N/mm}^2$  está, lógicamente, entre ambos valores aproximados, cuya estimación permite tener un control de resultados y recordar el sentido físico del concepto de tensiones tangenciales.

- Por análogas razones (estimación y control de resultados, significado físico de las tensiones) se puede determinar el "brazo de palanca, z", que está implícito en la expresión general del flujo tensional:

$$q = \tau_{\text{máx}} \cdot t = \frac{Q \cdot S_{y,\text{máx}}}{I_y} = \frac{Q/2}{z} \rightarrow z = \frac{I_y}{2 \cdot S_{y,\text{máx}}} = \frac{790.245}{2 \cdot 7.728} = 51,1 \text{ mm}$$

que equivale al 73% de la altura (70 mm) de la sección.

Este concepto de "brazo de palanca", z, corresponde a la distancia entre resultantes, de compresión y tracción, de las tensiones de flexión que equilibran el momento flector aplicado, cuya variación genera el cortante.

En la mitad superior de la sección, cuyas tensiones equilibran la mitad del momento flector aplicado y que absorbe también la mitad del cortante, la resultante de compresiones, C, se sitúa en  $1/3 \cdot 55,6 = 18,5 \text{ mm}$  del borde A. La resultante de tracciones se sitúa muy cerca del elemento vertical de la sección. Por tanto, el brazo de palanca, resultante de las compresiones y las tracciones, será ligeramente inferior a  $z < 70 - 1/3 \cdot 55,6 = 51,5 \text{ mm}$

El valor exacto que, en efecto, habíamos calculado era  $z = 51,1 \text{ mm}$ .

- Al imponer la condición de equilibrio entre la distribución de tensiones normales y los esfuerzos equivalentes ( $N = 0$  y  $M = M_y$ ) se puede deducir la posición de la fibra neutra –definida por la distancia x en el ala–, la relación entre  $\sigma_A$  y  $\sigma_B$ , e incluso el valor de la inercia de la sección.

– Condición  $N = 0$  ( $C_1 = T_1 + T_2$ )

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma_A \cdot 70 \cdot 5 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma_B \cdot 70 \cdot 5 + \frac{\sigma_B \cdot 200 \cdot 5}{T_2} \rightarrow \sigma_A = \frac{1.350}{350} \sigma_B = 3,875 \cdot \sigma_B$$

$$\text{Además, } \frac{\sigma_B}{\sigma_A} = \frac{70 - x}{x} = \frac{1}{3,875} \rightarrow x = 55,6 \text{ mm, } AB - x = 14,4 \text{ mm}$$

como tenía que ser, pues tiene que pasar por la vertical del centro de gravedad, G.

– Condición  $M = M_y$

$$\begin{aligned} M_y &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma_A \cdot x \cdot t \cdot \frac{2}{3} \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma_B \cdot (AB - x) \cdot t \cdot \frac{2}{3} \cdot (AB - x) + \sigma_B \cdot BD \cdot t \cdot (AB - x) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma_A \cdot 55,6^2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma_B \cdot 14,4^2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} + \sigma_B \cdot 200 \cdot 5 \cdot 14,4 = 55.021,3 \cdot \sigma_B \end{aligned}$$

$$\text{y como } \sigma_B = \frac{M_y \cdot 14,4}{I_x} \text{ resulta } \frac{I_x \cdot \sigma_B}{14,4} = 55.021,3 \cdot \sigma_B$$

$I_x = 792.306 \text{ mm}^4 \approx 790.245 \text{ mm}^4$ , valor obtenido anteriormente.

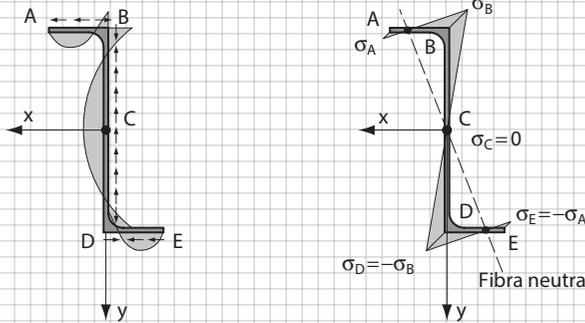
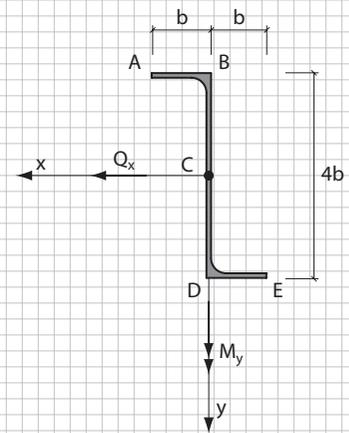
**Ejercicio 1.14**

En la genérica sección en L representada, determinar la ley de tensiones tangenciales provocadas por un esfuerzo cortante  $Q_x$  horizontal pasando por el c.e.c. de la sección y las tensiones normales asociadas a un momento flector concomitante  $M_y$ .

La resultante de tensiones tangenciales en las alas horizontales AB y DE deben equilibrar al cortante  $Q_x$ . Serán iguales, por tanto, a  $Q_x/2$ . Por otra parte, la resultante de las tensiones tangenciales en el segmento vertical BD de la sección debe ser nula.

Además, las leyes de tensiones tangenciales tanto en las alas horizontales como en el segmento vertical deben ser parabólicas, puesto que las leyes de tensiones normales asociadas deben variar linealmente, al ser  $I_{xy} \neq 0$ .

Las tensiones tangenciales y las tensiones normales tendrán, por tanto, el aspecto representado en los esquemas siguientes:



El valor de  $\sigma_A$  deberá ser superior al de  $\sigma_B$ , para que la resultante de dichas tensiones correspondan a un momento igual y contrario a las provocadas por el conjunto de tensiones  $\sigma_B$  y se cumpla así la condición de equilibrio  $M_x = 0$ .

De acuerdo con el esquema representado, el equilibrio de momentos exige:

$$M_x = 0$$

$$F_A \cdot 4b = F_{1B} \cdot 4b + F_{2B} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4b$$

siendo:  $F_A = \pm \frac{1}{2} \sigma_A \cdot b \cdot t$

$$F_{1B} = \pm \frac{1}{2} \sigma_B \cdot b \cdot t$$

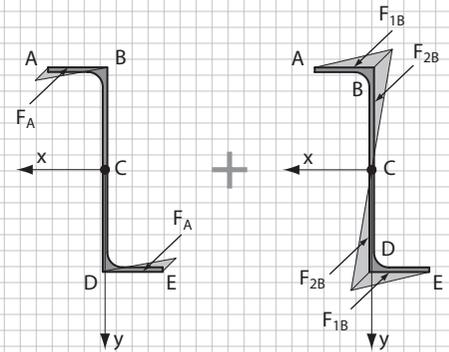
$$F_{2B} = \pm \frac{1}{2} \sigma_B \cdot (2b) \cdot t$$

de donde resulta:

$$\sigma_A = \frac{7}{3} \cdot \sigma_B$$

La fibra neutra pasará a una distancia x del extremo libre tal que:

$$\frac{7/3 \cdot \sigma_B}{x} = \frac{\sigma_B}{AB - x} \rightarrow x = \frac{7}{10} \cdot AB = \frac{7}{10} b$$



## Ejercicio 1.15

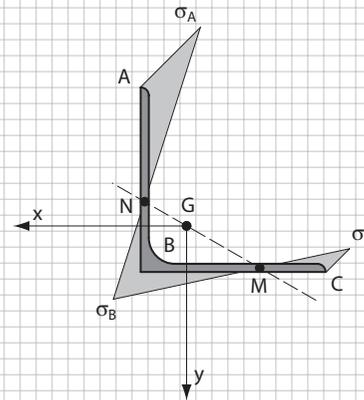
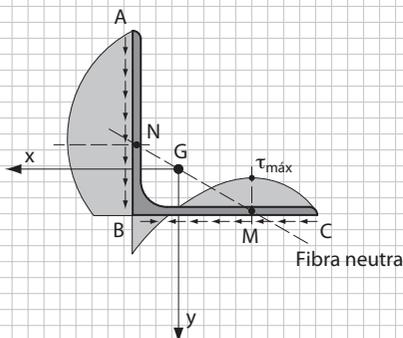
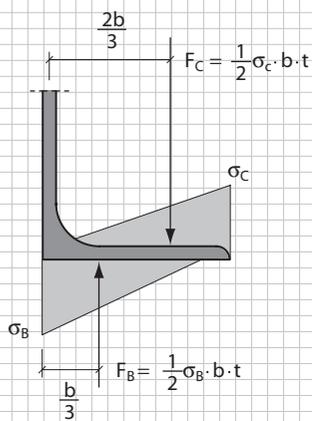
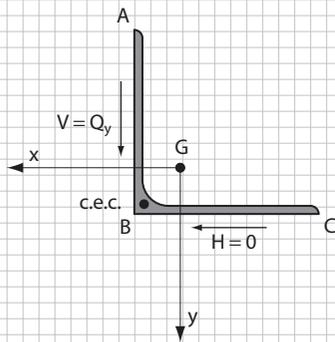
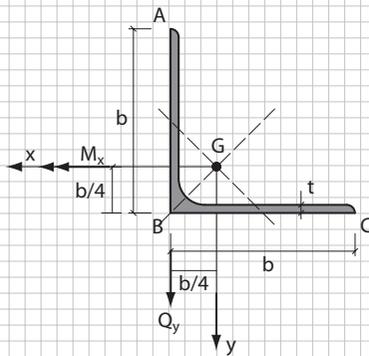
Para la sección en L de dimensiones genéricas  $b \cdot b$ , y espesor  $t$  representar las leyes de tensiones tangenciales que se generan cuando actúa un cortante,  $Q_y$ , paralelo al eje vertical y aplicado en el centro de esfuerzos cortantes. Determinar también la ley de tensiones normales consecuencia del momento flector concomitante  $M_x$ .

Como en todas las secciones en cruz (simples T, angulares, secciones cruciformes...), el centro de esfuerzos cortantes se encuentra en la intersección de las líneas medias de los dos elementos que se cruzan.

La posición del centro de gravedad, G, tiene por coordenadas:

$$x_G = y_G = \frac{b/2 \cdot (b \cdot t)}{2 \cdot (b \cdot t)} = \frac{b}{4}$$

La resultante de las tensiones tangenciales en el segmento horizontal BC tiene que anularse, y por tanto tendrá una distribución parabólica con un punto de tensiones nulas y un punto, M, de tensiones tangenciales máximas, que será también un punto de la fibra neutra de la flexión.



Uniendo M con el centro de gravedad tendremos dicha línea neutra que cortará a AB en el punto N, que define también el punto de tensiones tangenciales máximas en dicho segmento. Por tanto, la distribución de tensiones normales no podrá ser otra que la representada en el esquema.

Como, por otra parte, el momento de la resultante de tensiones normales en el segmento horizontal BC se tiene que anular ( $M_y = 0$ ) se verificará la condición:

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_B \cdot b \cdot t \cdot \frac{b}{3} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_C \cdot b \cdot t \cdot \frac{2b}{3} \rightarrow \sigma_B = 2 \cdot \sigma_C$$

Por consiguiente, el punto M se encontrará a  $b/3$  del borde C y a  $2b/3$  de B y la posición del punto N, será tal que:

$$\frac{BN}{2/3b} = \frac{b/4}{2/3b - b/4} \rightarrow BN = 0,4 \cdot b \text{ y } AN = 0,6 \cdot b$$

En consecuencia:

$$\sigma_A = \frac{0,6 \cdot b}{0,4 \cdot b} \cdot \sigma_B = 1,5 \cdot \sigma_B$$

La fibra neutra será la línea que une los puntos M, G y N.

La ley de tensiones tangenciales será parabólica en el ala vertical con un máximo en N, y su resultante coincidirá con el cortante  $Q_y$  aplicado. En el ala horizontal la ley será también parabólica, pero su resultante será nula. Por tanto, tendrá un máximo en M y se anulará entre M y B.

**1.4.4.1 Determinación aproximada del centro de esfuerzos cortantes**

En determinados casos es posible situar, con buena aproximación, el centro de esfuerzos cortantes (c.e.c.) sin necesidad de usar la metodología que se acaba de exponer anteriormente.

Así, por ejemplo, en el caso del perfil dibujado, en I de alas desiguales (Figura 1.27), sabemos que, por simetría, el c.e.c. se situará en el alma del perfil. Pero su posición precisa, que no coincidirá con la de su centro de gravedad, se determinará imponiendo la condición de que una carga transversal cualquiera,  $Q_t$ , deberá estar situada en una posición tal que el desplazamiento lateral de la viga sea exclusivamente de traslación sin rotación, debido a la ausencia de torsión.

Una parte de la carga  $Q_t$ , que llamaremos  $q_1$ , actuará sobre el ala superior de dimensión  $b_1 \cdot t$  e inercia respecto al eje de simetría vertical,  $I_1 = (1/12) \cdot b_1^3 \cdot t$ . La parte restante de la carga,  $q_2$ , actuará sobre el ala inferior de inercia,  $I_2 = (1/12) \cdot b_2^3 \cdot t$ .

Como la flecha producida por estas cargas es inversamente proporcional a las inercias de las alas respectivas:

$$\frac{q_1}{I_1} = \frac{q_2}{I_2}$$

tendremos que:

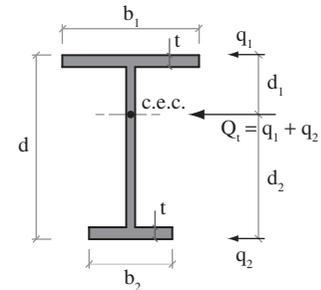
$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^3$$

Por otro lado, la condición de equilibrio entre la carga total,  $Q_t$ , aplicada a la viga analizada, y las cargas equivalentes aplicadas en cada ala, se expresa como  $q_1 \cdot d_1 = q_2 \cdot d_2$ , con lo que podemos escribir:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^3$$

De aquí se deduce la posición del c.e.c.:

$$d_1 = \frac{d}{1 + \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^3} = d \cdot \frac{I_2}{I_1 + I_2} \quad d_2 = \frac{d}{1 + \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^3} = d \cdot \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

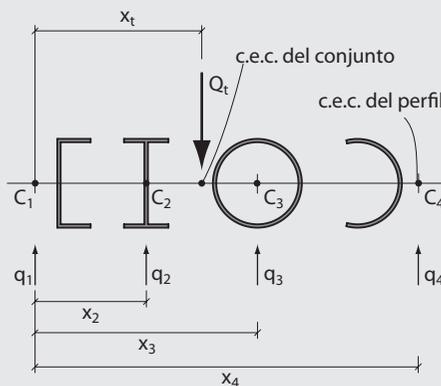


**Figura 1.27** Centro de esfuerzos cortantes en una sección en I con alas desiguales.



En el caso más general de una sección compuesta por diferentes perfiles simples, como es el caso dibujado, la carga absorbida por cada uno de los perfiles será tal que:

$$\frac{q_1}{I_1} = \frac{q_2}{I_2} = \frac{q_3}{I_3} = \frac{q_4}{I_4} = \frac{\sum q_i}{\sum I_i} = \frac{Q_t}{\sum I_i}$$



Para la determinación de la posición del c.e.c. de la sección compuesta, que por simetría se encontrará sobre el eje horizontal de la sección, impondremos la condición:

$$q_2 \cdot x_2 + q_3 \cdot x_3 + q_4 \cdot x_4 = Q_t \cdot x_t$$

y como,

$$q_2 = \frac{Q_t}{\sum I_i} \cdot I_2; \quad q_3 = \frac{Q_t}{\sum I_i} \cdot I_3; \quad q_4 = \frac{Q_t}{\sum I_i} \cdot I_4$$

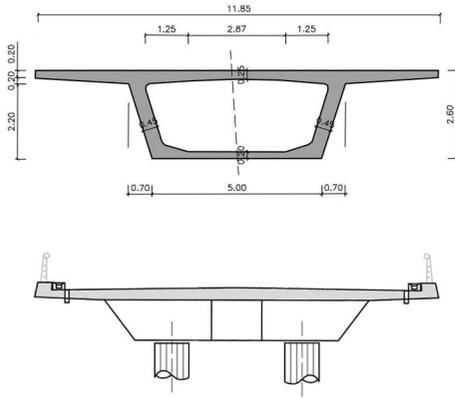
resulta:

$$\frac{Q_t}{\sum I_i} (x_2 \cdot I_2 + x_3 \cdot I_3 + x_4 \cdot I_4) = Q_t \cdot x_t$$

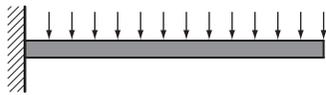
Por lo tanto, la posición del centro de esfuerzos cortantes del perfil compuesto vendrá definida por el valor  $x_t$  referido a la posición del c.e.c. del perfil 1 y tendrá por valor:

$$x_t = \frac{\sum_{i=2}^{i=n} x_i \cdot I_i}{\sum_{i=1}^{i=n} I_i}$$

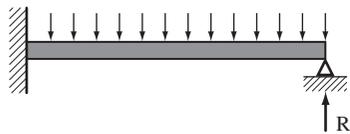
siendo  $x_i$  la abscisa del c.e.c. del perfil "i", referido también a la posición del c.e.c. del perfil 1.



**Figura 1.28** Tableros de puentes unicelular y multicelular.



**Figura 1.29** Viga isostática.



**Figura 1.30** Viga hiperestática.



Pila del viaducto de Millau, Francia.



Fuste de una torre eólica.

## 1.4.5 Secciones cerradas

### 1.4.5.1 Consideraciones generales

En el apartado anterior se ha analizado el comportamiento de secciones abiertas solicitadas por esfuerzos cortantes y se han deducido las expresiones que permiten cuantificar las tensiones tangenciales que son la respuesta elástica a dicha sollicitación.

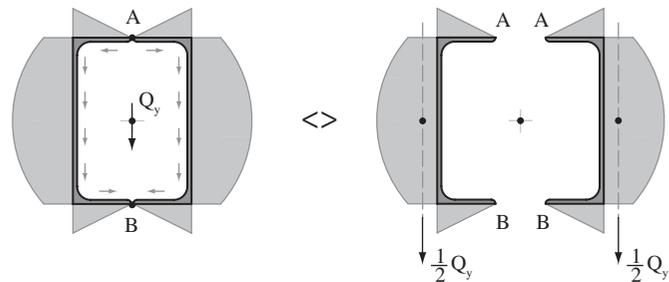
Pero en la práctica profesional son muy frecuentes secciones en cajón, de una o varias células. En particular en tableros de puentes (Figura 1.28), sean de hormigón estructural, metálicos o mixtos de hormigón y acero. También abundan secciones en cajón, circulares, rectangulares o de formas más complejas, en altas pilas de puentes, torres eólicas o chimeneas industriales. ¿Por qué no se pueden utilizar las expresiones deducidas en el caso de secciones abiertas para analizar el flujo de tensiones tangenciales en cajones cerrados unicelulares o pluricelulares?

En las secciones abiertas, las tensiones tangenciales en sus bordes son necesariamente nulas y, por ello, hemos podido partir de este dato conocido para plantear la ecuación general. Por esta razón, consideramos el caso de la sección abierta como un problema isostático en el que el cálculo del estado tensional es inmediato y se basa solo en las leyes de la estática: se trata de un problema análogo, por ejemplo, al de la determinación de esfuerzos de una viga en voladizo (Figura 1.29) con cargas transversales aplicadas. En su extremo libre los esfuerzos son nulos y, partiendo de este dato, podemos deducir los esfuerzos en cualquier otra sección.

Por el contrario, en una sección en cajón, de una sola célula, no conocemos a priori la tensión tangencial en ningún punto de la sección. Ocurre como si a la viga en voladizo se le hubiese colocado un apoyo en su extremo libre (Figura 1.30). En este caso, tendríamos una incógnita hiperestática, el valor de la reacción  $R$ . Por ello, la deducción de los esfuerzos exige, la consideración de las deformaciones de la viga provocadas por la flexión.

De la misma manera, en el caso de la sección en cajón con una sola célula, tenemos una única incógnita hiperestática: el valor de la tensión tangencial en un punto cualquiera de la sección, y su deducción, nos obliga a considerar las deformaciones en la sección provocadas por el esfuerzo cortante. En cajones de varias células, las incógnitas hiperestáticas coincidirían con su número. La metodología de cálculo sería análoga, como ocurre también en el caso de una viga con varios grados de hiperestatismo.

Existen casos en los que, por razones de simetría, se conocen puntos de tensiones tangenciales nulas en la sección en cajón. Por ejemplo, así ocurre en la esquematizada en la Figura 1.31: las tensiones tangenciales en A y B se tienen que anular, y la sección en cajón equivale, por tanto, a dos secciones abiertas, que absorben cada una de ellas la mitad del cortante total,  $Q_y$ . Obviamente, el c.e.c. de la sección en cajón, coincide con su centro de simetría.



**Figura 1.31** Sección simétrica en un cajón unicelular.

**1.4.5.2 Metodología para deducir el flujo de tensiones tangenciales en un cajón unicelular**

La metodología que vamos a emplear para deducir esta expresión general es idéntica a la que estamos habituados a utilizar para deducir los esfuerzos en una viga con un grado de hiperestaticidad: el estado real I es igual a la superposición del estado II, en el que se ha liberado el apoyo 2, y del estado III, al que se ha aplicado una fuerza  $R_2$  que debe producir una flecha  $f_2$  igual y contraria a la que se produce en el estado II (Figura 1.32).

En el caso de la sección en cajón sometida, por ejemplo, a un cortante de eje vertical, procederemos como sigue:

1. Daremos un corte en la sección para transformarla en abierta.
2. Deduiremos la ley de tensiones tangenciales correspondiente al esfuerzo cortante aplicado en el c.e.c. de la sección abierta (estado II).
3. Calcularemos el desplazamiento relativo de los labios de la sección abierta, provocado por las tensiones tangenciales que en dicho estado II actúan sobre el perfil.
4. Aplicaremos en los labios del perfil abierto dos fuerzas iguales y contrarias. Deduiremos la distribución de tensiones tangenciales correspondiente y calcularemos el desplazamiento relativo, consecuencia de las tensiones que actúan sobre la sección (estado III). El valor de las fuerzas aplicadas deberá ser tal que el desplazamiento correspondiente sea igual y contrario al desplazamiento en el estado II, de manera que la superposición de los dos estados lleve a cerrar los labios de la sección abierta y vuelva a convertir a esta en la sección original cerrada.
5. La superposición de los estados tensionales correspondientes a los estados II y III nos dará, finalmente, el estado tensional de la sección en cajón. Y del establecimiento de las condiciones de equilibrio entre dicho estado tensional y el esfuerzo cortante que lo genera, se deducirá la posición del c.e.c. de la sección I en cajón.

En las Figuras 1.33 y 1.34 se resume la metodología para la determinación de las tensiones tangenciales en una sección en cajón:

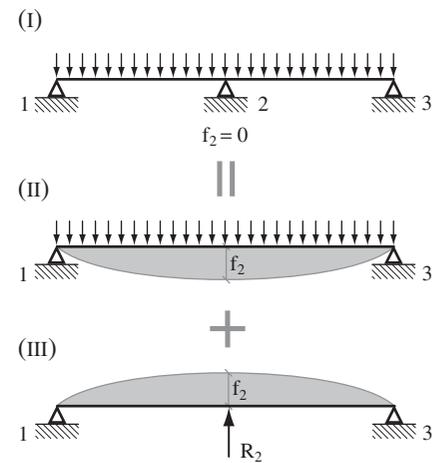


Figura 1.32 Análisis de una viga hiperestática.

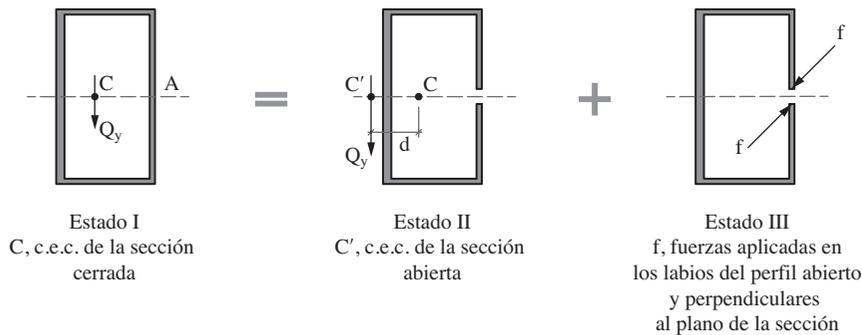


Figura 1.33 Análisis de un cajón unicelular.

El aspecto del flujo de las tensiones tangenciales en cada uno de los tres estados será el siguiente:

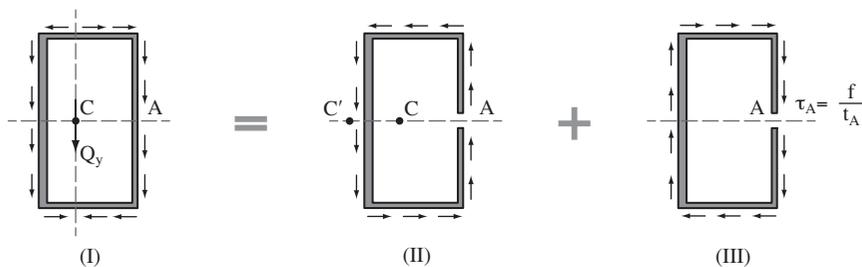


Figura 1.34 Equilibrio tensional de un cajón unicelular.

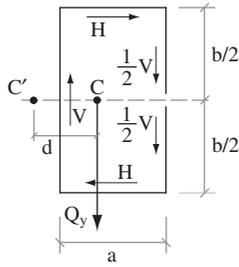


Figura 1.35 Equilibrio de las resultantes tensionales.

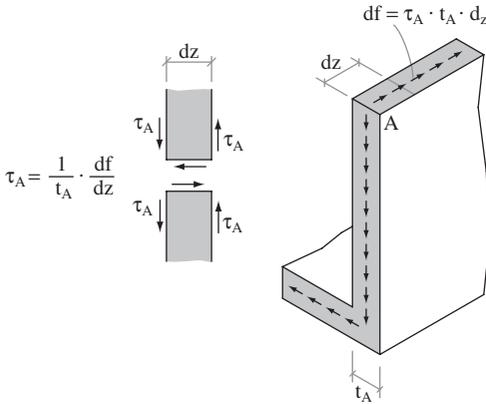


Figura 1.36 Equilibrio tensional en el borde de la sección abierta.

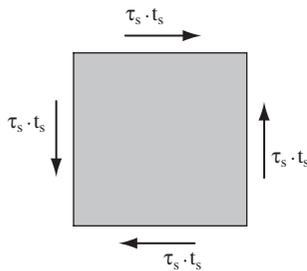


Figura 1.38 Flujo de tensiones tangenciales en un elemento diferencial.

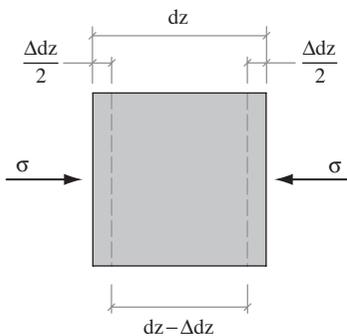


Figura 1.39 Analogía tensional.

El análisis de los esquemas representados sugiere las siguientes observaciones:

- Las fuerzas  $f$  aplicadas en el estado III en los labios de la sección deben tener el valor  $f = \tau_A \cdot t_A$ , siendo  $\tau_A$  la tensión tangencial en el punto A, en el que se ha efectuado el corte, y  $t_A$  es el espesor de la sección en dicho punto.
- Las resultantes del conjunto de tensiones tangenciales horizontales y verticales en el estado III deben ser nulas para que exista equilibrio en la sección. En cambio, la resultante de momentos del conjunto de tensiones tangenciales no puede ser nula: tendrá el valor correspondiente al desplazamiento del esfuerzo cortante, desde su punto de aplicación C en el estado I hasta su punto de aplicación C' en el estado II (Figura 1.35):

$$M_{T,C} = V \cdot a + H \cdot b = Q_y \cdot d$$

siendo  $d$  la distancia entre C y C', centros de esfuerzos cortantes en los estados I y II, respectivamente.

- Si se pone en equilibrio un elemento diferencial situado en el borde A del perfil abierto y perpendicular al plano de la sección (Figura 1.36), aparece con claridad la relación entre los sentidos de las fuerzas exteriores  $f$  aplicadas a la sección en el estado III y las tensiones tangenciales correspondientes.

### 1.4.5.3 Deformaciones producidas por esfuerzos cortantes

Como acabamos de ver, la deducción del flujo de tensiones tangenciales generado por un esfuerzo cortante en un cajón unicelular es un problema con un grado de hiperestaticidad, siendo la incógnita hiperestática el valor  $\tau_A$  de la tensión tangencial en el punto por el que se secciona el cajón. Su solución obliga a considerar las deformaciones originadas por las tensiones tangenciales.

Para establecer la ecuación de dicha deformada, analizaremos una rebanada de espesor,  $dz$ , de una viga de sección abierta cualquiera, sometida a un esfuerzo cortante vertical  $Q_y$ . De esta rebanada (Figura 1.37) consideraremos un elemento diferencial de longitud  $ds$  que antes de la deformación tendrá geometría rectangular de dimensiones  $dz \cdot ds$  y un espesor  $t_s$ .

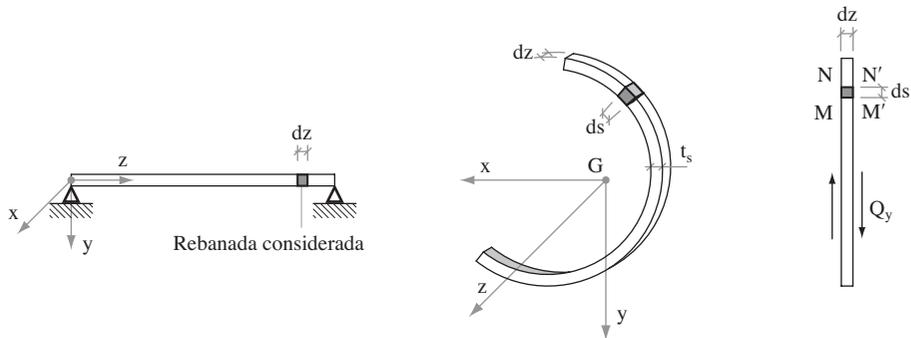


Figura 1.37 Deformaciones producidas por el esfuerzo cortante.

Este elemento diferencial estará sometido (Figura 1.38) a un flujo de tensiones tangenciales  $q_s = \tau_s \cdot t_s$ , que provocarán una deformación caracterizada por el valor de la distorsión angular,  $\gamma$ .

$$\gamma_s = \frac{\tau_s}{G} \left\{ \begin{array}{l} \tau_s, \text{ tensión tangencial en el punto de coordenadas curvilíneas.} \\ G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}, \text{ módulo de elasticidad transversal del material.} \end{array} \right.$$

Esta expresión de  $\gamma$ , recordémoslo de nuevo, es análoga a la que relaciona tensiones normales y deformaciones –acortamientos o alargamientos unitarios– en un elemento diferencial sometido a tensiones normales en una dirección (Figura 1.39).

$$\epsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{\sigma}{E}$$

El significado de ambas expresiones es también análogo. De la misma manera que  $\epsilon$  es la deformación unitaria del elemento diferencial comprimido,  $\gamma$  es la variación angular de dicho elemento que, tras haberse deformado, tendrá el aspecto esquematizado en la Figura 1.40, siendo:

$$\gamma = \frac{\Delta(dz)}{ds}$$

Tras la deformación o distorsión angular nos encontramos con que el punto N, que inicialmente estaba en la vertical del punto M, se habrá desplazado en la dirección del eje z; es decir, que dos puntos próximos, separados por una distancia  $ds$ , que se encontraban inicialmente en un plano vertical, dejan de estarlo como consecuencia de la deformación provocada por la tensión tangencial aplicada y se produce un desplazamiento relativo  $\Delta(dz) = \gamma \cdot ds$  dirigido según el eje z longitudinal.

A partir de la anterior reflexión, podemos evaluar el desplazamiento longitudinal relativo entre dos puntos A y B de la sección de coordenadas curvilíneas  $s_A$  y  $s_B$ , respectivamente, que lógicamente responderá a la ecuación:

$$\delta_{AB} = \int_{s_A}^{s_B} \gamma \cdot ds = \int_{s_A}^{s_B} \frac{\tau}{G} \cdot ds$$

Consiguientemente, el desplazamiento total,  $\delta_T$ , entre los dos extremos de la sección desarrollada de longitud  $l$  será:

$$\delta_T = \int_{s=0}^{s=l} \gamma \cdot ds = \int_{s=0}^{s=l} \frac{\tau_s(s)}{G} \cdot ds$$

En ambos casos, el desplazamiento relativo que se producirá en la dirección del eje z será perpendicular al plano de la sección.

Precisaremos ideas visualizando la deformada provocada por el esfuerzo cortante en la sección abierta representada en la Figura 1.42:

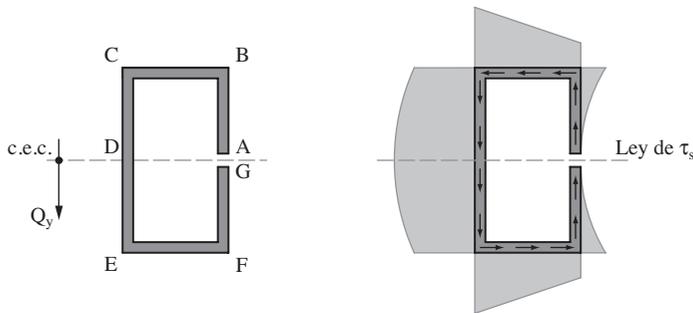


Figura 1.42 Tensiones tangenciales en la sección abierta.

La perspectiva de la sección deformada se muestra en la Figura 1.43 –por razones de claridad conceptual está ampliada la importancia de las deformaciones–.

La línea discontinua ABCDEFG representa la sección antes de la deformación. Y la línea llena A'B'C'D'E'F'G', la forma alabeada de la sección deformada por el esfuerzo cortante. Es importante observar cómo la pendiente de la deformada dibujada en cada punto coincide con el valor de  $\gamma$ , que por ello resulta directamente proporcional al valor  $\tau$ . En consecuencia, la máxima pendiente de la deformada corresponde al punto D, donde la tensión tangencial es también máxima, mientras que en los puntos A' y G' la pendiente será vertical, ya que el valor de  $\tau$  es nulo.

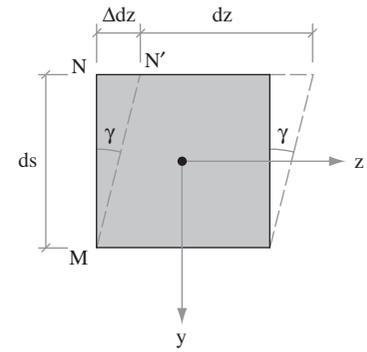


Figura 1.40 Deformabilidad angular.

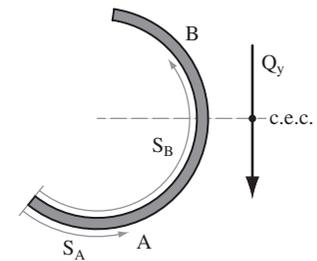


Figura 1.41 Coordenadas curvilíneas de una sección abierta.

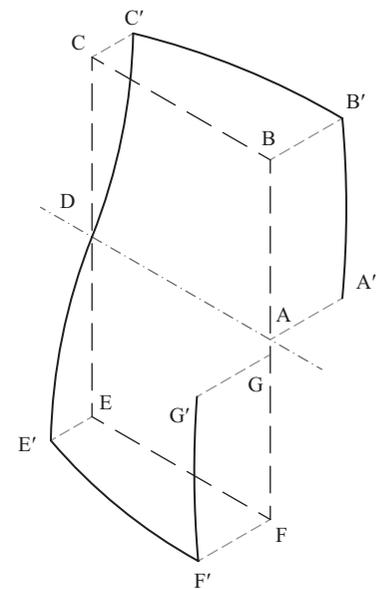


Figura 1.43 Deformación de la sección abierta.

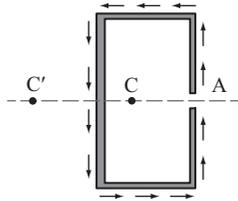


Figura 1.44 Estado II.

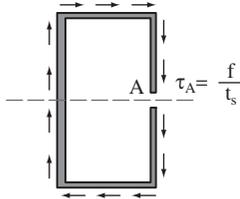


Figura 1.45 Estado III.

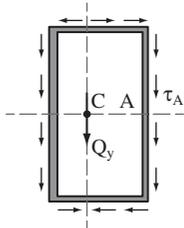


Figura 1.46 Estado I = II + III.

#### 1.4.5.4 Expresión general del flujo de tensiones generales en un cajón unicelular

A partir de la formulación del desplazamiento relativo entre dos puntos de una sección abierta sometida a un esfuerzo cortante, podemos deducir la expresión general del flujo de tensiones tangenciales en un cajón unicelular. Como ya hemos visto, el estado real se obtiene de la superposición de los estados virtuales II y III.

El flujo de tensiones tangenciales para el estado II (Figura 1.44) correspondiente al esfuerzo cortante  $Q_y$ , aplicado en el c.e.c., se deduce a partir de las fórmulas correspondientes a las secciones abiertas. Siendo  $\tau_{II}$  la expresión de dicho flujo, el desplazamiento relativo de los bordes del perfil valdrá:

$$\delta_{II} = \int_{s=0}^{s=L} \frac{\tau_{II}}{G} \cdot ds = \frac{1}{G} \oint \tau_{II} \cdot ds$$

siendo  $L$  la longitud total del desarrollo de la sección.

En el estado III (Figura 1.45), las fuerzas,  $f$ , aplicadas en los bordes de la sección y perpendiculares a ella provocarán un estado de tensiones tangenciales de valor:

$$\tau_{III} = \frac{f}{t_s} = \tau_A$$

donde  $t_s$  es el espesor que puede ser variable de la sección, en el punto de coordenada curvilínea  $s$  considerado. El desplazamiento relativo entre los bordes del perfil, en este estado III, será:

$$\delta_{III} = \int_{s=0}^{s=L} \frac{\tau_{III}}{G} \cdot ds = \frac{f}{G} \oint \frac{ds}{t_s}$$

Por ser las deformaciones  $\delta_{II}$  y  $\delta_{III}$  iguales y contrarias, la expresión de la incógnita hiperestática  $f$  será:

$$f = - \frac{\oint \tau_{II} \cdot ds}{\oint \frac{1}{t_s} \cdot ds}$$

Conocido el valor de  $f$ , la expresión del flujo de tensiones tangenciales en el estado I —es decir, en el cajón real cerrado— será la suma de los correspondientes a los estados II, III (Figura 1.46), es decir:

$$\tau_I = \tau_{II} + \tau_{III} = \tau_{II} + \frac{f}{t_s} = \tau_{II} - \frac{1}{t_s} \cdot \frac{\oint \tau_{II} \cdot ds}{\oint \frac{1}{t_s} \cdot ds}$$

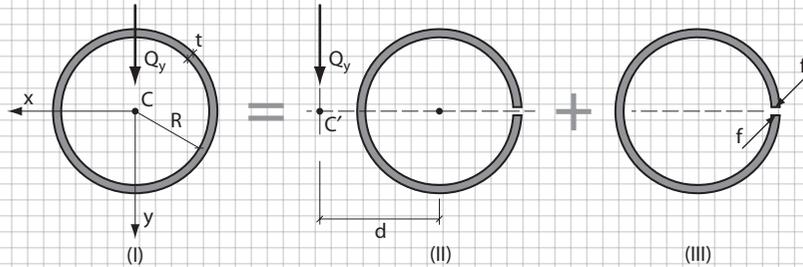
En el caso particular de que se trate de una pieza de espesor  $t$ , constante, la expresión anterior queda reducida a:

$$\tau_I = \tau_{II} - \frac{\oint \tau_{II} \cdot ds}{L}$$

**Ejercicio 1.16**

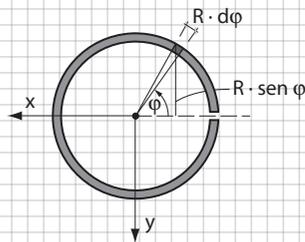
**Deducir la expresión del flujo de tensiones tangenciales para una sección circular, de radio R y espesor constante t, solicitada por un esfuerzo cortante vertical  $Q_y$ .**

Tal y como acabamos de ver, descompondremos el estado tensional que queremos resolver (I), en dos estados II y III que se adicionan.



El flujo de tensiones tangenciales  $\tau_{II}$ , teniendo en cuenta la simetría de la sección ( $I_{xy} = 0$ ), responde a la expresión:

$$\tau_{II} = \frac{-Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot t}$$



El momento estático,  $S_x$ , será:

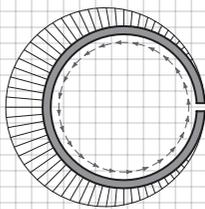
$$S_x = \int_0^\varphi (-R \cdot \text{sen } \varphi) \cdot t \cdot R \cdot d\varphi = -R^2 \cdot t \cdot \int_0^\varphi \text{sen } \varphi \cdot d\varphi$$

$$S_x = R^2 \cdot t \cdot \cos \varphi \Big|_0^\varphi = -R^2 \cdot t \cdot (1 - \cos \varphi)$$

Por otra parte:  $I_x = \int_0^{2\pi} t \cdot R \cdot d\varphi \cdot (R \cdot \text{sen } \varphi)^2 = R^3 \cdot t \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \varphi \cdot d\varphi = R^3 \cdot t \cdot \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \text{sen } 2\varphi \right]_0^{2\pi} = \pi R^3 t$

De manera que resulta:  $\tau_{II} = \frac{-Q_y}{t} \cdot \frac{S_x}{I_x} = \frac{Q_y}{t} \cdot \frac{R^2 t \cdot (1 - \cos \varphi)}{\pi R^3 t} = \frac{Q_y}{\pi R t} \cdot (1 - \cos \varphi)$

El gráfico correspondiente es:



Valores característicos de  $\tau_{II}$ :

$$\tau_{II} = \frac{Q_y}{\pi R t} (1 - \cos \varphi)$$

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\tau_{II}$	0	$\frac{Q_y}{\pi R t}$	$2 \frac{Q_y}{\pi R t}$	$\frac{Q_y}{\pi R t}$

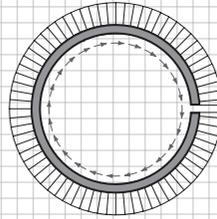
Obsérvese que  $\tau_{m\acute{a}x}$  (para  $\varphi = \pi$ ) es cuatro veces el valor que resultaría de repartir el cortante,  $Q_y$ , en la totalidad del área de la sección  $A = 2\pi R t$

En el estado III, el valor de f correspondiente se determina mediante la expresión:

$$f = - \frac{\oint \tau_{II} \cdot ds}{\oint \frac{1}{t_s} \cdot ds} = -t \cdot \frac{\oint \tau_{II} \cdot ds}{2\pi R}$$

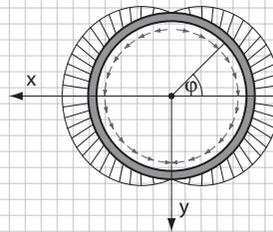
y como  $ds = R \cdot d\varphi$ :  $\oint \tau_{II} \cdot ds = \frac{Q_y}{\pi R t} \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) R \cdot d\varphi = \frac{Q_y}{\pi t} [\varphi - \text{sen } \varphi]_0^{2\pi} = \frac{Q_y}{\pi t} \cdot 2\pi = \frac{2Q_y}{t}$

Por lo tanto,  $f = -t \cdot \frac{2Q_y/t}{2\pi R} = -\frac{Q_y}{\pi R}$  y, en consecuencia, el flujo de tensiones tangenciales para el estado III será  $\tau_{III} = \frac{f}{t} = -\frac{Q_y}{\pi R t}$  siendo su representación gráfica la siguiente:



$$\tau_{III} = -\frac{Q_y}{\pi R t}$$

De la suma de los estados II y III, se obtiene la distribución del flujo en el estado I:



$$\tau_I = \tau_{II} + \tau_{III}$$

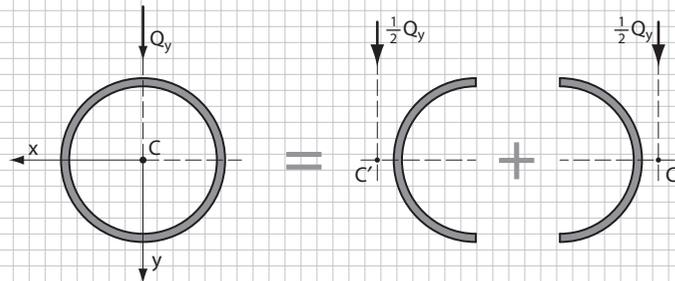
$$\tau_I = \frac{Q_y}{\pi R t} (1 - \cos \varphi) - \frac{Q_y}{\pi R t} = -\frac{Q_y}{\pi R t} \cos \varphi$$

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\tau_I$	$-\frac{Q_y}{\pi R t}$	0	$\frac{Q_y}{\pi R t}$	0

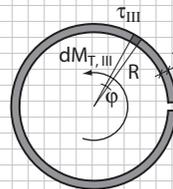
siendo los valores característicos los que se representan en el cuadro.

El valor máximo es dos veces el que resultaría de dividir el cortante por el área total.

Como ya se comentó anteriormente, no habría sido necesario desarrollar así este ejercicio, porque por razones de simetría resulta evidente que las tensiones tangenciales se tenían que anular en los puntos más alto y más bajo; y en consecuencia, podríamos haber llegado más directamente a la solución calculando la distribución de  $\tau$  para la semisección sometida a un cortante  $1/2 Q_y$ .



Para concluir, es ilustrativo determinar el c.e.c. del estado II, teniendo en cuenta que el momento torsor resultante de las tensiones tangenciales del estado III, que genera el par de fuerzas  $f$  aplicadas en los labios abiertos del perfil, tiene que ser igual al desplazamiento,  $d$ , de  $Q_y$  entre los c.e.c. de los estados I y II; es decir:  $M_{T,III} = Q_y \cdot d$ . Tendremos:

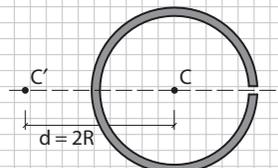


$$dM_{T,III} = \tau_{III} \cdot t \cdot R \cdot d\varphi \cdot R$$

$$M_{T,III} = \int_0^{2\pi} \tau_{III} \cdot t \cdot R \cdot d\varphi \cdot R$$

$$M_{T,III} = -\frac{Q_y}{\pi R t} \cdot R^2 t \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = -2 \cdot R \cdot Q_y$$

y por lo tanto:



$$d = \frac{M_{T,III}}{Q_y} = -\frac{2 \cdot R \cdot Q_y}{Q_y} = -2R$$

Lo que confirma que el c.e.c. de la sección cerrada se encuentra en C, centro de simetría de la sección.

## 1.5 La torsión

### 1.5.1 Introducción

En el apartado 1.4.4 se ha tratado ampliamente del concepto de “centro de esfuerzos cortantes” (c.e.c.) de una sección cualquiera, definido como el punto por el que debería pasar la línea de acción de las cargas aplicadas para que la pieza estuviese exclusivamente sometida al estado tensional propio de la flexión simple. De no ser así, la excentricidad de la carga con relación al c.e.c. provocaría unas solicitaciones adicionales de torsión que generarían un nuevo estado tensional que se añadiría a las tensiones normales, originadas por los momentos flectores, y a las tensiones tangenciales, consecuencia de los esfuerzos cortantes.

Para algunas secciones características utilizadas frecuentemente en nuestras estructuras, podemos recordar (Figura 1.47) la posición del c.e.c. y la generación de torsores debida a la excentricidad de la carga.

En los tres casos representados, el estado real I se puede descomponer en otros dos: el estado II con  $Q$  pasando por el c.e.c., que es el estado correspondiente a la flexión simple, y el estado III, en el que la sección está sometida a un momento torsor cuyo valor es el producto de  $Q$  por la excentricidad de su línea de acción en relación con el centro de esfuerzos cortantes.

Estos simples ejemplos, que recuerdan la influencia del punto de aplicación de las cargas en la forma de trabajo de las vigas, anuncian al mismo tiempo la frecuencia con que la torsión puede hacer acto de presencia en elementos concebidos originalmente para trabajar exclusivamente en flexión. Así, en una viga de borde con sección en  $\Gamma$  (Figura 1.48) sobre la que se apoya el forjado de una estructura de edificación, el punto de aplicación de la carga no suele pasar por el centro de esfuerzos cortantes que, en este tipo de secciones, doblemente simétricas, coincide con su centro de gravedad.

En consecuencia, la viga estará solicitada por unos esfuerzos de torsión que provocarán un giro transversal de la sección y el correspondiente estado tensional. Tal como se muestra en el esquema, al comenzar a deformarse por flexión el forjado, la carga se situaría en el borde del perfil que comenzaría a girar por torsión hasta acomodarse su giro con el del forjado al que sirve de apoyo, a la vez que se produce un cierto centrado del punto de aplicación de la carga.

Dada la escasa rigidez torsional de estas vigas y la gran rigidez que generalmente tienen los forjados en su plano –lo que coacciona el giro transversal del perfil–, los esfuerzos de torsión resultantes suelen tener escasa importancia y, por ello, en la práctica normalmente no resulta necesaria su cuantificación. Pero se trata de un caso que pone de manifiesto la presencia de torsiones en elementos que se diseñan y calculan para trabajar exclusivamente en flexión.

Si en un caso como el anterior en lugar de un perfil en  $\Gamma$  hubiésemos dispuesto un perfil en  $\Gamma$ , la dificultad para asegurar que la carga se aplique en la vertical del centro de esfuerzos cortantes sería aun mayor y solo podría lograrse (Figura 1.49) mediante ménsulas destinadas a recibir las cargas y evitar el contacto del perfil en  $\Gamma$  con el forjado. En otro caso se producirían torsiones en el perfil en  $\Gamma$  que serían de mayor importancia que en las secciones en  $\Gamma$  debido a la posición del c.e.c. Es este uno de los motivos por los que este tipo de perfil suele ser relativamente poco utilizado como elemento en flexión.

Los ejemplos anteriores pretenden relacionar la torsión con la teoría de flexión simple ya estudiada, de la que se puede considerar como una prolongación, como un paso adelante más en el conocimiento de la respuesta de las estructuras a las solicitaciones que actúan sobre ellas. Pero hay muchos otros ejemplos de estructuras que se utilizan en la práctica en las que la torsión es insoslayable y en las que su presencia ha sido conscientemente buscada. Así ocurre en el caso de las llamadas “vigas balcón”, con cargas perpendiculares a su plano, idealizadas en la Figura 1.50.

En edificios altos es frecuente la presencia de núcleos rígidos, con sección en cajón, para alojar escaleras y ascensores, que se suelen dimensionar, además, para transmitir a la cimentación las cargas horizontales provocadas por el viento y para asegurar su estabi-

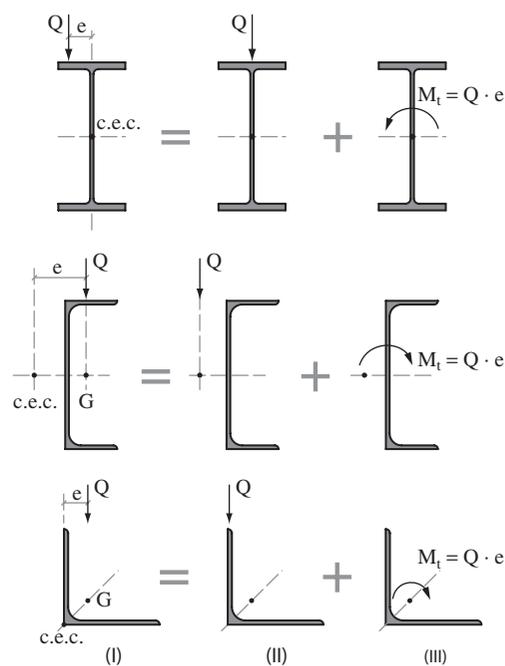


Figura 1.47 Posiciones del c.e.c.

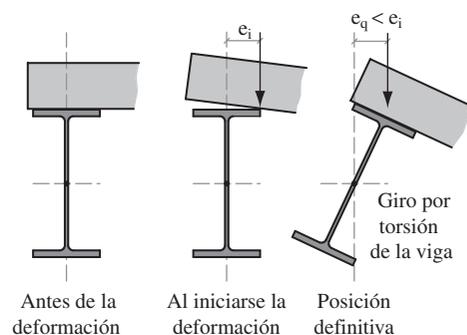


Figura 1.48 Génesis de la torsión.

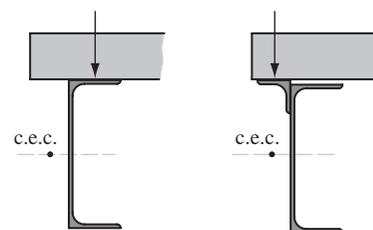


Figura 1.49 Dispositivo para limitar la torsión.

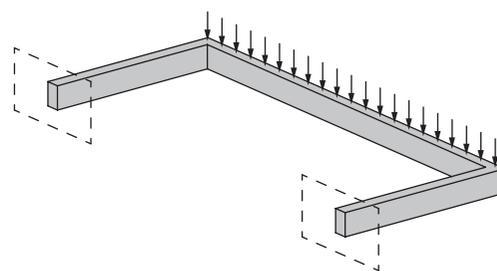
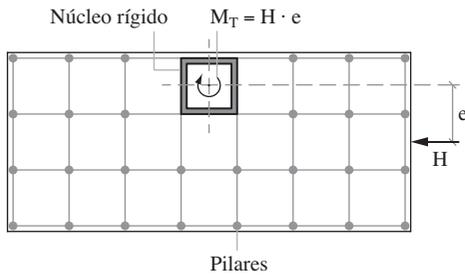


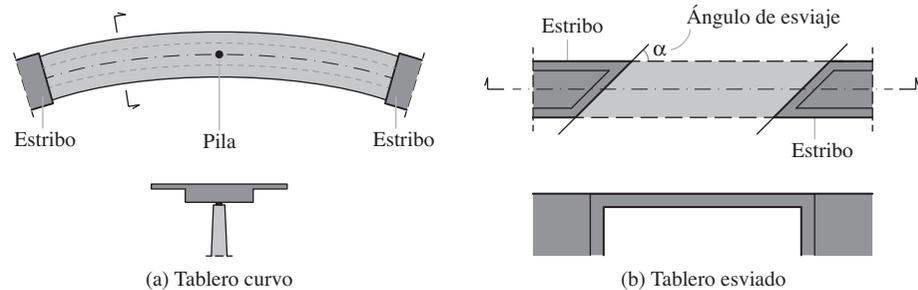
Figura 1.50 Viga balcón.



**Figura 1.51** Estructura de un edificio con núcleo rígido.

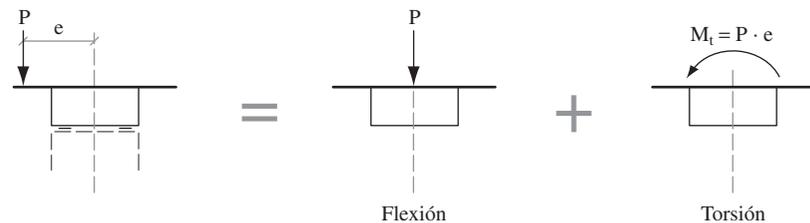
lidad frente a solicitaciones sísmicas. Cuando su posición no es simétrica, estos núcleos rígidos están lógicamente solicitados por significativas torsiones (Figura 1.51).

Pero donde los ingenieros se enfrentan más frecuentemente con la torsión es en la concepción y el dimensionamiento de tableros de puentes. En los que tienen geometría curva, con o sin apoyos intermedios, el mecanismo de torsión puede tener una importancia equiparable a la que tiene el mecanismo de flexión en la transmisión de las cargas (Figura 1.52a).



**Figura 1.52**

También en los puentes “rectos” se producen importantes esfuerzos en torsión, consecuencia de la posición excéntrica de las cargas (Figura 1.53).



**Figura 1.53** Mecanismo de transferencia de cargas excéntricas.

En la transmisión de cargas a los estribos de un puente esviado se generan asimismo esfuerzos de torsión, que serán tanto mayores cuanto menor sea el ángulo de esviaje,  $\alpha$ , (Figura 1.52b), debido a que sus secciones extremas se verán obligadas a girar alrededor de un eje que coincide con la línea esviada del apoyo.

Podrían citarse otros muchos casos de estructuras en cuyo diseño y dimensionamiento interviene la torsión. En unos casos, como aliado del ingeniero por ser un mecanismo útil para transmitir las cargas a través de la estructura concebida para tal fin. En otros, como esfuerzos parásitos no deseados pero que surgen inevitablemente y a los que la estructura proyectada debe también dar la respuesta adecuada.

Por todo ello, es evidente la necesidad del estudio de la torsión que suele estar más o menos presente en todo tipo de elementos estructurales solicitados en flexión. Pero, además, el estudio de la torsión es un paso previo indispensable para abordar diversos problemas de inestabilidad estructural. Así, la capacidad de una pieza esbelta para transmitir compresiones puede estar limitada por el riesgo de pandeo por torsión pura o por pandeo por torsión y flexión combinados, y no solamente por el pandeo por flexión, que no es sino un caso particular, que se da en determinadas condiciones, del caso más general citado. En cuanto a las piezas en flexión, puede también estar limitada su capacidad por el riesgo de “pandeo lateral de la viga”, problema de inestabilidad directamente relacionado con la torsión. El estudio de la teoría del pandeo por flexión y torsión, y del pandeo lateral de vigas, constituye un aspecto importante de las estructuras metálicas. Surge que figure, con mayor o menor extensión, en todos los textos de esta disciplina; lo que justifica, también, la necesidad de su estudio. Pero es una cuestión presente también en las estructuras de hormigón aunque, en general, debido a su mayor robustez no suele tener la misma importancia. Así, por ejemplo, durante el montaje con grúa de vigas en I de hormigón estructural se debe verificar el riesgo del pandeo torsional de la viga, algo que ha sido causa de algunos accidentes notorios.

### 1.5.2 Ideas básicas sobre la torsión

Antes de abordar el estudio teórico de la torsión con toda su parafernalia matemática, conviene hacer algunas reflexiones que nos ayuden a comprender su esencia, a sentir las tensiones que genera y a intuir las deformaciones asociadas.

Con tal finalidad, nos referiremos en primer lugar a las tensiones que tienen por origen la torsión. A este respecto hay que recordar, una vez más, que el estado tensional en una sección debe estar en equilibrio con el esfuerzo en ella aplicado, o ser su equivalente.

Consideremos una sección I sometida a un momento torsor,  $M_T$  (Figura 1.54). Pueden existir dos diferentes distribuciones de tensiones tangenciales que equivalgan al torsor aplicado.

Por un lado, tendremos la distribución tensional (Figura 1.55), en la que todo ocurre como si a lo largo del perfil existiesen un par de fuerzas,  $dF$ , iguales y contrarias, separadas por un brazo de palanca,  $z$ , que equilibrarían el torsor aplicado.

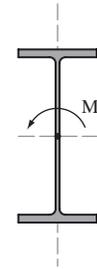


Figura 1.54 Perfil solicitado en torsión.

$$\frac{dm_T}{ds} = dF \cdot z$$

La integración de estos momentos torsores diferenciales a lo largo de todo el desarrollo del perfil tendría que coincidir con el valor del momento torsor,  $M_T$ .

El mecanismo descrito queda gráficamente representado en la Figura 1.56:

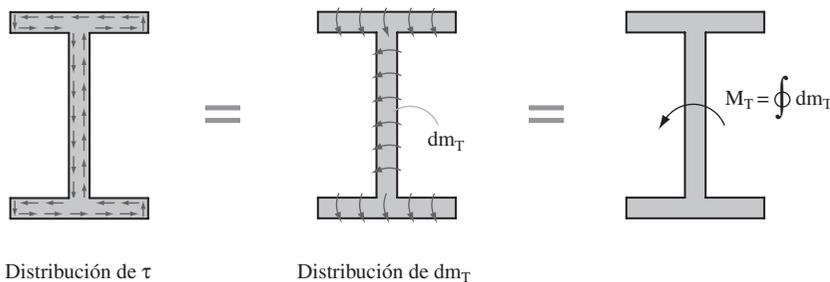


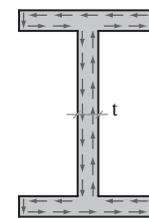
Figura 1.56 Mecanismo de respuesta a la torsión.

La distribución mostrada de tensiones tangenciales puede equilibrar por sí sola el momento torsor aplicado a la sección y es, por ello, una solución posible al problema que estamos analizando. Conviene señalar que, en ese caso, la respuesta de la sección depende exclusivamente del ancho de sus paredes y de la longitud total de su desarrollo. En consecuencia, secciones de geometrías diferentes pero con igual perímetro y espesor de pared (Figura 1.57) se comportarán análogamente.

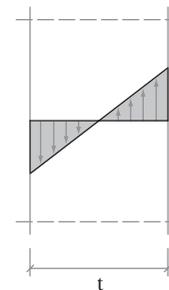


Figura 1.57 Secciones con análogo comportamiento torsional.

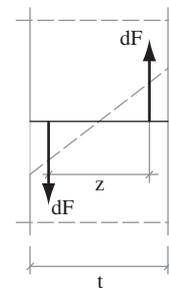
Hay que insistir que esto será así cuando el mecanismo de respuesta de la sección a la sollicitación de torsión sea el que hasta ahora hemos considerado. Dicho planteamiento corresponde a la denominada “torsión uniforme”, que solamente induce tensiones tangenciales y en el que el momento torsor que sollicita la sección se va equilibrando con los torsores diferenciales que se desarrollan uniformemente a todo lo largo de su perímetro. Y, cuando no tengamos aún certeza de la ley de distribución de tensiones tangenciales en el ancho del perfil, se puede afirmar que, por simetría, la tensión tangencial en su punto medio será nula. Lo que a su vez significa que no se producirán deformaciones angulares en la línea media de la sección, conclusión que utilizaremos más adelante cuando tratemos las deformaciones de una pieza sometida a torsión uniforme.



Flujo esquemático de tensiones tangenciales en la sección

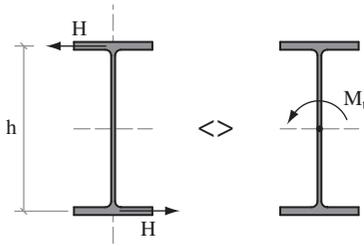


Distribución lineal de tensiones tangenciales en el ancho de la pared del perfil

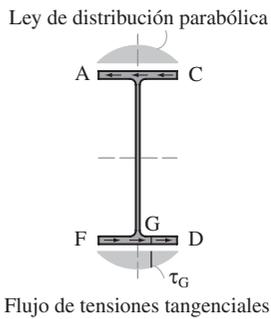


Resultante de las tensiones tangenciales

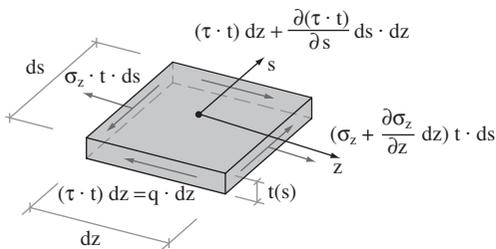
Figura 1.55 Estado tensional provocado por la torsión.



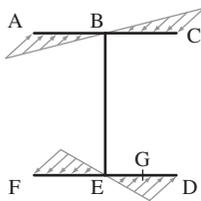
**Figura 1.58** Posible equilibrio torsional.



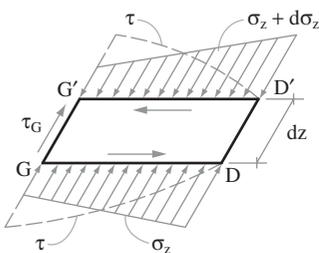
**Figura 1.59** Posible estado tensional inducido por la torsión.



**Figura 1.60** Equilibrio de un elemento diferencial.



**Figura 1.61** Tensiones normales provocadas por la torsión.



**Figura 1.62** Tensiones normales y tangenciales inducidas por la torsión.

Pero, además de la distribución tensional que hemos visto hasta ahora, existe otra capaz de equilibrar también el momento torsor aplicado a la sección. Volviendo, en efecto, a la sección en  $\Gamma$  que estamos analizando, podemos imaginar el momento torsor equilibrado por un par de fuerzas iguales y contrarias (Figura 1.58), aplicadas en las alas del perfil y con un valor tal que  $H \cdot h = M_T$ .

Estas fuerzas horizontales,  $H$ , serán la resultante de un conjunto de tensiones tangenciales aplicadas en las alas de perfil, cuya distribución será, evidentemente, parabólica (Figura 1.59).

Este nuevo conjunto de tensiones tangenciales puede asimismo equilibrar el momento torsor aplicado y, puede ser, por consiguiente, otra forma de respuesta de la sección frente a una sollicitación torsional: se trata de la respuesta en **torsión no uniforme**.

Por otra parte, la existencia de una distribución de tensiones tangenciales de este tipo conlleva la presencia de un estado de tensiones normales. Realmente, como ya se ha expuesto en el apartado de flexión simple al tratar del significado físico de las tensiones tangenciales, dichas tensiones nacen para equilibrar la resultante de tensiones normales en una parte de la viga aislada entre dos secciones determinadas. Por ello, una vez conocida una distribución de tensiones tangenciales que equilibra el momento torsor, existirán unas tensiones normales relacionadas entre sí por la expresión:

$$\frac{\partial(\tau \cdot t)}{\partial s} = -t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

que resulta de la condición de equilibrio (Figura 1.60) de un elemento diferencial de la estructura en estudio.

En este caso, la distribución parabólica de las tensiones tangenciales está asociada ineludiblemente a una distribución lineal de las tensiones normales (Figura 1.61), y el valor máximo de  $\tau$  corresponderá el valor nulo de  $\sigma$ .

Si aislamos, por ejemplo, una parte del ala inferior  $DG$  de la viga, entre dos secciones separadas  $dz$ , el esquema de equilibrio será el de la Figura 1.62. El volumen de tensiones normales en el lado  $D'G'$  será mayor que en el lado  $DG$ . Su diferencia deberá ser equilibrada por la tensión tangencial  $\tau_G$  actuando a lo largo del lado  $GG'$ .

En el caso de la torsión uniforme, las tensiones tangenciales se autoequilibraban en la anchura de la pared de la pieza y se anulaban en la línea media del perfil y, en consecuencia, no existían tensiones normales. Pero en la respuesta en torsión no uniforme, la distribución de tensiones normales en las alas del perfil sería la misma que resultaría de haber aplicado dos momentos flectores iguales y opuestos contenidos en el plano de las alas del perfil. Al conjunto de estos dos momentos de signo opuesto separados por un brazo de palanca,  $h$ , se conoce con el nombre de “bimomento”,  $B_\omega$ : momento de un momento, que es un nuevo tipo de esfuerzo, sobre el que volveremos más adelante y que caracteriza también a la torsión no uniforme.

$$B_\omega = M \cdot h$$

Dada la relación que existe entre el cortante,  $H$ , y el flector,  $M$ , aplicados en las alas del perfil, tendremos:

$$H = \frac{dM}{dz}$$

$$M = \int H \cdot dz = \int \frac{M_T}{h} \cdot dz$$

Luego:

$$B_\omega = M \cdot h = h \cdot \int \frac{M_T}{h} \cdot dz = \int M_T \cdot dz$$

Esta expresión del bimomento se deducirá también cuando se formule con detalle la teoría de la torsión no uniforme. Pero a partir de estas sencillas reflexiones ha surgido ya este importante concepto del bimomento, que es un nuevo tipo de esfuerzo, producto de un momento por una distancia, con dimensiones  $F \cdot L^2$ , y que tiene que equilibrar o ser equivalente al conjunto de tensiones normales que aparecen en una sección que responde a una sollicitación torsional (Figura 1.63) con el mecanismo de la torsión no uniforme.

Resumiendo lo expuesto hasta ahora, nos encontramos con dos posibles modos, muy diferentes, de respuesta de una sección en I frente a una sollicitación de torsión. Por un lado tendremos el modo correspondiente a la torsión uniforme, en el que se generan solamente tensiones tangenciales, que se autoequilibran en el ancho de la pared de la pieza y que se hacen nulas en su línea media. Por otro lado, tendremos la respuesta correspondiente a la torsión no uniforme, en la que aparecen una distribución de tensiones tangenciales en las alas del perfil y, al tiempo, un conjunto de tensiones normales por necesidades del equilibrio interno de la pieza.

Planteadas así las cosas, el problema al que nos enfrentamos al analizar la sección en I sollicitada por un momento torsor es identificar si el mecanismo de respuesta es el correspondiente a la torsión uniforme, a la torsión no uniforme o a una combinación de ambas. Todo lo anterior es extrapolable a cualquier otro tipo de sección. Y, en general, los dos mecanismos suelen intervenir en la respuesta de la pieza: una parte del torsor se absorbe en torsión uniforme y la otra parte en torsión no uniforme. La cuantificación de ambos valores obliga al planteamiento, primero, y a la resolución después, de una ecuación diferencial de cuarto grado; lo que será objeto de un apartado posterior. Pero, en términos cualitativos, tendremos el planteamiento representado en la Figura 1.64 para la sección analizada:

$$M_T = M_u + M_\omega \begin{cases} M_u = \alpha M_T \rightarrow \tau_u \\ M_\omega = (1 - \alpha) M_T \rightarrow \tau_\omega \end{cases} \quad B_\omega = \int M_T dz \rightarrow \sigma_\omega$$

Con razonamientos análogos –basados en las exigencias de equilibrio– y teniendo en cuenta que el flujo de tensiones tangenciales en una sección varía progresivamente sin cambios bruscos, que los cambios de sentido se producen donde  $\tau = 0$ , y que en los puntos en los que  $\tau$  es máximo el valor de  $\sigma$  es nulo, podemos representar las leyes de tensiones tangenciales y normales provocadas por la torsión no uniforme en algunos perfiles característicos, que tendrán un aspecto análogo a los deducidos al estudiar el comportamiento en flexión simple (M y Q) de las mismas secciones.

En el caso del perfil en J (Figura 1.65), la resultante H de las tensiones tangenciales en el ala AB debe ser igual y contraria a la resultante en DE para que exista equilibrio de fuerzas horizontales. El de las fuerzas verticales exige, además, que la resultante de las tensiones tangenciales en el alma BCD sea nula. En consecuencia, la ley de tensiones tangenciales  $\tau_\omega$  tiene que ser la dibujada, y de ella se deduce el aspecto de la ley de tensiones normales  $\sigma_\omega$ . La resultante de momentos obliga, por otra parte, a que  $H \cdot h$  sea igual a la parte del momento torsor  $M_\omega = (1 - \alpha) \cdot M_T$  absorbido en torsión no uniforme.

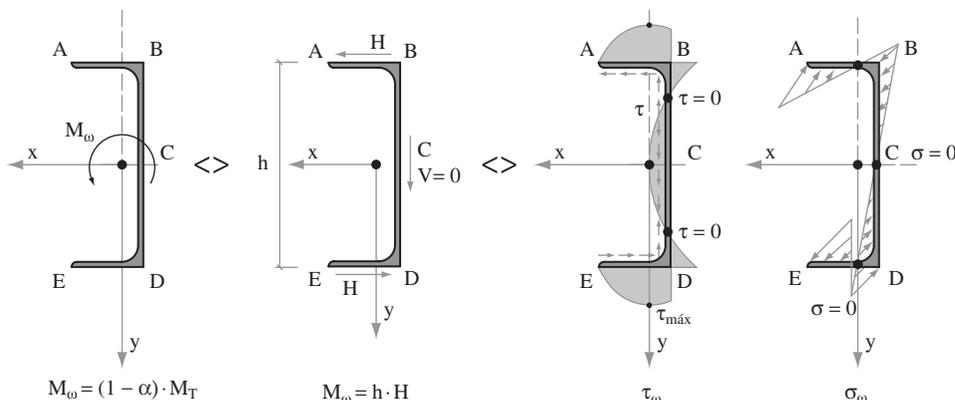


Figura 1.65 Equilibrio y tensiones torsionales.

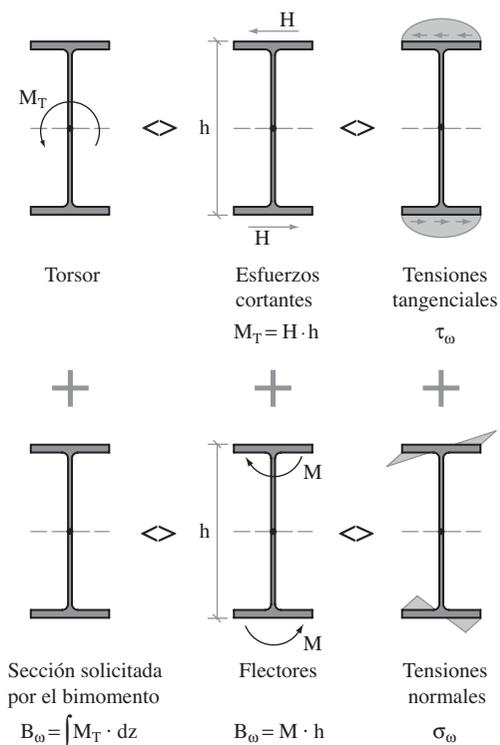


Figura 1.63 Respuesta en torsión no uniforme.

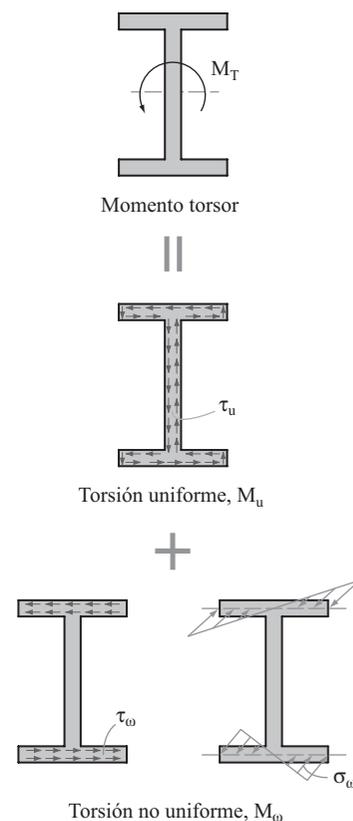
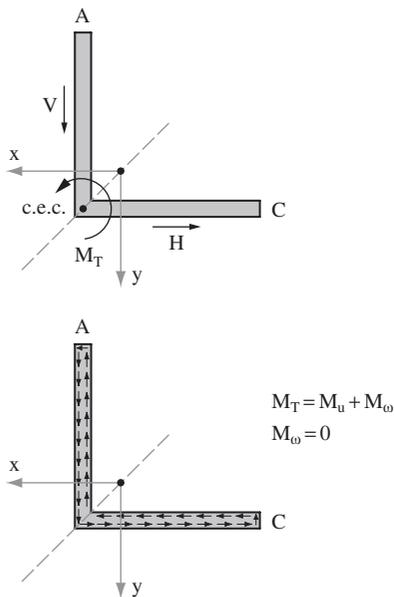
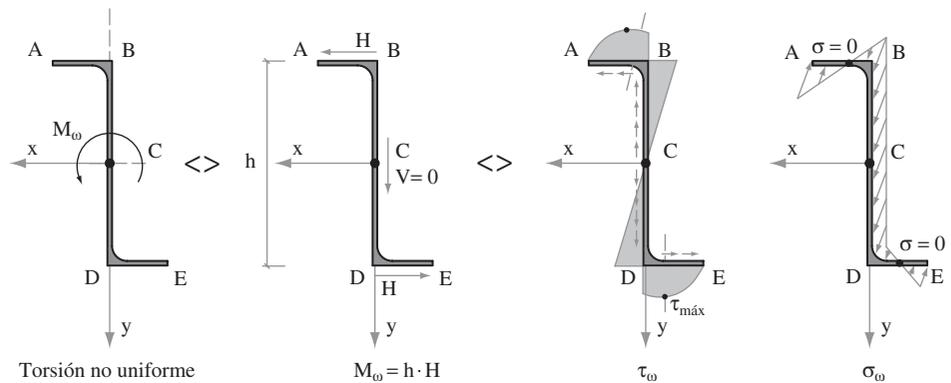


Figura 1.64 Respuesta torsional genérica.



**Figura 1.67** Equilibrio y tensiones provocadas por la tensión uniforme.

En el caso del perfil en  $\perp$  (Figura 1.66), el razonamiento para llegar a los esquemas representados es idéntico al realizado en el caso anterior.



**Figura 1.66** Equilibrio y tensiones torsionales.

Si se trata de un perfil en L (Figura 1.67), el equilibrio de la sección obliga a que tanto la resultante de tensiones tangenciales en el ala vertical AB del perfil como en el ala horizontal BC sean nulas. Se debe verificar, en efecto, que  $H = V = 0$ , y que solo sea posible equilibrar el momento torsor aplicado con el mecanismo de la torsión uniforme que, en este tipo de perfiles, es el único mecanismo de respuesta posible, y las únicas tensiones que se generen serán las que corresponden a dicho mecanismo.

Otro tanto ocurre, y por idénticas razones, con los perfiles  $\Gamma$  o  $\perp$ , constituidos por dos chapas delgadas que se cortan en un punto que será su centro de esfuerzos cortantes.

En estos casos, el único mecanismo de respuesta posible a una sollicitación torsional es el que corresponde a la torsión uniforme.

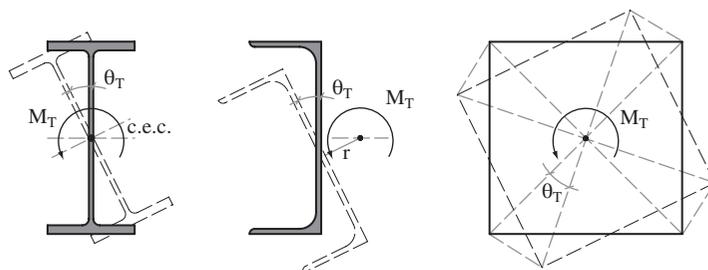
### 1.5.3 Las deformaciones provocadas por la torsión: el alabeo

#### 1.5.3.1 El concepto de "alabeo"

La aplicación de un momento de torsión a una sección cualquiera (Figura 1.68) provoca un giro  $\theta_T$  de dicha sección en su plano, giro que en ausencia de coacciones externas se produce alrededor de un eje, que como se demostrará más adelante, coincide con el centro de esfuerzos cortantes de la sección, al que por esta razón se conoce también como "centro de torsión".

Si consideramos ahora una viga sometida a momentos torsores variables a lo largo de la directriz de la pieza, el ángulo torsional  $\theta_T(z)$ , variará también a lo largo de dicha directriz y será función de la coordenada medida en el eje  $z$ , paralelo a la directriz de la pieza.

De manera que, al igual que una viga trabajando en flexión se caracteriza por la variación de su flecha o por un desplazamiento transversal a lo largo de su directriz, la variación del ángulo torsional  $\theta_T(z)$  caracteriza el comportamiento de un elemento sometido a esfuerzos de torsión. Conociendo la expresión del giro torsional  $\theta_T(z)$  podremos calcular esfuerzos y tensiones, igual que en el caso de flexión el conocimiento de la flecha nos permitía determinar los esfuerzos flectores y cortantes, así como las tensiones normales y tangenciales.



**Figura 1.68** Deformabilidad torsional.

Sin embargo, hay una diferencia sustancial entre la flexión y la torsión desde el punto de vista de deformacional. En la flexión, al despreciarse, en general, las deformaciones provocadas por las tensiones tangenciales, aceptábamos que las secciones inicialmente planas continuaban siéndolo después de la deformación. En la torsión también se desprecian las provocadas por las tensiones tangenciales –en la torsión uniforme ni siquiera haría falta esta simplificación, ya que  $\tau$  es nula en la línea media de la sección–, pero las secciones inicialmente planas dejan de serlo tras un giro torsional, que puede ir acompañado de deformaciones longitudinales que provocan un alabeo que, de estar coaccionado, generaría tensiones longitudinales.

Veamos, para centrar ideas, la respuesta en torsión uniforme de una viga en I de longitud  $L$  solicitada en sus extremos por dos momentos torsores,  $M_T$ , iguales y contrarios como exige el equilibrio general de la pieza. Tal como se muestra en la Figura 1.69, la cara frontal del perfil habrá girado en un sentido, y la dorsal lo habrá hecho en sentido contrario. Analizando la planta del perfil deformado observaremos que el ala superior se habrá comportado como un cuerpo rígido, pues al no estar sometida a tensiones normales, no habrá podido flexionar en su plano. Tras la deformación, los ángulos continuarán siendo rectos en las cuatro esquinas A, C, D y F, por ser nulas las tensiones tangenciales en la línea media del perfil. El movimiento en planta del ala superior se habrá limitado, por tanto, a un giro alrededor de su punto medio. Esto significa, según puede observarse en los esquemas representados, que el borde AA del ala se habrá desplazado en el sentido longitudinal de la pieza y que el CC se habrá desplazado una magnitud igual pero en sentido contrario. El comportamiento del ala inferior será análogo, pero los desplazamientos tendrán sentidos opuestos. El borde DD se habrá desplazado longitudinalmente en sentido contrario que el AA del ala superior, y otro tanto ocurrirá con el borde FF en relación con el CC. Enfocando la atención, ahora, a la cara dorsal, vemos que los puntos de la sección ABCDEF, inicialmente en un plano, no lo están después del giro torsional. Las alineaciones ABC y DEF no son paralelas: la sección se habrá alabeado. El movimiento de cualquier punto de la sección se caracterizará por un desplazamiento de componentes  $u, v$ , en el plano XY y, además, por un desplazamiento,  $w$ , según el eje  $z$ . Dicho desplazamiento,  $z$ , se denomina “alabeo” y es, como luego veremos, una característica geométrica de la sección, igual que lo son su área o su inercia.

Hay que destacar también que, en este caso, todas las secciones de la viga habrán sufrido la misma deformación en el sentido del eje de las  $z$ ; es decir, el mismo alabeo. Y que el giro de una sección cualquiera será una función lineal de  $z$  ( $\theta = k \cdot z$ ), siendo por lo tanto su variación angular constante ( $\theta' = k$ ); lo que también es característico de la torsión uniforme.

Si analizamos ahora el mismo perfil pero para la respuesta correspondiente a la torsión no uniforme, llegaremos también al concepto de “alabeo” y a la constatación de que la sección no se mantiene plana tras la deformación torsional. Tomemos, en efecto, el mismo perfil anterior pero libre en el extremo en el que se aplica un momento torsor,  $M_T$ , y, con el alabeo impedido en el otro. Supongamos, ahora, que la totalidad del torsor se transmite con el mecanismo de la torsión no uniforme. Entonces, como ya hemos visto anteriormente, el torsor se puede sustituir (Figura 1.70) por dos esfuerzos horizontales  $H = M_T/h$  aplicados en las alas del perfil.

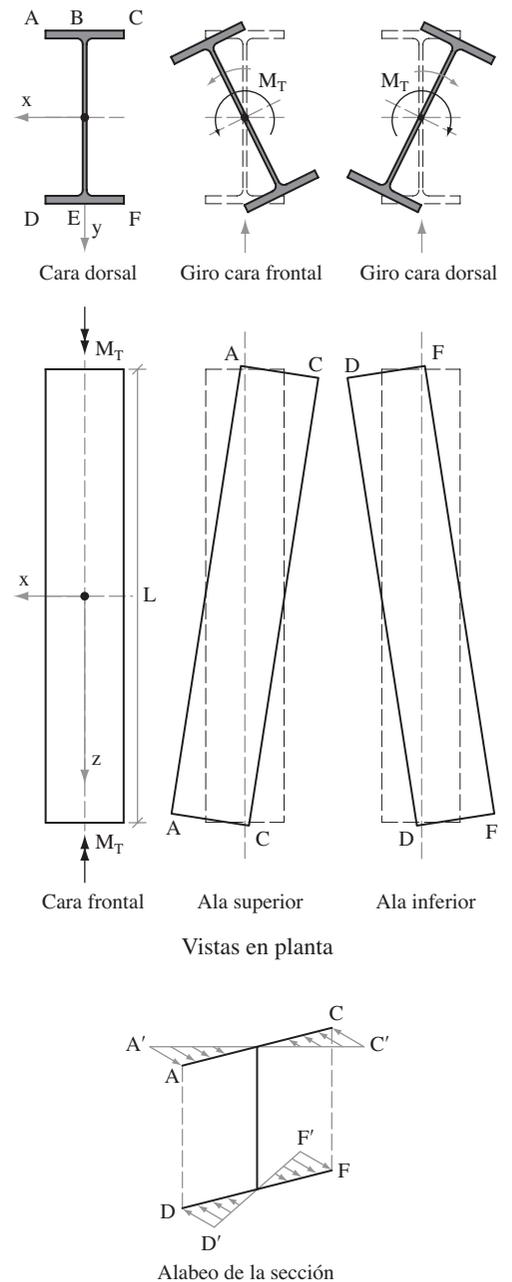


Figura 1.69 Deformabilidad de una viga solicitada en torsión.

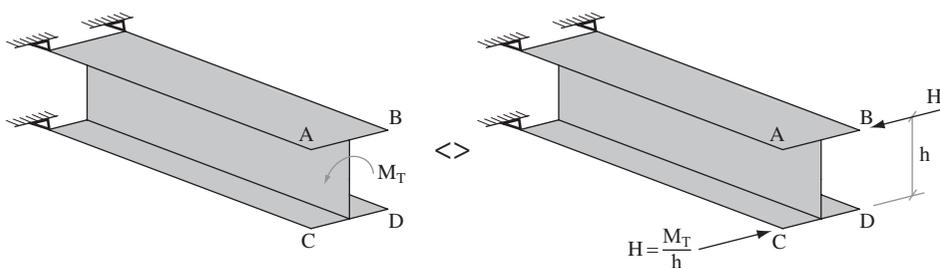


Figura 1.70 Torsión no uniforme.

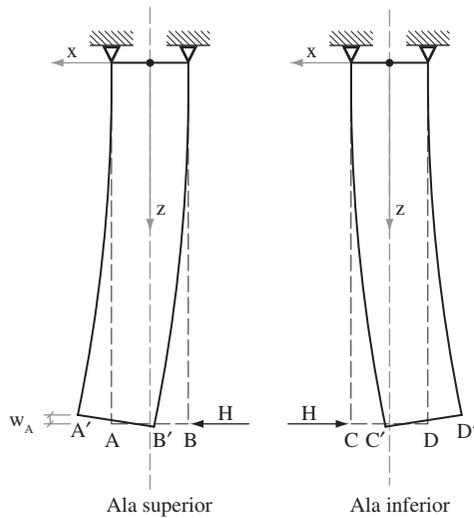


Figura 1.71 Alabeo de la viga.

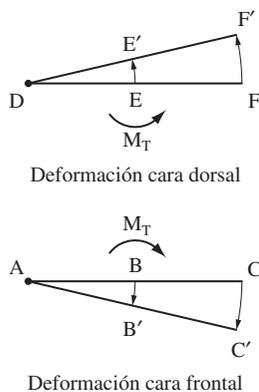


Figura 1.73 Rotación torsional con eje AD, de las caras frontal y dorsal.

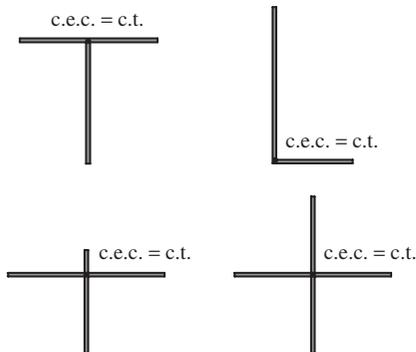


Figura 1.74 Secciones compuestas por dos chapas delgadas.

La deformación en planta del perfil será la representada en la Figura 1.71.

Es obvio que también en este caso se produce un alabeo de la sección frontal. El punto A habrá pasado al punto A', habiéndose desplazado para ello una magnitud  $w_A$  en el sentido del eje z.

El punto C se habrá desplazado la misma magnitud, pero en sentido contrario. Otro tanto ocurre con los puntos B y D. En definitiva, los puntos A, B, C y D, que inicialmente estaban en un plano, no lo estarán después de haber sufrido la deformación torsional. El concepto de alabeo se pone también de manifiesto en el caso de la torsión no uniforme, siendo variable a lo largo del eje z, y lógicamente nulo en la sección de empotramiento. El ángulo  $\theta$  de torsión ya no varía linealmente con z, sino con una función de rango superior  $\theta \neq k \cdot z$ .

También podemos llegar a interesantes conclusiones si analizamos lo que ocurre con una viga de longitud L y una sección rectangular muy estrecha, de espesor t y ancho  $b \gg t$ . Provoquemos primero un giro torsional alrededor de su eje BE (Figura 1.72). De esta forma, la cara frontal ABC habrá girado en un sentido, y la cara dorsal DEF en sentido contrario.

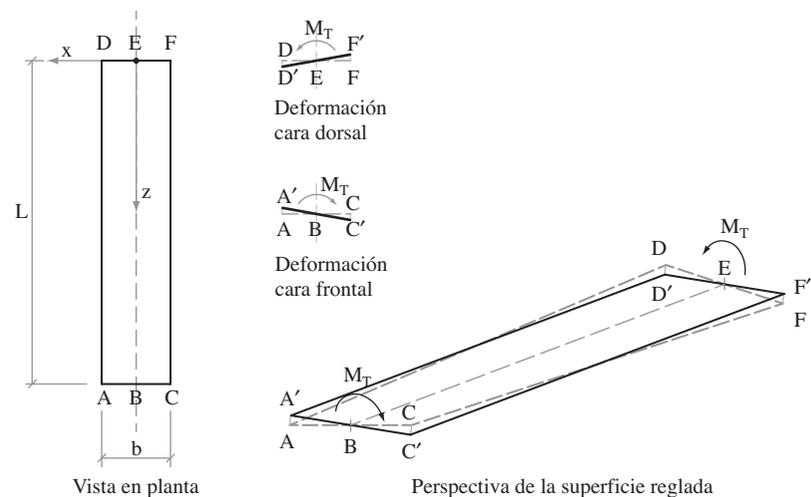


Figura 1.72 Deformabilidad torsional.

Se observa claramente cómo los puntos extremos de la pieza A, C, D y F se han desplazado siguiendo trayectorias perpendiculares al plano de la pieza, sin que el eje BE haya sufrido deformación alguna. La pieza, inicialmente plana, se ha convertido tras la deformación en una superficie reglada. La vista en planta de la pieza es idéntica antes y después de la deformación torsional. Ningún punto de la pieza se ha desplazado en el sentido de su eje: la pieza no se ha alabeado.

Habríamos llegado también a idéntica conclusión si hubiésemos forzado el giro de la pieza alrededor del eje AD (Figura 1.73) que, lógicamente, no se habría deformado, pero los puntos B, C, E y F habrían sufrido desplazamientos en dirección perpendicular al plano de la pieza, y esta se habría convertido en una superficie reglada. Igual que en el caso anterior, ningún punto de la pieza se habría desplazado en la dirección del eje de giro: no existiría alabeo.

Con estos sencillos ejemplos se ha podido precisar el concepto del alabeo, y se han mostrado las diferencias que, desde el punto de vista deformacional, distinguen a los mecanismos de torsión uniforme y no uniforme.

Si consideramos ahora (Figura 1.74) piezas compuestas por dos chapas delgadas y girando alrededor de un eje que coincide con la línea en la que se cortan —que ya sabemos que coincide con el centro de esfuerzos cortantes o centro de torsión—, tendremos resultados análogos. Cada una de las dos chapas que constituyen el perfil, tras la deformación torsional, se convertirán en superficies regladas; todos los puntos situados en el eje de giro continuarán en su posición inicial mientras que el resto habrán sufrido desplazamientos exclusivamente transversales, porque estas secciones, al girar alrededor de su c.e.c., no se alabean.

Es interesante, también, analizar lo que ocurre con una sección rectangular aislada cuando forzamos su giro torsional (Figura 1.75) alrededor de un eje exterior a la sección. Tras la deformación torsional, la línea media BE del perfil habrá girado su posición en planta pasando a B'E'. Otro tanto habrá ocurrido con las líneas AD y FC que habrán pasado a las posiciones A'D' y F'C', conservándose la perpendicularidad de los ángulos en las esquinas de la pieza. Para ello, los puntos A, B, C, D, E y F habrán tenido que desplazarse en la dirección del eje de la pieza: esta habrá alabeado en una magnitud que depende lógicamente de la distancia de la pieza al eje de giro.

A partir de este razonamiento es fácil imaginar nuevamente el alabeo de la pieza en I (Figura 1.76), considerando esta como formada por tres chapas: las dos alas y el alma, girando por torsión alrededor del centro de simetría (c.e.c. o c.t.) de la pieza. El ala ABC, al girar alrededor del eje O, se alabea tal como se ha comentado. Un alabeo igual y en sentido contrario sufrirá el ala DEF. En cambio, el alma, al girar alrededor de un eje contenido en su plano, no se alabea, aunque se convertirá en una superficie reglada; lo que por otra parte también sucede con las dos alas del perfil.

La realidad física del alabeo de una sección también se pone claramente de manifiesto al analizar el comportamiento (Figura 1.77) del tablero de un puente cuya sección transversal está constituida por dos vigas principales conectadas por una losa o chapa en cabeza, y sobre el que se aplica una carga puntual, P, en el centro del vano, pero en el borde de la sección.

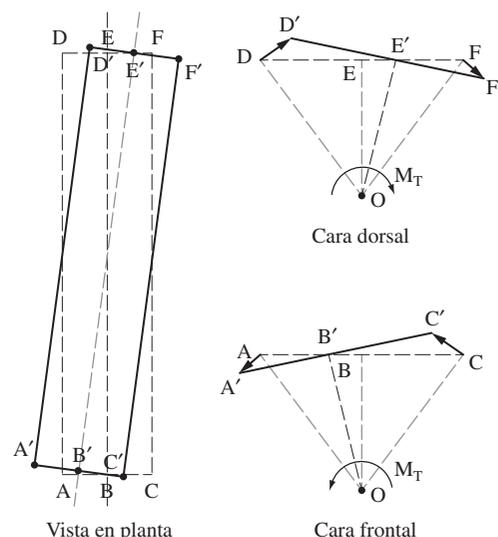


Figura 1.75 Giro rotacional alrededor de un eje externo.

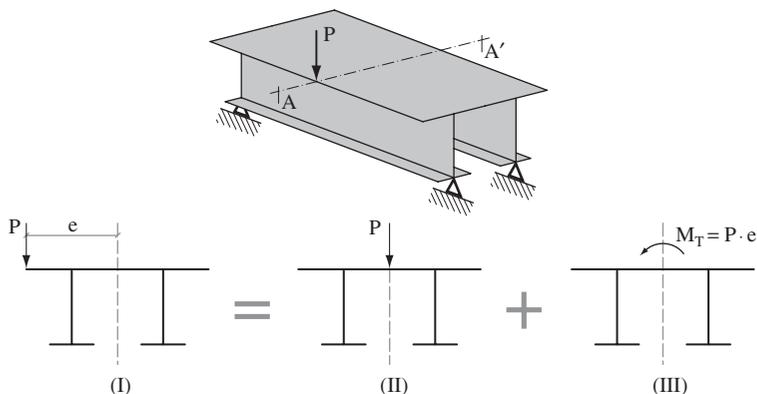


Figura 1.77 Comportamiento torsional de un tablero de puente.

Podemos descomponer el estado real I en uno virtual II, con la carga aplicada en el eje de la simetría de la sección, más otro III, solicitada por el momento torsor  $M_T = P \cdot e$ . En el estado II, las dos vigas que constituyen la sección se desplazarán verticalmente la misma magnitud (Figura 1.78). En los apoyos, las dos vigas girarán igual y, por lo tanto, las secciones correspondientes continuarán siendo planas tras la deformación. Pero, en el estado III, como consecuencia de la torsión, cada una de las dos vigas se deformará en sentido contrario (Figura 1.79), pues la torsión equivale a dos cargas actuantes sobre las vigas, pero de sentido contrario.

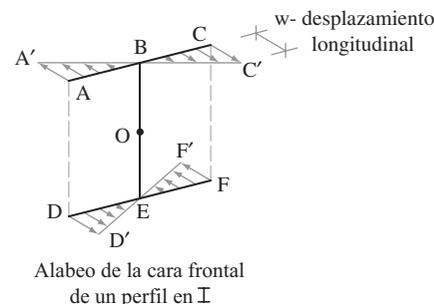


Figura 1.76 Deformabilidad torsional de una sección en I.

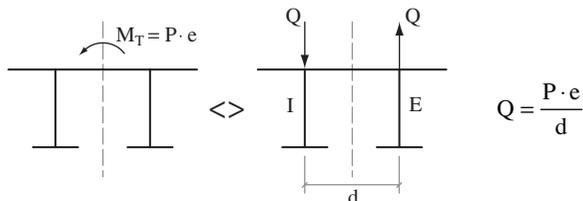


Figura 1.79 Equilibrio del tablero del puente.

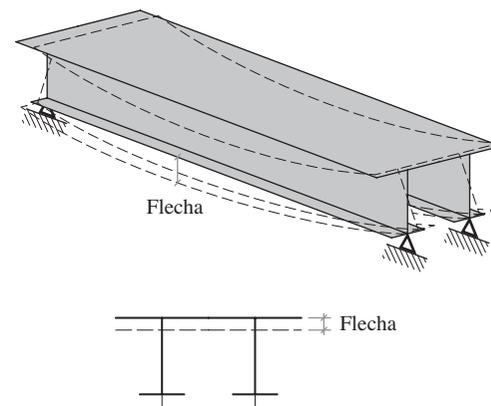
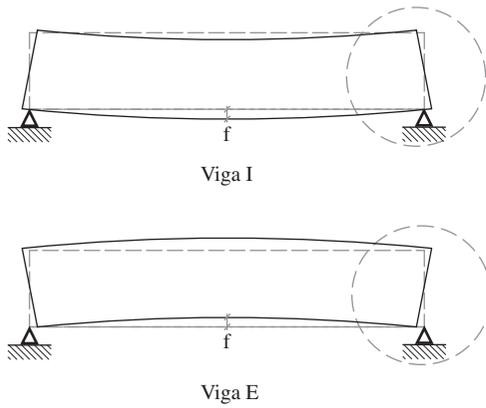
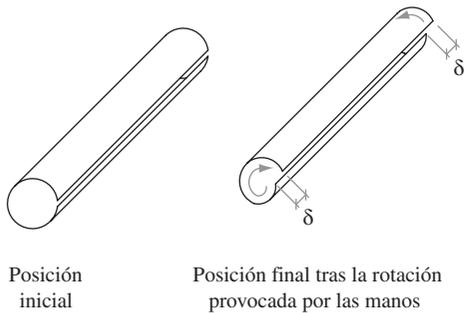


Figura 1.78 Desplazamiento del tablero para el estado II.

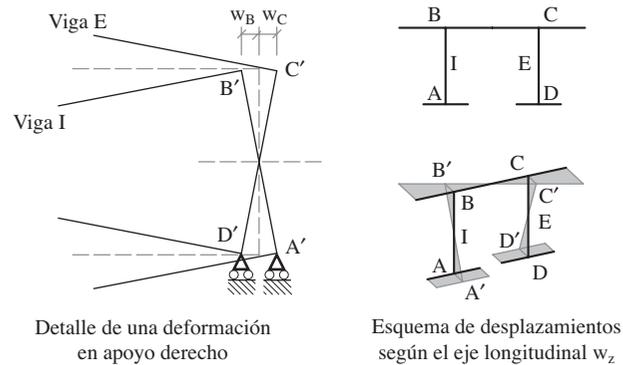


**Figura 1.80** Desplazamiento torsional de las dos vigas del tablero.



**Figura 1.82** El concepto físico del alabeo.

Para mayor claridad, en la Figura 1.80 las deformaciones de las dos vigas se representan independientes. Enfocando ahora la atención a la deformación del entorno del apoyo derecho (Figura 1.81) se observa que los puntos A, B, C y D, que antes y después de la deformación por flexión estaban en un mismo plano, tras la deformación torsional dejarán de estarlo. El punto B habrá pasado a la posición B' desplazándose  $w_B$  en la dirección de la directriz de la pieza. Análogamente ocurrirá con los puntos A, C y D. Las secciones del tablero del puente –al que estamos considerando transversalmente como definitivamente rígido– no se han conservado planas: se han alabeado como consecuencia de la torsión provocada por la excentricidad de la carga aplicada.

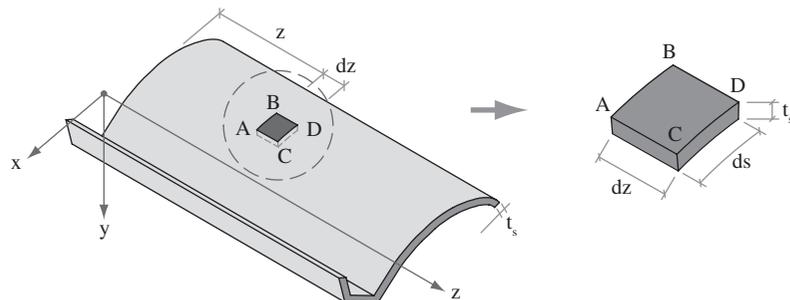


**Figura 1.81** Desplazamientos en zona de apoyos y alabeo de la sección.

Para concluir con esta introducción al concepto de alabeo y antes de comenzar con su formulación matemática, conviene realizar un sencillo experimento que pone claramente de manifiesto dicho concepto: enrollar una hoja de papel hasta formar un tubo sujeto con las manos en sus extremos; girándolas en sentido contrario (Figura 1.82) se constata cómo las secciones extremas del tubo, inicialmente planas, se alabean, ya que las fibras longitudinales del papel se mueven en dirección del eje del tubo.

### 1.5.3.2 Formulación matemática del alabeo

Consideremos en la viga de perfil abierto y pared delgada (Figura 1.83) solicitada torsionalmente, un elemento diferencial ABCD de longitud  $ds$  situado entre dos secciones  $z$  y  $z + dz$ .



**Figura 1.83** Viga de perfil abierto y pared delgada.

Como consecuencia de la torsión (Figura 1.84), la sección de coordenada  $z$  habrá girado un ángulo  $\theta$  alrededor del punto O. Además, el punto A se habrá desplazado a la posición A' siendo:

$$AA' = OA \cdot \theta = \rho \cdot \theta$$

Análogamente, el punto C, en la sección z + dz, se habrá desplazado de manera que:

$$CC' = OC \cdot (\theta + d\theta) = \rho \cdot (\theta + d\theta)$$

Por lo tanto, el lado AC, inicialmente paralelo al eje z, habrá girado y formará con dicho eje un ángulo  $\alpha''$ . En efecto, si proyectamos los puntos A' y C' sobre el plano tangente a la línea media de la sección que contiene el lado AC, obtendremos los puntos A'' y C'', definidos por:

$$AA'' = AA' \cdot \cos \alpha = \rho \cdot \theta \cdot \cos \alpha = r \cdot \theta$$

$$CC'' = CC' \cdot \cos \alpha = \rho \cdot (\theta + d\theta) \cdot \cos \alpha = r \cdot (\theta + d\theta)$$

siendo r la distancia de la perpendicular trazada desde el eje de giro O hasta el plano tangente de la línea media de la sección que contiene el lado AC.

Tal como se ve en el esquema, el ángulo girado por el lado AC en su desplazamiento en relación con el eje z será:

$$\gamma = \frac{CC'' - AA''}{dz} = \frac{r \cdot (\theta + d\theta) - r \cdot \theta}{dz} = r \cdot \frac{d\theta}{dz} = r \cdot \theta'$$

Situado el segmento A''C'', podremos dibujar la proyección del elemento diferencial completo. Se desprecian las deformaciones debidas a las tensiones tangenciales y, consiguientemente, al no existir distorsiones angulares, el elemento diferencial continuará teniendo, tras la deformación, los cuatro ángulos rectos. En consecuencia, la disposición de la proyección del elemento diferencial no puede ser otra que la representada, y los puntos B'' y D'' se habrán desplazado en la dirección del eje z a la magnitud  $dw = \gamma \cdot ds$  en relación con sus posiciones iniciales, B y D. De manera que el desplazamiento relativo, en la dirección del eje z, que se produce entre los puntos A y B, separados una distancia, ds, como consecuencia del giro provocado por la torsión, será:

$$dw = \gamma \cdot ds = r \cdot \theta' \cdot ds = \theta' \cdot r \cdot ds$$

Análogamente, el desplazamiento relativo, w, entre dos puntos cualesquiera, lo obtendríamos integrando la ecuación diferencial entre dichos puntos.

Si tomamos ahora el extremo I (Figura 1.85) de la sección como el origen de los recorridos del radio vector  $\rho$ , el desplazamiento relativo de un punto cualquiera, S, de la sección en relación con el punto I será:

$$w = \theta' \cdot \int_I^S r \cdot ds$$

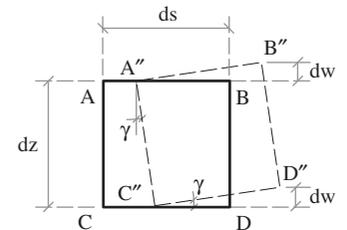
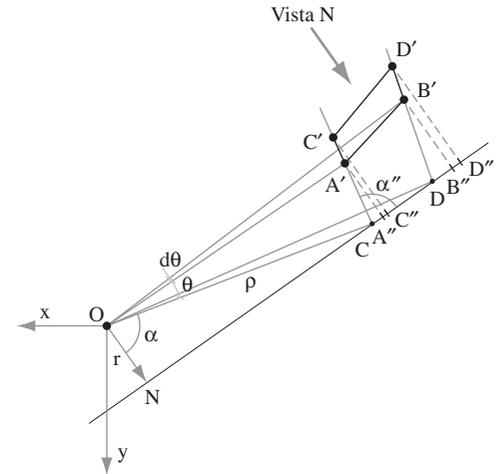
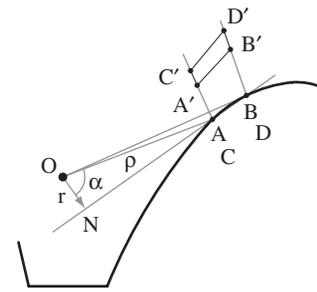
El valor de la integral corresponde, evidentemente, al doble del área barrida por el radio vector  $\rho$  al desplazarse a lo largo de la línea media de la sección, desde el origen considerado, I, hasta el punto S. Cuando el radio vector, en su recorrido, gira en sentido contrario a las agujas del reloj, los incrementos de área son positivos, y negativos en caso contrario.

Los valores w obtenidos de esta manera representan el desplazamiento relativo en sentido longitudinal; es decir, el alabeo de un punto cualquiera de la sección en relación con el punto I. Pero, en general, este punto a su vez también se habrá desplazado debido a la torsión, por lo que el alabeo real de la sección, no el relativo, será:

$$w = \theta' \cdot \int_I^S r \cdot ds = \theta' \cdot (\omega_S - \omega_I)$$

Para deducir el valor de  $\omega_I$ , podemos recordar que la existencia de deformaciones w en la dirección del eje z conlleva la presencia de tensiones normales  $\sigma_z$  que, de acuerdo con la ley de Hooke en materiales de comportamiento elástico o asimilable y, como los valores de  $\omega$  no dependen de z, valdrán:

$$\sigma_z = E \cdot \frac{dw}{dz} = E \cdot \theta'' \cdot (\omega_S - \omega_I) = E \cdot \theta'' \cdot \omega_O$$



Vista N

Figura 1.84 Desplazamientos torsionales.

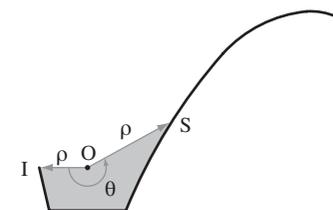


Figura 1.85 Rotación del radio vector rho.

La condición de equilibrio exige que la resultante del conjunto de tensiones  $\sigma_z$  aplicadas en toda el área de la sección se anule, pues sobre la sección solamente se ha aplicado un momento torsor. De manera que se verificará la condición:

$$N = \int_A \sigma_z \cdot dA = \int_A E \cdot \theta'' \cdot (\omega_s - \omega_1) \cdot dA = 0$$

En la sección considerada, el valor de  $\theta''$  es constante, y  $\omega_1$  también es fijo, pues es el valor correspondiente al punto I, origen de recorridos de  $s$ . Por tanto:

$$E \cdot \theta'' \left[ \int_A \omega_s \cdot dA - \omega_1 \int_A dA \right] = 0$$

Y resulta:

$$\omega_1 = \frac{\int_A \omega_s \cdot dA}{A}$$

Esta expresión de  $\omega_1$  representa el valor medio del alabeo calculado en relación con el punto I, origen de recorridos del radio vector.

El proceso de cálculo del alabeo de una sección que gira torsionalmente alrededor de un punto cualquiera O será, pues, el siguiente:

1. Establecer el origen I y el sentido de recorridos de la coordenada  $s$  a lo largo del perfil.
2. Calcular los valores de  $\omega_s$ . Recordar que cuando el radio vector gira en sentido opuesto al de las agujas del reloj, el área barrida tiene signo positivo, y negativo en caso contrario.
3. Determinar el valor  $\omega_1$ .
4. Calcular  $\omega_O = \omega_s - \omega_1$ .

A  $\omega_O$  se le conoce como “coordenada curvilínea” de la sección y también como “alabeo unitario” en relación con el eje de giro, O, ya que teniendo en cuenta que el alabeo real vale  $w = \theta' \cdot \omega_O$ , el valor de  $\omega_O$  para  $\theta' = 1$ , coincide con el alabeo  $w$ .

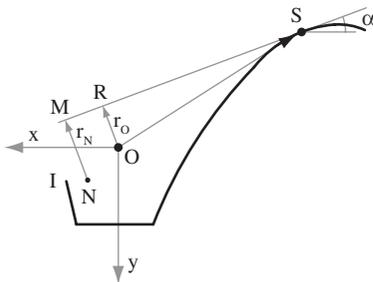
Como ya se ha dicho anteriormente, la torsión produce un giro alrededor de un eje que pasa por el centro de esfuerzos cortantes o centro de torsión, afirmación que quedará demostrada más adelante. Pero puede ocurrir que, mediante dispositivos mecánicos, se fuerce el giro torsional alrededor de un eje diferente. Por lo tanto, al plantearse el cálculo del alabeo, la posición del eje de giro suele ser un dato de partida: o bien la pieza girará alrededor de un eje forzado o, en otro caso, alrededor del que contenga el centro de esfuerzos cortantes. Por otra parte, aunque tras el estudio de la flexión simple ya sabemos determinar la posición del centro de esfuerzos cortantes en una sección cualquiera, veremos posteriormente cómo a partir de los valores de las coordenadas curvilíneas  $\omega$ , deducidas considerando un eje de giro cualquiera, es posible deducirlo también. Por todo ello, conviene familiarizarse con el cálculo de la coordenada curvilínea o el alabeo unitario  $\omega$  para diversas posiciones del eje de giro.

Con tal finalidad, deduciremos a continuación la relación (Figura 1.86) entre alabeos unitarios  $\omega_O$  y  $\omega_N$ , correspondientes a dos ejes de giro torsional diferentes, O y N. El alabeo unitario  $\omega_O$  está caracterizado por  $r_O$ , distancia más corta entre el eje de giro y una línea tangente a la línea media de la sección en el punto considerado.

$$\omega_O = \int_I^S r_O \cdot ds$$

Análogamente, el alabeo unitario  $\omega_N$ , en relación con un nuevo eje de giro en N, estará caracterizado por  $r_N$ .

$$\omega_N = \int_I^S r_N \cdot ds$$



**Figura 1.86** Giros torsionales alrededor de dos ejes diferentes.

Siendo O el origen de coordenadas del sistema de referencia, las que identifican el nuevo eje de giro serán  $x_N$  e  $y_N$ . La relación (Figura 1.87) entre los radios vectores  $r_O$  y  $r_N$  será:

$$r_N = MN = r_O + AN$$

$$AN = BN - AB$$

y, por tanto:

$$AN = DN \cdot \cos \alpha - OD \cdot \sin \alpha = y_N \cdot \cos \alpha - x_N \cdot \sin \alpha$$

y

$$r_N = r_O + y_N \cdot \cos \alpha - x_N \cdot \sin \alpha$$

En consecuencia:

$$\omega_N = \int_I^S r_O \cdot ds + \int_I^S y_N \cdot ds \cdot \cos \alpha - \int_I^S x_N \cdot ds \cdot \sin \alpha$$

y como se cumplen las relaciones:

$$ds \cdot \cos \alpha = dx \quad ds \cdot \sin \alpha = dy$$

resulta finalmente:

$$\omega_N = \omega_O + y_N(x_S - x_I) - x_N(y_S - y_I)$$

fórmula que expresa la relación entre el alabeo unitario  $\omega_O$  de la sección alrededor de un eje de giro O, que coincide con el origen de coordenadas y con el alabeo  $\omega_N$ , que se produce para un eje de giro N, definido por las coordenadas,  $x_N$  e  $y_N$ . En dicha expresión,  $x_I$  e  $y_I$  son las coordenadas del punto I, considerado en ambos casos como origen de recorridos del radio vector, mientras que  $x_S$  e  $y_S$  son las coordenadas del punto genérico S de la sección, para el que se quiere determinar el valor del alabeo.

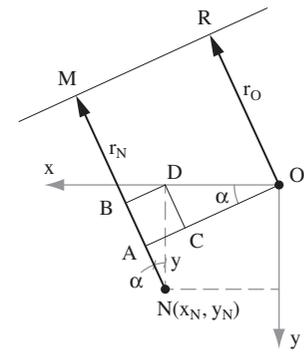
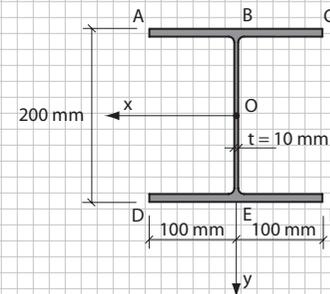
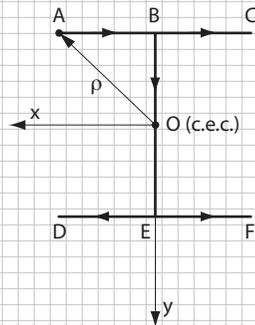


Figura 1.87 Coordenadas de referencia.

### Ejercicio 1.17

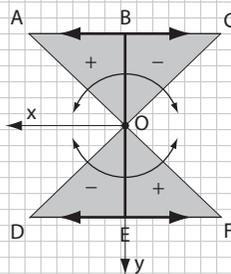
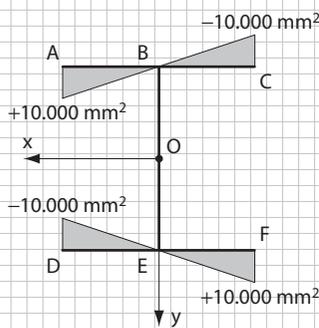
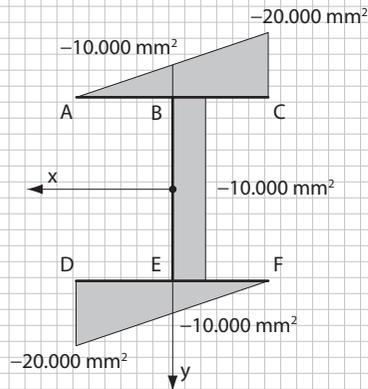
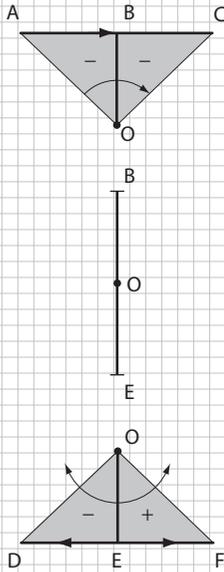
#### Cálculo del alabeo unitario de una sección I

Tomemos el eje de rotación en O (c.e.c.) y fijemos el recorrido para el desplazamiento del radio vector a lo largo de la línea del perfil, del modo que se esquematiza en la figura, tomando como origen para las coordenadas curvilíneas el borde A del perfil. Consideraremos el signo negativo cuando el giro del radio vector esté en el sentido de las agujas de un reloj, y positivo en caso contrario.



Empezamos por el ala superior del perfil; es decir, por ABC, tomando el punto A como origen de recorridos:

$$\omega_{sA} = 0$$



El valor de la integral  $\int_1^S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}$  será el doble del área barrida por el vector  $\rho$  al desplazarse a lo largo de la línea media de la sección. Luego:

$$\omega_{sB} = \omega_{sA} - 2 \cdot A_{\text{triángulo ABO}} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = -10^4 \text{ mm}^2$$

$$\omega_{sC} = \omega_{sB} - 2 \cdot A_{\text{triángulo BCO}} = -10^4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = -2 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

El recorrido del radio vector por el alma BOE no barre área alguna, por lo tanto:

$$\omega_{sO} = \omega_{sE} = \omega_{sB} = -10^4 \text{ mm}^2$$

Y, por último, el recorrido por el ala inferior DEF conduce a los valores:

$$\omega_{sD} = \omega_{sE} - 2 \cdot A_{\text{triángulo EDO}} = -10^4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = -2 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\omega_{sF} = \omega_{sE} + 2 \cdot A_{\text{triángulo OEF}} = -10^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 0$$

Para calcular la coordenada curvilínea real  $\omega$  tendremos que restar a los valores anteriores el valor medio  $\omega_1$ :

$$\omega_1 = \frac{\int_A \omega_s \cdot dA}{A} = \frac{\int_A \omega_s \cdot t \cdot ds}{A}$$

$$\text{lado ABC} \quad \int_A \omega_s \cdot dA = -\frac{1}{2} \cdot 20.000 \cdot 10 \cdot 200 = -2 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\text{lado BOE} \quad \int_A \omega_s \cdot dA = -10.000 \cdot 10 \cdot 200 = -2 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\text{lado DEF} \quad \int_A \omega_s \cdot dA = -\frac{1}{2} \cdot 20.000 \cdot 10 \cdot 200 = -2 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\text{total:} \quad -6 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$A = 10 \text{ mm} \cdot (200 + 200 + 200) = 6.000 \text{ mm}^2. \text{ Luego: } \omega_1 = \frac{-6 \cdot 10^7}{6.000} = -10.000 \text{ mm}^2$$

Tendremos finalmente:

$$\omega_A = \omega_{sA} - \omega_1 = 0 - (-10^4) = 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\omega_B = \omega_{sB} - \omega_1 = -10^4 - (-10^4) = 0$$

$$\omega_C = \omega_{sC} - \omega_1 = -2 \cdot 10^4 - (-10^4) = -10^4 \text{ mm}^2$$

$$\omega_D = \omega_{sD} - \omega_1 = -2 \cdot 10^4 - (-10^4) = -10^4 \text{ mm}^2$$

$$\omega_E = \omega_{sE} - \omega_1 = -10^4 - (-10^4) = 0$$

$$\omega_F = \omega_{sF} - \omega_1 = 0 - (-10^4) = 10^4 \text{ mm}^2$$

Si en lugar de tomar el punto A como origen de recorridos del radio vector, hubiésemos considerado el centro de simetría O, habríamos llegado más rápidamente al mismo resultado:

Recorrido OB: el radio vector no barre área alguna  $\rightarrow \omega_{sB} = 0$

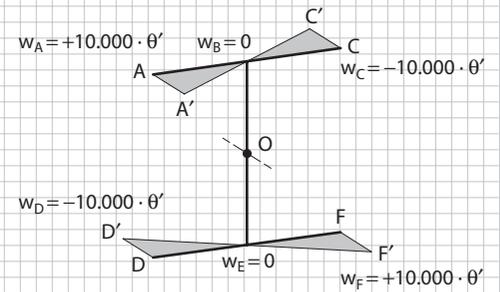
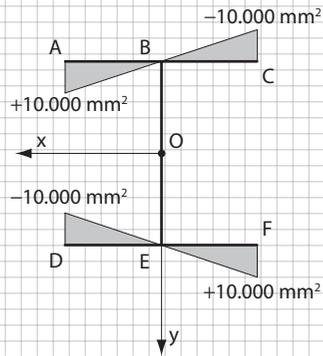
Recorrido BC (sentido de giro negativo):

$$\omega_{sC} = \omega_{sB} - 2 \cdot A_{\text{triángulo OBC}} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = -10^4 \text{ mm}^2$$

Recorrido BA (sentido de giro positivo):

$$\omega_{sA} = \omega_{sB} + 2 \cdot A_{\text{triángulo OBA}} = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 10^4 \text{ mm}^2$$

Por simetría, los valores para la otra mitad del perfil serán iguales y contrarios. Además, por igual razón, el valor de  $\omega_1$  será nulo. Por lo tanto, habremos llegado directamente al mismo resultado.

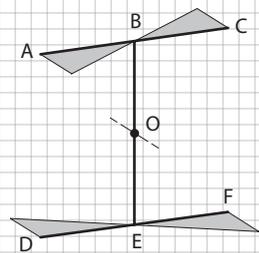


Desplazamientos en la dirección de la directriz de la pieza: alabeos  
 $w$  = desplazamiento según el eje  $z$

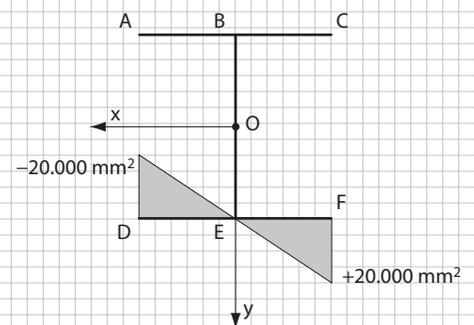
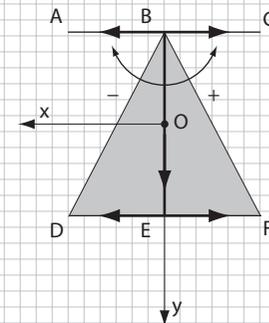
Como ya hemos visto que  $w = \theta' \cdot \omega$  resulta de estos valores de  $\omega$  (dimensionalmente  $L^2$ ) multiplicados por  $\theta'$ , derivada del giro torsional en la sección considerada (dimensionalmente  $L^{-1}$ ), nos dan los valores de los desplazamientos  $w$  (dimensionalmente  $L$ ) en la dirección del eje  $z$ .

Observando el gráfico de  $w$  se ve que los puntos C y D se habrán desplazado perpendicularmente al plano de la sección, que es el del papel; lo mismo le sucede a los puntos A y B. Los puntos pertenecientes al lado BOE no habrán sufrido desplazamientos perpendiculares a dicho plano y, vista en conjunto, la sección inicialmente plana no lo seguirá siendo tras la deformación torsional.

Además, como las tensiones normales que puede generar la torsión son proporcionales a las deformaciones, el "aspecto" de la ley de tensiones  $\sigma_z$  coincidirá exactamente con el de la ley de alabeo unitario que acabamos de calcular.



Aspecto de la ley de  $\sigma_z$  que pueden provocar la torsión



Si, como un ejemplo más, consideramos ahora que se fuerza el giro torsional de la sección alrededor de un eje que contiene el punto B y para el recorrido del radio vector mostrado en el esquema, tendremos:

$$\omega_{sA} = \omega_{sB} = \omega_{sC} = \omega_{sE} = 0$$

$$\omega_{sD} = \omega_{sE} - 2 \cdot A_{\text{triángulo BED}} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100 \cdot 100 = -2 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\omega_{sF} = \omega_{sE} + 2 \cdot A_{\text{triángulo BEF}} = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100 \cdot 100 = 2 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

Por simetría, el valor corrector  $\omega_0$  será nulo; luego, el gráfico del alabeo unitario será el representado.

También podríamos haber llegado al mismo resultado partiendo de los valores de  $\omega$  considerando como eje de rotación el punto O y utilizando la expresión anteriormente deducida que relaciona las coordenadas curvilíneas correspondientes a dos diferentes ejes de giro.

Tendremos:

$$\omega_B = \omega_O + y_B(x_S - x_i) - x_B(y_S - y_i)$$

En este caso :

$$x_B = 0 \text{ mm} \quad y_B = -100 \text{ mm}$$

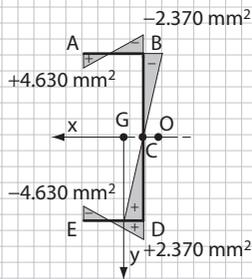
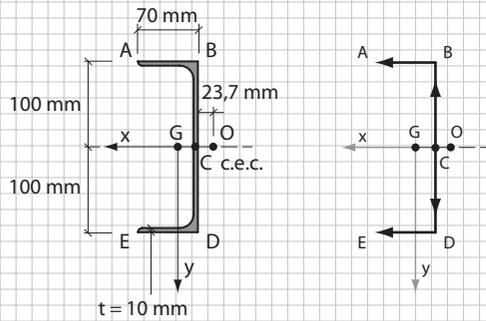
$$x_i = 0 \text{ mm} \quad y_i = 0; \text{ origen de recorridos en O.}$$

Por tanto:

$$\omega_B = \omega_O - 100 \cdot x_S$$

A partir de esta expresión, se deducen los valores característicos de la sección reflejados en el cuadro adjunto que, efectivamente, coinciden con los calculados cuando se fuerza el giro de la sección alrededor del eje B.

Punto	$\omega_O$ (mm <sup>2</sup> )	$x_S$ (mm)	$\omega_B$ (mm <sup>2</sup> )
A	$10^4$	100	0
B	0	0	0
C	$-10^4$	-100	0
O	0	0	0
D	$-10^4$	100	$-2 \cdot 10^4$
E	0	0	0
F	$10^4$	-100	$2 \cdot 10^4$



### Ejercicio 1.18

#### Cálculo del alabeo unitario de una sección J

En primer lugar, elegimos como eje de rotación el punto O, c.e.c. de la sección, cuya deducción se recoge en el capítulo de flexión. Por razones de simplicidad, consideraremos el punto C como origen de recorridos del radio vector.

Iniciaremos el recorrido por el alma CB del perfil, para seguir después por el ala AB.

Recorrido CB:

$$\omega_{sC} = 0$$

$$\omega_{sB} = \omega_{sC} - 2 \cdot A_{\text{triángulo CBO}} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 23,7 \cdot 100 = -2.370 \text{ mm}^2$$

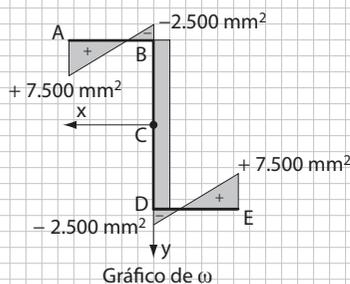
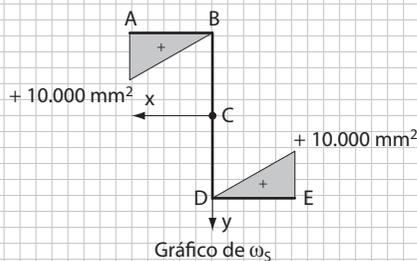
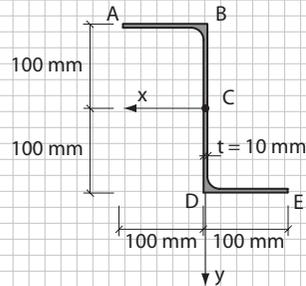
Recorrido BA:

$$\omega_{sA} = \omega_{sB} + 2 \cdot A_{\text{triángulo ABO}} = -2.370 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 100 = 4.630 \text{ mm}^2$$

El sentido de giro del radio vector al recorrer el lado BA es positivo, contrario al seguido para recorrer CB.

En la otra mitad del perfil, los valores serán simétricos y el término de corrección  $\omega_1$  será nulo. La solución definitiva será, por lo tanto, la que se presenta en la figura adjunta.

En cuanto al significado de la ley de  $\omega$  calculada, vale aquí todo lo dicho anteriormente para el caso del perfil I.



### Ejercicio 1.19

#### Cálculo del alabeo unitario para una sección L

Si consideramos que la sección gira alrededor del centro de esfuerzos cortantes, que coincide con su centro de simetría, C, y tomamos como origen de recorridos dicho punto, tendremos:

$$\omega_{sB} = 0$$

$$\omega_{sA} = \omega_{sB} + 2 \cdot A_{\text{triángulo ABC}} = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\omega_{sD} = 0$$

$$\omega_{sE} = \omega_{sD} + 2 \cdot A_{\text{triángulo DEC}} = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 10^4 \text{ mm}^2$$

Para recorrer ambas alas, el radio vector gira en sentido contrario de las agujas del reloj, y por eso se ha adoptado el signo positivo.

En este caso, el valor del término corrector  $\omega_1$  será:

$$\omega_1 = \frac{\int_A \omega_s \cdot dA}{A} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 10}{10 \cdot (100 + 200 + 100)} = 2.500 \text{ mm}^2$$

Por lo tanto, los valores característicos del alabeo unitario representados en el esquema adjunto serán:

$$\omega_A = \omega_{sA} - \omega_1 = 10^4 - (2.500) = 7.500 \text{ mm}^2$$

$$\omega_B = \omega_{sB} - \omega_1 = 0 - (2.500) = -2.500 \text{ mm}^2$$

$$\omega_C = \omega_{sC} - \omega_1 = 0 - (2.500) = -2.500 \text{ mm}^2$$

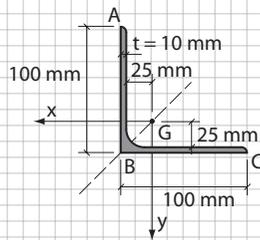
$$\omega_D = \omega_{sD} - \omega_1 = 0 - (2.500) = -2.500 \text{ mm}^2$$

$$\omega_E = \omega_{sE} - \omega_1 = 10^4 - (2.500) = 7.500 \text{ mm}^2$$

Conviene observar que, en este caso, el lado BD se desplaza paralelamente a sí mismo en dirección perpendicular al plano del perfil, arrastrado por la deformación torsional de sus alas, pero no se alabea, ya que el desplazamiento de todos sus puntos es el mismo.

**Ejercicio 1.20**

**Cálculo del alabeo unitario para una sección en L**



Si situamos el eje de rotación en el punto B, que coincide con el c.e.c., el radio vector no barre área alguna en su recorrido por la línea media del perfil, y el alabeo de la sección será nulo, como ya se ha comentado anteriormente.

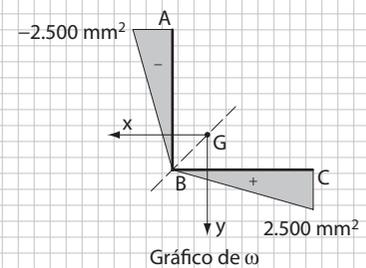
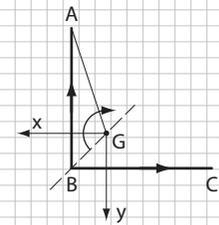
Si tomamos ahora como eje de giro el punto G, centro de gravedad de la sección, y consideramos como origen de recorridos del radio vector el punto B, por su posición simétrica, tendremos:

$$\omega_{sB} = 0$$

$$\omega_{sA} = \omega_{sB} - 2 \cdot A_{\text{triángulo BAG}} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 25 = -2.500 \text{ mm}^2$$

$$\omega_{sC} = \omega_{sB} + 2 \cdot A_{\text{triángulo BCG}} = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 25 = 2.500 \text{ mm}^2$$

El valor del término corrector es, obviamente, nulo, y el gráfico de los alabeos unitarios será el que se representa en la figura adjunta.



**Ejercicio 1.21**

**Cálculo del alabeo unitario para una sección circular abierta**

En primer lugar, tomamos como eje de rotación el punto C, que coincide con el c.e.c. Fijamos el sentido de recorridos para el radio vector que se muestra en la figura adjunta.

Entre los puntos A y B el alabeo irá creciendo al aumentar el área barrida por el radio vector que gira alrededor de C. El valor máximo del alabeo se producirá en el punto B, en el que el radio vector es tangente a la circunferencia.

$$\omega_B = 2 \cdot A_{\text{triángulo}^{\circ} ABC} = 2 \cdot (A_{\text{triángulo}^{\circ} OBC} - A_{\text{triángulo}^{\circ} OAB})$$

$$CB = \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

$$A_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{CB}{OB} = \arctg \frac{R\sqrt{3}}{R} = 60^\circ$$

$$A_{OAB} = \pi \cdot R^2 \frac{60}{360} = \frac{\pi \cdot R^2}{6}$$

Y, finalmente:

$$\omega_B = 2 \cdot \left( \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi \cdot R^2}{6} \right) = 6.800 \text{ mm}^2$$

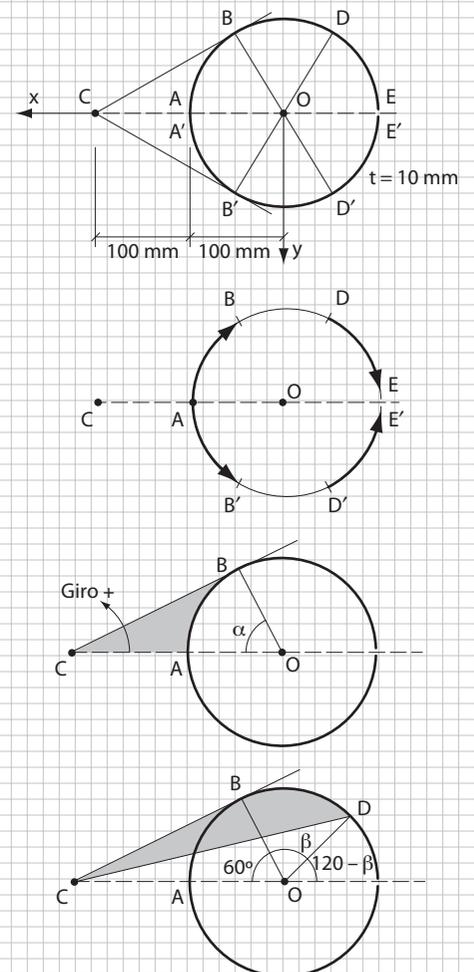
A partir de B el radio vector empezará a girar en sentido contrario y, por lo tanto, el alabeo se irá reduciendo hasta anularse en un punto D, que naturalmente se determinará con la condición de que el área barrida por el radio vector entre B y D sea igual al área barrida en el desplazamiento entre A y B.

En la figura adjunta se ve que:

$$A_{CBD} = A_{CAB} + A_{BO} + A_{BOD} - A_{COD}$$

y como ya hemos visto que:

$$A_{CBD} = A_{CAB}$$



resulta, para determinar el punto D, la condición:

$$A_{ABO} + A_{BOD} - A_{COD} = 0$$

Siendo:

$$A_{ABO} = \frac{\pi \cdot R^2}{6}$$

$$A_{BOD} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\beta}{360}$$

$$A_{COD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot R \cdot R \cdot \sin(120 - \beta) = R^2 \cdot \sin(120 - \beta)$$

Luego:

$$\frac{\pi \cdot R^2}{6} + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\beta}{360} - R^2 \cdot \sin(120 - \beta) = 0$$

De aquí resulta  $\beta = 48^\circ$ , ángulo que define la posición de D, en donde  $\omega_D = 0$ .

Continuando el recorrido de radio vector, llegaríamos al punto E, cuyo alabeo unitario será:

$$\omega_E = 2 \cdot (-A_{CBE} + A_{CAB}) = 2 \cdot (-A_{ABE})$$

$$\omega_E = 2 \cdot \left( -\frac{\pi \cdot R^2}{2} \right) = -31.400 \text{ mm}^2$$

En resumen, y teniendo en cuenta la simetría de la sección, el gráfico del alabeo unitario de la sección girando torsionalmente alrededor del punto C es el que se presenta en la figura adjunta.

Veamos ahora el alabeo que corresponde al eje de giro en el punto O, centro de gravedad de la sección. En este caso, obviamente, el gráfico de alabeos unitario es el del esquema, siendo el valor de  $\omega$  en un punto cualquiera definido por el ángulo  $\alpha$ .

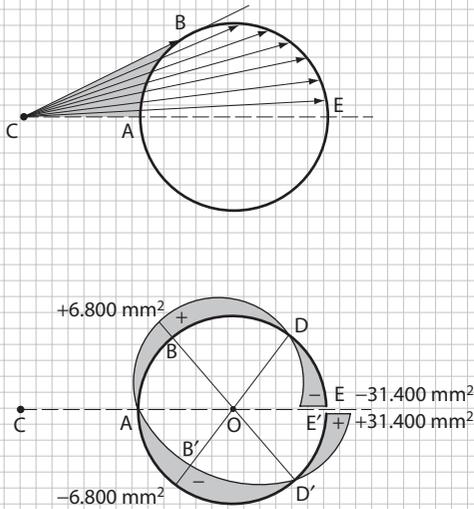
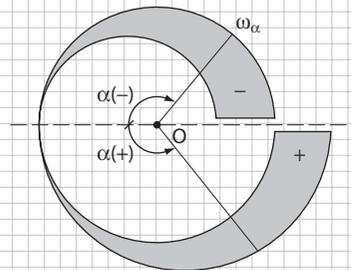


Gráfico de  $\omega$



$$\omega_\alpha = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$$

$\alpha$  en grados sexagesimales

Este gráfico de alabeo unitario muestra el sentido y el valor del desplazamiento de un punto cualquiera de la sección solicitada en torsión y girando alrededor del punto O. Y, efectivamente al realizar el experimento al que nos referíamos al final del apartado anterior, se comprueba cómo las secciones extremas de la hoja de papel enrollada a la que se aplica con las manos dos giros iguales y contrarios en los extremos, se deforman según la ley ahora deducida para el alabeo unitario. Por la forma de aplicar las manos, estamos forzando el giro alrededor del eje de la pieza que en este caso no coincide con el de esfuerzos cortantes.

A partir de estos valores podemos deducir nuevamente los del alabeo unitario cuando la sección gira alrededor del eje C, utilizando para ello la expresión:

$$\omega_C = \omega_O + y_C (x_S - x_i) - x_C (y_S - y_i)$$

En este caso:

$$x_C = 200 \text{ mm}$$

$$y_C = 0 \text{ mm}$$

origen de coordenadas en O.

$$x_i = 100 \text{ mm}$$

$$y_i = 0 \text{ mm}$$

origen de coordenadas A.

Por tanto, la expresión general se convierte en:

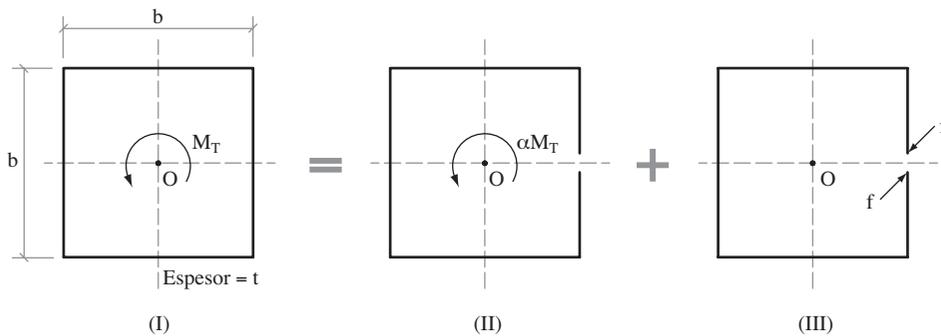
$$\omega_C = \omega_O - 200 \cdot y_S \quad ; \quad \text{con } y_S = R \cdot \sin \alpha$$

Los valores característicos del alabeo unitario de la sección coinciden lógicamente con los calculados anteriormente, como muestra el cuadro adjunto.

Punto	$\alpha$	$\omega_O$ (mm <sup>2</sup> )	$y_S$ (mm)	$\omega_C$ (mm <sup>2</sup> )
A	0	0	0	0
B	-60°	-10.470	-86,6	6.800
D	-108°	-18.850	-95,1	≈ 0
E	-108°	-31.410	0	-31.400
B'	60°	10.470	86,6	-6.800
D'	108°	18.850	95,1	≈ 0
E'	108°	31.410	0	31.400

### 1.5.3.3 Alabeo de secciones cerradas

Hasta ahora nos hemos referido a secciones abiertas de pared delgada. Pero es necesario también abordar las deformaciones de las secciones cerradas o en cajón, solicitadas torsionalmente, que son muy habituales en la práctica profesional. Para ello, consideraremos en primer lugar el caso de un cajón cuadrado con paredes delgadas de espesor constante,  $t$ , sometido a un momento de torsión. El cajón girará alrededor de su centro de esfuerzos cortantes que, en este caso, coincide con su centro de gravedad. Para determinar el posible alabeo de la sección —es decir, su deformabilidad según el eje longitudinal de la pieza—, podemos considerar (Figura 1.88) el estado real como suma de dos estados virtuales.



**Figura 1.88** Descomposición del estado real en suma de dos estados virtuales de carga.

En el estado II, hemos dado imaginariamente un corte en el cajón, para convertirlo en una sección abierta, que absorberá una parte  $\alpha \cdot M_T$  de la torsión girando forzadamente alrededor de su centro de gravedad. Podemos, así, calcular su alabeo unitario,  $\omega_{II}$ , y el consiguiente desplazamiento  $w_{II}$  de cualquier punto de la sección. La ley de alabeos unitarios será (Figura 1.89):

$$\omega_s = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot s = \frac{b \cdot s}{2}$$

siendo el valor de  $\omega$  correspondiente a los labios abiertos:

$$\omega_{\text{máx}} = \pm \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{b}{2} + b + \frac{b}{2} \right) = \pm b^2$$

La ley de desplazamientos  $w_{II}$  de un punto cualquiera de la sección, de coordenada curvilínea  $s$ , valdrá:

$$w_{II} = \theta' \cdot \omega_s = \theta' \cdot \frac{b \cdot s}{2}$$

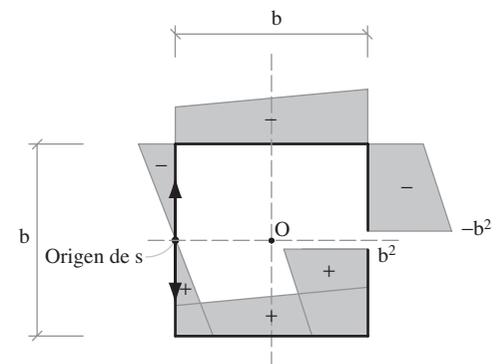
siendo sus valores extremos en los labios de la sección:

$$w_{II, \text{máx}} = \pm \theta' \cdot b^2$$

El estado III corresponderá a la misma sección abierta, en la que se aplican dos fuerzas,  $f$ , iguales y contrarias en los labios abiertos, de forma que provoquen un desplazamiento igual y contrario al anterior. Si sumamos las deformaciones de ambos estados, se anula el desplazamiento relativo en los extremos del perfil abierto y volvemos a tener el cajón en su posición cerrada real.

Siendo  $t$  el espesor constante de la pared del cajón, el flujo de tensiones tangenciales, en el estado III, será constante a lo largo de toda su directriz y valdrá:

$$\tau_{III} = \frac{f}{t}$$



**Figura 1.89** Ley de  $\omega_s$ .

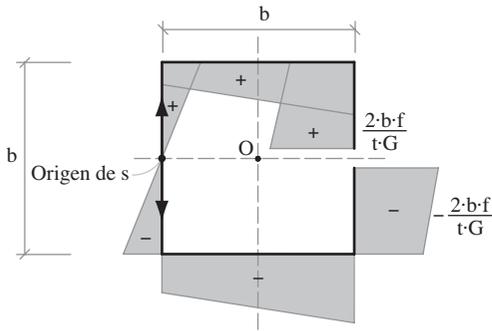


Figura 1.90 Ley de desplazamientos,  $w_{III}$ .

Como ya vimos cuando tratamos las deformaciones por tensiones tangenciales, la pendiente de dicha deformada, constante a lo largo de su directriz, es:

$$\gamma = \frac{\tau_{III}}{G} = \frac{f}{t \cdot G}$$

O, dicho de otra manera, el desplazamiento  $w_{III}$  variará linealmente según la ley:

$$w_{III} = \int_0^s \gamma \cdot ds = \frac{f \cdot s}{t \cdot G}$$

siendo sus valores extremos:

$$w_{III, \text{máx}} = \pm \frac{f}{t \cdot G} \cdot \left( \frac{b}{2} + b + \frac{b}{2} \right) = \pm \frac{2 \cdot b \cdot f}{t \cdot G}$$

Si igualamos los desplazamientos en los extremos de los estados II y III, tendremos:

$$\theta' \cdot b^2 - \frac{2 \cdot b \cdot f}{t \cdot G} = 0$$

Luego:

$$f = \theta' \cdot \frac{b \cdot t \cdot G}{2}$$

y el desplazamiento de un punto cualquiera de la sección será:

$$\delta_I = w_{II} - w_{III} = \theta' \cdot \frac{b \cdot s}{2} - \frac{f \cdot s}{t \cdot G}$$

Si sustituimos en esta expresión,  $f$ , por su valor, resulta que  $\delta_I$  es idénticamente nula; es decir, que en el estado real no hay deformaciones longitudinales de los puntos de la sección: un cajón cerrado, con las dimensiones consideradas, no se alabea.

$$\delta_I = \theta' \cdot \frac{b \cdot s}{2} - \left[ \theta' \cdot \frac{b \cdot t \cdot G}{2} \right] \cdot \frac{s}{t \cdot G} = 0$$

Sin haber desarrollado las expresiones matemáticas se podría haber llegado directamente a la misma conclusión observando que la pendiente de la ley de alabeos unitarios y, por tanto, de las deformaciones  $w$  del estado II, es constante al igual que lo es la pendiente de la deformada del estado III; en consecuencia, al obligar a que las deformaciones extremas se compensen también se produce compensación en el resto de los puntos de la sección.

Conviene notar que, desde el punto de vista tensional, el estado real es también suma (Figura 1.91) del estado II y el estado III. En el caso II, el momento torsor se absorbe con el mecanismo tensional que ya hemos visto correspondiente a la torsión uniforme. El flujo de tensiones correspondientes al estado III es también conocido:

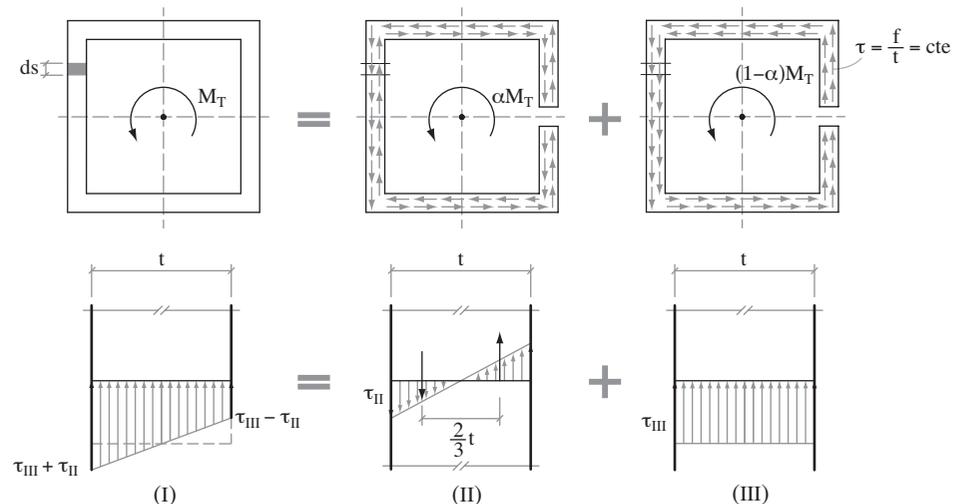


Figura 1.91 Flujo tensional resultante.

El momento absorbido por el estado II, en el conjunto de la sección valdrá:

$$\alpha \cdot M_T = \frac{1}{2} \cdot \tau_{II} \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{2t}{3} \cdot 4 \cdot b = \tau_{II} \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^2$$

El absorbido en el estado III se obtiene (Figura 1.92) tomando momentos de la resultante del flujo de tensiones en relación con el eje de giro:

$$H = \tau_{III} \cdot b \cdot t$$

$$(1 - \alpha) \cdot M_T = 4 \cdot H \cdot \frac{b}{2} = 2 \cdot \tau_{III} \cdot b^2 \cdot t$$

Al ser  $b$  muy superior a  $t$ , ( $b^2 \gg t^2$ ), la parte de torsión absorbida por el estado III es mucho mayor que la parte absorbida en el estado II. Por ello, como veremos más adelante, en la práctica se suelen despreciar los valores correspondientes a este último estado y se identifica la respuesta tensional del cajón cerrado con la del estado III exclusivamente.

Consideremos ahora (Figura 1.93) el cajón anterior pero con espesores diferentes,  $t_1$  y  $t_2$ , en las paredes verticales y horizontales, respectivamente, y analicemos las deformaciones de este cajón sometido a torsión, siguiendo la metodología que ya ha sido expuesta.

Las deformaciones correspondientes al estado II serán idénticas a las del caso anterior:

$$w_{II} = \theta' \cdot \frac{b \cdot s}{2}$$

y la pendiente de la deformada será, asimismo, constante.

En el estado III, al no ser el espesor de las paredes constante, tampoco lo es el flujo de tensiones tangenciales (Figura 1.94):

$$\tau_{BB'} = \tau_{AA'} = \frac{f}{t_1}$$

$$\tau_{AB} = \tau_{A'B'} = \frac{f}{t_2}$$

La deformada en el estado III no tiene pendiente constante en toda su longitud: en las paredes verticales será mayor, y en las horizontales más reducida. En el estado II, por el contrario, la pendiente es constante e intermedia entre las dos anteriores. La superposición (Figura 1.95) de los dos estados de deformaciones para la mitad de la sección será tal que:

- Ley de  $w_{II}$ : pendiente  $\theta' \cdot \frac{b}{2}$
- Ley de  $w_{III}$ : pendientes  $\frac{f}{G \cdot t_1}$  y  $\frac{f}{G \cdot t_2}$  en vertical y horizontal respectivamente.

La diferencia entre ambas leyes –zona sombreada de la Figura 1.95–, corresponde a la deformación  $\delta_1$  del estado real y representa, por lo tanto, el alabeo de la sección en cajón.

En el estado III, el desplazamiento máximo en los labios del perfil valdrá:

$$w_{III, \text{máx}} = \int_0^{2 \cdot b} \frac{\tau_{III}}{G} ds = \frac{1}{G} \left( \frac{f}{t_1} \cdot \frac{b}{2} + \frac{f}{t_2} \cdot b + \frac{f}{t_1} \cdot \frac{b}{2} \right) = \frac{f \cdot b}{G} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right)$$

y podremos calcular  $f$  estableciendo que:

$$w_{II, \text{máx}} = w_{III, \text{máx}}$$

es decir:

$$\theta' \cdot b^2 = \frac{f \cdot b}{G} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right)$$

Luego:

$$f = \frac{\theta' \cdot G \cdot b}{\left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right)}$$

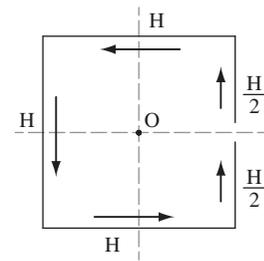


Figura 1.92 Fuerzas correspondientes al estado III.

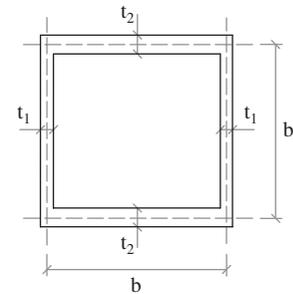


Figura 1.93 Cajón con espesores distintos en paredes verticales y horizontales.

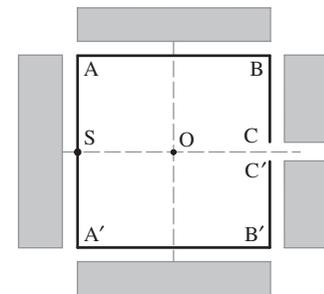


Figura 1.94 Flujo de tensiones tangenciales en la sección cajón (estado III).

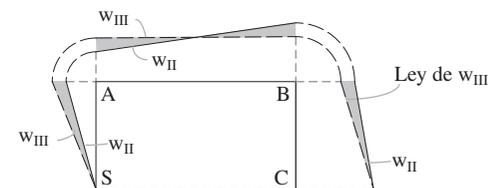


Figura 1.95 Deformaciones en la sección cajón.

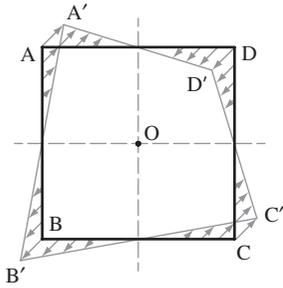


Figura 1.96 Alabeo de la sección cajón.

La ley de alabeos unitarios valdrá:

$$\omega_I = \frac{\delta_I}{\theta'} = \frac{w_{II} - w_{III}}{\theta'}$$

El gráfico correspondiente (Figura 1.96), dibujado en perspectiva, muestra la dirección del desplazamiento en el sentido del eje de la pieza de los puntos de la sección a la que se ha sometido a un esfuerzo de torsión. La sección A B C D, inicialmente plana, se alabea y tomará una forma similar a la representada por A' B' C' D'.

Como ya sabemos, el gráfico anterior representa asimismo el aspecto de la ley de tensiones normales, que pueden producirse, en caso de alabeo impedido, en el cajón sometido en torsión.

Siguiendo esta metodología, se puede determinar con carácter general el alabeo unitario de secciones en cajón de una a varias células cualquiera que sea su geometría.

#### 1.5.3.4 Clasificación de secciones según su deformabilidad torsional

Al analizar las deformaciones que se producen como consecuencia de la torsión de una pieza, se ha visto que determinadas secciones permanecen planas después de haber sufrido la deformación torsional, mientras que otras, por el contrario, se alabean. Hemos visto que su deformación,  $w_z$ , en el sentido longitudinal de la pieza es proporcional al alabeo unitario  $\omega$ , siendo la constante de proporcionalidad la derivada  $\theta'$  del ángulo girado por la sección considerada:

$$w_z = \theta' \cdot \omega$$

Hemos visto, asimismo, que el alabeo unitario es una característica intrínseca de la sección, que depende exclusivamente de su geometría, como sucede con el área o el momento de inercia.

En vista de todo ello, podemos distinguir dos grupos diferentes de secciones atendiendo a su deformabilidad torsional:

- Secciones que se alabean.
- Secciones que no se alabean.

Como ya sabemos, entre las **secciones que no se alabean**, se encuentran las siguientes:



Figura 1.97 Secciones que no se alabean formadas por rectángulos delgados.

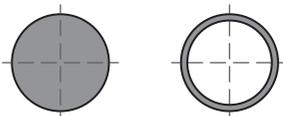


Figura 1.98 Secciones que no se alabean: circular y anular.

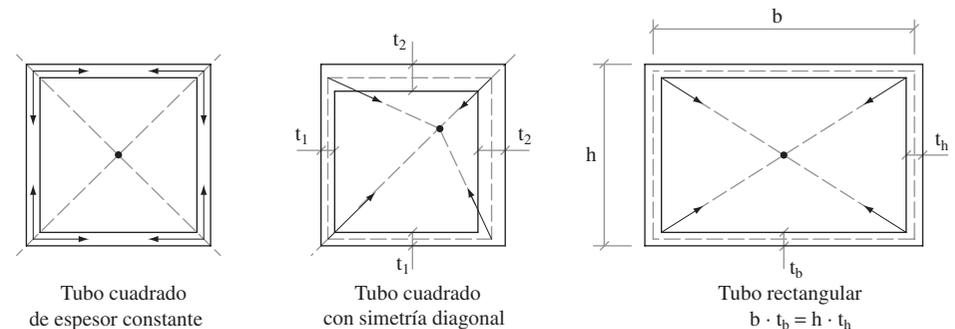


Figura 1.99 Secciones huecas que no se alabean.

Existen, además, otras **secciones cuyo alabeo es muy pequeño** y que, por ello, se suelen englobar dentro del grupo anterior. Tal sucede, por ejemplo, con las siguientes:

- Secciones llenas tales como redondos, cuadrados, hexágonos, etc.
- Secciones en cajón tales que el cociente de sus dos dimensiones no exceden de cuatro.

Al segundo grupo, el de las secciones **que alabean en la torsión**, pertenecen todas las demás.

Al establecer esta clasificación nos hemos referido al caso de la torsión natural, no forzada, en la que la sección gira alrededor de un eje que contiene el centro de esfuerzos cortantes o centro de torsión. En otro caso, si se forzase la torsión alrededor de otro eje, se podrían producir alabeos en secciones sin tendencia natural al alabeo. Es, por ejemplo, el caso de una sección rectangular cuando se la obliga a girar torsionalmente alrededor de un eje desplazado de la línea media de la sección (Figura 1.100).

## 1.5.4 La torsión uniforme

### 1.5.4.1 Concepto

La torsión uniforme, también denominada “torsión de Saint-Venant”, se caracteriza fundamentalmente porque el estado tensional provocado por la torsión está constituido, exclusivamente, por tensiones tangenciales  $\tau_u$  en el plano de la sección, que equilibran o son equivalentes al momento torsor aplicado. La torsión uniforme, por contraste con la torsión no uniforme, no puede generar tensiones normales  $\sigma_\omega$ , ni las correspondientes tensiones tangenciales  $\tau_\omega$ . La existencia de tensiones normales es lógica consecuencia de la existencia de deformaciones impedidas en el sentido longitudinal de la pieza, pues  $\sigma_\omega = E \cdot \epsilon_z$ . Por eso, es evidente que estamos ante un caso de torsión uniforme en las circunstancias siguientes:

- Cuando la sección de la pieza no se alabea o, en todo caso, su alabeo sea suficientemente pequeño para que pueda ser despreciado.
- Cuando, tratándose de secciones que se alabean, puedan deformarse libremente, sin que existan coacciones a los desplazamientos longitudinales de la pieza. Esto ocurrirá solamente cuando se cumplan, a su vez y simultáneamente, las condiciones siguientes:
  - La pieza es de sección constante y directriz recta.
  - Se encuentra sometida a dos momentos torsores de igual valor y distinto signo aplicados en sus extremos.
  - Los apoyos de la pieza permiten su libre alabeo.

Si se analiza, en efecto, como se ha hecho anteriormente, la deformación torsional de una viga con sección en  $\mathbb{I}$ , sometida a dos momentos torsores en sus extremos sin que esté impedido el alabeo, las alas se comportan como elementos completamente rígidos y mantienen su forma rectangular. Su deformación consistía en un giro en planta de sentido contrario en ambas alas, lo que provocaba el alabeo de las secciones. En consecuencia, el giro diferencial de dos secciones infinitamente próximas era siempre el mismo y existía una relación de proporcionalidad entre esfuerzos de torsión y giros:

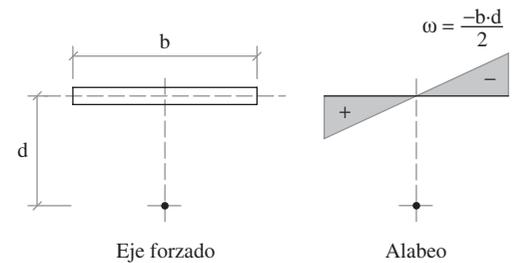
$$\theta' = k \cdot M_T$$

Por analogía con la flexión  $\left( y'' = -\frac{M_x}{E \cdot I} \right)$ , la constante torsional  $k$  se define como:

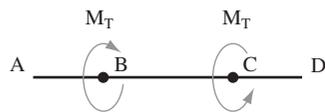
$$k = \frac{1}{G \cdot I_T}$$

siendo  $I_T$  la inercia torsional (dimensionalmente  $L^4$ ) y  $G$  el módulo de elasticidad transversal del material cuya expresión incorpora el coeficiente de Poisson,  $\nu$ :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



**Figura 1.100** Alabeo de sección rectangular por giro torsional forzado.



**Figura 1.101** Momentos de torsión en puntos intermedios de un perfil sin coacción al alabeo.

Por lo tanto:

$$\theta' = \frac{M_T}{G \cdot I_T}$$

Pero si a la misma pieza, aunque no existiese coacción al alabeo, aplicásemos los momentos de torsión en puntos intermedios en lugar de en sus extremos (Figura 1.101), ocurriría que en los tramos AB y CD la torsión sería nula y, por ello,  $\theta' = 0$ . En cambio, en el tramo BC:

$$\theta' = \frac{M_T}{G \cdot I_T}$$

En estas condiciones, las alas del perfil no podrían mantener su forma rectangular, no podrían comportarse como un cuerpo rígido e inevitablemente tendrían que flexar en su plano; por consiguiente, aparecerían tensiones normales a lo largo de la pieza, a la que ya no se podría considerar sometida a torsión uniforme.

Otro tanto ocurriría si el alabeo de la sección estuviese impedido o si la pieza no fuese de sección constante; pues, en tal caso,  $I_T$  variaría.

Es obvio que las condiciones ideales que se deben dar para que piezas con secciones que se alabeen puedan considerarse sometidas a torsión uniforme no se darán prácticamente nunca en la realidad; aunque, cuando las condiciones no se alejan excesivamente de las estrictamente exigibles, se puede aceptar que su análisis en torsión uniforme es suficientemente aproximado.



**Prandtl, Ludwig**  
(Freising, 1875 - Göttingen, 1953)



En 1894 comenzó a trabajar en el Instituto de Tecnología de Múnich, especializándose en equipos industriales y profundizando en el conocimiento de la mecánica de los fluidos.

En 1901 fue nombrado catedrático de Mecánica en la Escuela de Tecnología de Hanover. Entre 1904 y 1953 enseñó Mecánica en la Universidad de Göttingen, donde creó la prestigiosísima y pionera Escuela de Aeronáutica e Hidrodinámica.

En 1903 difundió la analogía de la membrana como base para el análisis experimental de secciones de piezas solicitadas en torsión.

En el III Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en 1904 en Heidelberg, presentó un innovador trabajo sobre el efecto de la fricción en los fluidos. Su presentación duró apenas diez minutos, y el texto ocupaba tan solo ocho páginas. En él exponía su teoría sobre la capa límite y su importancia en la resistencia del movimiento de los fluidos. Este artículo fue el que finalmente otorgó a Prandtl su reconocimiento internacional como maestro de la aerodinámica.

Se cuenta de él que era una persona ingenua y un dotado pianista. Cuando tenía 34 años decidió que había llegado el momento de casarse, por lo que pidió a su viejo profesor la mano de una de sus hijas, sin especificar cuál de ellas. El profesor y su mujer decidieron que debía ser la mayor. Dicen que su matrimonio fue largo y dichoso.

#### 1.5.4.2 La analogía de la membrana

En 1903, el científico alemán L. Prandtl publicó un texto en el que ponía de manifiesto la analogía que existe entre el comportamiento de una sección sometida a torsión uniforme y la respuesta de una membrana elástica apoyada en un contorno rígido de igual sección y sometida a una presión normal a su plano medio. A partir de entonces, la analogía de la membrana se ha utilizado profusamente en el estudio de la torsión uniforme y, en particular, ha permitido la obtención de numerosos datos experimentales dada la sencillez con la que se pueden realizar ensayos de laboratorio.

Las bases teóricas de la analogía son sencillas y están expuestas en numerosos libros que tratan el tema de la elasticidad. En síntesis, la función de tensiones,  $\phi$ , de la torsión uniforme responde a la expresión:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2 \cdot G \cdot \theta'$$

siendo las tensiones tangenciales provocadas por la torsión las derivadas de dicha función:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Además:

$$M_T = 2 \int_A \phi \cdot dA$$

Cuando, por otra parte, se analiza la deformación de una membrana elástica apoyada en los bordes de la sección que se está considerando, sometida a una presión uniforme,  $p$ , extendida a toda su superficie y perpendicular a ella, se demuestra que la función de deformación  $\phi$  de la membrana responde a la expresión:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{p}{S}$$

siendo  $p$  la presión aplicada, y  $S$  la tracción constante a todo lo largo del perímetro de apoyo de la membrana (Figura 1.103).

Por otro lado, las pendientes de la membrana deformada serán:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Además, el volumen,  $V$ , encerrado entre la membrana deformada y el plano del contorno en el que apoya, será:

$$V = \int_A \phi \cdot dA$$

De todo ello resultan las analogías siguientes:

- El volumen,  $V$ , encerrado por la membrana deformada es igual a la mitad del momento torsor  $M_T$  aplicado a la sección, es decir:

$$M_T = 2 \cdot V$$

- Los valores de las tensiones tangenciales a lo largo del contorno de la sección o de las curvas de nivel de la membrana deformada coinciden con la pendiente de la membrana en el punto considerado. Como corolario resulta que su dirección es tangente a la curva de nivel en dicho punto.
- El valor  $2 \cdot G \cdot \theta'$  característico de la torsión es igual a  $p/S$ , siendo  $p$  la presión aplicada a la membrana, y  $S$  la tracción a lo largo del perímetro que encierra el área cargada.

### 1.5.4.3 Determinación de la inercia de torsión, $I_T$ , de una sección utilizando la analogía de la membrana

#### 1.5.4.3.1 Secciones macizas

El equilibrio de fuerzas en la membrana (Figura 1.102) exige que:

$$p \cdot A = \oint_L S \cdot \text{sen } \alpha \cdot ds$$

Por tratarse de una membrana sin rigidez, el valor de  $S$  es constante. Dada, por otra parte, la escasa magnitud de las deformaciones, se puede aceptar que:

$$\text{sen } \alpha \simeq \text{tg } \alpha$$

y, por tanto:

$$\frac{p}{S} \cdot A = \oint_L \text{tg } \alpha \cdot ds$$

Si se sustituye  $\frac{p}{S}$  por su valor equivalente en la torsión uniforme y  $\text{tg } \alpha$  por  $\tau$ , tensión tangencial a lo largo del perímetro de la sección, se tiene:

$$2 \cdot G \cdot \theta' \cdot A = \oint_L \tau \cdot ds$$

Y si además recordamos la expresión que gobierna el comportamiento de una sección en la torsión uniforme:

$$\theta' = \frac{M_T}{G \cdot I_T}$$

resulta finalmente:

$$I_T = \frac{2 \cdot M_T \cdot A}{\oint_L \tau \cdot ds}$$

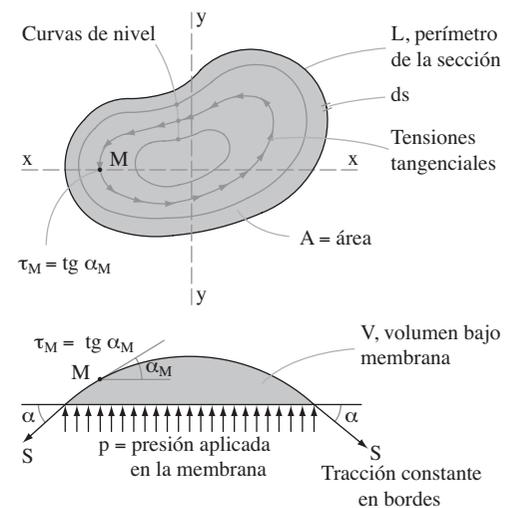


Figura 1.102 Analogía de la membrana.

## 1.5.4.3.2 Secciones en cajón con una célula

En el caso de las secciones en cajón podremos aplicar también similar metodología. La membrana ocupará toda la superficie sombreada de la sección en cajón (Figura 1.103). Al aplicar la presión,  $p$ , la parte hueca del cajón encerrada por su perímetro interior se comportará como un elemento infinitamente rígido y sufrirá un desplazamiento vertical  $\phi_0$  igual en todos los puntos; de manera que su superficie continuará siendo horizontal después de la deformación, ya que sus bordes deben coincidir con una curva de nivel de la membrana. Su deformada se pone de manifiesto en la sección esquematizada. La pendiente  $\alpha_e$ , en el borde exterior, será mayor que la correspondiente,  $\alpha_i$ , al borde interior. La contribución de la curvatura de la membrana al volumen encerrado y, por ello, al momento torsor, es mínima; de manera que es suficientemente aproximado considerar que la deformada de la membrana es una recta entre los puntos A y B con una pendiente comprendida entre las dos anteriores y que valdrá:

$$\alpha_m = \frac{\phi_0}{t}$$

siendo  $t$  el espesor de la pared del cajón en el punto considerado, y  $\phi_0$  el desplazamiento vertical de su perímetro interior.

El valor de la pendiente media coincide también con el valor de la tensión tangencial producida por la torsión uniforme del cajón:

$$\tau_m = \frac{\phi_0}{t}$$

Desde el punto de vista tensional, la simplificación realizada —es decir, el volumen despreciado— significa (Figura 1.104) que, en lugar de considerar un estado tensional variable en la anchura de la pared del cajón, se acepta una distribución uniforme de tensiones tangenciales de valor intermedio. Lo que significa que en realidad estamos despreciando una distribución triangular de tensiones, cuya contribución, cuando el espesor de la pared es pequeño como sucede en la mayoría de los casos prácticos, suele ser irrelevante. También conviene recordar que a análogas conclusiones habíamos llegado por otros caminos, cuando en un apartado anterior tratamos el alabeo de las secciones en cajón.

Con la simplificación efectuada, la analogía de la membrana se aplica con toda sencillez:

$$M_T = 2 \cdot V = 2 \cdot A \cdot \phi_0 = 2 \cdot A \cdot \tau \cdot t$$

siendo  $A$  el área encerrada por la línea media de la sección. Por tanto:

$$\tau = \frac{M_T}{2 \cdot A \cdot t}$$

Si recordamos que:

$$I_T = \frac{2 \cdot M_T \cdot A}{\oint_L \tau \cdot ds}$$

resulta:

$$I_T = \frac{4A^2}{\oint_L \frac{ds}{t}}$$

expresión que es conocida como “fórmula de Bredt”.

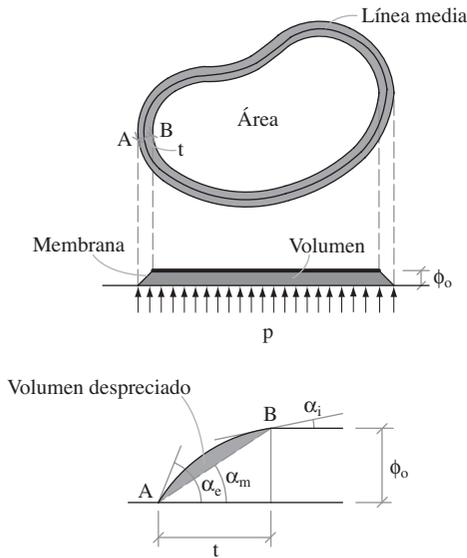
Si el espesor de la pared es constante:

$$\oint_L \frac{ds}{t} = \frac{L}{t}$$

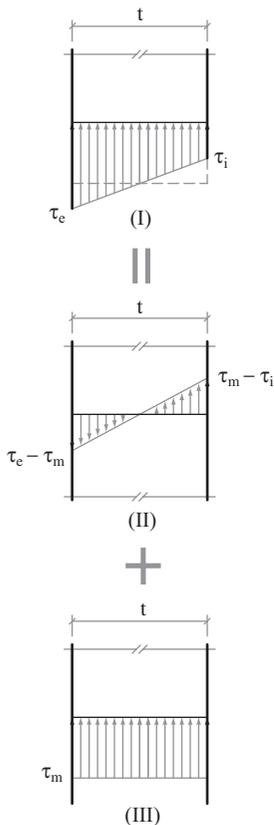
y entonces:

$$I_T = \frac{4A^2 t}{L}$$

siendo  $L$  la longitud de la línea media del cajón.



**Figura 1.103** Analogía de la membrana en secciones huecas.



**Figura 1.104** Simplificaciones de la analogía de la membrana en secciones huecas.