

Fatiha Mesloub

Résolution des équations aux dérivées partielles (EDP)

SUR GRIN VOS CONNAISSANCES SE FONT PAYER



- Nous publions vos devoirs
et votre thèse de bachelor et master
- Votre propre eBook et livre –
dans tous les magasins principaux du monde
- Gagnez sur chaque vente

Téléchargez maintenant sur www.GRIN.com
et publiez gratuitement



Bibliographic information published by the German National Library:

The German National Library lists this publication in the National Bibliography; detailed bibliographic data are available on the Internet at <http://dnb.dnb.de> .

This book is copyright material and must not be copied, reproduced, transferred, distributed, leased, licensed or publicly performed or used in any way except as specifically permitted in writing by the publishers, as allowed under the terms and conditions under which it was purchased or as strictly permitted by applicable copyright law. Any unauthorized distribution or use of this text may be a direct infringement of the author s and publisher s rights and those responsible may be liable in law accordingly.

Imprint:

Copyright © 2022 GRIN Verlag
ISBN: 9783346718259

This book at GRIN:

<https://www.grin.com/document/1265822>

Fatiha Mesloub

Résolution des équations aux dérivées partielles (EDP)

GRIN - Your knowledge has value

Since its foundation in 1998, GRIN has specialized in publishing academic texts by students, college teachers and other academics as e-book and printed book. The website www.grin.com is an ideal platform for presenting term papers, final papers, scientific essays, dissertations and specialist books.

Visit us on the internet:

<http://www.grin.com/>

<http://www.facebook.com/grincom>

http://www.twitter.com/grin_com

République Algérienne Démocratique et Populaire

*Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique*

Université Larbi Tébessi – Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique

Résolution des équations aux dérivées partielles

Cours destiné aux étudiants de troisième année mathématiques

*Présenté Par :
Dr. MESLOUB Fatiha*

Table des matières

Introduction générale	1
1 L'équation de Laplace	2
1.1 L'équation de Laplace sur un rectangle (2D)	2
1.2 Problème de Laplace de les coordonnées polaire	6
1.3 L'équation de Laplace on coordonnées cylindrique(3D)	13
1.4 L'équation de Laplace pour une sphère (3D)	17
1.5 Fonction harmonique	21
1.6 Fonction de Green associé au conteur Γ	22
2 Equation Parabolique	25
2.1 Equation Parabolique (Equation de la chaleur)	25
2.2 Equation Parabolique en dimension 2	28
2.3 Equation de la chaleur dans un rectangle	34
3 Equations Hyperboliques	37
3.1 Problème de Cauchy :	37
3.2 Equations des cordes vibrantes	38
3.2.1 problème de Cauchy.	38
3.2.2 Equations des ondes dans $\mathbb{R}$ avec second membre	39
3.2.3 Continuité par rapport aux donnée initiales	42
3.3 Méthode de separations des variables (Méthode de Fourier)	42
3.4 Dérivation des séries de fonctions de plusieurs variables	45
3.5 Principe de superposition généralisé	47
3.6 Equation avec second membre sur un interval borné	49
3.7 Equation des ondes dans un parallélépipède	55
Bibliographie	104

Introduction générale

D'une manière générale, la modélisation des phénomènes physiques repose sur la résolution d'équations aux dérivées partielles. Ces équations correspondent à la traduction mathématique des lois de la physique : - mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes), électromagnétisme (équations de Maxwell), thermique (équation de la chaleur), mécanique quantique (équation de Schrödinger)..... Une équation aux dérivées partielles relie une fonction inconnue à ses dérivées. La fonction inconnue dépend de plusieurs variables (variables d'espace et le temps). Nous avons l'habitude de classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes classes fondamentales d'équation : elliptique, parabolique et l'équation hyperbolique. La physique, la biologie et les sciences pour l'ingénieur nécessitant de savoir résoudre une grande variété des équations différentielles aux dérivées partielles.

La méthode de séparation des variables transforme une équation aux dérivées partielles en plusieurs équations différentielles. Pour les problèmes aux limites sur un domaine géométrique donné, la séparation des variables est possible si les variables du problème sont les coordonnées naturelles du domaine, par exemple, les coordonnées cartésiennes, polaires, ou sphériques, respectivement, dans le cas d'un rectangle, d'un disque ou d'une sphère, comme on verra aux chapitres ultérieurs.

Le cours présente la méthode de séparation des variables en appliquant sur l'équation de Laplace, l'équation des ondes et l'équation de la chaleur.

L'équation de Laplace

1.1 L'équation de Laplace sur un rectangle (2D)

Le problème considéré est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq M, \quad 0 \leq y \leq N, \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, N) = f_2(x), \quad \forall x \in [0, M], \\ u(0, y) = g_1(y), \quad u(M, y) = g_2(y), \quad \forall y \in [0, N]. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Nous allons couper ce problème en quatre problèmes ayant chacun une seule condition non homogène

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \\ u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_1(x, N) = 0, \\ u_1(0, y) = 0, \quad u_1(M, y) = 0, \end{array} \right. \quad (P_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \\ u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(x, N) = f_2(x), \\ u_2(0, y) = 0, \quad u_2(M, y) = 0, \end{array} \right. \quad (P_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0, \\ u_3(x, 0) = 0, \quad u_3(x, N) = 0, \\ u_3(0, y) = g_1(y), \quad u_3(M, y) = 0, \end{array} \right. \quad (P_3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0, \\ u_4(x, 0) = 0, \quad u_4(x, N) = 0, \\ u_4(0, y) = 0, \quad u_4(M, y) = g_2(y). \end{cases} \quad (P_4)$$

Si $u_i, i = 1, 2, \dots$ est une solution du problème (P_i) , alors

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$

est une solution de (1.1).

Nous allons illustrer la méthode de séparation des variables, on résoutre (P_1) le même type d'analyse peut être fait par les trois autres problèmes.

Pour résoudre (P_1) posons

$$u_1(x, y) = X(x)Y(y),$$

il vient

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \text{or} \quad \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = -\lambda^2,$$

nous obtenons

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{et} \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0,$$

d'où

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x,$$

$$Y(y) = c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{\lambda y},$$

alors une solution positive est

$$u_1(x, y) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{\lambda y}),$$

les conditions aux limites

$$u_1(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \implies X(0) = 0 \implies c_1 = 0,$$

$$u_1(M, y) = X(M)Y(y) = 0 \implies X(M) = 0 \implies c_2 \sin M\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{n\pi}{M}, \quad n \in \mathbb{R}^*,$$

$$u_1(x, N) = X(x)Y(N) = 0 \implies Y(N) = 0 \implies c_3 e^{-\lambda N} + c_4 e^{\lambda N} = 0 \implies c_3 = -c_4 e^{2\frac{N\pi n}{M}}$$

donc

$$X_n(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{M} x,$$

$$Y_n(y) = -c_4 \exp\left(\frac{2N\pi n}{M}\right) \exp\left(\frac{-n\pi y}{M}\right) + c_4 \exp\left(\frac{n\pi y}{M}\right),$$

implique

$$Y_n(y) = c_4 \exp\left(\frac{N\pi n}{M}\right) \left(\exp\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) - \exp\left(\frac{-n\pi(y-N)}{M}\right) \right),$$

1.1. L'ÉQUATION DE LAPLACE SUR UN RECTANGLE (2D)

$$Y_n(y) = 2c_4 \exp\left(\frac{N\pi n}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right),$$

$$u_1(x, y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right),$$

tel que

$$A_n = 2c_2 c_4 \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right),$$

est une solution qui satisfait toutes les conditions pour satisfaire la dernière condition $u_1(x, 0) = f_1(x)$ nous devons d'abord utiliser le théorème de superposition pour obtenir :

$$u_1(x, y) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right),$$

et alors $u_1(x, 0) = f_1(x)$ nous donne

$$f_1(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{-n\pi N}{M}\right), \quad \forall x \in [0, M],$$

développons $f_1(x)$ en série de Fourier en sinus

$$f_1(x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right),$$

tel que

$$\alpha_n = \frac{2}{M} \int_0^M f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) dx,$$

donc

$$A_n = \frac{2}{M \sinh\left(\frac{-n\pi N}{M}\right)} \int_0^M f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nous avons ainsi obtenue une solution formelle du (P_1) en possédant de façons similaire nous obtenons des solutions formelles aux $P_i, i = 2, 3, 4, \dots$ ces solutions sont

$$u_2(x, y) = \sum_{n \geq 1} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{M}\right)$$

avec

$$B_n = \frac{2}{M \sinh\left(\frac{n\pi N}{M}\right)} \int_0^M f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$u_3(x, y) = \sum_{n \geq 1} C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(x-M)}{N}\right)$$

avec

$$C_n = \frac{2}{N \sinh(\frac{n\pi M}{N})} \int_0^N g_1(x) \sin(\frac{n\pi y}{N}) dy, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$u_4(x, y) = \sum_{n \geq 1} D_n \sin(\frac{n\pi y}{N}) \sinh(\frac{n\pi x}{N}),$$

avec

$$D_n = \frac{2}{N \sinh(\frac{n\pi M}{N})} \int_0^N g_2(x) \sin(\frac{n\pi y}{N}) dy, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

Ainsi les solution formelle du problème (1.1) est

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 1} \sin(\frac{n\pi x}{M}) [A_n \sinh(\frac{n\pi(y-N)}{M}) + B_n \sinh(\frac{n\pi y}{M})] \\ + \sum_{n \geq 1} \sin(\frac{n\pi y}{N}) [C_n \sinh(\frac{n\pi(x-M)}{N}) + D_n \sinh(\frac{n\pi x}{N})],$$

Exercice 1.1.1 Résoudre par la méthode de séparation de variable l'équation

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 \leq x, y \leq \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & 0 \leq y \leq \pi \\ u(x, 0) = 0, u(x, \pi) = \chi(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Solution 1.1.1 On pose $u(x, y) = X(x)Y(y)$ l'équation devient $\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$ on obtient deux problème de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad (P_1)$$

$$\begin{aligned} r^2 &= -\lambda^2 \implies X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \\ X(0) &= c_1 = 0 \\ X(\pi) &= c_2 \sin \lambda \pi = 0 \implies X(\pi) = c_2 \sin n\pi \\ \iff &\lambda = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \end{aligned}$$

donc

$$X_n(x) = c_2 \sin nx$$

2^{ème} problème de Sturm

$$\begin{aligned} Y'' - n^2 Y &= 0 \implies Y(y) = c_3 e^{-ny} + c_4 e^{ny} \\ Y(0) &= 0 \implies c_3 = -c_4, \end{aligned}$$