Analysis
Aufgaben

DMK | Deutschschweizerische Mathematikkommission des VSMP
(Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte)

Analysis

Aufgaben

orell füssli
verlag

Herausgeberin: DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission des VSMP
(Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte), dmk.vsmp.ch

Autoren: Baoswan Dzung Wong, Marco Schmid, Regula Sourlier, Hansjürg Stocker, Reto Weibel
Gesamtleitung: Barbara Fankhauser

1. Auflage 2022
978-3-280-04200-7 Print
978-3-280-09235-4 E-Book

Satz und Grafiken: Marco Schmid, Baar
Titelbild: Atelier Tschachtli, Bern

Orell Füssli Verlag, www.ofv.ch

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter www.dnb.de abrufbar.

Inklusive Download-Material
Laden Sie hier die Arbeitsblätter
zu den gekennzeichneten Aufgaben herunter.

Weiterer Werkbestandteil:
Analysis – Ausführliche Lösungen, 978-3-280-04201-4

Orell Füssli Verlag Lernmedien
lernmedien@orellfuessli.com
www.ofv.ch/lernmedien

Hinweise zur Benützung des Buches

Die vorliegende Aufgabensammlung ist für den Analysis-Unterricht im Grundlagenfach konzipiert und umfasst die gemäss dem «Kanon Mathematik» (math.ch/kanon) inhaltlich vorgegebenen Teile der Analysis, wie sie im vierjährigen Gymnasium thematisiert werden. Sie kann als direkte Fortsetzung der «Algebra 9/10» eingesetzt werden.

- Jedes Kapitel ausser Kapitel X beginnt mit Einstiegsfragen oder -aufgaben. Übungsaufgaben im Anschluss an die Theorieblöcke führen über Verständnisfragen hin zu diversen Anwendungen. Abgesehen von Kapitel X am Ende des Buches schliesst jedes Kapitel mit den Unterkapiteln «Vermischte Aufgaben» und «Kontrollaufgaben».
- Die farbig unterlegten Theorieblöcke sind knapp gehalten und können und sollen die Erarbeitung der mathematischen Zusammenhänge im Unterricht nicht ersetzen. Daher fehlen ausführliche Herleitungen.
- Das Buch bietet eine überaus umfangreiche und thematisch sehr vielfältige Aufgabensammlung. Es ist daher unumgänglich, eine geeignete und auf die jeweilige Klasse abgestimmte Auswahl für den Unterricht zu treffen.
- In den Unterkapiteln «Weitere Themen» werden Inhalte und Fragen aufgegriffen, die über das Grundlagenfach hinausgehen und punktuell mit interessierten Schülern und Schülerinnen sowie im Schwerpunkt- oder Ergänzungsfach behandelt werden können. Zu diesen Unterkapiteln gibt es weder «Vermischte Aufgaben» noch «Kontrollaufgaben».
- Im Kapitel X «Funktionen» am Ende des Buches werden gezielt jene Themen aus der «Algebra 9/10» repetiert und weiterentwickelt, die in den vorhergehenden Kapiteln aufgegriffen werden. Ein vollständiges Durcharbeiten dieses Kapitels wird in der Regel nicht nötig sein.
- Mit Ausnahme von Beweisen oder Begründungen sowie gewissen Grafiken sind die Resultate sämtlicher Aufgaben am Ende des Buches zusammengestellt. Die ausführlichen Lösungen aller Aufgaben sind in einem separaten Band erhältlich.

Besondere Markierung

🗎 Zu dieser Aufgabe ist ein Arbeitsblatt verfügbar. Die Arbeitsblätter können unter ofv.ch/analysis heruntergeladen werden.

Rückmeldungen zum Buch sind willkommen, seien es Hinweise auf Fehler, Ergänzungen, Lob oder Kritik. Meldungen sind mit dem Vermerk «Analysis» an lernmedien@orellfuessli.com zu richten.

April 2022 Das Autorenteam

Inhaltsverzeichnis

Dank

Die folgenden Kolleginnen und Kollegen haben uns bei der Erstellung dieses Buches unterstützt, indem sie einzelne Kapitel im eigenen Unterricht erprobt und uns Rückmeldungen und Hinweise zum Verbessern gegeben haben:

Lucius Hartmann (KZO Wetzikon), Regula Hoefer (Gymnasium Kirchenfeld, Bern), Nora Mylonas (Alte Kanti Aarau), Andrea Peter (Kantonsschule Sursee), Rolf Peterhans (Kantonsschule Zug), Patrizia Porcaro (Gymnasium am Münsterplatz, Basel), Aline Steiner (Gymnasium Bäumlihof, Basel), Angela Vivot (Kantonsschule Kollegium Schwyz), Salome Vogelsang (Kantonsschule Frauenfeld), Josef Züger (Bündner Kantonsschule, Chur)

Bedanken möchten wir uns auch bei Hansruedi Künsch (ETH Zürich), der als Vertreter der Hochschule das Buch begutachtet und Rückmeldungen gegeben hat, sowie bei den Kollegen Markus Egli (Kantonsschule Uetikon am See) und Richard Schicker (Kantonsschule Zug), die ebenfalls als Fachlektoren gewirkt und uns mit hilfreichen Anregungen weitergebracht haben.

Baoswan Dzung Wong, Marco Schmid, Regula Sourlier-Künzle, Hansjürg Stocker, Reto Weibel sowie Barbara Fankhauser (Projektleitung)

Vorwort der Herausgeberin

Mit dem «Kanon Mathematik» (math.ch/kanon) wurde 2016 im Auftrag der Kommission Gymnasium-Universität durch Vertreterinnen und Vertreter der Gymnasien und der Universitäten festgehalten, über welches mathematische Wissen und welche mathematischen Fertigkeiten Maturandinnen und Maturanden bei Studienbeginn verfügen sollen, die Mathematik nur im Grundlagenfach besucht haben. Daraufhin hat die Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK begonnen, ihr gesamtes Unterrichtswerk an diese Anforderungen anzupassen. Wir sind stolz darauf, mit diesem Werk die Reihe der nach Themen gegliederten Aufgabensammlungen und Lehrbücher (Algebra, Geometrie, Stochastik und Analysis) abzuschliessen. Neben den unbestrittenen Inhalten zu Folgen und Reihen, Grenzwerten sowie Differential- und Integralrechnung soll dieses Buch Möglichkeiten aufzeigen, wie das Thema Differentialgleichungen auch im Grundlagenfach behandelt werden kann, ohne dabei auf verschiedenste Lösungsmethoden eingehen zu müssen.

Unser Dank gebührt den Autorinnen und Autoren, namentlich Baoswan Dzung Wong, Regula Sourlier-Künzle, Marco Schmid, Hansjürg Stocker und Reto Weibel. Marco Schmid hat zudem auch die Verantwortung für den Satz getragen, wofür ihm ein Extradank gebührt. Weiter geht der Dank an die Projektleiterin Barbara Fankhauser für ihre Koordinationstätigkeit und an das Team der Lernmedien beim Orell Füssli Verlag unter der Leitung von Monika Glavac. Schliesslich bedanken wir uns bei allen, die uns vor dem Erscheinen Rückmeldungen und Inputs zum Werk gegeben haben, sei es als Lektor oder sei es als Erproberin oder Erprober.

Ein grosses Dankeschön geht zudem an die «Stiftung zur Förderung der mathematischen Wissenschaften in der Schweiz» und an die «Akademie der Naturwissenschaften Schweiz» scnat akademie der naturwissenschaften für die finanzielle Unterstützung des Buchprojekts.

Für die Deutschschweizerische Mathematikkommission
Josef Züger, Präsident

1 Folgen und Reihen

1. *Woher sollen wir wissen, wie es weitergeht?* Wie könnten wohl die beiden nächsten Glieder der angegebenen Folgen von Zahlen jeweils lauten?

a) 1, 10, 100, 1000, 10'000, ...	b) 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...	c) 0, 3, 8, 15, 24, 35, ...
d) 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, ...	e) $1, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 4, 0, \ldots$	f) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
g) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots$	h) 10, 16, 17, 32, 33, 35, ...	i) 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...
j) 1, 2, 4, 8, ...	k) 1, 5, 12, 22, 35, 51, ...	l) 31, 28, 31, 30, 31, ...
m) 1, 5, 0, 4, 1, 7, ...	n) 0, 0, 0, 6, 24, ...	o) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
p) 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, ...	q) 2, 7, 15, 26, ...	r) 1, 2, 5, 10, ...
s) 4, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 4, 4, ...	t) 0, 0, 4, 1, 4, 4, 4, 6, 6, 7, 7, ...	
u) 2, 22, 122, 622, 3122 ...	v) 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, ...	

1.1 Einführung

Folgen

Eine *Folge* ist eine Liste von reellen Zahlen $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$ oder $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots$, die in einer bestimmten Reihenfolge aufgeschrieben sind. Die einzelnen Zahlen der Form a_k, $k \in \mathbb{N}$, nennen wir die *Glieder* der Folge. Der *Index* k gibt die Position des Gliedes a_k innerhalb der Folge an, die wir allgemein mit (a_k) bezeichnen. Anders als bei den Zahlenmengen können die einzelnen Glieder einer Folge (a_k) durchaus denselben Wert aufweisen, allenfalls stimmen sogar alle Glieder miteinander überein: $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = \ldots$, was bei jeder *konstanten Folge* der Fall ist.

Besitzt die Folge (Liste) ein letztes Glied a_n, und somit einen grössten Index $n \in \mathbb{N}$, so sprechen wir von einer *endlichen* oder *abbrechenden Folge*, gelegentlich auch von einer Folge der Länge n. Bricht die Folge (a_k) hingegen nicht ab und besitzt somit kein letztes Glied a_n, dann sprechen wir von einer *unendlichen Folge*. Dies ist uns von der Folge $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$ der natürlichen Zahlen her vertraut. Kann das allgemeine Glied $a_k \in \mathbb{R}$ durch einen Term mit dem Index k beschrieben werden, so sagen wir, die Folge (a_k) ist *explizit* definiert.

Beispiele für explizite Definitionen oder Darstellungen:

- $a_k = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}$
- $a_k = k^2 - 3k + 14,\ k \in \mathbb{N}$
- $a_k = \cos(k \cdot \pi),\ k \in \mathbb{N}$

Der expliziten Darstellung einer Folge liegt im Prinzip eine Funktion $f:\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zugrunde, die jedem Index $k \in \mathbb{N}$ das dazugehörige Glied $a_k \in \mathbb{R}$ zuordnet. Bei einer endlichen oder abbrechenden Folge (a_k) ist der Definitionsbereich D_f die endliche Teilmenge $\{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n\}$ aus $\mathbb{N}$.

Hängt das allgemeine Glied $a_k \in \mathbb{R}$ von einem oder mehreren seiner Vorgängerglieder und eventuell von k ab, so ist die dazugehörige Folge (a_k) *rekursiv* definiert. Um die Folge aufzustellen, braucht es also zusätzlich noch ein oder mehrere Startglieder.

Beispiele für rekursive Definitionen oder Darstellungen:

- $a_1 = 13$ und $a_k = 2a_{k-1} - 4,\ k > 1$
- $a_1 = 4$ und $a_{k+1} = 21 - 3a_k,\ k \in \mathbb{N}$
- $a_1 = 2, a_2 = 1$ und $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k,\ k \in \mathbb{N}$
- $a_1 = 7$ und $a_{k+1} = a_k + k,\ k \in \mathbb{N}$

2. Diese Aufgabe bezieht sich auf die Beispiele in der vorhergehenden Box (Folgen).

a) Notiere je die ersten sechs Glieder der drei explizit definierten Folgen.

b) Notiere je die ersten fünf Glieder der vier rekursiv definierten Folgen.

3. Suche die explizite Darstellung a_k der gegebenen Folge für $k \in \mathbb{N}$.

a) 2, 4, 6, 8, 10, … b) 1, 3, 5, 7, 9, … c) 2, 4, 8, 16, … d) 1, 4, 9, 16, …

e) 7, 14, 21, 28, 35, … f) 8, 15, 22, 29, 36, … g) $-13, -3, 7, 17, 27, \ldots$ h) 3, 9, 27, 81, …

4. Bestimme die explizite Darstellung des allgemeinen Gliedes a_k der gegebenen Folge für $k \in \mathbb{N}$.

a) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$ b) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots$

c) $\frac{-2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{-8}{7}, \frac{16}{9}, \frac{-32}{11}, \ldots$ d) $\frac{4}{7},\ \frac{12}{15},\ \frac{20}{23},\ \frac{28}{31},\ \ldots$

5. Berechne die beiden Glieder a_{50} und a_{51} der durch ihre ersten Glieder gegebenen Folge.

a) $\frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{16},\ \frac{9}{20},\ \ldots$ b) $\frac{3}{4},\ \frac{4}{7},\ \frac{1}{2},\ \frac{6}{13},\ \frac{7}{16},\ \frac{8}{19},\ \ldots$

6. Beschreibe die durch ihre ersten Glieder gegebene Folge rekursiv.

a) 3, 7, 11, 15, 19, … b) 6, 12, 24, 48, 96, …

c) 6, 13, 27, 55, 111, … d) 4, 11, 32, 95, 284, …

7. Von einer Folge (a_k) sind die beiden Startglieder und die Rekursionsformel zur Berechnung der übrigen Glieder gegeben. Notiere die ersten zehn Glieder und bestimme a_{100}, a_{101}, a_{102} und a_{107}.

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{k+2} = a_{k+1} - a_k,\ k \geq 1$ b) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{k+2} = \dfrac{a_{k+1}}{a_k},\ k \geq 1$

8. Von der Folge (a_k) sind die beiden Startglieder a_1 und a_2 sowie die folgende Rekursionsformel gegeben: $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k$; $k \in \mathbb{N}$. Berechne aus den gegebenen Startgliedern die fünf Glieder a_3, a_4, a_5, a_6 und a_7 und suche die explizite Darstellung für das allgemeine Glied a_k, $k \in \mathbb{N}$.

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ b) $a_1 = 7$, $a_2 = 3$ c) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ d) $a_1 = -5$, $a_2 = -4$

9. Die Folge (a_k) ist durch die Startglieder a_1 und a_2 sowie die folgende Rekursionsformel gegeben: $a_{k+2} = \frac{a_{k+1}^2}{a_k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Berechne aus den angegebenen Startgliedern die fünf Glieder a_3, a_4, a_5, a_6 und a_7 und bestimme die explizite Darstellung für das allgemeine Glied a_k der Folge, $k \in \mathbb{N}$.

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 8$ b) $a_1 = 81$, $a_2 = 27$ c) $a_1 = 16$, $a_2 = -24$ d) $a_1 = -2$, $a_2 = -2$

10. Beschreibe die durch das allgemeine Glied a_k gegebene Folge rekursiv für $k \in \mathbb{N}$.

a) $a_k = 2k + 34$ b) $a_k = 1 - 2k$ c) $a_k = (-3)^k$ d) $a_k = k^2$

11. Gib sowohl eine explizite als auch eine rekursive Darstellung der Folge mit periodischer bzw. zyklischer Struktur an.

a) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$ b) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$

c) 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, … d) $0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$

12. Von einer Folge (a_k) sind das erste Glied und die Rekursionsformel gegeben. Schreibe die ersten sechs Glieder der Folge auf und entwickle daraus eine explizite Darstellung für das allgemeine Glied a_k der Folge, $k \in \mathbb{N}$.

a) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$

b) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = a_k + \frac{1}{2^k}$

c) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = a_k + (-1)^k \cdot \left(2k^2 + 2k + 1\right)$

d) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{a_k}{2}$

13. Bestimme je die ersten fünf Glieder der rekursiv oder explizit gegebenen Folgen (a_k), (b_k) und (c_k) und vergleiche anschliessend diese drei Folgen miteinander $(k \in \mathbb{N})$.

a) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = 10a_k + 1;\ \ b_1 = 1,\ b_{k+1} = b_k + 10^k;\ \ c_k = \frac{10^k - 1}{9}$

b) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = a_k \cdot \frac{k}{k+1};\ \ b_1 = 1,\ b_{k+1} = b_k - \frac{1}{k(k+1)};\ \ c_k = \frac{1}{k}$

Reihen

Werden die ersten n Glieder einer gegebenen Folge (a_k) aufsummiert, so erhalten wir die *Partialsumme* s_n:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ n \in \mathbb{N}.$$

Zusätzlich definieren wir $s_1 = a_1$.

Die zur Folge (a_k) gehörende Folge (s_n) heisst *Reihe* oder *Partialsummenfolge*. Die Folge (s_n) lässt sich wie folgt rekursiv definieren bzw. darstellen: $s_1 = a_1$ und $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rechenregeln zum Summenzeichen:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

14. Berechne die ersten sechs Glieder der zur gegebenen Folge gehörigen Partialsummenfolge (s_n). Wie gross ist s_{100}?

a) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots$

b) $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ 7,\ \ldots$

c) $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$

15. Die Folge ist durch das allgemeine Glied $a_k = 2k + 10$ $(k \in \mathbb{N})$ gegeben. Notiere die dazugehörige Partialsumme ohne Summenzeichen und rechne sie aus.

a) $\sum_{k=1}^{4} a_k$

b) $\sum_{k=1}^{11} a_k$

c) $\sum_{k=1}^{14} a_k$

d) $\sum_{k=5}^{14} a_k$

e) $\sum_{k=1}^{n} a_k$

16. Notiere die Summe mit dem Summenzeichen $\sum$. Die Summe muss nicht ausgerechnet werden.

a) $5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35$

b) $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 250$

c) $25 + 30 + 35 + 40 + \ldots + 105$

d) $3 + 9 + 27 + 81 + 243$

e) $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 400$

f) $0 + 3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 345$

17. Von einer Folge ist das allgemeine Glied a_k gegeben und s_n bezeichnet ihre n-te Partialsumme.

a) Berechne s_3 und s_8 für $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ und stelle s_n als vereinfachten Term dar.

b) Berechne s_4 und s_9 für $a_k = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ und stelle s_n als vereinfachten Term dar.

c) Berechne s_{15} für $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ und stelle s_n als vereinfachten Term dar.

18. Mit (a_k) werde die Folge $1, 3, 5, 7, \ldots$ der ungeraden Zahlen bezeichnet.

a) Beschreibe die Folge (a_k) sowohl rekursiv als auch explizit, $k \in \mathbb{N}$.

b) Zur Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ gehört die durch $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}$ definierte Partialsummenfolge (s_n) mit $s_1 = a_1$. Berechne die sieben Glieder $s_2, s_3, s_4, \ldots, s_8$ der Folge (s_n) und gib einen einfachen Term für die n-te Partialsumme s_n an.

c) Finde eine einfache geometrische Veranschaulichung deines Ergebnisses aus der vorherigen Teilaufgabe.

d) Berechne $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1000}$ mit möglichst kleinem Rechenaufwand.

19. Die Folge (a_k) ist rekursiv definiert durch $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_{k+1} = a_k - \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$, $k \in \mathbb{N}$.

a) Berechne ohne Hilfe des Taschenrechners die fünf Glieder a_2, a_3, a_4, a_5 und a_6 dieser Folge.

b) Berechne die fünf Startglieder der durch $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ gegebenen Partialsummenfolge (s_n) und gib für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ einen einfachen Term für s_n an.

c) Entwickle eine Formel für die explizite Darstellung des allgemeinen Gliedes a_k $(k \in \mathbb{N})$ der gegebenen Folge (a_k). *Tipp*: $s_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n$.

20. Bestimme die Partialsumme $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ der Folge mit dem allgemeinen Glied $a_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

1.2 Verschiedene Typen von Folgen und Reihen

Arithmetische Folgen und Reihen

Arithmetische Folge

Eine Folge (a_k) heisst *arithmetische Folge* (AF), wenn die Differenz d aufeinanderfolgender Glieder konstant und verschieden von 0 ist:

$$d = a_{k+1} - a_k,\ d \neq 0 \text{ ist konstant für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Für die rekursive Darstellung oder Definition einer AF erhalten wir daraus die folgende Rekursionsformel mit vorgegebenem Anfangsglied oder Startglied a_1:

$$a_{k+1} = a_k + d,\ k \in \mathbb{N}.$$

Die explizite Definition einer AF mit gegebenen Werten für a_1 und d lautet

$$a_k = a_1 + (k-1)\,d,\ k \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt weiter

$$d = \frac{a_k - a_1}{k-1} = \frac{a_k - a_m}{k-m},\ k > m \geq 1\ (k, m \in \mathbb{N}).$$

Mit Ausnahme des ersten Gliedes a_1 (und eines allfälligen letzten Gliedes) ist jedes Glied einer AF das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},\ k \geq 2.$$

21. Überprüfe, ob es sich bei der Folge um eine AF handelt oder nicht. Falls ja, gib die rekursive und die explizite Definition der Folge an.

a) $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots$
b) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$
c) $-2,\ 3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 25,\ \ldots$
d) $12,\ 20,\ 28,\ 36,\ \ldots$
e) $17,\ 14,\ 11,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0,\ \ldots$
f) $50,\ 40,\ 30,\ 20,\ 10,\ 0,\ -10,\ -20,\ \ldots$

22. Berechne das 5. Glied der gegebenen AF.

a) $a_1 = 6,\ a_{k+1} = a_k + 8$
b) $3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots$
c) $a_k = 5 + (k-1) \cdot 7$
d) $a_1 = 34,\ d = 5$

23. Eine AF beginnt mit 2 und das 2775. Glied ist die Zahl 524'288.

a) Wie lauten die ersten drei Glieder der Folge?
b) Gesucht werden die rekursive und die explizite Definition der Folge.

24. Von einer AF kennt man zwei Glieder. Gib die explizite Definition der Folge an und berechne das gesuchte Glied.

a) $a_3 = 5,\ a_5 = 6,\ a_{20} = ?$
b) $a_{10} = 12,\ a_{20} = 18,\ a_4 = ?$

25. Zwischen den Zahlen 800 und 1575 sollen 24 Zahlen so eingeschoben werden, dass eine AF entsteht. Gesucht ist die rekursive Definition der entstehenden Folge.

26. Wie viele Glieder der AF mit $a_1 = \frac{1}{7}$ und $a_3 = \frac{1}{11}$ sind grösser als 0?

27. Bestimme m so, dass die Folge $m,\ m^2+3,\ 4m^2-2m,\ \ldots$ eine AF bildet.

28. Bei einer dreigliedrigen AF beträgt die Summe der drei Glieder 30 und die Summe der quadrierten Glieder liefert den Wert 318. Bestimme die drei Glieder einer solchen AF. *Tipp:* Notiere die dreigliedrige AF in der Form $m-d,\ m,\ m+d$.

Beispiel: Gesucht ist die Summe der ersten elf Glieder der AF 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94, ... Gesucht ist also die Partialsumme $s_{11} = 10 + 17 + 24 + 31 + \ldots + 80$.

Um nicht mühsam alle Zahlen einzeln zusammenzählen zu müssen, benutzen wir folgende Idee: Wir schreiben die Summe zweimal auf: einmal in der gegebenen Form und einmal in umgekehrter Reihenfolge direkt darunter. Danach werden die übereinanderstehenden Summanden addiert:

$$\begin{array}{r|c}
10 + 17 + 24 + 31 + \ldots + 66 + 73 + 80 = s_{11} & \\
80 + 73 + 66 + 59 + \ldots + 24 + 17 + 10 = s_{11} & + \\
\hline
90 + 90 + 90 + 90 + \ldots + 90 + 90 + 90 = 2s_{11} &
\end{array}$$

Auf der linken Seite steht elfmal die Zahl 90, d. h. $2s_{11} = 11 \cdot 90 = 990$ und

$$s_{11} = \frac{11 \cdot 90}{2} = \frac{11}{2} \cdot 90 = \frac{11}{2} \cdot (10 + 80) = 495.$$

29. Berechne $20 + 27 + 34 + 41 + \ldots + 1490$ mit der Methode aus dem Beispiel in der grauen Box.

Arithmetische Reihe

Die zu einer AF gehörige Partialsummenfolge (s_n) mit $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ heisst *arithmetische Reihe* (AR). Für die explizite Darstellung einer AR gelten die beiden Formeln

$$s_n = \tfrac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \quad \text{und} \quad s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d,\ n \in \mathbb{N}.$$

30. *Beweis der Summenformel.* Bestätige die beiden Summenformeln mit der Methode, die im Beispiel in der grauen Box beschrieben wird.

31. Durch welche Zahl ist das Fragezeichen zu ersetzen?

a) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100 = ?$

b) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 97 + 99 = ?$

c) $53 + 56 + 59 + \ldots + 335 = ?$

d) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots,\ \ s_{50} = ?$

e) $a_1 = 0.5,\ d = 0.2,\ \ s_{45} = ?$

f) $a_2 = 48.8,\ a_{33} = 11.6,\ \ s_{50} = ?$

32. Von einer AF sind die beiden Glieder $a_1 = 8$ und $a_{10} = 71$ bekannt.

a) Wie lauten die ersten sieben Glieder der Folge?

b) Wie lautet das Glied a_{50}?

c) Wie gross ist die Summe der Glieder a_{21} bis und mit a_{50}?

33. Berechne die Summe

a) aller geraden Zahlen von 100 bis und mit 10'000.

b) aller ungeraden Zahlen von 999 bis und mit 9999.

c) aller durch 7 teilbaren Zahlen von 77 bis und mit 7777.

34. Gegeben ist eine AR. Berechne die Partialsummen s_{111} und allgemein s_n.

a) $7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \ldots$

b) $12 + 14 + 16 + 18 + 20 + \ldots$

35. Berechne die Summe.

a) $\sum_{i=1}^{20} (1000 - 4i)$

b) $\sum_{i=0}^{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)$

c) $\sum_{i=10}^{50} \left(10 + \frac{3i}{2}\right)$

d) $\sum_{i=0}^{24} 3\left(-7 + \frac{5i}{9}\right)$

36. Schreibe den Term mit dem Summenzeichen $\sum$ und rechne die Summe aus.

a) $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21$

b) $45 + 40 + 35 + 30 + 25 + 20 + 15 + 10$

c) $7 + \frac{15}{2} + 8 + \frac{17}{2} + 9 + \frac{19}{2}$

d) $12 + 7 + 2 - 3 - \ldots - 48 - 53$

e) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \ldots + 15$

f) $-31 - 23 - 15 - \ldots + 41 + 49$

37. Die Summe des ersten, dritten und fünften Gliedes einer AF ist 33. Das Produkt der ersten drei Glieder ist 231. Berechne a_1 und die Differenz d der AF.

38. Sofia zersägt eine Dachlatte von 4 m Länge in zehn Teile. Dabei ist jeder Teil 6 cm länger als der zuvor abgesägte. Es bleibt kein Reststück übrig. Wie lang ist das kürzeste Stück?

39. Sabrina erhält von ihren Eltern ein zinsloses Darlehen von 120'000 Franken, das sie wie folgt in Raten zurückzahlen soll: Ende des ersten Jahres muss sie 6000 Franken zurückzahlen, danach jedes Jahr 500 Franken mehr als im Vorjahr. Nach wie vielen Jahren hat Sabrina das Darlehen zurückbezahlt? Wie hoch ist die letzte Rate, die sie bezahlen muss?

40. Auf einem Bahngeleise mit gleichmässigem Gefälle kommt ein Güterwagen ins Rollen. In der ersten Sekunde legt er 0.3 m zurück, in der zweiten 0.9 m, in der dritten 1.5 m und auch in jeder weiteren Sekunde legt er 0.6 m mehr zurück als in der vorhergehenden. Welche Strecke wird der Güterwagen in den ersten 30 Sekunden zurückgelegt haben? Wie viele Sekunden benötigt der Güterwagen für die ersten 120 m?

41. Frau M. Oney tritt eine neue Stelle in einem Unternehmen an, wobei sie zwischen den Lohnvarianten A und B wählen darf.

- *Variante A:* Das Jahresgehalt beträgt im ersten Jahr 120'000 Franken und der jährliche Lohnanstieg 8000 Franken.
- *Variante B:* Das Semestergehalt beträgt im ersten Semester 60'000 Franken und der halbjährliche Lohnanstieg 2000 Franken.

Welche Lohnvariante ist auf längere Sicht die vorteilhaftere? Berechne dazu für beide Varianten den Gesamtverdienst über eine Zeitspanne von zehn Jahren ab Stellenantritt (ohne Berücksichtigung allfälliger Zinsen).

Geometrische Folgen und Reihen

Geometrische Folge

Eine Folge (a_k) mit $a_k \neq 0$ heisst *geometrische Folge* (GF), wenn der Quotient q aufeinanderfolgender Glieder konstant und ungleich 0 und 1 ist:

$$q = a_{k+1} : a_k = \frac{a_{k+1}}{a_k},\ q \text{ ist konstant für jedes } k \in \mathbb{N},\ q \neq 0,\ q \neq 1.$$

Für die rekursive Darstellung oder Definition einer GF erhalten wir daraus die folgende Formel mit vorgegebenem Anfangsglied oder Startglied a_1:

$$a_{k+1} = a_k \cdot q,\ k \in \mathbb{N}.$$

Die explizite Definition einer GF mit gegebenen Werten für a_1 und q lautet

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Mit Ausnahme des ersten Gliedes a_1 (und eines allfälligen letzten Gliedes a_n) ist jedes Glied einer aus ausschliesslich positiven Gliedern bestehenden GF das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder:

$$a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}},\ k \geq 2.$$

Kommen negative Glieder in einer GF vor, so gilt:

$$|a_k| = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}},\ k \geq 2.$$

42. Überprüfe, ob es sich bei der gegebenen Folge um eine geometrische Folge handelt oder nicht. Falls ja, gib die rekursive und die explizite Definition der Folge an.

a) $1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 256,\ \ldots$
b) $2,\ 3,\ 4.5,\ 6.75,\ 9,\ 13.5,\ \ldots$
c) $2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \ldots$
d) $-2,\ 6,\ -18,\ 54,\ -189,\ \ldots$
e) $12,\ 6,\ 3,\ 1.5,\ \ldots$
f) $10,\ -20,\ 40,\ -80,\ 160,\ \ldots$

43. Von der GF (a_k) mit dem Quotienten q sind zwei Glieder gegeben. Berechne q und a_8.

a) $a_1 = 64,\ a_2 = 96$
b) $a_2 = 8,\ a_5 = 216$
c) $a_7 = 100,\ a_{10} = -12.5$
d) $a_4 = \frac{9}{2},\ a_{26} = 9216$

44. Bilden die angegebenen Zahlen den Anfang einer GF? Wenn ja, berechne das 8. Glied.

a) $1,\ 1.1,\ 1.21,\ 1.331,\ \ldots$
b) $0.1,\ 0.2,\ 0.4,\ \ldots$
c) $24,\ -18,\ 12,\ \ldots$
d) $0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ \ldots$
e) $0.9,\ 0.81,\ 0.729,\ \ldots$
f) $12,\ -18,\ 27,\ \ldots$

45. Drei Zahlen, von denen die zweite um 17 grösser ist als die erste, die dritte um 34 grösser als die zweite, bilden eine GF. Wie heissen die drei Zahlen?

46. Die Summe einer dreigliedrigen GF beträgt 9, das Produkt der drei Glieder liefert den Wert -216. Bestimme die drei Glieder einer solchen GF. *Tipp:* Notiere die drei Glieder der GF in der Form $\frac{m}{q}$, m, mq.

47. Wie viele Glieder der GF 8, 9, ... sind kleiner als 10^{12}? Es wird also der grösstmögliche Index $k \in \mathbb{N}$ gesucht, sodass für das k-te Glied der GF gilt: $a_k < 10^{12}$.

48. Wie viele Glieder der GF 2022, 2021, ... sind grösser als 1291?

49. Wie viele Glieder der GF 1, 1.1, ... liegen zwischen 1000 und 10'000?

50. a) Bei welcher jährlichen prozentualen Zunahme verdoppelt sich die Bevölkerung eines Landes innerhalb von 10 Jahren?

b) Nach wie vielen Jahren etwa verdoppelt sich die Bevölkerung eines Landes bei einer Wachstumsrate von 5 %?

51. Der Stromverbrauch in der Schweiz belief sich im Jahre 1980 auf $48.16 \cdot 10^9$ kWh, im Jahre 1988 auf $58.96 \cdot 10^9$ kWh.

a) Berechne die mittlere jährliche Zunahme in Prozent.

b) Berechne den Stromverbrauch im Jahr 2014 unter der Annahme, dass die mittlere jährliche Zunahme in Prozent derjenigen von 1980 bis 1988 entspricht, und vergleiche den Wert mit dem tatsächlichen Stromverbrauch im Jahr 2014 von $69.63 \cdot 10^9$ kWh.

52. Die beiden zwischen 1 und 10 liegenden Zahlen u und v sind so zu bestimmen, dass 1, u, v, 10 in dieser Reihenfolge eine viergliedrige GF bilden. Welche Werte nehmen u und v an, wenn sie ganzzahlig gerundet werden? Wo im Alltag treten diese Zahlenwerte auf?

Beispiel: Gesucht ist die Summe $1+3+9+27+\ldots+19'683+59'049$, deren Summanden eine GF bilden. In diesem Fall kann zur Summenbildung der folgende Ansatz verwendet werden:

$$\begin{array}{rll} s = & 1+3+9+27+\ldots+59'049 & |- \\ 3s = & \quad 3+9+27+\ldots+59'049 \ +177'147 & |+ \\ \hline 3s-s = & 177'147-1 & |:2 \\ s = & 88'573 & \end{array}$$

53. Berechne die Summe $2+2\cdot 0.5+2\cdot 0.5^2+2\cdot 0.5^3+\ldots+2\cdot 0.5^{10}$ mit der Methode aus dem Beispiel in der grauen Box.

Geometrische Reihe

Die zu einer GF gehörige Partialsummenfolge (s_n) mit $s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ heisst *geometrische Reihe* (GR). Für die explizite Darstellung einer GR gilt die Formel

$$s_n = a_1\,\frac{q^n-1}{q-1} = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q},\ n\in\mathbb{N},\ q\neq 1.$$

54. *Beweis der Summenformel.* Beweise mit der oben beschriebenen Methode die Summenformel.

55. Berechne mit der Summenformel.

a) $32+48+72+108+162+243$

b) $2-6+18-54+162-486+1458-4374$

c) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{4096}{3}$

d) $-3'188'646+1'062'882\mp\ldots-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}$

56. Notiere die Summe mit dem Summenzeichen $\sum$ und rechne sie anschliessend aus.

a) $\frac{5}{4}+\frac{5}{2}+5+10+20+40+80+160+320+640$

b) $7680+3840+1920+\ldots+0.9375$

c) $-4+12-36+\ldots+708'588$

d) $\frac{3}{2}+1+\ldots+\frac{256}{6561}$

e) $1+\sqrt{3}+3+\ldots+2187$

57. Berechne die Summe.

a) $\sum\limits_{i=1}^{11}(-4)^{i-1}$

b) $\sum\limits_{i=1}^{8}2\cdot 3^{i-1}$

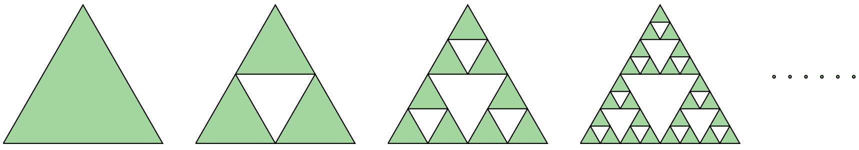
c) $\sum\limits_{i=0}^{16}4096\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}$

d) $\sum\limits_{i=6}^{13}\frac{(-4)^{i-1}}{1024}$

58. Wie viele Glieder der GF 15, 16, … müssen mindestens addiert werden, damit die Summe grösser als eine Milliarde ist?

59. Eine GF besteht aus zehn positiven Gliedern; sie beginnt mit 1 und endet mit 2. Berechne s_{10}.

60. *Das Sierpinski-Dreieck.* Die Folge (A_k) beschreibt die Flächeninhalte der folgenden Figuren.



Bemerkung: Die Figuren zeigen die ersten vier Glieder eines bekannten *Fraktals*, das nach dem polnischen Mathematiker Waclaw Franciszek Sierpinski (1882–1969) benannt ist.

a) Berechne A_2 und A_3.

b) Bestimme die explizite Formel für A_k.

c) Ab welchem $k \in \mathbb{N}$ ist A_k kleiner als 0.0001?

d) Wie viele gefärbte Dreiecke hat das k-te Glied bei der Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks? Gib eine explizite Formel an.

e) Wie Teilaufgabe d), jedoch sollen diesmal die weissen Dreiecke gezählt werden.

Tipp: Stelle zuerst eine rekursive Formel auf.

61. *Die berühmte Schachbrettaufgabe.* Der indische König Shihram soll Sissa, den Erfinder des Schachspiels, aufgefordert haben, sich eine Belohnung zu wünschen. Dieser erbat sich die Anzahl Reiskörner, die auf ein Schachbrett kämen, wenn man auf das erste Feld ein Korn legen würde, auf das zweite 2, auf das dritte 4, auf das vierte 8 usw. bis zum 64. Feld. Wie viele Körner schuldete nun König Shihram dem Erfinder?

1000 Körner Reis haben eine Masse von 20 g und ein Volumen von 25 cm^3.

a) Die Jahresproduktion an Reis auf der ganzen Welt beträgt heute etwa 750 Millionen Tonnen. Rechne die geschuldete Menge Reis in Tonnen um und gib an, wie viele heutige Jahresproduktionen an Reis dafür nötig wären.

b) Diese Menge Reis werde gleichmässig auf der als Kugel gedachten Erde verteilt, deren Radius 6370 km beträgt. Wie dick würde diese Reisschicht?

1.3 Unendliche geometrische Folgen und Reihen

Unendliche geometrische Reihe

Für $|q| < 1$ streben die Glieder a_1, a_2, a_3, … einer GF gegen 0. Die GF stellt eine sogenannte *Nullfolge* dar und es gilt: $a_k \to 0$ für $k \to \infty$. Die dazugehörige Reihe (s_n) strebt für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert s:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad \longrightarrow \quad s = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{für } n \to \infty$$

Bemerkung: Die Zahl $s \in \mathbb{R}$ wird als *Grenzwert* der Reihe (s_n) bezeichnet, wenn die Glieder s_n für wachsendes n dem Wert s beliebig nahekommen.

Eine Folge, die einen Grenzwert hat, heisst *konvergent*. Andernfalls heisst sie *divergent*.

Eine konvergente Reihe kann auch mit dem Summenzeichen geschrieben werden:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Hinweis: Ausführlicher auf den Begriff des Grenzwertes wird in Kapitel 2 eingegangen.

62. Berechne den Wert der unendlichen GR.

a) $6 + 2 + \frac{2}{3} + \ldots$ b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \pm \ldots$ c) $200+120+72+\ldots$ d) $2\sqrt{3}+2+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\ldots$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ f) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-7}{8}\right)^k$ g) $\sum_{i=10}^{\infty} 50'000 \cdot (0.1)^{i-1}$ h) $\sum_{k=0}^{\infty} 38 \left(\frac{2}{3}\right)^{3k}$

63. Wir betrachten die Partialsumme $s_n = 1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$.

a) Wie lautet eine explizite Formel für die Summe s_n?

b) Wie gross ist die Summe der ersten 100 Summanden?

c) Berechne den Grenzwert von s_n für $n \to \infty$.

64. Von einer geometrischen Reihe sind $a_5 = 0.0972$ und $q = 0.3$ bekannt. Berechne den Grenzwert s der unendlichen GR.

65. Von der GF (a_k) mit dem Quotienten q sind zwei Glieder gegeben. Berechne q und den Grenzwert s der dazugehörigen unendlichen GR.

a) $a_5 = 1296,\ a_8 = \frac{2187}{4}$ b) $a_3 = \frac{80}{3},\ a_6 = \frac{-640}{81}$

66. Bestimme den Quotienten q einer unendlichen GR, wenn über deren Grenzwert s Folgendes bekannt ist:

a) Der Grenzwert s ist 6-mal so gross wie das erste Glied der GR.

b) Der Grenzwert s ist 4.5-mal so gross wie das zweite Glied der GR.

67. Bestimme die drei anschliessenden Glieder der GF $4 \cdot \sqrt{2} - 4,\ 2 \cdot \sqrt{2} - 4,\ \ldots$ und berechne, sofern vorhanden, den Grenzwert s der dazugehörigen GR.

68. *Periodische Dezimalbrüche.* Mit unendlichen geometrischen Reihen können periodische Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche umgewandelt werden.

Beispiel: $0.\overline{3} = 0.33333\ldots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$

Wandle mit diesem Verfahren den gegebenen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch um.

a) $0.\overline{4}$ b) $0.\overline{17}$ c) $0.\overline{9}$ d) $4.5\overline{135}$

69. Für welche x-Werte konvergiert die GF?

a) $3,\ 15x,\ 75x^2,\ \ldots$ b) $2,\ 2x-4,\ 2x^2-8x+8,\ \ldots$

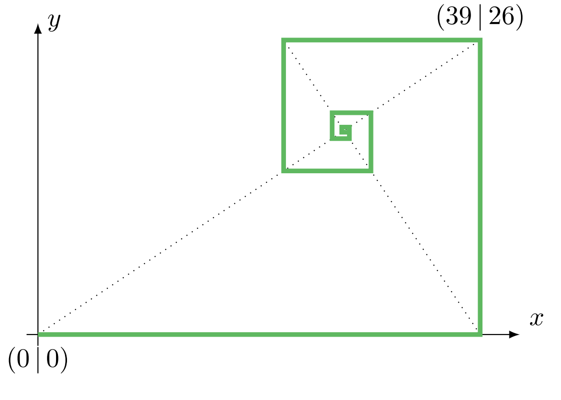
70. Kubinski baut gedanklich einen Turm aus einzelnen Würfeln mit den Kantenlängen 8 cm, 4 cm, 2 cm, 1 cm, … Wie hoch wird dieser Turm höchstens? Welchen Rauminhalt haben alle diese Würfel zusammen?

71. Finn hat einen Knäuel Wolle. Er schneidet einen Meter Wollfaden ab. Danach schneidet er vom Knäuel ein Stück des Wollfadens ab, das nur noch $\frac{1}{3}$ so lang ist. Jedes weitere Stück, das er vom Knäuel abschneidet, ist $\frac{1}{3}$ so lang wie das vorherige. Wie lang wäre die Strecke, wenn Finn unendlich viele Stücke abschneiden könnte und alle diese Wollstücke aneinanderlegen würde?

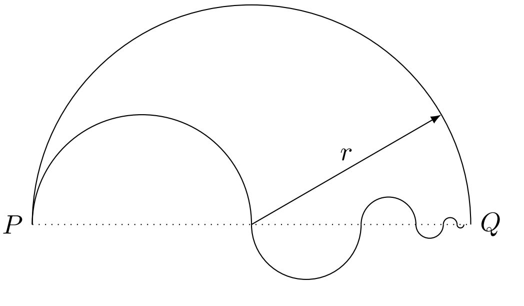
72. Michèle zeichnet eine Spirale aus Halbkreisen, deren Radien eine unendliche GF bilden. Der erste Halbkreis hat den Radius $r_1 = 5$ cm, der zweite $r_2 = 4$ cm. Wie lang wird die Spirale?

73. Der links dargestellte spiralförmige Weg beginnt im Ursprung $(0\,|\,0)$ und besteht aus Strecken (wie abgebildet), deren Längen eine GF bilden. Wie lang ist der unendlich fortgesetzte Weg und wo liegt der Zielpunkt Z dieses spiralförmigen Wegs?

Zu Aufgabe 73:



Zu Aufgabe 74:



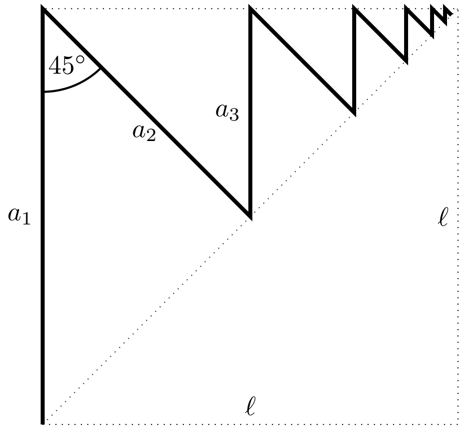
74. Der Schlangenweg von P nach Q setzt sich aus unendlich vielen Halbkreisbögen zusammen, deren Radien eine GF mit $q = \frac{1}{2}$ bilden. Ist der Schlangenweg oder der Halbkreisweg kürzer?

75. Um wie viel Prozent müssen die Glieder einer unendlichen GR mit dem Startglied $a_1 = 3.21$ von einem Glied zum jeweils nächstfolgenden mindestens abnehmen, damit die aufsummierte Reihe den Wert $s = 4.56$ nicht übertrifft?

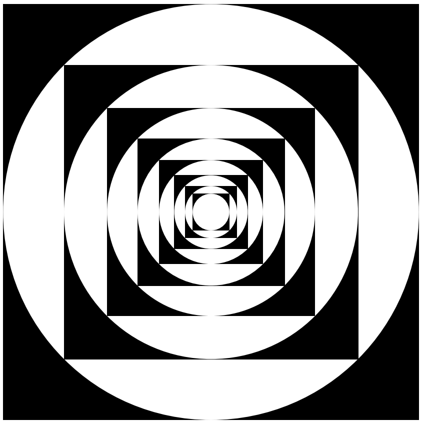
76. *Geometrische Herleitung der Formel* $s = \frac{a_1}{1-q}$. Die Punkte P, Q, R, S, … liegen rechts des Ursprungs O auf der positiven x-Achse, und zwar so, dass die Längen der Streckenabschnitte $a_1 = \overline{OP}$, $a_2 = \overline{PQ}$, $a_3 = \overline{QR}$, $a_4 = \overline{RS}$, … Glieder einer fallenden GF sind, also einer mit $0 < q < 1$. Diese Strecken werden nun je um 90° um den jeweils links liegenden Anfangspunkt nach oben gedreht. Die gedrehten Endpunkte P', Q', R', S', … haben somit die Koordinaten $P'(0\,|\,a_1)$, $Q'(a_1\,|\,a_2)$, $R'(a_1 + a_2\,|\,a_3)$, $S'(a_1 + a_2 + a_3\,|\,a_4)$, … Erstelle eine passende Skizze und weise nach, dass alle diese Punkte P', Q', R', S', … auf ein und derselben Geraden g liegen. Diese fallende Gerade g schneidet die x-Achse in einem Punkt $X(x_0\,|\,0)$. Zeige, dass die Abszisse x_0 dem Wert der Gesamtlänge $s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ der unendlichen GR dieser Streckenabschnitte entspricht.

77. In einem Quadrat mit Seitenlänge ℓ ist ein Weg, bestehend aus einzelnen Streckenabschnitten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ einbeschrieben (siehe linke Figur). Zeige sowohl algebraisch wie geometrisch, dass der unendlich fortgesetzte Weg folgende Länge hat: $L = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 2\ell + \ell \cdot \sqrt{2} = \ell\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

Zu Aufgabe 77:



Zu Aufgabe 78:



78. In der obigen Figur rechts wurde dem äussersten Quadrat ein Kreis maximaler Grösse einbeschrieben. Diesem Kreis wird wiederum ein Quadrat einbeschrieben, diesem erneut ein Kreis und so weiter. Wie viel Prozent der Fläche des äussersten Quadrats machen die unendlich vielen schwarzen Flächen aus?

1.4 Weitere Themen

Arithmetische Folgen höherer Ordnung

Differenzen- und Stammfolgen

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ die Glieder einer gegebenen Folge (a_k), so wird jene Folge, die durch die Differenz $d_k = a_{k+1} - a_k$ aufeinanderfolgender Glieder definiert ist, als *1. Differenzenfolge* (1. DF) von (a_k) bezeichnet, $k \in \mathbb{N}$. Es können auch die Differenzenfolgen von Differenzenfolgen betrachtet werden, was dann zur 2., 3. oder allgemein k-ten Differenzenfolge (k. DF) führt. Die anfänglich gegebene Folge (a_k) wird *Stammfolge* genannt.

Beispiele:

- Stammfolge: $2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \ldots$

  1. DF: $3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$
  2. DF: $2, 2, 2, 2, 2, \ldots$
  3. DF: $0, 0, 0, 0, \ldots$

- Stammfolge: $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

  1. DF: $-2, 2, -2, 2, -2, 2, \ldots$
  2. DF: $4, -4, 4, -4, 4, \ldots$

- Stammfolge: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$

  1. DF: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

- Stammfolge: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

  1. DF: $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{12}, \frac{-1}{20}, \frac{-1}{30}, \ldots$
  2. DF: $\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \ldots$

79. Bestimme so weit wie möglich die 1. DF der durch ihre ersten paar Glieder gegebenen Stammfolge. Wie könnten die beiden nächsten Glieder der 1. DF lauten?

a) $10, 11, 15, 24, 40, 65, \ldots$
b) $3, 10, 15, 18, 19, 18, 15, \ldots$
c) $4, 6, 9, 14, 21, 32, 45, \ldots$
d) $1, 2, 0, 3, 4, 2, 5, 6, \ldots$

80. Von einer längeren Stammfolge sind nur die ersten paar Glieder bekannt. Bestimme anhand der leicht ersichtlichen Gesetzmässigkeit oder Struktur ihrer 1. DF die nächsten zwei Glieder der gegebenen Stammfolge.

a) $106, 107, 105, 108, 104, 109, 103, 110, \ldots$
b) $\frac{11}{60}, \frac{41}{60}, \frac{61}{60}, \frac{91}{60}, \frac{37}{20}, \frac{47}{20}, \ldots$
c) $13, 14, 25, 27, 49, 52, 85, 89, \ldots$
d) $6, 7, 9, 10, 8, 9, 11, 12, 10, 11, 13, \ldots$

81. Anna, Bryan, Carla und Daniel sollen aus der 1. DF $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$ die Stammfolge «rekonstruieren». Sie haben je unterschiedliche Stammfolgen erhalten:

Anna: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$
Bryan: $0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \ldots$
Carla: $3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, 130, \ldots$
Daniel: $-7, -6, -4, 0, 8, 24, 56, 120, \ldots$

Wem ist beim «Rekonstruieren» ein Fehler unterlaufen?

82. *Rekonstruktion der Stammfolge aus ihrer Differenzenfolge.* Verschiedene Stammfolgen können dieselbe 1. DF haben, anders gesagt: Zu jeder 1. DF gibt es unterschiedliche Stammfolgen. Welche Aussage lässt sich über zwei solche Stammfolgen machen, deren 1. DF identisch sind?

83. Gegeben ist die nicht abbrechende Zahlenfolge $2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, \ldots$ mit dem allgemeinen Glied $a_k = k - (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

a) Bestimme schrittweise die 1., 2., 3. und 4. DF dieser Folge.
b) Welche Vermutung hast du bezüglich der 6. und der 7. DF?
c) Wie lassen sich wohl die Glieder d_k der n-ten DF für $n \geq 2$ beschreiben? (ohne Beweis)

Arithmetische Folge höherer Ordnung

Eine Folge (a_k) heisst *arithmetische Folge n-ter Ordnung* (AFn), wenn ihre n-te DF konstant und ungleich 0 ist. Die weiter oben eingeführte AF ist demzufolge eine AF1, also eine arithmetische Folge 1. Ordnung. Eine AFn lässt sich explizit mit einer Polynomfunktion vom Grad n beschreiben, eine AF demzufolge mit einer linearen Funktion. Für das allgemeine Glied a_k einer AFn gilt: $a_k = c_n k^n + c_{n-1} k^{n-1} + \ldots + c_2 k^2 + c_1 k + c_0$, $c_n \neq 0$.

84. Gegeben ist die AF mit dem allgemeinen Glied $a_k = k^2 - k + 3$.

a) Bestimme ein paar Glieder und zeige, dass es sich um eine AF2 handelt.

b) Wie lautet das allgemeine Glied d_k der 1. DF?

85. Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_k = k^2 - 2k + 2$. Wie lautet das allgemeine Glied d_k ihrer 1. DF?

86. Gegeben sind die ersten paar Glieder einer AF2. Stelle eine explizite Formel für das allgemeine Glied a_k $(k \in \mathbb{N})$ auf und berechne damit a_{101}.

a) $1, 3, 7, 13, 21, \ldots$
b) $10, 7, 2, -5, -14, \ldots$
c) $3, 3, 4, 6, 9, \ldots$
d) $12, 11, 7, 0, -10, \ldots$
e) $2, 0, 0, 2, 6, \ldots$
f) $3, 3, 1, -3, -9, \ldots$

87. Gegeben sind die ersten paar Glieder einer AF3. Leite eine explizite Formel für das allgemeine Glied a_k $(k \in \mathbb{N})$ der gegebenen Folge her und berechne damit a_{22}.

a) $0, 6, 24, 60, 120, \ldots$
b) $2, 9, 28, 65, 126, \ldots$
c) $-8, -2, 0, 0, 0, \ldots$
d) $1, 0, -1, -8, -27, \ldots$

88. a) Das allgemeine Glied der 2. DF lautet $e_k = (-1)^k$, die 1. DF startet mit $d_1 = 3$ und die Stammfolge mit $a_1 = 4$. Notiere die ersten acht Glieder der Stammfolge.

b) Das allgemeine Glied der 2. DF lautet $e_k = 6k + 6$, die 1. DF startet mit $d_1 = 7$ und die Stammfolge mit $a_1 = 1$. Notiere die ersten sechs Glieder der Stammfolge.

89. Das allgemeine Glied der 2. DF lautet $e_k = 3k + 12$, die 1. DF startet mit $d_1 = 5$ und die Stammfolge mit $a_1 = -10$. Notiere die ersten sechs Glieder der Stammfolge.

90. Wenn (s_n) die Reihe der Folge (a_k) ist, d. h. $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, so stellt sich die Frage, ob nicht umgekehrt (a_k) die 1. DF von (s_n) sein müsste. Wie lautet die korrekte Antwort?

91. a) Gegeben ist eine beliebige GF. Was lässt sich dann über deren 1. DF sagen?

b) Die 1. DF sei eine GF. Ist dann auch die dazugehörige Stammfolge eine GF?

92. Ist es zutreffend, dass die 3. Differenzenfolge einer AF4 eine AF1 ist? Begründe die Antwort.

93. Zeige, dass die Stammfolge eine AF5 sein muss, wenn deren 3. Differenzenfolge eine AF2 ist.

94. Was kannst du über die 5. Differenzenfolge einer AF2 sagen? Begründe deine Antwort.

95. Wie verändert sich die Ordnung einer AFn, wenn jedes Glied a_k der Folge

a) um die Zahl $m > 0$ vergrössert wird?

b) um die Zahl $m > 0$ verkleinert wird?

c) mit der Zahl $m > 0$ vervielfacht wird?

96. Die Funktion f hat die Eigenschaft, dass die Funktionswerte $f(x_k)$ eine AFn ($n \in \mathbb{N}$) bilden, falls die Argumente x_k ($k \in \mathbb{N}$) eine solche bilden. Was lässt sich über die Funktion f sagen?

97. In einer Ebene liegen n Kreise so, dass sich jeder Kreis mit jedem anderen in zwei Punkten schneidet, sich aber nie drei oder mehr Kreise im selben Punkt schneiden. In wie viele Gebiete wird die Ebene durch die Kreise aufgeteilt? Gesucht sind eine rekursive und eine explizite Formel für die Anzahl der Gebiete.

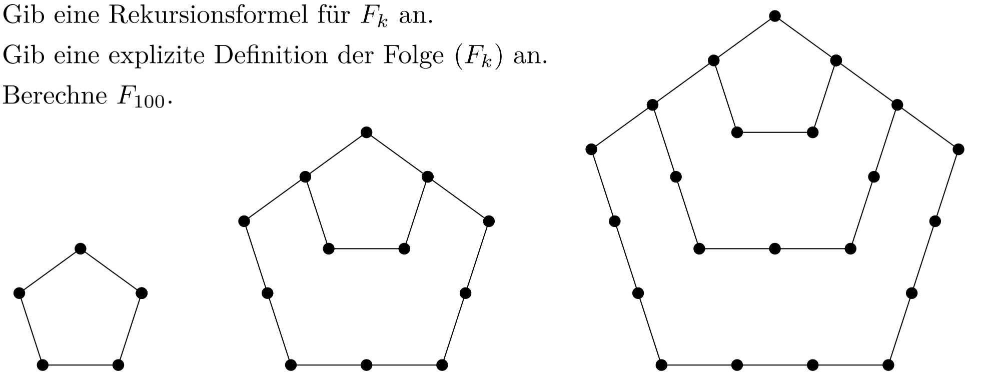
98. F_k ist die Anzahl Punkte der k-ten Figur.

a) Berechne F_4, F_5 und F_6.

b) Gib eine Rekursionsformel für F_k an.

c) Gib eine explizite Definition der Folge (F_k) an.

d) Berechne F_{100}.

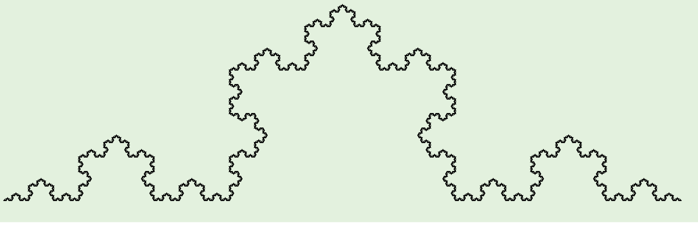


$F_1 = 5$ $F_2 = 12$ $F_3 = 22$

Die Koch-Kurve und die Koch-Schneeflocke

Die Koch-Kurve ist ein vom schwedischen Mathematiker Helge von Koch (1870–1924) im Jahr 1904 entdecktes *Fraktal*. Die Koch-Kurve wird durch eine Iteration folgendermassen beschrieben:

1) Zunächst sei eine Strecke mit vorgegebener Länge gegeben.
2) Dann entfernt man das mittlere Drittel der Strecke und errichtet darüber ein gleichseitiges Dreieck.
3) Im nächsten Schritt wird dasselbe Vorgehen auf jeden der vier entstandenen Streckenabschnitte angewendet.
4) Diese Iteration wird nun beliebig oft wiederholt.



99. In unserem Beispiel soll die Startstrecke drei Einheiten lang sein: $a_0 = 3$. Die Folge (a_k) beschreibt die Länge der Koch-Kurve nach der k-ten Iteration, $k \in \mathbb{N}$.

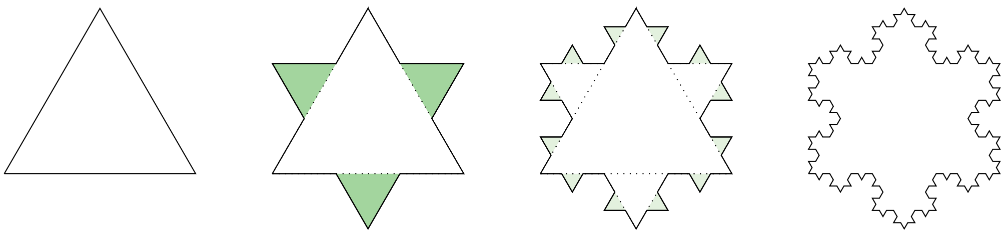
$k = 0$ $\quad$ $k = 1$ $\quad$ $k = 2$ $\quad$ $k = 3$

a) Welche Werte haben a_1 und a_2?

b) Bestimme die explizite Formel für a_k, $k \in \mathbb{N}$.

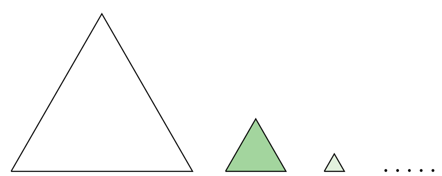
c) Gegen welchen Wert a strebt die Länge der Koch-Kurve? Berechne also a_n für $n \to \infty$.

100. Wir starten mit einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s. Über jeder Dreiecksseite wird nun die in der Box beschriebene Konstruktion der Koch-Kurve angewendet. Dies ergibt die sogenannte Koch-Schneeflocke.



$k = 0$ $\quad$ $k = 1$ $\quad$ $k = 2$ $\quad$ $k = 3$

Im Folgenden beschreibt u_k den Umfang der Schneeflocke nach der k-ten Iteration. A_k hingegen gibt den Flächeninhalt eines der neu entstandenen Dreiecke an ($k \in \mathbb{N}_0$).



A_0 $\quad$ A_1 $\quad$ A_2 $\quad$ ......

a) Bestimme das allgemeine Glied u_k. Wohin strebt der Wert von u_k für immer grösseres k?

b) Finde eine explizite Formel für A_k.

Hinweis: Für die restlichen Teilaufgaben können die Formeln in Abhängigkeit vom Flächeninhalt A_0 angegeben werden – für eine kompaktere Darstellung.

c) Welcher Flächeninhalt ist bei der k-ten Schneeflocke im Vergleich mit der vorhergehenden, $(k-1)$-ten Schneeflocke dazugekommen?

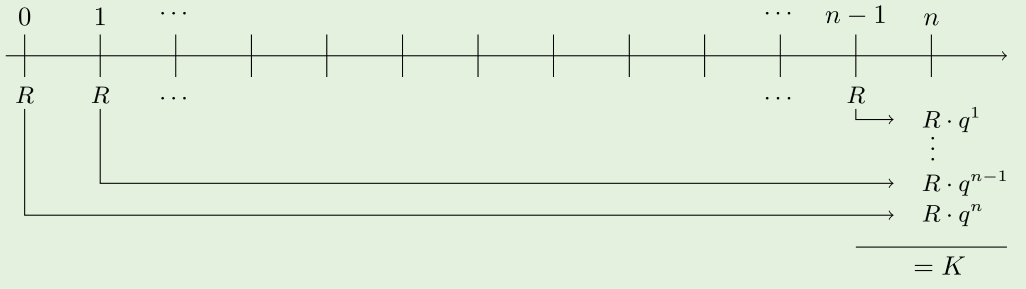
d) Gib eine explizite Formel für den gesamten Flächeninhalt F_k der k-ten Schneeflocke an.

e) Welchem Wert F kommt die Folge (F_k) der Flächeninhalte für wachsendes k beliebig nahe?

Anwendung in der Finanzmathematik

Grundformel für die Rentenrechnung

Bei einem Zinssatz von $p\,\%$ lässt sich das Kapitel K nach n Jahren bei einer jährlichen Einzahlung R wie folgt berechnen:



GR mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ $\Rightarrow$ $K = R \cdot q + R \cdot q^2 + \ldots + R \cdot q^{n-1} + R \cdot q^n = R \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Bemerkung: Die gewählten Zinssätze in den folgenden Aufgaben dienen der Veranschaulichung und entsprechen nicht der aktuellen Realität.

101. Berechne bei einem festen Jahreszinssatz von $5\,\%$ den Wert, den ein Kapital von 1000 Franken

a) in 10 Jahren haben wird.

b) vor 10 Jahren hatte.

102. Ein Kapital von 3500 Franken wird bei einem Jahreszins von $1.2\,\%$ vierteljährlich verzinst.

a) Wie gross ist das Kapital nach 6 Jahren?

b) Wie gross wäre das Kapital nach 6 Jahren bei einer monatlichen Verzinsung?

103. Angenommen, du zahlst am Anfang jedes Jahres 2000 Franken bei einer Bank ein. Wie viel Geld hast du am Ende des 6. Jahres, d. h. noch vor deiner 7. Einzahlung, auf dem Konto? Die Bank bezahlt einen Jahreszins von $5\,\%$.

104. a) Ein Götti legt zur Geburt seines Patenkindes einen Betrag von 500 Franken auf ein Sparbuch, anschliessend an jedem Geburtstag einen Betrag von 200 Franken. Dies macht er bis zum 18. Geburtstag. Über welchen Betrag kann das Patenkind an seinem 20. Geburtstag verfügen, wenn die Bank einen Jahreszins von $4\,\%$ vergütet?

b) Welchen Betrag muss eine Gotte zur Geburt ihres Patenkindes und danach jährlich bis zum 18. Geburtstag auf ein Sparbuch einzahlen, wenn das Patenkind an seinem 20. Geburtstag über einen Betrag von 10'000 Franken verfügen soll? Jahreszinssatz der Bank: $4.5\,\%$.

105. Herr Frei fasst zum Ende eines strengen Arbeitsjahres den Entschluss, sofort mit Sparen anzufangen, um in sieben Jahren ein Sabbatical einlegen zu können. Er berechnet, dass er für die in der Schweiz anfallenden Kosten (Miete, Versicherungen, Krankenkasse, . . .) 50'000 Franken angespart haben muss. Wie viel muss er in den sieben Jahren jeweils zu Jahresbeginn auf ein Konto mit $1\,\%$ Zins einzahlen, um das Sabbatical finanzieren zu können?

106. Amana möchte eine Schuld von 100'000 Franken durch sechs Raten zu je 20'000 Franken tilgen. Sie leistet die Abzahlung jeweils zu Jahresende. Wie hoch ist die Restschuld, die sie am Ende des siebten Jahres noch zu bezahlen hat, wenn die Bank mit einem Zinssatz von 7 % rechnet?

107. Wie oft kann von einem Kapital von 100'000 Franken eine Jahresrente von 10'000 Franken bezogen werden, wenn die Bank zu 5 % verzinst? Die Rente wird jeweils am Jahresende ausbezahlt.

108. Zoé kauft in einem Onlineshop einen Fernseher für 2000 Franken. Sie muss eine Anzahlung von 200 Franken leisten und dann 6 monatliche Raten bezahlen. Der Anbieter verrechnet einen effektiven Jahreszins von 16 %. Wie gross ist eine Rate?

109. Wie gross muss ein Kapital sein, um davon 15-mal jeweils zu Jahresbeginn eine Jahresrente von 24'000 Franken beziehen zu können? Der Jahreszins der Bank beträgt 4.5 %.

Die Fibonacci-Zahlen

Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (Fibonacci bedeutet «Sohn des Bonacci»), war ein italienischer Mathematiker und lebte ca. 1180–1250. Die sogenannten Fibonacci-Zahlen gehen auf ihn zurück.

110. Fibonacci veröffentlichte 1202 sein «Liber abaci» (Buch über die Rechenkunst). Aus diesem Buch stammt die berühmte Kaninchenaufgabe:

Wir nehmen an, dass Kaninchen beliebig lange leben und dass ein Paar jeden Monat ein junges Paar wirft. Ein frisch geborenes Paar wirft erstmals nach zwei Monaten. F_k ist die Anzahl Paare, die zur Zeit k (in Monaten) vorhanden sind, wenn man das Gedankenexperiment zur Zeit $k = 0$ mit einem neugeborenen Paar beginnt.

a) Berechne die Fibonacci-Zahlen $F_0, F_1, \ldots, F_{10}$.

b) Suche eine Rekursionsformel für die Folge (F_k). Dabei soll F_{k+2} aus F_k und F_{k+1} berechnet werden.

111. «Wer A sagt, muss auch B sagen.» Mit den beiden Buchstaben A und B sollen «Wörter», bestehend aus n Buchstaben, gebildet werden. Dabei ist als Spielregel zu beachten, dass nach einem A immer ein B folgen muss. Ausserdem darf A nicht am Schluss eines «Wortes» stehen. W_k ist die Anzahl der «Wörter» der Länge k. Suche eine Rekursionsformel für W_k.

Beispiel: $W_4 = 5$, «Wörter»: $BBBB$, $BBAB$, $BABB$, $ABBB$, $ABAB$.

112. Ein Rechteck der Länge k und der Breite 2 soll mit Dominosteinen der Länge 2 und der Breite 1 belegt werden. Die Anzahl der so möglichen Muster sei M_k. Gib eine Rekursionsformel für M_k an. *Beispiel:* $M_5 = 8$