orell füssli

3., aktualisierte Auflage

DMK | Deutschschweizerische Mathematikkommission

Geometrie 1

Kommentierte Lösungen

Inklusive E-Book

Geometrie 1
Kommentierte Lösungen

DMK | Deutschschweizerische Mathematikkommission des VSMP
(Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte)

Geometrie 1

Kommentierte Lösungen

orell füssli
verlag

Herausgeberin: DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission des VSMP
(Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte), dmk.vsmp.ch

Autoren: Michael Graf, Heinz Klemenz
Gesamtleitung: Andrea Peter

3., aktualisierte Auflage 2022
978-3-280-04038-6 Print
978-3-280-09266-8 E-Book

Titelbild: basierend auf Entwürfen von Tobias Berger, Elgg

Orell Füssli Verlag, www.ofv.ch

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter www.dnb.de abrufbar.

Zusätzliches Material steht als Download zur Verfügung:

– Vorlagen
– Vorbereitende Aufgaben

Die Reihe umfasst folgende Werkbestandteile:
Geometrie 1 – Aufgaben, 978-3-280-04135-2
Geometrie 2 – Aufgaben, 978-3-280-04137-6
Geometrie 2 – Kommentierte Lösungen, 978-3-280-04138-3
Geometry 2 – Tasks, 978-3-280-04237-3

Orell Füssli Verlag Lernmedien
lernmedien@orellfuessli.com
www.ofv.ch/lernmedien

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zu besonderen Markierungen

- 🗋 Zu dieser Aufgabe ist ein Arbeitsblatt mit Dispositionen verfügbar. Die Arbeitsblätter können im Impressum dieses E-Books als PDF-Datei heruntergeladen werden.
- ☞ ist ein Verweis innerhalb dieses E-Books oder zu einer URL
- ➝ verweist auf die entsprechende Seite im Aufgabenbuch
- 💡 beschreibt eine grundlegende Idee zur Lösung der Aufgabe
- ■ markiert das Ende eines Beweises

1 Grundlagen der Geometrie

Vorkenntnisse

- Begriffe: Punkt, Strecke, Winkel, evtl. Gerade, Strahl
- Zeichnen von geraden Linien mit dem Massstab
- Zeichnen von Kreisen mit dem Zirkel
- Messen von Streckenlängen
- Rechnen mit natürlichen Zahlen und (abbrechenden) Dezimalzahlen

Inhalte

Einführung (1.1)

Zeichnen und messen

Winkel messen

Strecken abtragen und Winkel antragen

Mit Zirkel und Lineal konstruieren

Senkrechte, Parallele

Mittelpunkt, Mittelsenkrechte

Spezielle Winkel: $15°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, ...

Figuren: Quadrat, Rechteck, Dreieck, Kreis, regelmässige Vielecke

Zählen, vermuten und rechnen

Diagonalenzahl im n-Eck: $\boxed{n \cdot (n-3) : 2}$

Anzahl Verbindungen von n Punkten: $\boxed{n \cdot (n-1) : 2}$

Anzahl Schnittpunkte von n Geraden: $\boxed{n \cdot (n-1) : 2}$

Graph mit e Ecken, k Kanten und f (umschlossenen) Flächen:

Satz von Euler: $\boxed{e - k + f = 1}$ bzw. $\boxed{e + f - k = 1}$

Lösbar oder unlösbar

Rundreise: Alle Gebiete haben eine gerade Anzahl Brücken.

Bei jedem Knoten treffen sich eine gerade Anzahl Linien.

Reise: Genau zwei Gebiete haben eine ungerade Anzahl Brücken.

Bei genau zwei Knoten treffen sich eine ungerade Anzahl Linien.

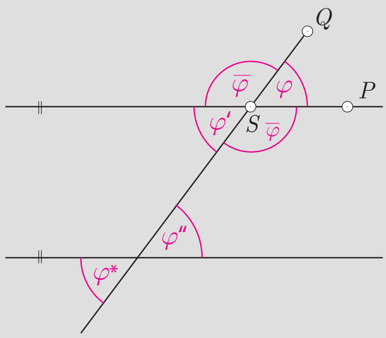
Grundbegriffe und Grundkonstruktionen (1.2)

Winkel

Ein Winkel PSQ hat den **Scheitelpunkt** S und die **Schenkel** SP und SQ.

Der **volle** Winkel misst $360°$, der **gestreckte** Winkel $180°$ und der **rechte** Winkel $90°$.

Zu einem Winkel φ gibt es immer auch **Nebenwinkel** $\overline{\varphi}$ und den **Scheitelwinkel** φ'.



Es gilt: $\boxed{\varphi + \overline{\varphi} = 180°}$

$\boxed{\varphi' = \varphi}$

An Parallelen sind die **Stufenwinkel** φ und φ'' sowie die **Wechselwinkel** φ und φ^* von Bedeutung. (siehe Figur)

Es gilt: $\boxed{\varphi'' = \varphi}$ und $\boxed{\varphi^* = \varphi'}$ sowie $\boxed{\varphi'' = \varphi'}$ und $\boxed{\varphi^* = \varphi}$

Dreiecke und Vielecke

Winkelsumme im Dreieck: $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

(Innen-)Winkelsumme im n-Eck: $\boxed{(n-2) \cdot 180°}$

(Aussen-)Winkelsumme im n-Eck: $\boxed{360°}$

Punkte, Geraden und Kreise

Die Senkrechte zu einer Strecke durch ihren Mittelpunkt heisst **Mittelsenkrechte**. Geraden, die einen Winkel zwischen zwei (sich schneidenden) Geraden halbieren, heissen **Winkelhalbierende.**

Punktmengen (1.3)

Geraden

Punkte, die von zwei Punkten P und Q gleich weit entfernt sind, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke PQ.

Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleiche Abstände haben, liegen auf ihren Winkelhalbierenden.

Thaleskreis und Satz von Thales

Punkte R, die mit zwei Punkten P und Q einen rechten Winkel PRQ bilden, liegen auf einem (Thales-)Kreis mit Durchmesser PQ.

Umgekehrt:

Für einen beliebigen Punkt R auf dem Kreis mit Durchmesser PQ misst der Winkel PRQ $90°$.

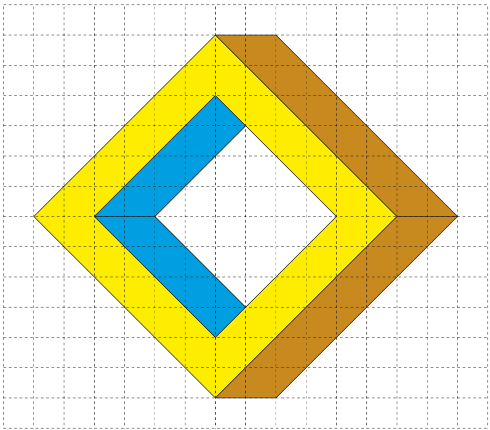
Koordinaten

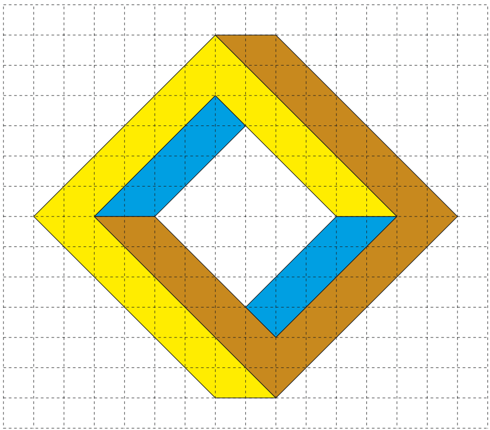
Im 1. Kapitel werden nur nicht-negative Koordinaten verwendet. Schreibweise: $\boxed{P(x, y)}$

1.1 Einführung

Zeichnen und messen

1. a) Das Übertragen einer einfachen, vorgegebenen Figur gehört zu den Grundkompetenzen am Anfang des Geometrieunterrichts.





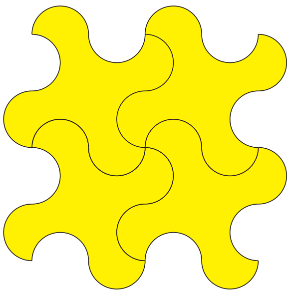
Die linke Zeichnung kann als räumliches Gebilde aufgefasst werden, die rechte Zeichnung kann nicht räumlich interpretiert werden.

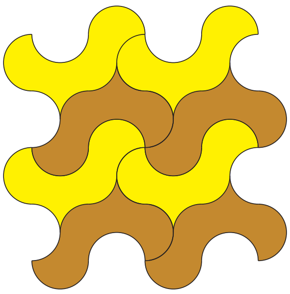
b) -

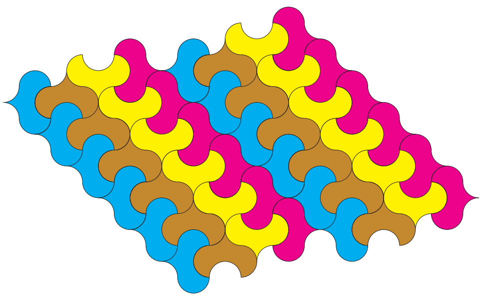
2. -

3. a) -

b) Eine lückenlose Anordnung von deckungsgleichen Figuren wird auch als Parkettierung bezeichnet.







Die «Herzfigur» lässt sich nicht parkettieren.

4. 🗋 Die Handhabung eines Winkelmessers kann nicht unbedingt vorausgesetzt werden.

$\alpha \approx 32^\circ$ $\beta \approx 55^\circ$ $\gamma \approx 103^\circ$ $\delta \approx 146^\circ$

5. 🗋 Das Messen erfolgt am besten auf dem Arbeitsblatt mit grösseren Zeichnungen als im Buch.

a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, $\delta = 105^\circ$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (voller Winkel)

Dass $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$ ergibt, ist ein zufälliges Resultat.

b) $\alpha = 97.5^\circ$, $\beta = 112.5^\circ$, $\gamma = 82.5^\circ$, $\delta = 67.5^\circ$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (Winkelsumme)

Dass $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$ ergibt, ist kein zufälliges Resultat, da es sich um ein Sehnenviereck handelt. (☞ Aufg. 12, S. 162)

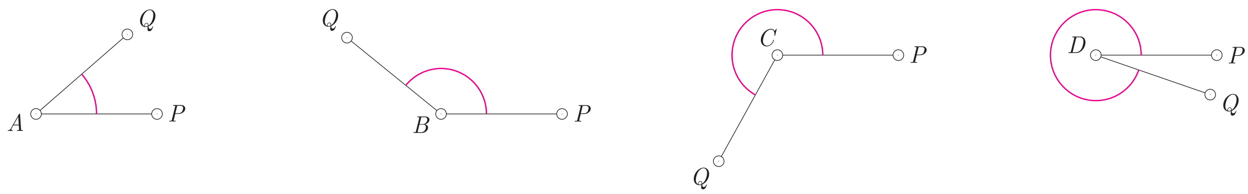
Bemerkung:

Die Winkel $\alpha_2, \ldots, \delta_2$ von Teilaufgabe b) können aus den Winkeln $\alpha_1, \ldots, \delta_1$ von Teilaufgabe a) berechnet werden, sofern die Punkte A, B, C und D «gleich» liegen.

Zum Beispiel gilt: $\alpha_2 = (180^\circ - \delta_1) : 2 + (180^\circ - \alpha_1) : 2 = 180^\circ - (\alpha_1 + \delta_1) : 2 = 97.5^\circ$

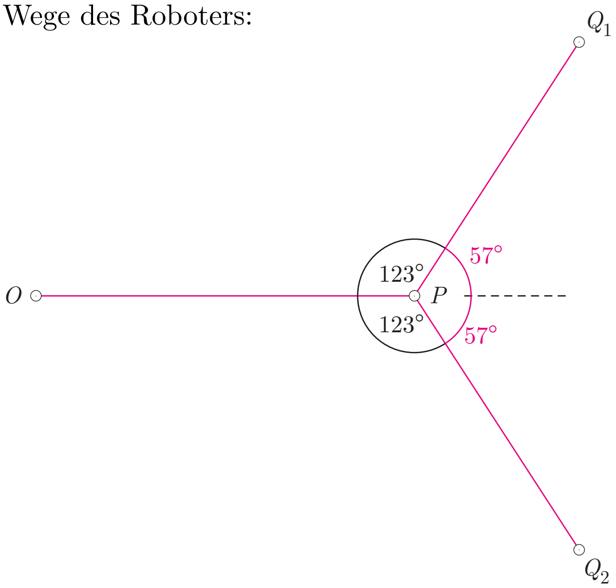
6. Die Winkel werden mithilfe eines Winkelmessers gezeichnet.

a) $\sphericalangle PAQ = 41°$ b) $\sphericalangle PBQ = 141°$ c) $\sphericalangle PCQ = 241°$ d) $\sphericalangle PDQ = 341°$



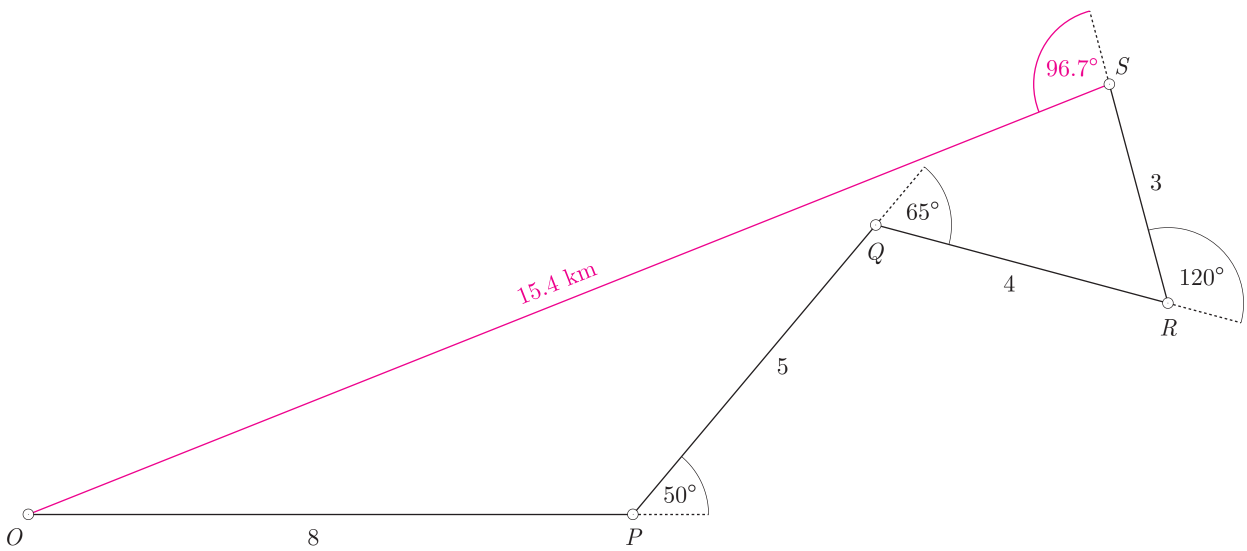
7. Diese Aufgabe dient als Vorbereitung für die nachfolgende ☞ Aufg. 8. Dabei wird in b) die Bedeutung eines Drehwinkels thematisiert.

a) Wege des Roboters:



b) Der Roboter dreht sich um 57° nach links (Gegenuhrzeigersinn) oder um 57° nach rechts (Uhrzeigersinn).

8. Die Aufgabe behandelt unterschiedliche Kompetenzen: Massstab 1 : 100 000 verstehen und anwenden, Abtragen von Strecken, Antragen von Winkeln und Messen von Strecken und Winkeln.



Der Orientierungsläufer muss im Punkt S seine Laufrichtung um $96.7° \approx 97°$ nach links ändern und dann ca. 15.4 km geradeaus laufen, um zum Punkt O zu gelangen.

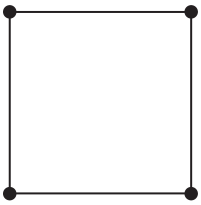
Zählen, vermuten und rechnen

9. Wir unterscheiden zwischen «Regel» (rekursive Angabe) und «Formel» (explizite Angabe).
   a) Diagonalenzahl d im Viereck: 2, im Fünfeck: 5 und im Sechseck: 9 (evtl. Siebeneck: 14)
   b) Regel: Pro Ecke kommen zuerst 3 Diagonalen dazu, dann 4 Diagonalen dazu, etc.
   Formel: $\boxed{d = n \cdot (n-3) : 2}$ (In jeder der n Ecken treffen $n-3$ Diagonalen zusammen.)
   c) Siebeneck: 14, Neuneck: 27, Siebzehneck: 119 (mit Regel oder Formel)

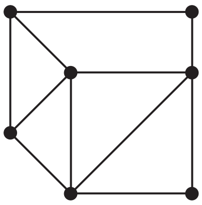
10. Zuerst muss geklärt werden, was allgemeine Lage bedeutet.
   a) vier Punkte: 6 Strecken
   b) sechs Punkte: 15 Strecken
   c) Formel für n Punkte: $\boxed{s = n \cdot (n-1) : 2}$ (Jeder der n Punkte hat $n-1$ Verbindungsmöglichkeiten.)
   Evtl. auch Regel: Beim n-ten Punkt kommen $n-1$ Strecken dazu.

11. Möglicherweise wird die Dualität (Punkt ↔ Gerade) zur vorangehenden Aufgabe vorher erkannt.
   a) drei Geraden: 3 Schnittpunkte
   b) fünf Geraden: 10 Schnittpunkte
   c) Formel für n Geraden: $\boxed{s = n \cdot (n-1) : 2}$ Schnittpunkte

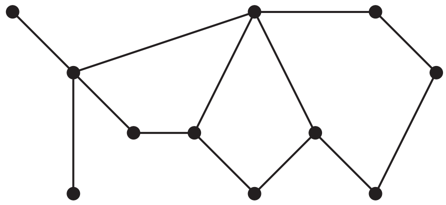
12. Nützlich ist, wenn die Schülerinnen und Schüler auch selber Busnetze entwerfen und zählen.



a) $e = 4,\ k = 4,\ f = 1$

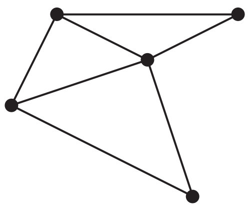


$e = 7,\ k = 11,\ f = 5$

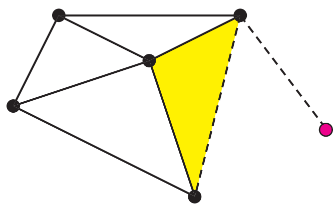


$e = 11,\ k = 13,\ f = 3$

   b) Busnetz mit fünf Haltestellen, drei umschlossenen Gebieten und sieben Verbindungsstrecken



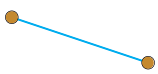
   c) Das ist unmöglich. Wenn eine Kante dazukommt, wird eine zusätzliche Fläche oder Haltestelle benötigt.



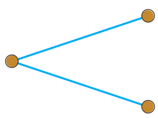
   d) Satz von Leonhard Euler (Basel, 1707–1783): $\boxed{e - k + f = 1}$ oder $\boxed{e + f - k = 1}$

   Der Satz gilt für ebene Graphen ohne Kreuzungen der Kanten (planare Graphen). Der Beweis auf dieser Stufe erfolgt am einfachsten durch Abbauen bzw. Aufbauen der Netze, indem man bei einer Haltestelle beginnt.

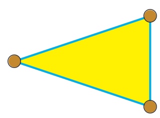
$e = 1$



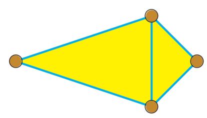
$e = 2,\ k = 1$
$\Rightarrow e - k + f = 1$



$e = 3,\ k = 2$
$\Rightarrow e - k + f = 1$



$e = 3,\ k = 3,\ f = 1$
$\Rightarrow e + f - k = 1$



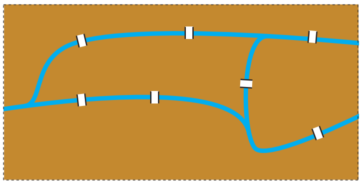
$e = 4,\ k = 5,\ f = 2$
$\Rightarrow e + f - k = 1$

13. Die Lernenden sollen ermuntert werden, auszuprobieren, bevor sie allenfalls die Formel verwenden.
   a) 17 Verbindungsstrecken und 4 umschlossene Gebiete: $e = k - f + 1 = 14$
   b) 10 Verbindungsstrecken und 7 Haltestellen: $f = k - e + 1 = 4$
   c) 13 Haltestellen und 11 umschlossene Gebiete: $k = e + f - 1 = 23$

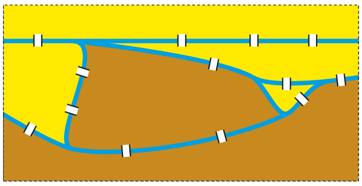
Lösbar oder unlösbar

14. Die Stadtteile sind braun gefärbt, wenn sie mit einer *ungeraden* Anzahl (ungerade Parität) von Brücken zusammenhängen, und gelb gefärbt bei einer *geraden* Anzahl (gerade Parität) von Brücken.

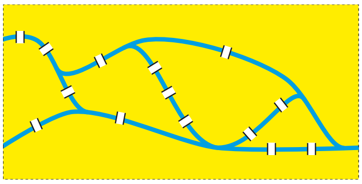
Königsberg



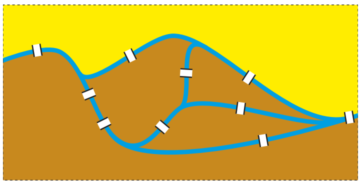
Kaisertal



Fürstenfeld

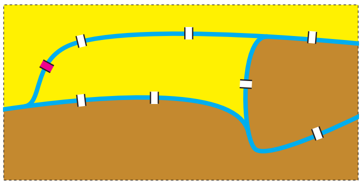


Grafenstein

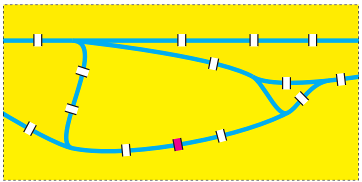


a) Leonhard Euler konnte in Königsberg keine Rundreise machen, da alle Gebiete ungerade Parität haben (braun gefärbt).
b) In Fürstenfeld kann man eine Rundreise machen, da alle Gebiete gerade Parität haben (gelb gefärbt).
c) In Kaisertal kann man immerhin eine Reise machen, da genau zwei Gebiete ungerade Parität haben (braun gefärbt).
d) Für eine Rundreise müssen die Paritäten in allen Gebieten immer gerade sein (gelb gefärbt), für eine Reise müssen genau zwei der Paritäten ungerade sein (braun gefärbt).
e) Die zusätzlichen Brücken sind rot eingezeichnet:

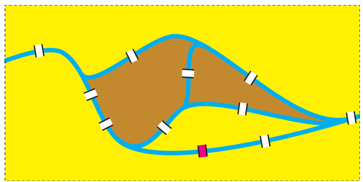
Königsberg (Reise)



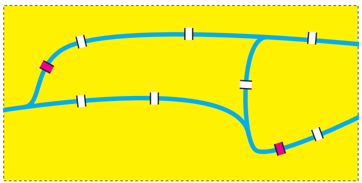
Kaisertal (Rundreise)



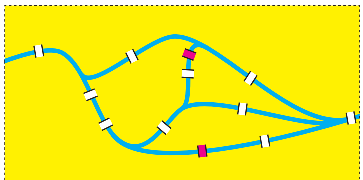
Grafenstein (Reise)



Königsberg (Rundreise)

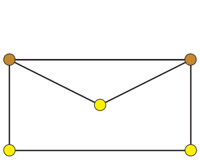


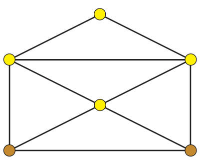
Grafenstein (Rundreise)

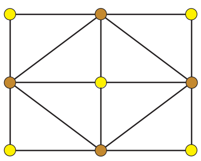


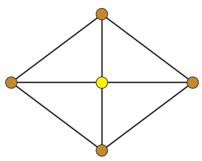
Bemerkung: In der Literatur über Graphentheorie werden Rundreisen als Euler-Touren oder Euler-Kreise, Reisen als Euler'sche Kantenzüge bezeichnet.

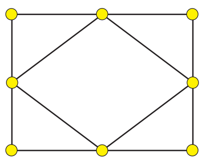
15. In den braunen Punkten trifft eine *ungerade*, in den gelben Punkten eine *gerade* Anzahl Linien zusammen. Die Figuren mit keinem braunen oder mit zwei braunen Punkten kann man zeichnen, die anderen nicht.





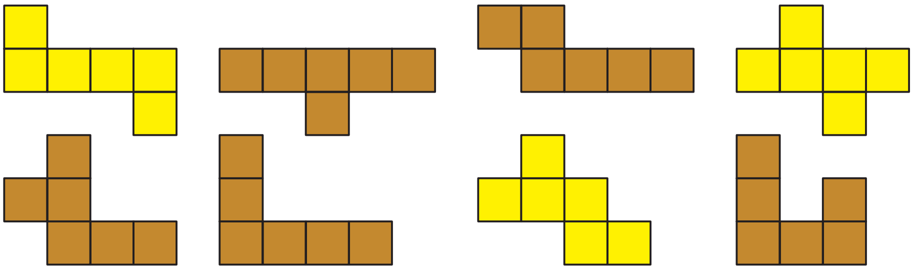




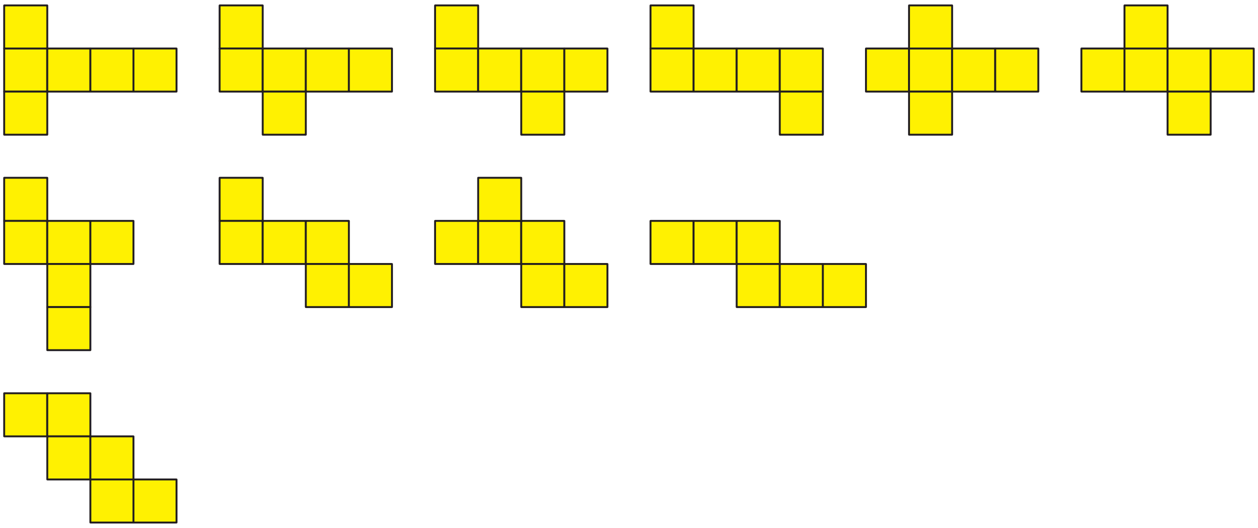


Allgemein gilt der Satz von Euler: Ein zusammenhängender Graph ist genau dann ein Euler'scher Graph (d. h., er enthält einen Euler-Kreis), wenn der Grad von jedem Knoten eine gerade Zahl ist.

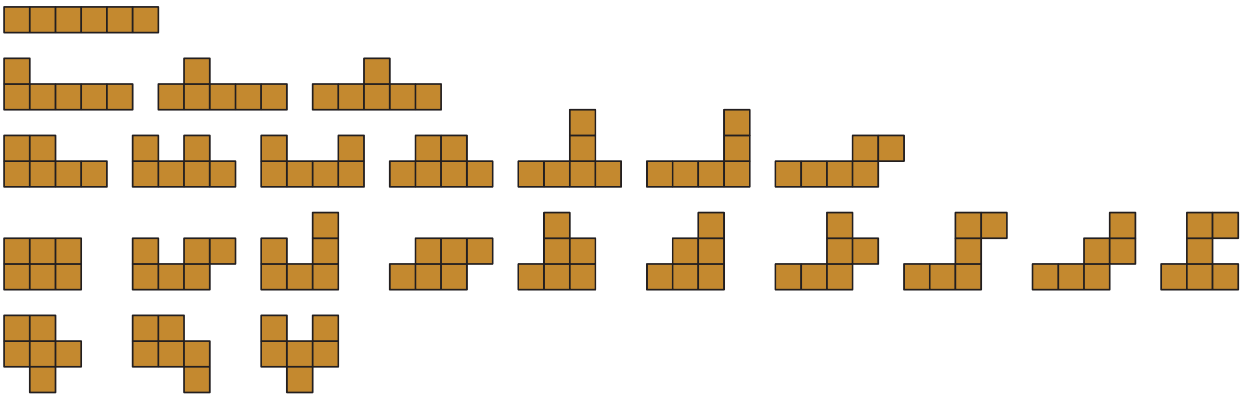
16. a) Aus den gelb gezeichneten Netzen lässt sich ein Würfel herstellen, aus den braun gezeichneten nicht.



b) Es gibt insgesamt 11 Netze, aus denen sich ein Würfel herstellen lässt.



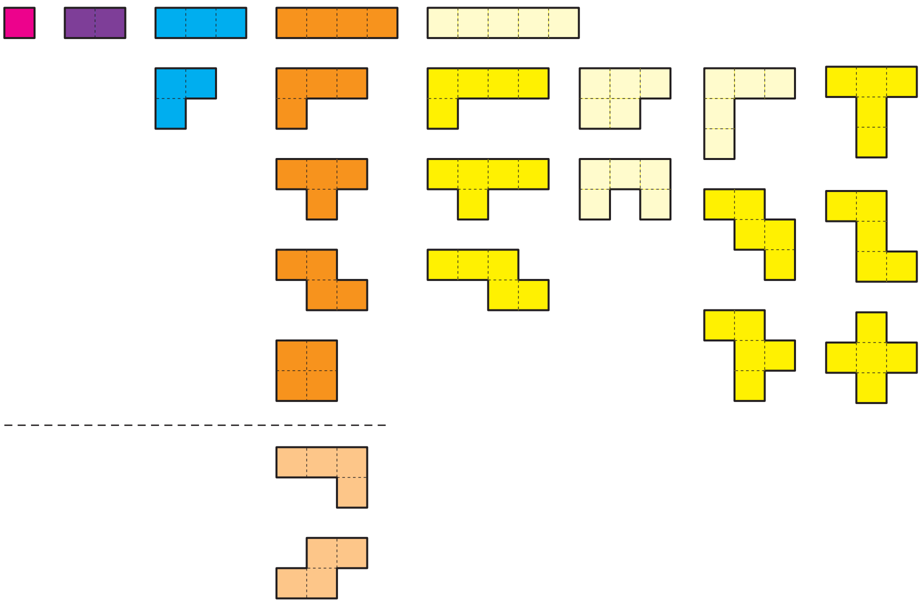
Aus diesen 24 Netzen lässt sich kein Würfel herstellen.



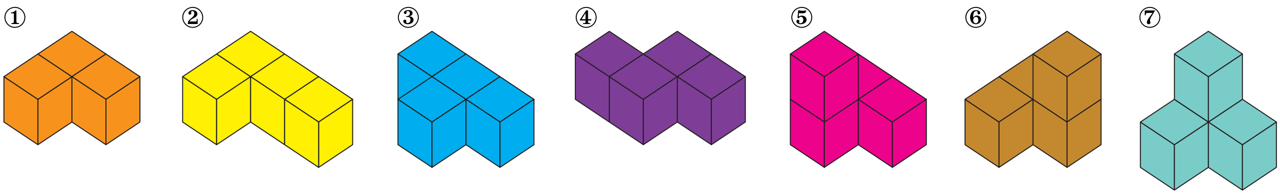
Vorstellen oder herstellen

17. Polyominos ergeben eine gute Gelegenheit, verschiedene geometrische Eigenschaften von Figuren (Form, Symmetrie etc.) kennenzulernen, ohne die Fachsprache bereits zu verwenden.
    a) Übersicht der nicht-identischen Polyominos für 1 (Monomino), 2 (Domino), 3 (Tromino), 4 (Tetromino) und 5 (Pentomino) Quadrate: siehe Abbildung
    b) Es gibt zwei zusätzliche Tetris-Figuren (siehe Abbildung), also 7 nicht-identische Tetrominos.
    c) Mit den vier hellgelben Pentominos geht es nicht, mit den anderen acht geht es.
    d) Es gibt 35 nicht-kongruente Hexominos. (☞ Aufg. 16, S. 7)

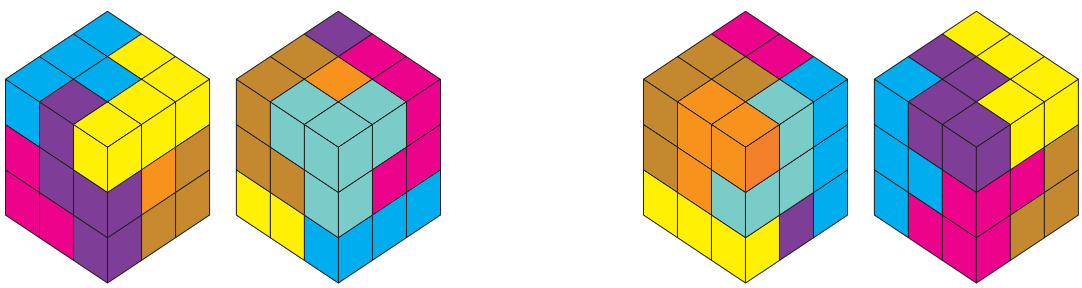
(1) (1) (2) (5) (12)



18. a) Idealerweise werden kleine Holzwürfelchen zu den Soma-Körpern zusammengeklebt und bemalt.



b) 🗎 Einige Lösungen sollte man auch zeichnen lassen, z. B. in dieser Form:
(Es sind je zwei Ansichten gezeichnet, sodass jeweils alle sechs Würfelflächen sichtbar sind.)



c) Es geht mit den Teilkörpern ⑤, ⑥ und ⑦.

d) In Frage kommt nur der Teilkörper ①, der auch wirklich eine Lösung liefert.

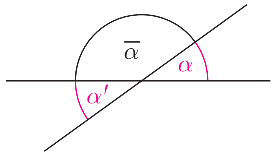
Weitere gute Beispiele:

☞ www.mathematische-basteleien.de/somawuerfel.htm (Abruf: 1.4.2022)

1.2 Grundbegriffe und Grundkonstruktionen

Winkel berechnen

19. Obwohl die Behauptung, dass Scheitelwinkel gleich gross sind, intuitiv klar ist, wird hier ein erster Beweis verlangt, der auch arithmetisches bzw. algebraisches Vorwissen anspricht.



a) $\overline{\alpha} = 180° - \alpha = 180° - 72° = 108°$ (α und $\overline{\alpha}$ sind Nebenwinkel)
$\alpha' = 180° - \overline{\alpha} = 180° - 108° = 72°$ ($\overline{\alpha}$ und α' sind Nebenwinkel)

b) $\alpha' = 180° - \overline{\alpha} = 180° - (180° - \alpha) = 180° - 180° + \alpha = \alpha$ ■

20. Aus der Primarschule kennen die Schülerinnen und Schüler den Satz über die Winkelsumme im Dreieck, der Thales von Milet (Griechenland, um 624–547 v. Chr.) zugeschrieben wird. Der Satz wird in der Primarschule oft experimentell gewonnen (Abreissen von Ecken und Zusammenfügen). An dieser Stelle kann auf die Problematik dieses Vorgehens und die Bedeutung des Beweisens eingegangen werden.

Anstelle des Parallelenaxioms wird hier die Gleichheit der Stufenwinkel als Axiom betrachtet, die äquivalent zur Aussage des Parallelenaxioms ist.

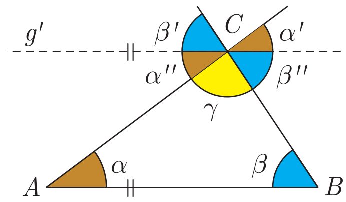
a) Aus $\alpha' = \alpha$ (Stufenwinkel) und $\alpha' = \alpha''$ (Scheitelwinkel) folgt $\alpha'' = \alpha$ (Wechselwinkel). ■

b) Behauptung: $\boxed{\text{Die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt } 180°.}$

Beweis:

Bei einem Dreieck ABC zeichnet man die Parallele g' zur Seite AB durch die Ecke C. Unterhalb von g' liegen die (inneren) Wechselwinkel $\alpha'' = \alpha$ und $\beta'' = \beta$. Damit gilt $\alpha + \beta + \gamma = \alpha'' + \beta'' + \gamma = 180°$.

Also: Die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ in einem Dreieck beträgt 180°. ■

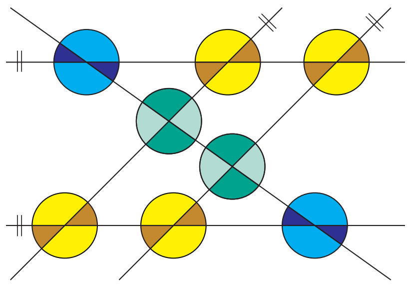


21. Diese Übung dient dem Erkennen von gleich grossen Winkeln.

Winkel gleich gross wie α: braun
Nebenwinkel von α: gelb

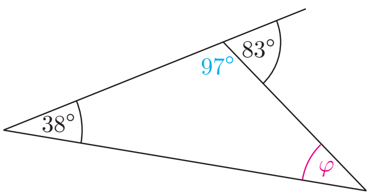
Winkel gleich gross wie β: blau
Nebenwinkel von β: hellblau

Winkel gleich gross wie γ: grün
Nebenwinkel von γ: hellgrün

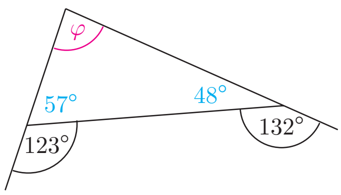


22. Die Berechnung der Winkel φ erfolgt mithilfe von Neben- und Scheitelwinkeln sowie der Winkelsumme im Dreieck.

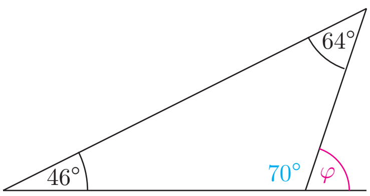
a) $\varphi = 180° - 38° - (180° - 83°)$
$= 83° - 38° = 45°$



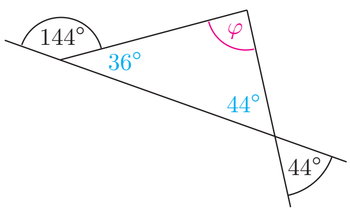
b) $\varphi = 180° - (180° - 123°) - (180° - 132°)$
$= 123° + 132° - 180° = 255° - 180° = 75°$



c) $\varphi = 180° - (180° - 64° - 46°)$
$= 64° + 46° = 110°$

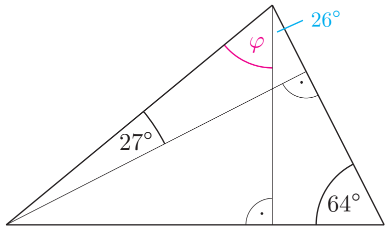


d) $\varphi = 180° - (180° - 144°) - 44°$
$= 144° - 44° = 100°$

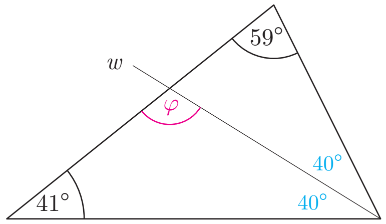


23. Bei allen Teilaufgaben sind Höhen oder Winkelhalbierende wichtig.

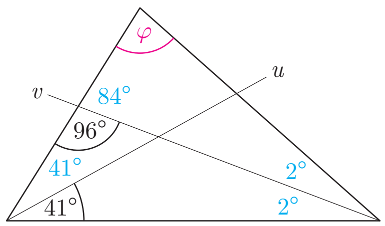
a) $\varphi = 180° - 90° - 27° - (180° - 90° - 64°)$
$= 180° - 90° - 27° - 26° = 37°$



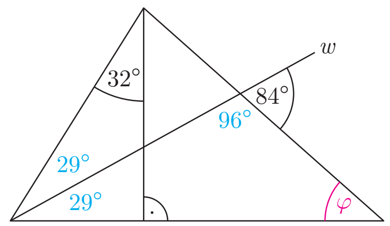
b) $\varphi = 180° - 41° - (180° - 41° - 59°) : 2$
$= 180° - 41° - 40° = 99°$



c) $\varphi = 180° - (180° - 96°) - (180° - 96° - 2 \cdot 41°)$
$= 180° - 84° - 2° = 94°$

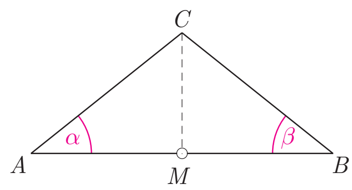


d) $\varphi = 180° - (180° - 84°) - (180° - 90° - 32°) : 2$
$= 180° - 96° - 29° = 55°$



24. Wir geben (SSS) als «Kongruenzaxiom» vor und zeigen, dass entsprechende Seiten der beiden Teildreiecke AMC und BMC gleich lang sind, womit auch alle entsprechenden Winkel gleich gross sind.

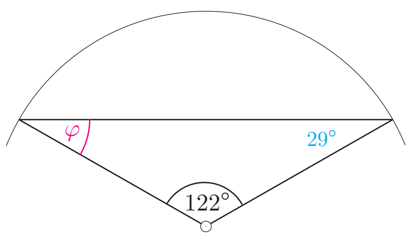
Begründung:
$\overline{MA} = \overline{MB}$, weil M Mittelpunkt von AB ist,
$\overline{AC} = \overline{BC}$, weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist,
und MC ist gemeinsame Strecke.
$\Rightarrow \alpha = \beta$ ■



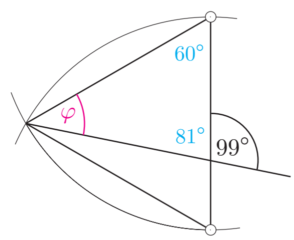
Bemerkung: Mit der Kongruenz der beiden Teildreiecke ist auch bewiesen, dass die Seitenhalbierende CM im gleichschenkligen Dreieck mit Spitze C auch Winkelhalbierende und Höhe ist.

25. Bei allen Teilaufgaben spielen gleichschenklige bzw. gleichseitige Dreiecke eine Rolle.

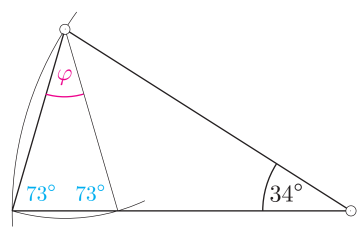
a) $\varphi = (180° - 122°) : 2 = 29°$



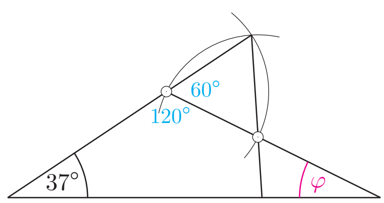
b) $\varphi = 180° - 180° : 3 - (180 - 99°) = 39°$



c) $\varphi = 180° - 2 \cdot (180° - 34°) : 2 = 34°$



d) $\varphi = 180° - 37° - (180° - 180° : 3) = 23°$



26. a) Winkelsumme in einem allgemeinen Viereck: $180° + 180° = 360°$

b) Winkelsumme in einem Fünfeck: $360° + 180° = 540°$, in einem Sechseck: $540° + 180° = 720°$

c) Winkelsumme in einem n-Eck: $\boxed{(n-2) \cdot 180°}$

d) Winkelsumme in einem Siebzehneck: $(17-2) \cdot 180° = 2700°$

27. a) Innenwinkel in einem regelmässigen n-Eck: $\boxed{(n-2) \cdot 180° : n}$

b) Innenwinkel in einem regelmässigen Fünfeck: $(5-2) \cdot 180° : 5 = 108°$

c) Innenwinkel in einem regelmässigen Zehneck: $(10-2) \cdot 180° : 10 = 144°$

d) Innenwinkel in einem regelmässigen Fünfzehneck: $(15-2) \cdot 180° : 15 = 156°$

28. Innenwinkel φ in einem regelmässigen n-Eck: $\varphi = (n-2) \cdot 180° : n$, also muss $180 \cdot (n-2)$ durch n teilbar sein.

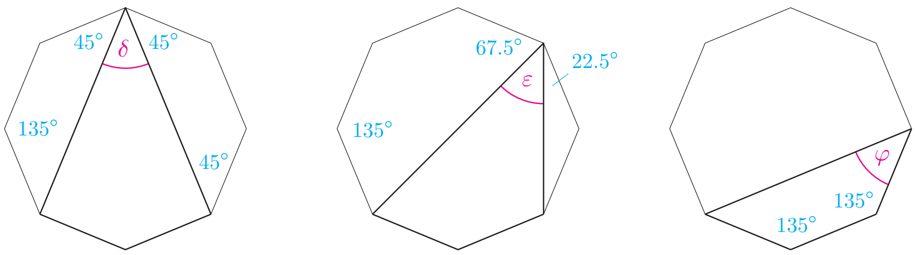
$\varphi = 180° \cdot (n-2) : n = (180° \cdot n - 180° \cdot 2) : n = 180° - 360° : n$, also muss 360 durch n teilbar sein:

$360 = 1 \cdot 360 = 2 \cdot 180 = 3 \cdot 120 = 4 \cdot 90 = 5 \cdot 72 = 6 \cdot 60 = 8 \cdot 45 = 9 \cdot 40 = 10 \cdot 36 = 12 \cdot 30 = 15 \cdot 24 = 18 \cdot 20$

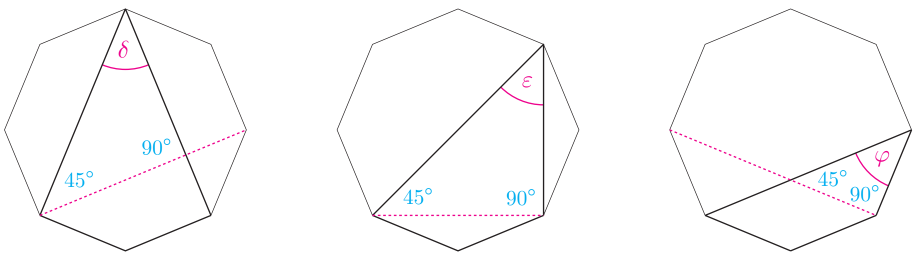
Eckenzahl n	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18
Innenwinkel φ	60°	90°	108°	120°	135°	140°	144°	150°	156°	160°

Eckenzahl n	20	24	30	36	40	45	60	72	90	120	180	360
Innenwinkel φ	162°	165°	168°	170°	171°	172°	174°	175°	176°	177°	178°	179°

29. Variante: Berechnung mithilfe von Winkelsummen und Innenwinkeln: $\delta = \varepsilon = \varphi = 45°$



Alternative: Durch Einzeichnen der punktierten Strecken erhält man in jeder Figur $\delta = \varepsilon = \varphi = 45°$.



30. Berechnung mithilfe von Winkelsummen und Innenwinkeln (Kontrolle: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$)

a) $n = 9 \Rightarrow \varphi = 140°$

$\alpha = 140° - 60° - 20° = 60°$

$\beta = 140° - 20° - 40° = 80°$

$\gamma = 140° - 40° - 60° = 40°$

b) $n = 12 \Rightarrow \varphi = 150°$

$\alpha = 150° - 30° - 45° = 75°$

$\beta = 150° - 45° - 60° = 45°$

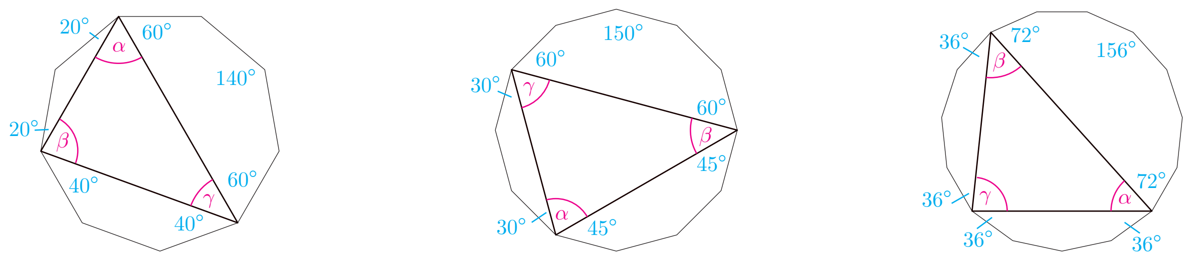
$\gamma = 150° - 60° - 30° = 60°$

c) $n = 15 \Rightarrow \varphi = 156°$

$\alpha = 156° - 36° - 72° = 48°$

$\beta = 156° - 72° - 36° = 48°$

$\gamma = 156° - 36° - 36° = 84°$



31. a) Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck gilt: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 45° - 60° = 75°$

$\overline{\alpha} = 180° - \alpha = 180° - 45° = 135°$

$\overline{\beta} = 180° - \beta = 180° - 60° = 120°$ Summe: $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = 135° + 120° + 105° = 360°$

$\overline{\gamma} = 180° - \gamma = 180° - 75° = 105°$

b) Summe der Aussenwinkel in einem konvexen Viereck:

$\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} + \overline{\delta} = (180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma) + (180° - \delta) = 4 \cdot 180° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

$= 720° - 360° = 360°$

c) Ein Mensch dreht sich einmal um die eigene Achse, also um 360°.

d) Vermutung: $\boxed{\text{In jedem (konvexen) } n\text{-Eck beträgt die Aussenwinkelsumme } 360°.}$ (anschaulich klar)

Beweis:

$(180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + \ldots + (180° - \alpha_n) = n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = n \cdot 180° - n \cdot 180° + 2 \cdot 180°$
$= 2 \cdot 180° = 360°$ ■

Die Aussenwinkelsumme hängt also nicht von der Eckenzahl n ab.

32. Die Innenwinkel des n-Ecks werden mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bezeichnet.

Aussenwinkelsumme $= 360° = (180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + \ldots + (180° - \alpha_n) = n \cdot 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$

$\Rightarrow$ Innenwinkelsumme $= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n \cdot 180° - 360° = 180° \cdot (n-2)$

Winkel, Geraden und Kreise konstruieren

33. Diese Grundkonstruktionen liefern folgende Winkel:

a) Senkrechte zu Gerade g durch den Punkt S zeichnen $\Rightarrow \alpha = 90°$

b) Winkel von 60° an Strecke SA antragen $\Rightarrow \beta = 60°$

c) Winkel φ $(= 72°)$ halbieren $\Rightarrow \gamma = 36°$

34. In dieser Aufgabe werden Winkel addiert oder geteilt, um weitere Winkel zu konstruieren.

a) $120° = 60° + 60°$ b) $45° = 90° : 2$ c) $135° = 90° + 45°$ d) $105° = 60° + 90° : 2$

35. $\alpha = 120°$ (stumpfer Winkel) und $\beta = 45°$ (spitzer Winkel)

a) $\alpha + \beta = 165°$

allgemein:

$\alpha + \beta > 90°$ bzw. $\alpha + \beta < 270°$

b) $\alpha - \beta = 75°$

allgemein:

$\alpha - \beta > 0°$ bzw. $\alpha - \beta < 180°$

c) $2\alpha - 2\beta = 150°$

allgemein:

$2\alpha - 2\beta > 0°$ bzw. $2\alpha - 2\beta < 360°$

$\Rightarrow \alpha - \beta > 0°$ bzw. $\alpha - \beta < 180°$

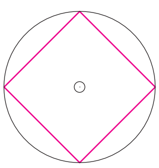
d) $\alpha : 2 + 3\beta = 195°$

allgemein:

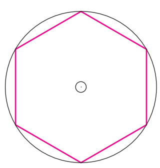
$\alpha : 2 + 3\beta > 45°$ bzw. $\alpha : 2 + 3\beta < 360°$

36. Kreis mit 4 cm Radius zeichnen und Zentriwinkel φ konstruieren

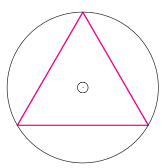
a) $\varphi = 90°$



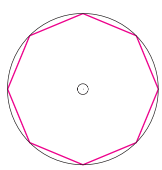
b) $\varphi = 60°$



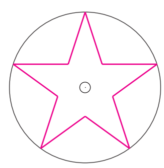
c) $\varphi = 120°$



d) $\varphi = 45°$

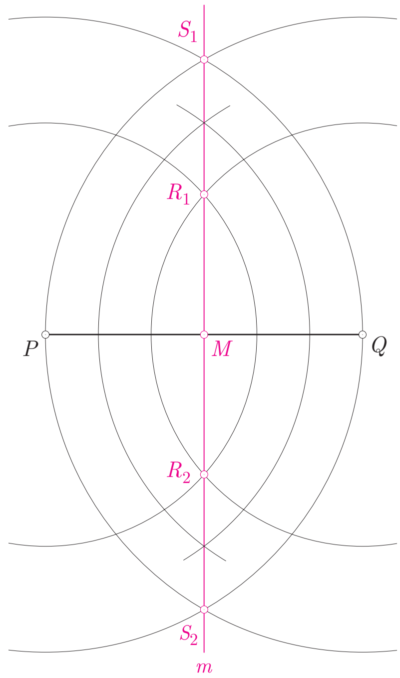


e) $\varphi = 72°$

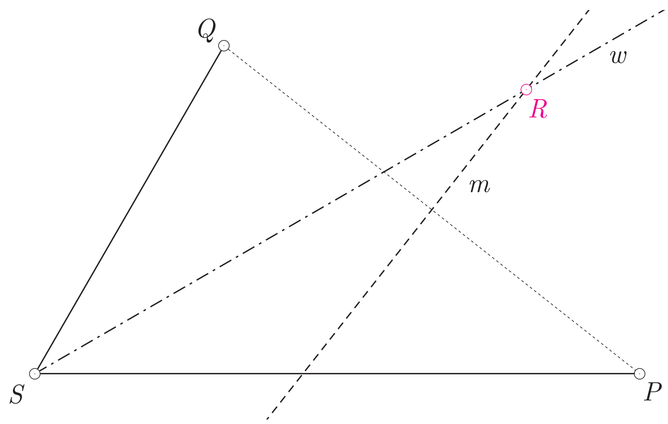


37. Nach dieser Aufgabe können die Konstruktionen von Senkrechten bzw. Parallelen mithilfe des Geodreiecks gemacht werden. (Verschieben mithilfe des Geodreiecks und des Lineals)

38. Bei dieser Aufgabe wird die Mittelsenkrechte eingeführt.
    a) Die Aufgabe (Figur rechts) zeigt auch, dass der Mittelpunkt der Strecke nicht nötig ist, um die Mittelsenkrechte zu konstruieren.
    b) Die Teilaufgabe hat zwei Lösungen: R_1 und R_2. Das ist eine Gelegenheit, um Indizes einzuführen.
    c) Die Teilaufgabe hat zwei Lösungen: S_1 und S_2.



39. Die Aufgabe kombiniert zwei grundlegende Konstruktionen: die Konstruktion einer Winkelhalbierenden und einer Mittelsenkrechten.
    Schneide die Winkelhalbierende w von $\sphericalangle PSQ$ mit der Mittelsenkrechten m von PQ.



40. Der Zusammenhang zwischen den beiden Winkelhalbierenden wird zunächst durch Messen vermutet.
    a) Konstruktion klar
    b) Vermutung: Der Winkel zwischen den beiden Winkelhalbierenden misst 90°.

    Begründung:

    Im Winkelfeld des spitzen Winkels misst der halbe Winkel 30°, im Winkelfeld des stumpfen Nebenwinkels 60°. Dies ergibt zusammen 90°.

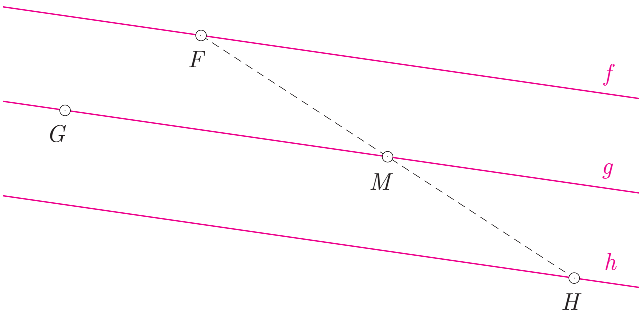
    c) Behauptung: Die Winkelhalbierenden zweier Geraden stehen immer senkrecht aufeinander.

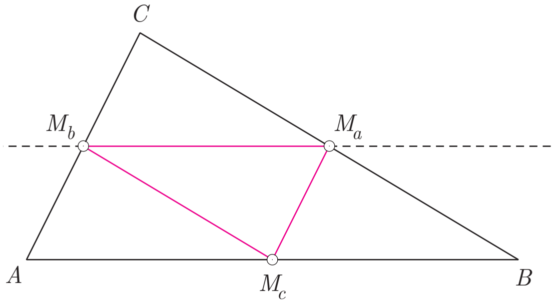
    Beweis:

    Der eine Winkel zwischen g und h misst φ, der Nebenwinkel somit $180° - \varphi$.
    Die Summe der halben Winkel beträgt somit $\varphi : 2 + (180° - \varphi) : 2 = (\varphi + 180° - \varphi) : 2 = 90°$. ■

41. Bei dieser Aufgabe wird der Begriff der Mittelparallele eingeführt, der in der folgenden Aufgabe vorausgesetzt wird.

42. Gerade g durch G und den Mittelpunkt M von F und H





Figur zu ☞ Aufg. 43

43. Das Mittendreieck spielt eine wichtige Rolle in einem Dreieck. Es wird durch die Mittellinien gebildet. Durch Betrachten der Figur vermuten wir, dass

1) die Mittellinien parallel zu den entsprechenden Seiten sind.

2) die Mittellinien halb so lang wie die entsprechenden Seiten sind.

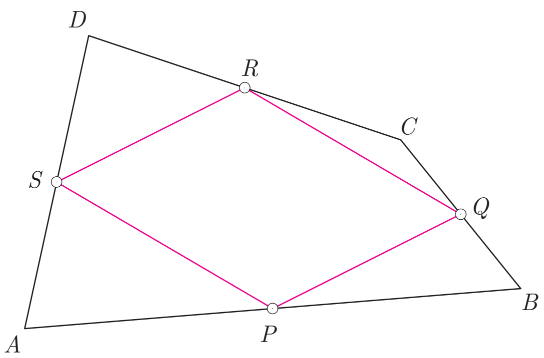
3) das Dreieck ABC dadurch in vier deckungsgleiche Dreiecke zerlegt wird.

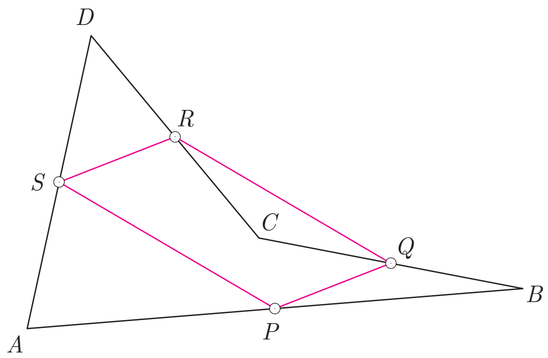
Bemerkungen:

- Die Beweise mithilfe von Kongruenzsätzen erfolgen erst in ☞ Aufg. 14, S. 73.
- Diese Aufgabe wird vorausgesetzt zur Lösung der nachfolgenden ☞ Aufg. 44.

44. Die ☞ Aufg. 43 und 44 gehören zusammen und zeigen einen bemerkenswerten Unterschied zwischen dem Dreieck und dem Viereck. Im Gegensatz zum Dreieck entsteht im Viereck eine andersartige Figur aus den Mittelpunkten. Dabei wird der Satz von Varignon (Frankreich, 1654–1722) entdeckt:

Das Mittenviereck eines beliebigen Vierecks ist ein Parallelenviereck (Parallelogramm).





Beweis:

Der Beweis beruht auf der ☞ Aufg. 43.

PQ ist die Mittellinie im Dreieck ABC und damit parallel zu AC.
SR ist die Mittellinie im Dreieck ACD und damit ebenfalls parallel zu AC.
Damit sind PQ und SR parallel. Analog: SP ist parallel zu RQ. ■