

Georg Reimer Verlag Berlin.

Die Hauptfächer der Elementar-Mathematik

von

Dr. F. G. Mehler

bearbeitet von **A. Schulte-Tiggex**
Direktor des Realgymnasiums zu Kassel

erscheinen in folgenden Ausgaben und Teilen:
(siehe das Vorwort zu diesem Buche)

Ausgabe A. Stammbuch, Vollausgabe.

26. Auflage. Preis gebunden M. 2.40.

Ergänzungsheft, enthaltend diejenigen Teile des Stammbuchs Ausgabe A, welche gegenüber der 24. und den früheren Auflagen stark verändert sind oder dort fehlen, erschienen Januar 1908. Preis geheftet M. —.40

Ausgabe B. Neue Ausgabe in 4 Bändchen.

Unterstufe (in einem Bändchen). 1908. Preis gebunden M. 2.—

Oberstufe (in drei Bändchen).

- I. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte in engster Verbindung mit neuerer und darstellender Geometrie. 1907. Preis gebunden M. 1.50
- II. Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie. 1909. Preis gebunden M. 1.50
- III. Funktionale Geometrie (Graphische Darstellung von Funktionen, Grundzüge der Differentialrechnung, Analytische Geometrie der Ebene). 1909. Preis gebunden M. 1.50

Wandtafeln zum mathematischen Unterricht

gezeichnet von **A. Schulte-Tiggex**. 1907.

- I. Ellipse und Parabel als Zentralprojektionen des Kreises.
- II. Die Hyperbel als Zentralprojektion des Kreises.

Format 95 × 130 cm, zweifarbig auf Leinen gedruckt und mit Stäben versehen.

Preis jeder Tafel M. 10.—

Hauptsätze
der
Elementar-Mathematik

zum Gebrauche an höheren Lehranstalten

von

Dr. S. G. Mehler.

Bearbeitet von A. Schulte-Tiggas,
Direktor des Realgymnasiums zu Kassel.

Ausgabe B.
Oberstufe 3. Teil.

Grundzüge und Anwendungen der Differentialrechnung
in engster Verbindung mit graphischer Darstellung
und
Analytische Geometrie der Ebene.



Berlin W. 35

Druck und Verlag von Georg Reimer

1909.

Grundzüge und Anwendungen
der
Differentialrechnung
in engster Verbindung mit graphischer Darstellung
und
Analytische
Geometrie der Ebene

Sür die oberen Klassen höherer Lehranstalten

bearbeitet

von

A. Schulte-Tigges,
Direktor des Realgymnasiums zu Kassel.



Berlin W. 35

Druck und Verlag von Georg Reimer

1909.

Vorwort.

Mit dem vorliegenden dritten Teil der Oberstufe, der übrigens auch als selbständiges Werk benutzt werden kann, ist die als Ausgabe B erschienene Neuauflage der Schellbach-Mehlerschen Elementarmathematik abgeschlossen. Die ursprünglich getrennt gedachte Behandlung der graphischen Darstellung ist mit Rücksicht auf die in der Unterstufe enthaltene Einführung mit den Grundzügen der Differentialrechnung verschmolzen worden, doch enthalten die zugehörigen Aufgaben mancherlei Stoff zur weiteren Ausführung der ersteren insbesondere hinsichtlich der Theorie der Gleichungen. Bei der Differentialrechnung ist nach Möglichkeit die sinnlich-geometrische Anschauung in den Vordergrund gestellt und alles vermieden worden, was begriffliche oder andere Schwierigkeiten bieten könnte. Es werden daher auch schwächere Schüler recht wohl imstande sein, den Darlegungen zu folgen, besonders wenn man sie daran gewöhnt, wie es hier geschehen ist, dem Lauf der Kurven mit den Augen gleitend zu folgen. Die zahlreichen und mannigfachen Anwendungen sind sicher geeignet, das Verständnis zu vertiefen und das Interesse zu erhöhen. Der anfängliche Plan, auch die Grundzüge der Integralrechnung aufzunehmen, ist noch nicht ausgeführt worden, da die eigenartigen Schwierigkeiten einer schulgemäßen Darstellung dieser Lehre noch nicht genügend gehoben werden konnten. Das Prinzip der Integration aber kommt verschiedentlich, ohne als solches genannt zu sein, namentlich in den Übungen zur Anwendung.

In die analytische Geometrie der Ebene sind nur ganz kleine Abschnitte des Stammbuches unverändert übergegangen; alles übrige ist völlig neu dargestellt und nach verschiedenen Richtungen erweitert worden. In den beigegeführten Aufgaben, die durchweg neu gebildet

sind — in der Differentialrechnung sind einige wenige den Jahresberichten der höheren Schulen von 1907 entnommen —, wurden die Zahlenbeispiele bevorzugt und solche allgemeineren Beispiele, die nicht unwichtige theoretische Ergebnisse liefern.

Zum Abschluß der Ausgabe B möge noch darauf hingewiesen werden, daß der größere Umfang dieser Ausgabe sich erklärt durch die Beifügung zahlreicher Aufgaben, die durch die Rücksichtnahme auf die realistischen Vollaustalten gebotene Erweiterung des Lehrstoffes wie auch durch die mehrfache Ausführung einzelner Abschnitte des letzteren zugunsten einer größeren Bewegungsfreiheit des Lehrers. Demgegenüber braucht wohl nicht besonders betont zu werden, daß es nicht die Meinung des Herausgebers ist, es müsse nun unbedingt auch der ganze Stoff den Schülern dargeboten werden.

Cassel, im September 1909.

A. Schulte-Tiggess.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Erster Abschnitt: Grundzüge und Anwendungen der Differentialrechnung in engster Verbindung mit graphischer Darstellung.	
1. Einführung in die Differentialrechnung	1
2. Anwendungen der Differentialrechnung.	
A. Maxima und Minima	23
B. Unendliche Reihen	33
C. Auswertung von Quotienten und Ermittlung von Wurzeln numerischer Gleichungen	40
D. Ermittlung der Gleichungen von Kurventangenten	41
E. Geschwindigkeit und Beschleunigung	43
F. Krümmung der Kurven	44
Zweiter Abschnitt: Analytische Geometrie der Ebene.	
1. Punkt und Gerade	46
2. Der Kreis	53
3. Die Parabel	57
4. Die Ellipse	63
5. Die Hyperbel	71
6. Lageänderung des Koordinatensystems und Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades	77
7. Verwandtschaftliche Beziehungen und Polargleichungen der Kegelschnitte	82

Erster Teil.

Grundzüge und Anwendungen der Differentialrechnung

in engster Verbindung mit graphischer Darstellung.

Erster Abschnitt.

Einführung in die Differentialrechnung.

§ 1*). Wenn eine Größe (y) sich mit einer anderen Größe (x) ändert, so nennt man die erste von der zweiten abhängig oder eine Funktion der zweiten.

Beispiele: 1. (Aus dem praktischen Leben.) Der Preis einer Ware ändert sich mit der Zeit.

2. (Aus der Arithmetik.) a) Die dritte Potenz einer Zahl ändert sich mit der Zahl; b) der Logarithmus einer Zahl ändert sich mit der Zahl.

3. (Aus der Planimetrie.) Der Flächeninhalt eines Quadrats ändert sich mit der Quadratseite.

4. (Aus der Stereometrie.) Der Rauminhalt einer Kugel ändert sich mit ihrem Halbmesser.

5. (Aus der Trigonometrie.) Der Sinus eines Winkels ändert sich mit dem Winkel. (Trigonometrische „Funktionen“.)

6. (Aus der Wärmelehre.) a) Die Spannkraft des (gesättigten) Wasserdampfes ändert sich mit der Temperatur, desgl. b) die Dichte des Wassers.

7. (Aus der Meteorologie.) An demselben Ort ändert sich der Luftdruck mit der Zeit, desgl. die Temperatur und die Feuchtigkeit der Luft.

*) Die ersten Paragraphen dienen zugleich zur Wiederholung des Anhangs III der Unterstufe.

8. (Aus der Mechanik.) a) Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers ändert sich mit der Zeit. b) Die lebendige Kraft eines Körpers (Energie der Bewegung) ändert sich mit der Geschwindigkeit.

Bemerkung. Bei der Abhängigkeit einer Größe von einer anderen im obigen Sinne ist nicht immer die erste die Wirkung, die zweite die Ursache, wie die obigen Beispiele lehren.

§ 2. In vielen Fällen ist die Abhängigkeit so klar erkannt, daß man sie durch eine mathematische Formel (Gleichung) ausdrücken kann, so im Beispiel

2 a) durch $y = x^2$; 2 b) durch $y = \log x$; 3) durch $y = x^2$; 4) durch $y = \frac{1}{2}\pi x^2$; 5) durch $y = \sin x$; 8 a) $y = gx$; 8 b) durch $y = \frac{1}{2}mx^2$. Die hierin außer y und x vorkommenden Größen sind den Beispielen entsprechend als unveränderlich (konstant) anzusehen; x ist die unabhängige, y die abhängige Veränderliche. In andern Fällen (Beispiel 1, 6a, 6b, 7) ist es nicht möglich oder bis jetzt noch nicht möglich, die Abhängigkeit durch eine mathematische Formel wiederzugeben.

Bemerkungen. 1. Meist steht es frei, die eine oder die andere Veränderliche als unabhängige zu wählen; gegebenenfalls sind dann die Formeln umzukehren, wie in 2 a) $x = \sqrt[3]{y}$, 8 a) $x = \frac{y}{g}$ usw.

2. In vielen Fällen ist eine Größe von mehr als einer andern abhängig, wie in den Beispielen 8 a) und 8 b) wenn auch g und m als veränderlich angenommen werden. Die Gesamtänderung von y kann dann aber in der Weise festgestellt werden, daß man die Veränderungen der einzelnen unabhängigen Veränderlichen nacheinander vornimmt, womit denn diese Aufgabe auf mehrere obiger Art zurückgeführt ist.

Übung. Suche weitere Beispiele auf und drücke die Abhängigkeit wenn möglich durch eine mathematische Formel aus.

§ 3. In allen Fällen aber läßt sich die Abhängigkeit auf doppelte Weise darstellen, nämlich

- 1) arithmetisch: durch eine Zahlentabelle,
- 2) geometrisch: durch eine Zeichnung (graphische Darstellung).

Die Zahlentabelle erhält man, wenn man für die eine Veränderliche bestimmte Werte (meist in wachsender Folge) annimmt und die zugehörigen Werte der andern ermittelt. Als eine solche Zahlentabelle würde sich ergeben für