

**LEHRBUCH**  
DER  
**DARSTELLENDE GEOMETRIE**

VON

**DR. KARL ROHN**  
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK  
AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

UND **DR. ERWIN PAPPERITZ**  
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK  
AN DER BERGAKADEMIE FREIBERG

DRITE, UMGEARBEITETE AUFLAGE IN DREI BÄNDEN

**DRITTER BAND**

KEGELSCHNITTE, FLÄCHEN ZWEITEN GRADES,  
REGEL-, ABWICKELBARE UND ANDERE FLÄCHEN,  
FLÄCHENKRÜMMUNG.

MIT 157 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG  
VERLAG VON VEIT & COMP.

1906



# Inhalt.

## Erstes Kapitel. Die Kegelschnitte.

Die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Punktreihen und Strahlbüschel.		Seite
1.	Einleitung . . . . .	1
2. 3.	Der Kreis als Erzeugnis kongruenter Strahlbüschel oder projektiver Punktreihen . . . . .	1
4—6.	Definition des Kegelschnittes als Erzeugnis projektiver Strahlbüschel oder Punktreihen . . . . .	3
7.	Die Punkte eines Kegelschnittes projizieren sich aus irgend zwei festen Punkten auf ihm durch projektive Strahlbüschel . . . . .	5
8.	Die Tangenten eines Kegelschnittes schneiden irgend zwei feste Tangenten an ihn in projektiven Punktreihen . . . . .	6
9. 10.	Zwei Vierecke, die einem Kegelschnitt in den nämlichen Punkten ein- und umgeschrieben sind . . . . .	7
11.	Jeder Kegelschnitt kann sowohl durch projektive Strahlbüschel als durch projektive Punktreihen erzeugt werden . . . . .	8
12.	Durch fünf Punkte ist ein Kegelschnitt bestimmt. . . . .	10
13—16.	Das Pascal'sche Sechseck und seine Spezialfälle. Konstruktion des Kegelschnittes aus fünf Punkten, oder aus vier Punkten und der Tangente in einem von ihnen, oder aus drei Punkten und den Tangenten in zweien von ihnen . . . . .	10
17.	Durch fünf Tangenten ist ein Kegelschnitt bestimmt . . . . .	13
18—21.	Das Brianchon'sche Sechseck und seine Spezialfälle. Konstruktion des Kegelschnittes aus fünf Tangenten, oder aus vier Tangenten und dem Berührungspunkt von einer unter ihnen, oder aus drei Tangenten und den Berührungspunkten von zweien unter ihnen . . . . .	13
22. 23.	Verwandlung des Kegelschnittes durch Perspektive in einen Kreis; zwei Methoden . . . . .	16
24.	Verwandlung der Ellipse durch Affinität in einen Kreis . . . . .	18
<b>Pol und Polare eines Kegelschnittes; Mittelpunkt, Durchmesser und Achsen.</b>		
25. 26.	Pol und Polare, ihre Eigenschaften; Polardreieck . . . . .	19
27—31.	Harmonische Pole und harmonische Polaren. Beschreibt der Pol eine Punktreihe, so beschreibt seine Polare einen dazu projektiven Strahlbüschel . . . . .	20
32—34.	Involution der harmonischen Pole auf einer Geraden und der harmonischen Polaren durch einen Punkt . . . . .	23
35—37.	Durchmesser und Mittelpunkt eines Kegelschnittes . . . . .	25
38—41.	Konjugierte Durchmesser und Achsen . . . . .	27
42.	Um- und eingeschriebene Parallelogramme bei einem Kegelschnitt . . . . .	28

	Seite
<b>Einige Konstruktionsaufgaben bei Kegelschnitten. Metrische Eigenschaften.</b>	
43—46. Zwei projektive Punktreihen auf derselben Geraden und zwei projektive Strahlbüschel mit demselben Scheitel. Konstruktion der Doppelpunkte, Gegenpunkte und Rechtwinkelstrahlen . . . . .	29
47. Punktreihen auf und Tangentenbüschel an einem Kegelschnitt . . . . .	32
48. 49. Die Punktinvolution auf einem Kegelschnitt; ihr Mittelpunkt. Die Strahleninvolution an einem Kegelschnitt; ihre Achse . . . . .	33
50. Konstruktion der Doppel- und Rechtwinkelstrahlen einer Strahleninvolution, sowie der Doppelpunkte und des Mittelpunktes einer Punktinvolution . . . . .	33
51—59. Lösung von Aufgaben über Kegelschnitte, von denen fünf Punkte $ABCDE$ oder fünf Tangenten $abcde$ gegeben sind. Schnittpunkte eines Kegelschnittes $ABCDE$ mit einer Geraden und Tangenten an einen Kegelschnitt $abcde$ aus einem Punkte. Polare eines Punktes in bezug auf den Kegelschnitt $ABCDE$ und Pol einer Geraden in bezug auf den Kegelschnitt $abcde$ . Konjugierte Durchmesser, Achsen und Asymptoten. Involution harmonischer Pole auf einer Geraden und harmonischer Polaren an einem Punkte. Tangenten aus einem Punkte an den Kegelschnitt $ABCDE$ und Schnittpunkte einer Geraden mit dem Kegelschnitt $abcde$ . . . . .	35
60. Konstruktion der Achsenendpunkte mit Hilfe zweier Punkte oder zweier Tangenten des Kegelschnittes . . . . .	40
61. 62. Kriterien für die Art des durch zwei projektive Strahlbüschel oder Punktreihen erzeugten Kegelschnittes . . . . .	40
63—66. Aus einem gegebenen Rotationskegel eine vorgegebene Ellipse, Hyperbel oder Parabel auszuschneiden . . . . .	42
<b>Gesetz der Dualität. Reziprokalfiguren in bezug auf einen Kegelschnitt. Aufgaben zweiten Grades. Imaginäre Lösungen.</b>	
67—70. Gesetz der Dualität für ebene und räumliche Figuren . . . . .	45
71. 72. Reziprozität in bezug auf einen Kegelschnitt . . . . .	47
73—76. Aufgaben ersten und zweiten Grades. Fundamentalaufgaben zweiten Grades und die hierbei auftretenden imaginären Lösungen. Konstruktiv verwertbare imaginäre Elemente . . . . .	48
77. 78. Realitätsverhältnisse bei zwei und drei Punktepaaren in harmonischer Lage. Gemeinsames Elementepaar zweier Involutionsen auf demselben Träger . . . . .	50
79. 80. Zwei Punktinvolutionen auf verschiedenen Trägern, ebenso zwei Strahleninvolutionen mit verschiedenen Scheiteln sind stets in doppelter Weise perspektiv gelegen . . . . .	52
81—83. Konstruktion von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen . . . . .	53
84. 85. Involution rechter Winkel. Imaginäre Kreispunkte der Ebene. Konstruktion des Kreises aus teilweise imaginären Elementen . . . . .	56
<b>Brennpunkte und Leitlinien eines Kegelschnittes.</b>	
86. Brennpunkte und Leitlinien der Schnittkurven eines Rotationskegels; erstere als Berührungspunkte zweier den Kegel be-	

	Seite
rührender Kugeln. Konstantes Abstandsverhältnis der Kurvenpunkte von Brennpunkt und Leitlinie . . . . .	57
87. Die Brennpunkte als Scheitel rechtwinkliger Polareninvolutionen	59
88. Tangente und Normale in einem Kurvenpunkt halbieren die Winkel der Brennstrahlen . . . . .	60
89. 90. Perspektivität des Kegelschnittes mit einem Kreise um einen der Brennpunkte. Eigenschaften, die sich daraus ergeben .	60
91—93. Ort der Fußpunkte aller von den Brennpunkten auf die Tangenten gefällten Lote. Tangentenkonstruktionen . . . .	63
94. Brennstrahlen und Tangenten aus einem beliebigen Punkt der Ebene schließen miteinander gleiche Winkel ein . . . . .	64
95—98. Die harmonischen rechtwinkligen Polaren schneiden auf den Achsen eines Kegelschnittes Involutionen aus, deren Doppelpunkte die Brennpunkte sind. Haupt- oder Brennpunktsachse. Konstruktion der reellen Brennpunkte. Die Verhältnisse bei der Parabel. Brennstrahlen und Tangenten aus einem beliebigen Punkt der Ebene schließen miteinander gleiche Winkel ein . . . . .	64
99. Ort der Schnittpunkte einer beweglichen Tangente mit zwei festen Tangenten bei der Parabel und mit den Asymptoten bei der Hyperbel . . . . .	67
100—102. Konfokale Kegelschnitte. Kurven gleicher Art schneiden sich nicht, Kurven verschiedener Art aber unter rechten Winkeln	67

**Krümmungskreise der Kegelschnitte.**

103—105. Oskulations- oder Krümmungskreis. Perspektivität zwischen einem Kegelschnitt und einem ihn berührenden oder oskulierenden Kreise. Konstruktion des Krümmungskreises bei einem durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt. . . .	69
106. 107. Die Krümmungskreise in den Scheitelpunkten bei der Ellipse und Hyperbel . . . . .	72
108. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes auf der Normalen eines Punktes, wenn ihre Achsen der Lage nach bekannt sind	73
109. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes auf der Normalen eines Punktes, wenn zwei konjugierte Durchmesser der Lage nach bekannt sind . . . . .	74
110. Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte für die Endpunkte konjugierter Durchmesser bei der Ellipse und Hyperbel. .	76
111. Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes durch Grenzübergang	76
112. Die Krümmungskreise bei der Parabel . . . . .	77

**Gemeinsame Elemente zweier Kegelschnitte. Büschel und Scharen von Kegelschnitten. Perspektive Lage zweier beliebiger Kegelschnitte.**

113. Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Punkten und solche mit vier gemeinsamen Tangenten . . . . .	78
114. Bei zwei Kegelschnitten ist die Zahl der gemeinsamen Punkte oder Tangenten stets gerade . . . . .	79
115. Polvierseit und Polvierneck . . . . .	80
116. 117. Zwei Kegelschnitte besitzen auf jeder Geraden zwei gemeinsame harmonische Pole und in jedem Punkt zwei gemeinsame harmonische Polaren . . . . .	81

	Seite
118. 119. Das gemeinsame Polardreieck zweier Kegelschnitte. Mindestens eine Ecke und eine Seite davon sind reell . . .	81
120 — 122. Jede Ecke des Polardreiecks ist der Scheitel einer Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die den Kegelschnitten gemeinsamen Punkte tragen. Auf jeder Seite liegt eine Punktinvolution; in ihren Doppelpunkten schneiden sich die gemeinsamen Tangenten . . . . .	82
123. 124. Realitätsverhältnisse . . . . .	83
125 — 130. Fünf verschiedene Fälle sind bezüglich der gegenseitigen Lage zweier Kegelschnitte zu unterscheiden. Konstruktionen .	85
131 — 133. Der Kegelschnittbüschel. Seine Kurven schneiden aus jeder Geraden eine Punktinvolution aus; die Polaren eines jeden Punktes gehen durch einen zweiten. Die Kegelschnittschar. Die Tangentenpaare an ihre Kurven bilden in jedem Punkte eine Involution; die Pole einer jeden Geraden liegen auf einer zweiten . . . . .	90
134. 135. Kegelschnitte durch vier resp. drei Punkte, die eine resp. zwei Gerade berühren und die dualen Aufgaben . . . . .	92
136. Die perspektive Lage zweier beliebiger Kegelschnitte . . .	94

### Zweites Kapitel. Die Flächen 2. Grades.

#### Pole und Polarebenen, Durchmesser und Diametralebenen; Achsen.

137. Definition. Jede Ebene schneidet die Fläche in einem Kegelschnitt . . . . .	97
138. 139. Konjugierte oder harmonische Pole. Pol und Polarebene .	97
140. 141. Konjugierte oder harmonische Polaren . . . . .	100
142. Je zwei ebene Schnitte liegen zweifach perspektiv . . . . .	102
143. Konjugierte oder harmonische Polarebenen . . . . .	103
144. Je zwei Tangentenkegel liegen zweifach perspektiv . . . . .	103
145. Das Polartetraëder . . . . .	104
146. 147. Durchmesser und konjugierte Diametralebenen; drei konjugierte Durchmesser . . . . .	105
148. Flächen mit und Flächen ohne Mittelpunkt . . . . .	107
149. Parallelschnitte . . . . .	108
150. 151. Die drei rechtwinkligen Achsen . . . . .	108
152. Achsen einer Kegelfläche, deren Grundkurve ein beliebiger Kegelschnitt ist . . . . .	109
153 — 155. Dualität; reziproke Raumverwandtschaft; involutorische Kollineation; das geschart-involutorische System . . . . .	110

#### Einteilung der Flächen 2. Grades; ihre Beziehung zu den Rotationsflächen; Kreisschnitte.

156 — 158. Ellipsoid, Paraboloid; das Hyperboloid und sein Asymptotenkegel . . . . .	113
159. Die Regelflächen . . . . .	115
160. Das Hyperboloid, von dem drei Erzeugende gegeben sind .	116
161. Das hyperbolische Paraboloid . . . . .	118
162. Die Unterscheidung der Flächen nach ihren Hauptschnitten	119
163. Affinität zwischen den allgemeinen Flächen 2. Grades und den Rotationsflächen . . . . .	120

	Seite
164. 165. Die beiden Systeme von Parallelkreisen auf einer Fläche 2. Grades . . . . .	121
166—168. Die Konstruktion der Kreisschnitte . . . . .	122
<b>Die Konstanten der Flächen 2. Grades. Die Flächen durch neun, acht und sieben Punkte.</b>	
169. Die Zahl der Konstanten ist = 9 . . . . .	126
170. 171. Existenzbeweis der Fläche 2. Grades durch drei Kegelschnitte, die sich paarweise in je zwei Punkten schneiden . . . . .	126
172. 173. Konstruktion der Fläche 2. Grades durch neun beliebige Punkte	130
174. 175. Der Büschel von Flächen 2. Grades durch 8 Punkte; ihre Grundkurve 4. Ordnung . . . . .	133
176. Zerfallende Schnittkurve zweier Flächen 2. Grades . . . . .	134
177—179. Die Raumkurve 3. Ordnung als teilweiser Schnitt zweier Hyperboloide . . . . .	135
180. Die Schmiegungebenen der Raumkurve 3. Ordnung . . . . .	137
181—183. Konstruktion der Raumkurve 3. Ordnung als Schnitt zweier Kegel mit gemeinsamer Mantellinie; ihr scheinbarer Doppel- punkt . . . . .	138
184. 185. Der Büschel von Flächen 2. Grades enthält vier Kegelflächen; ihre Scheitel bilden ein gemeinsames Polartetraëder aller Flächen . . . . .	142
186—191. Die verschiedenen Arten der Flächenbüschel und ihrer Grund- kurven 4. Ordnung; es gibt vier verschiedene Flächenbüschel	143
192. Die Doppelsekanten der Raumkurve 4. Ordnung . . . . .	149
193. Konstruktion der Raumkurve 4. Ordnung durch acht gegebene Punkte . . . . .	150
194. Alle Flächen 2. Grades durch sieben feste Punkte schneiden sich noch in einem weiteren festen Punkte; seine Konstruktion	151
195. Konstruktion des achten Schnittpunktes von drei Flächen 2. Grades . . . . .	152
<b>Die sphärischen Kegelschnitte.</b>	
196. Entstehung der sphärischen Kegelschnitte . . . . .	154
197. Brennpunkte und ihre Eigenschaften . . . . .	155
198. 199. Die Brennstrahlen des Kegels 2. Ordnung und ihre Konstruktion	157
200. 201. Die Projektionen der sphärischen Kegelschnitte . . . . .	159
<b>Konstruktionsaufgaben bei den Flächen 2. Grades.</b>	
202. Den Umriß zu zeichnen, wenn eine Projektion dreier ebener Schnitte der Fläche bekannt ist . . . . .	161
203. Drei konjugierte Durchmesser zu zeichnen . . . . .	163
204—207. Konstruktion der Achsen eines Kegels, von dem der Scheitel und die Grundkurve bekannt sind. Die Spurpunkte der Achsen bestimmen sich als Schnittpunkte eines Kreises und einer gleichseitigen Hyperbel . . . . .	164
208. Konstruktion der Achsen einer Fläche 2. Grades . . . . .	169
209. Den Umriß eines Ellipsoides zu zeichnen, wenn eine Projek- tion dreier konjugierter Durchmesser von ihm gegeben ist	170
210—212. Ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte mit reellem und mit imaginärem Streckenverhältnis . . . . .	172

	Seite
213. Den Umriß eines ein- oder zweischaligen Hyperboloides zu zeichnen, wenn eine Projektion dreier konjugierter Durchmesser von ihm gegeben ist . . . . .	175
214. Bestimmung einer Kugel, wenn von ihr die schiefe Parallelprojektion dreier zueinander senkrechter Radien bekannt ist . . . . .	177
215. Die Eigenschaftengrenze eines Ellipsoides zu finden, wenn man seinen Umriß und den Schatten eines Punktes auf die Umrißebene kennt . . . . .	180
216. Tangentenkegel und Berührungskurve beim zweischaligen Hyperboloid . . . . .	182
217. Die Tangentialebene in einem Punkte des Ellipsoides . . . . .	184
218. Die beiden Tangentialebenen an ein einschaliges Hyperboloid durch eine feste Gerade . . . . .	185
219. Durch drei Punkte einer Fläche 2. Grades einen auf ihr liegenden Kegelschnitt zu konstruieren . . . . .	186
220—224. Einen Kegelschnitt durch drei Punkte zu legen, der einen anderen zweimal berührt. Verschiedene Fälle . . . . .	187
225. Eigen- und Schlagschatten eines zweischaligen Hyperboloides zu zeichnen . . . . .	194
226. Die gemeinsamen Sekanten von vier windschiefen Geraden . . . . .	196
227. Striktionslinien der Regelflächen 2. Grades . . . . .	199
228. Die Striktionslinien des Paraboloides . . . . .	199
229. Die Striktionslinien des Hyperboloides . . . . .	201

### Drittes Kapitel. Verschiedene Flächen.

#### Abwickelbare Flächen.

230.	231. Entstehung der abwickelbaren Flächen . . . . .	202
	232. Die Schar von Flächen 2. Grades und die sie umhüllende abwickelbare Fläche 4. Klasse . . . . .	204
	233. Die verschiedenen Arten der abwickelbaren Fläche 4. Klasse . . . . .	205
	234. Die abwickelbare Fläche 3. Klasse . . . . .	207
	235. Die Beleuchtung einer Oberfläche durch eine leuchtende Fläche . . . . .	208
	236. Die Beleuchtung einer Kugel durch eine leuchtende kreisförmige Scheibe . . . . .	208
	237. Flächen von gleichförmiger Neigung . . . . .	212
	238. Die Fläche von gleichförmiger Neigung über der Ellipse . . . . .	213

#### Regelflächen.

239.	240. Erzeugung. Das längs einer Erzeugenden oskulierende Hyperboloid und die Haupttangente . . . . .	216
	241. Berührungspunkte und Tangentialebenen längs einer Erzeugenden; das Normalenparaboloid . . . . .	218
	242. Der Richtungskegel der Regelfläche; die Striktionslinie . . . . .	219
	243. Die Doppelkurve; ihre Kuspidualpunkte und die zugehörigen Torsallinien . . . . .	219
244—246.	Verschiedene Erzeugung von Regelflächen . . . . .	220
	247. Das Konoid, sein Umriß und Eigenschatten . . . . .	224
248.	249. Das gerade Kreiskonoid; die oskulierenden Paraboloid; sein Eigenschatten . . . . .	225

	Seite
250. 251. Das schiefe Kreiskonoid; seine Striktionslinie; das System von Kegelschnitten auf ihm . . . . .	229
252. 253. Das Plücker'sche Konoid; die Kegelschnitte auf ihm . . . . .	233
254. 255. Haupttangenten, oskulierende Paraboloidoide und Haupttangentenkurven des Plücker'schen Konoides . . . . .	236
256. 257. Eigen- und Schlagschatten des Plücker'schen Konoides . . . . .	238
258—260. Regelflächen 3. Grades und ihre Eigenschaften . . . . .	241
261. Die Verbindungslinien projektiver Punktreihen auf einer Geraden und einem Kegelschnitt bilden eine Regelfläche 3. Grades . . . . .	244
262. Doppel-, Leitgerade und fünf beliebige Erzeugende bestimmen eine Regelfläche 3. Grades . . . . .	244
263—265. Definition der projektiven Beziehung zwischen einer einfachen Punktreihe und den Punktpearen einer Involution. Sind die Träger der Reihen windschief, so bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Regelfläche 3. Grades . . . . .	245
266. Dualität der Eigenschaften der Regelfläche 3. Grades . . . . .	247
267. Die Cayley'sche Regelfläche 3. Grades . . . . .	248
268. 269. Die oskulierenden Hyperboloide der Regelfläche 3. Grades . . . . .	249
270—273. Die Verbindungslinien projektiver Punktreihen zweier Kegelschnitte bilden eine Regelfläche 4. Grades. Sie besitzt eine Doppelkurve 3. Ordnung . . . . .	251
274. Regelfläche 4. Grades mit Doppelgerade und Doppelkegelschnitt; ihre Erzeugung . . . . .	254
275. Regelfläche 4. Grades mit zwei Doppelgeraden und einer Doppelerzeugenden; ihre Erzeugung . . . . .	256
276. Regelflächen 4. Grades mit zwei Doppelgeraden . . . . .	258
277. Die Normalenflächen einer Fläche 2. Grades . . . . .	259
278—281. Die Normalenfläche des Kegels 2. Ordnung in einem beliebigen Schnitt; ihre Eigenschaften . . . . .	260
282. 283. Die Normalenfläche des Kegels 2. Ordnung für einen zu einer Hauptebene senkrechten Schnitt . . . . .	264
284—286. Die Normalenfläche des Kegels 2. Ordnung für einen zu einer Achse normalen Schnitt . . . . .	267
287. 288. Tangentialebenen und Haupttangenten der Normalenfläche . . . . .	270
289—291. Das Cylindroid; Umriß; Haupttangenten . . . . .	272
292—294. Die Wölbfläche des schiefen Durchganges; Umriß; Haupttangenten . . . . .	276

**Hüllflächen.**

295. Erzeugung der Hüllflächen; Charakteristik, Rückkehrkante; Beispiele . . . . .	281
296. Ähnlichkeitszentren und Punkte gleicher Potenz bei zwei oder mehr Kugeln . . . . .	283
297. Die Kugeln, die drei feste Kugeln berühren . . . . .	285
298. 299. Die Dupin'sche Zykloide und ihre Kreise . . . . .	288

**Topographische Flächen.**

300. Definition, Niveaulinien . . . . .	289
301. Falllinien, Talweg, Kammlinie . . . . .	291
302. Die Falllinien des Ellipsoides . . . . .	293

	Seite
303. Die Falllinien des einschaligen Hyperboloides . . . . .	295
304. Linien von konstantem Gefälle . . . . .	296
<b>Viertes Kapitel. Die Krümmung der Flächen.</b>	
305—307. Berührung und Oskulation von Flächen . . . . .	297
308. Die Involution konjugierter Tangenten bei Flächen 2. Grades und bei beliebigen Flächen . . . . .	300
309. Die Dupin'sche Indikatrix . . . . .	300
310. Punkte elliptischer und hyperbolischer Krümmung; ihre Hauptkrümmungsradien . . . . .	302
311. Punkte parabolischer Krümmung . . . . .	304
312. Satz von Meusnier über die Krümmung schiefer Schnitte .	304
313. Die Krümmung bei Rotations- und Regelflächen . . . . .	305
314. Die Tangenten der Schnittkurve einer Tangentialebene im Berührungspunkte . . . . .	305
315. Die Tangente der Lichtgrenze ist zum tangierenden Licht- strahl konjugiert . . . . .	306
316. Die Involution der konjugierten Tangenten bei der Regel- schraubenfläche . . . . .	306
317. Die Tangenten der Lichtgrenze der Regelschraubenfläche bei Parallelbeleuchtung . . . . .	307
318. Die Tangenten der Lichtgrenze der offenen, schiefen Regel- schraubenfläche bei Zentralbeleuchtung . . . . .	308
319. Die gleiche Aufgabe bei der offenen, geraden Schraubenfläche	309
320. Haupttangente und Tangenten der Lichtgrenze der zyklischen Schraubenfläche . . . . .	310
321. Krümmungslinien und Haupttangentenkurven . . . . .	312
<b>Die Krümmungslinien der Flächen 2. Grades.</b>	
322. Durch jeden Raumpunkt gehen drei konjugierte Normalen einer Fläche 2. Grades . . . . .	313
323. Zwei Flächen 2. Grades, die jeder Ebene die nämliche konju- gierte Normale zuordnen, schneiden sich in einer Krüm- mungslinie . . . . .	314
324—326. Das System konfokaler Flächen 2. Grades; ihre Fokalkurven	315
327. Die drei Arten konfokaler Flächen . . . . .	317
328. 329. Die Projektionen der Krümmungslinien des Ellipsoides . .	319
330. Konfokale Kegelschnitte; ihre Achsen . . . . .	323
331. Die Schnittpunkte zweier konfokaler Kegelschnitte . . . . .	324
332. Die Projektionen der Krümmungslinien des einschaligen Hyperboloides . . . . .	326
<b>Literaturnachweise und historische Anmerkungen . . . . .</b>	<b>329</b>

# ERSTES KAPITEL.

---

## Die Kegelschnitte.

### Die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Punktreihen und Strahlbüschel.

1. Schon im V. Kapitel des ersten Bandes wurden die Kegelschnitte behandelt; sie wurden daselbst definiert als die Schnittkurve eines geraden oder schiefen Kreiskegels mit einer Ebene, oder auch — was auf dasselbe hinauskommt — als Zentralprojektionen oder perspektive Bilder eines Kreises (257 Bd. I). Von dieser Definition aus gelangten wir auf natürlichem Wege zu den Polareigenschaften des Kreises und der Kegelschnitte und weiter zu den Eigenschaften des Mittelpunktes, der konjugierten Durchmesser, der Achsen und einiger weiterer Beziehungen, die uns in den Stand setzten die Kurven zu konstruieren.

Hier werden wir eine neue Definition der Kegelschnitte geben; sie soll dann auch für die weiteren Untersuchungen als Grundlage dienen.<sup>1)</sup> Gleichwohl wird auch hierbei die perspektive Beziehung zwischen Kegelschnitt und Kreis einen Hauptfaktor und ein besonders geeignetes Hilfsmittel für das genaue Studium der Kegelschnitte bilden.

2. Wir gehen zunächst von zwei einfachen Eigenschaften des Kreises aus, die sich unmittelbar auf seine perspektiven Bilder übertragen lassen. Eine Reihe beliebig auf einem Kreis gegebener Punkte  $A, B, C, D, \dots$  wird aus irgend zwei festen Punkten  $S$  und  $S_1$  desselben durch kongruente Strahlbüschel projiziert (Fig. 1). Denn je zwei Strahlen des einen Büschels, etwa  $SA$  und  $SB$ , schließen den gleichen Winkel ein, wie die entsprechenden Strahlen  $S_1A$  und  $S_1B$  des anderen (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen  $AB$ ). Dabei entspricht dem Strahl  $SS_1$  des ersten Büschels im zweiten Büschel die Kreistangente in  $S_1$  und dem Strahl  $S_1S$  des zweiten Büschels im ersten Büschel die Kreistangente in  $S$ .

Verwandelt man den Kreis durch perspektive Abbildung in einen Kegelschnitt, so gehen die kongruenten Strahlbüschel der Kreisfigur — da die Kongruenz ein spezieller Fall der Projektivität ist — in projektive Büschel beim Kegelschnitt über (Bd. I, 189), und wir haben den Satz: Eine Reihe beliebig auf einem Kegelschnitt gegebener Punkte  $A, B, C, D, \dots$  wird aus irgend zwei festen Punkten  $S$  und  $S_1$  desselben durch projektive Strahlbüschel projiziert. Der Tangente in  $S$  (resp.  $S_1$ ) entspricht dabei der Strahl  $S_1S$  (resp.  $SS_1$ ).

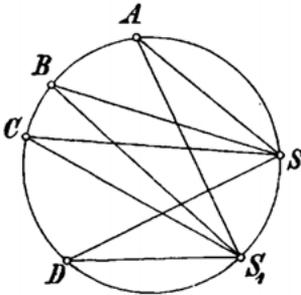


Fig. 1.

Für den Kreis gilt offenbar auch die Umkehrung des obigen Satzes: Zwei kongruente Strahlbüschel erzeugen einen Kreis, d. h. ihre entsprechenden Strahlen schneiden sich in den Punkten eines Kreises, der durch die Scheitel der beiden Büschel hindurchgeht. Dagegen wissen wir noch nicht, ob zwei beliebig gegebene projektive Strahlbüschel einen Kegelschnitt erzeugen. Daß dies in der Tat der Fall ist, wird später nachgewiesen werden.

3. Zieht man an einen Kreis irgendwelche Tangenten  $a, b, c, d, \dots$ , so schneiden sie auf zwei beliebig gewählten

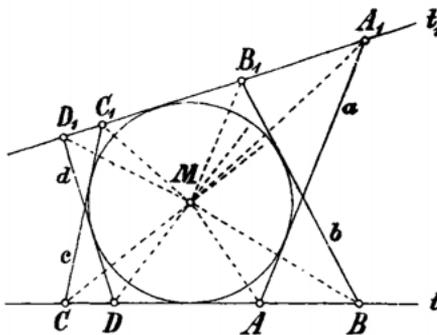


Fig. 2.

festen Kreistangenten  $t$  und  $t_1$  projektive Punktreihen aus. Beide Punktreihen werden vom Kreismittelpunkt  $M$  durch kongruente Strahlbüschel projiziert (Fig. 2). Bezeichnen wir die auf  $t$  und  $t_1$  ausgeschnittenen Punktreihen mit  $A, B, C, D, \dots$  bez.  $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ , so brauchen wir nur zu zeigen, daß die Strahlen  $MA, MB, MC, \dots$

in die Strahlen  $MA_1, MB_1, MC_1, \dots$  durch Drehung um den gleichen Winkel und in dem gleichen Sinne übergehen. Dann sind die Strahlbüschel kongruent und schneiden auf  $t$  und  $t_1$  projektive Punktreihen aus. Nun bilden  $t$  und  $t_1$  mit jeder der Tangenten  $a, b, c, \dots$  ein Dreieck und alle diese Dreiecke haben  $\sphericalangle tt_1$  gemein. Folglich ist:  $\sphericalangle CA A_1 + \sphericalangle C_1 A_1 A = \sphericalangle CB B_1 + \sphericalangle C_1 B_1 B$ , oder wenn

man alle Winkel der Gleichung halbiert:  $\sphericalangle MAA_1 + \sphericalangle MA_1A = \sphericalangle MBB_1 + \sphericalangle MB_1B$ , was die Relation  $\sphericalangle AMA_1 = \sphericalangle BMB_1$  nach sich zieht. Eine Drehung um diesen Winkel führt  $MA$  und  $MB$  in  $MA_1$  und  $MB_1$  über. Man erkennt ebenso, daß  $\sphericalangle CMC_1 = 2R - \sphericalangle AMA_1$  ist;  $\sphericalangle CMC_1$  ist aber in entgegengesetztem Sinne gerechnet wie  $\sphericalangle AMA_1$ . Dreht man also  $MC$  in gleichem Sinne und um den gleichen Winkel wie vorher bei der Drehung von  $MA$  nach  $MA_1$ , so fällt die gedrehte Gerade mit der verlängerten  $MC_1$  zusammen, w. z. b. w.

Aus dem Satz für den Kreis folgt unmittelbar die Richtigkeit des folgenden: Zieht man an einen Kegelschnitt irgendwelche Tangenten  $a, b, c, d, \dots$ , so schneiden sie auf zwei beliebig gewählten festen Tangenten  $t$  und  $t_1$  desselben projektive Punktreihen aus. Auch hier ist zu bemerken, daß die Umkehrung dieses Satzes noch später zu beweisen ist.

4. Wir haben schon gesehen, daß Kegelschnitte durch projektive Strahlbüschel oder auch durch projektive Punktreihen erzeugt werden können. Von jetzt ab wollen wir die projektiven Strahlbüschel und Punktreihen zum Ausgangspunkt nehmen und die Kurven studieren, die durch solche Strahlbüschel und Punktreihen erzeugt werden können. An die Spitze unserer Betrachtungen stellen wir die Definitionen:

*Zwei projektive Strahlbüschel erzeugen einen Kegelschnitt als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen.*

*Zwei projektive Punktreihen erzeugen einen Kegelschnitt als Hüllkurve der Verbindungslinien entsprechender Punkte.*

Diese Definitionen decken sich zunächst nicht mit der in Bd. I, 257 aufgestellten Definition; doch haben wir vorhin nachgewiesen, daß die früher als perspektive Bilder des Kreises definierten Kurven auch als Erzeugnisse von projektiven Strahlbüscheln oder projektiven Punktreihen erhalten werden können. Es erübrigt noch zu zeigen, daß die beiden voranstehenden Definitionen zu den nämlichen Kurven führen, und daß diese Kurven mit den perspektiven Bildern eines Kreises, d. h. mit den im fünften Kapitel des ersten Bandes behandelten Kegelschnitten identisch sind.

Zunächst müssen wir einige Sätze ableiten, die für die soeben definierten Kurven gelten; mit ihrer Hilfe wird uns alsdann der geforderte Nachweis gelingen, daß die von zwei projektiven Strahlbüscheln oder Punktreihen erzeugten Kurven in der Tat nichts anderes sind als die in Band I Kapitel V behandelten Kurven.

5. Sind  $a$  und  $a_1, b$  und  $b_1, c$  und  $c_1, \dots$  entsprechende Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel mit den Scheiteln  $S$  und  $T_1$ , so wird der Verbindungslinie  $ST_1$  der beiden Scheitel, betrachtet als Strahl  $t$

des ersten Büschels, ein Strahl  $t_1$  im zweiten und, betrachtet als Strahl  $s_1$  des zweiten Büschels, ein Strahl  $s$  im ersten entsprechen (Fig. 3). Dann gehören dem Kegelschnitt die Punkte  $A = a \times a_1$ ,  $B = b \times b_1$ ,  $C = c \times c_1$ ,  $D = d \times d_1$ ,  $S = s \times s_1$ ,  $T = t \times t_1$  an. Auf jedem Strahl durch  $S$  liegen zwei Punkte des Kegelschnittes, nämlich der Punkt  $S$  und der Schnittpunkt dieses Strahles mit dem entsprechenden des zweiten Büschels. Für den Strahl  $s$  fallen beide Punkte zusammen, so daß  $s$  zwei zusammenfallende Punkte mit dem Kegelschnitt gemein hat, also ihn in  $S$  berührt. Der durch zwei projektive Strahlbüschel erzeugte Kegelschnitt geht durch ihre Scheitel.

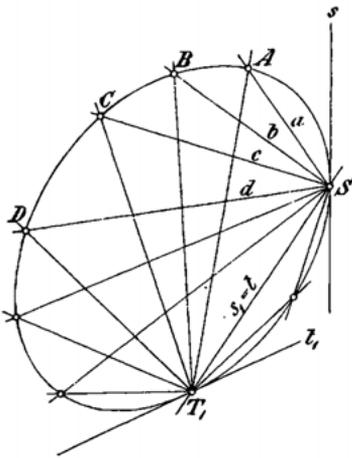


Fig. 3.

Der Verbindungslinie der Scheitel ( $t$  oder  $s_1$ ) in dem einen Büschel entspricht die Tangente ( $t_1$  bez.  $s$ ) des Kegelschnittes im anderen. Das Verhalten des Kegelschnittes in den Scheiteln der Büschel ist dabei (vergl. 7) ganz das gleiche wie in seinen übrigen Punkten.

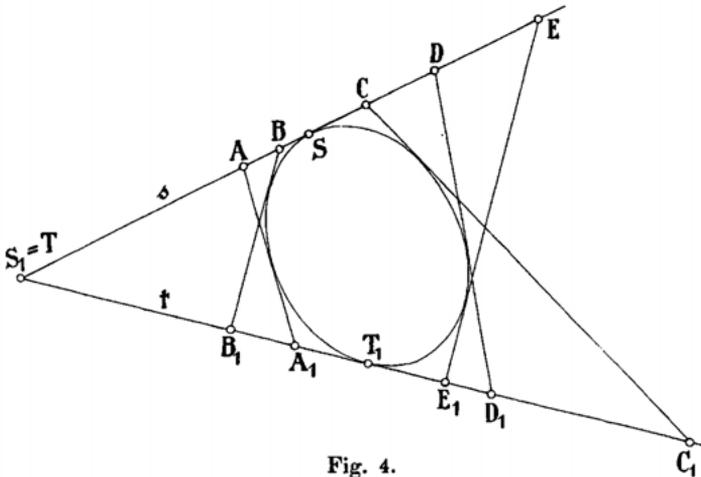


Fig. 4.

6. Sind  $A$  und  $A_1$ ,  $B$  und  $B_1$ ,  $C$  und  $C_1$  . . . entsprechende Punkte zweier projektiver Punktreihen auf den Geraden (Trägern)  $s$

und  $t_1$ , so wird dem Schnittpunkt  $s \times t_1$  der beiden Träger, betrachtet als Punkt  $T$  der ersten Reihe, ein Punkt  $T_1$  der zweiten und, betrachtet als Punkt  $S_1$  der zweiten Reihe, ein Punkt  $S$  der ersten entsprechen (Fig. 4). Dann sind die Geraden  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, SS_1 = s, TT_1 = t_1$  Tangenten eines Kegelschnittes. Durch jeden Punkt von  $s$  gehen zwei Tangenten desselben, nämlich die Gerade  $s$  und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem entsprechenden der zweiten Reihe. Für den Punkt  $S$  fallen beide Tangenten zusammen, so daß  $S$  zum Berührungspunkt des Kegelschnittes mit der Tangente  $s$  wird. Der durch zwei projektive Punktreihen erzeugte Kegelschnitt berührt ihre Träger. Dem Schnittpunkt der Träger ( $T$  oder  $S_1$ ) in der einen Reihe entspricht der Berührungspunkt ( $T_1$  bez.  $S$ ) des Kegelschnitts in der anderen.

7. Wird ein Kegelschnitt durch zwei projektive Strahlbüschel mit den Scheiteln  $S$  und  $T$  erzeugt, so kann man ihn auch durch zwei projektive Strahlbüschel erzeugen, deren Scheitel irgendwie auf ihm gewählt werden. Sind  $Q, P, P_1, P_2, \dots$  irgendwelche

Punkte des Kegelschnittes (Fig. 5), dann sind die Strahlbüschel  $S(STQP P_1 P_2 \dots)$  und  $T(STQP P_1 P_2 \dots)$  projektiv. Dabei bedeuten die vor der Klammer stehenden Buchstaben  $S$  und  $T$  die Scheitel der Büschel und die in der Klammer stehenden Buchstaben die einzelnen Punkte, durch die ihre Strahlen gehen. Insbesondere bedeutet  $SS$  den in  $S$  tangierenden Strahl des ersten

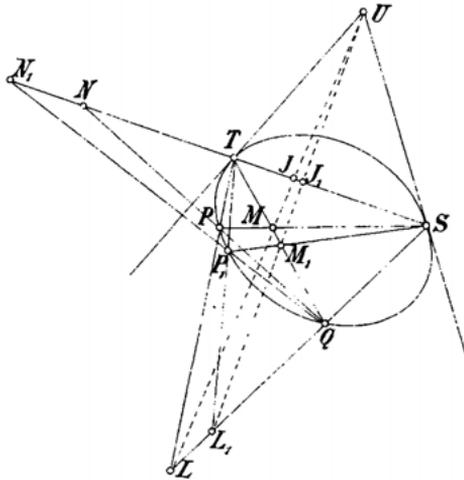


Fig. 5.

und  $TT$  den in  $T$  tangierenden Strahl des zweiten Büschels. Sind aber die vier Strahlen  $S(STQP)$  projektiv zu den vier Strahlen  $T(STQP)$ , so sind sie nach 190 Bd. I auch projektiv zu den vier Strahlen  $T(TSPQ)$ . Die erst- und letztgenannten Strahlen liegen sogar perspektiv, da sie den Strahl  $ST$  entsprechend gemein haben. Folglich liegen  $SS \times TT = U, SQ \times TP = L$  und  $SP \times TQ = M$  in gerader Linie. Läßt man  $S, T, Q$  ungeändert, verändert aber die

Lage von  $P$  in  $P_1$ , so liegen  $U$ ,  $SQ \times TP_1 = L_1$  und  $SP_1 \times TQ = M_1$  in gerader Linie, u. s. f.

Die vier Geraden  $SP$ ,  $SQ$ ,  $TP$ ,  $TQ$  bilden die Seiten eines Vierecks, dessen Diagonalen  $LM$ ,  $PQ$  und  $ST$  sind; deshalb werden  $S$  und  $T$  durch  $N$  und  $J = ST \times LM$  harmonisch geteilt. In gleicher Weise teilen  $N_1$  und  $J_1 = ST \times L_1M_1$  die Strecke  $ST$  harmonisch, u. s. f. Nun ist der Büschel  $S(P, P_1, P_2 \dots)$  perspektiv zur Reihe  $(M, M_1, M_2, \dots)$ ; diese Reihe ist von  $U$  aus perspektiv zur Reihe  $(J, J_1, J_2 \dots)$  und die letztere endlich nach 223 Bd. I involutorisch zur Reihe  $(N, N_1, N_2, \dots)$ ; dabei sind  $S$  und  $T$  die Doppelpunkte der Involution; die beiden letztgenannten Reihen sind demnach ebenfalls projektiv, nur ist das Entsprechen ihrer Punkte ein vertauschbares. Somit sind auch die Büschel  $S(P, P_1, P_2, \dots)$  und  $Q(N, N_1, N_2, \dots)$  oder  $Q(P, P_1, P_2, \dots)$  projektiv; unser Kegelschnitt kann also auch durch diese beiden projektiven Büschel erzeugt werden. In der gleichen Weise können wir folgern, daß der Kegelschnitt sich auch durch zwei projektive Büschel mit den Scheiteln  $P$  und  $Q$  erzeugen läßt.

8. Wird ein Kegelschnitt durch zwei projektive Punktreihen mit den Trägern  $s$  und  $t$  erzeugt, so kann man ihn auch durch

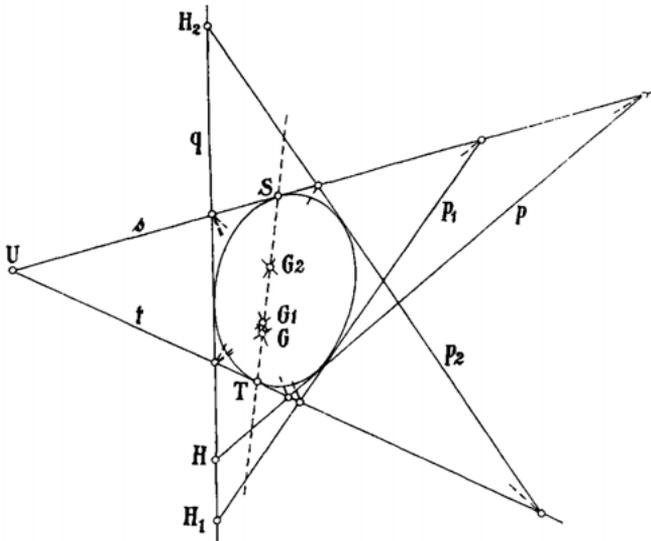


Fig. 6.

zwei projektive Punktreihen erzeugen, deren Träger zwei beliebige Tangenten an ihn sind. Sind  $q, p, p_1, p_2, \dots$  irgendwelche Tangenten des Kegelschnittes (Fig. 6), dann sind die Punktreihen  $s(stqpp_1p_2 \dots)$  und  $t(stqpp_1p_2 \dots)$  projektiv. Die vor den

Klammern stehenden Buchstaben bedeuten die Träger  $s$  und  $t$  der Reihen und die in den Klammern stehenden Buchstaben die Tangenten, welche die einzelnen Punkte der Reihe ausschneiden. Insbesondere bedeuten  $s \times s$  und  $t \times t$  die Berührungspunkte  $S$  und  $T$  der Träger. Sind aber die vier Punkte  $s(stqp)$  projektiv zu den vier Punkten  $t(stqp)$ , so sind sie nach 190 Bd. I auch projektiv zu den vier Punkten  $t(tspq)$ . Die erst- und letztgenannten Punkte liegen sogar perspektiv, da sie den Punkt  $s \times t = U$  entsprechend gemein haben; folglich schneiden sich die Verbindungslinien von  $s \times q$  mit  $t \times p$  und von  $s \times p$  mit  $t \times q$  in einem Punkte  $G$  der Geraden  $ST$ . Läßt man  $s, t, q$  ungeändert, verändert aber die Lage von  $p$  in  $p_1$ , so schneiden sich die Verbindungslinien von  $s \times q$  mit  $t \times p_1$  und von  $s \times p_1$  mit  $t \times q$  in einem Punkte  $G_1$  von  $ST$ , u. s. f.

Die vier Punkte  $s \times p, s \times q, t \times p, t \times q$  bilden die Ecken eines Vierecks, dessen Diagonalpunkte  $U, G$  und  $H = p \times q$  sind, deshalb liegen  $UG$  und  $UH$  zu  $s$  und  $t$  harmonisch. In gleicher Weise liegen  $UG_1$  und  $UH_1$  ( $H_1 = p_1 \times q$ ) zu  $s$  und  $t$  harmonisch, u. s. f. Nun ist die Reihe  $s(p, p_1, p_2, \dots)$  perspektiv zur Reihe  $(G, G_1, G_2, \dots)$  aus dem Punkt  $q \times t$ ; diese ist perspektiv zu dem Büschel  $U(G, G_1, G_2, \dots)$  und der letztere nach 228 Bd I involutorisch zum Büschel  $U(H, H_1, H_2, \dots)$ , dabei sind  $s$  und  $t$  die Doppelstrahlen der Involution; beide Büschel sind also projektiv, nur entsprechen sich ihre Strahlen vertauschbar. Somit sind auch die Reihen  $s(p, p_1, p_2, \dots)$  und  $(H, H_1, H_2, \dots)$  oder  $q(p, p_1, p_2, \dots)$  projektiv; unser Kegelschnitt kann demnach auch durch zwei projektive Punktreihen auf den Trägern  $s$  und  $q$  erzeugt werden.

9. Wir können nun leicht nachweisen, daß auch der Satz vom umgeschriebenen Vierseit und eingeschriebenen Viereck (253 u. 256 Bd. I) für die durch zwei projektive Strahlbüschel erzeugten Kegelschnitte gilt (Fig. 7). Ist  $ABCD$  das eingeschriebene Viereck mit den Diagonalpunkten  $L, M, N$  und sind  $SAP, PBQ, QCR, RDS$  Tangenten des Kegelschnitts, so sind nach 7 die beiden Strahlbüschel  $B(BCDA)$  und  $C(BCDA)$  projektiv. Der zweite ist aber auch projektiv zu  $C(CBAD)$ , so daß hieraus die Projektivität des ersten und letzten Büschels folgt; diese bedingt ihrerseits, da beide Büschel einen Strahl entsprechend gemein haben, daß die Punkte  $Q, M$  und  $L$  in gerader Linie liegen. Ganz ebenso erschließt man die geradlinige Lage der Punkte  $L, M$  und  $S$ ; d. h. die Gegenecken  $Q$  und  $S$  des umgeschriebenen Vierseits liegen auf der Geraden  $LM$ . In gleicher Weise findet man, daß  $P$  und  $R$  auf der Geraden  $MN$ , sowie daß  $U$  und  $T$  auf der Geraden  $LN$  liegen. Schreibt man einem

von zwei projektiven Strahlbüscheln erzeugten Kegelschnitt in den nämlichen vier beliebig gewählten Punkten ein vollständiges Viereck ein und ein Vierseit um, so verbinden die Diagonalen des letzteren die Diagonalepunkte des ersteren.

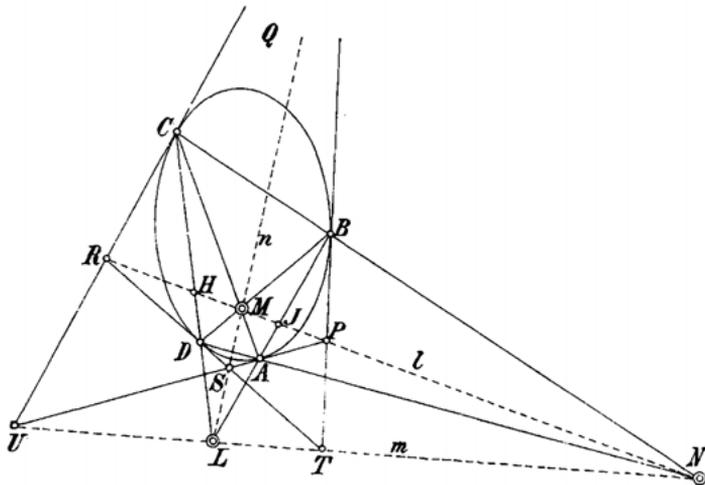


Fig. 7.

**10.** Dieser Satz gilt in gleicher Weise für einen durch zwei projektive Punktreihen erzeugten Kegelschnitt. Sind  $PR = l$ ,  $QS = n$  und  $TU = m$  die Diagonalen des Vierseits (Fig. 7), so sind nach 8 die beiden Punktreihen  $(Q, B, P, T)$  und  $(C, Q, U, R)$  projektiv und also die Reihen  $(Q, B, P, T)$  und  $(Q, C, R, U)$  perspektiv. Demgemäß schneiden sich die Geraden  $PR, TU$  und  $BC$  in einem Punkt; in gleicher Weise zeigt man, daß auch  $AD$  durch diesen Punkt geht. Durch analoge Schlüsse findet man, daß die Geraden  $AB, CD, QS, TU$  sich in einem Punkte schneiden und ebenso die Geraden  $AC, BD, PR, QS$ .

**11.** Der vorausgehende Satz soll nun benutzt werden um zu beweisen, daß jeder durch projektive Strahlbüschel erzeugte Kegelschnitt auch durch projektive Punktreihen erzeugt werden kann und umgekehrt. Es seien  $A, B, C$  irgendwelche feste Punkte eines Kegelschnittes und  $AP, PQ, QC$  die zugehörigen Tangenten, während wir einem weiteren Punkt  $D$  verschiedene Lagen  $D, D_1, D_2, \dots$  auf dem Kegelschnitt erteilen (Fig. 8). Die Tangenten in diesen Punkten schneiden auf  $PA$  eine Punktreihe  $S, S_1, S_2, \dots$  und auf  $QC$  eine Punktreihe  $R, R_1, R_2, \dots$  aus; beide sind unter sich und mit dem Strahlbüschel  $B (D, D_1, D_2, \dots)$  projektiv. Denn nach dem voran-

stehenden Satz schneiden sich  $PR$ ,  $QS$ ,  $BD$  und  $AC$  in einem Punkte  $M$ , ebenso  $PR_1$ ,  $QS_1$ ,  $BD_1$  und  $AC$  in einem Punkte  $M_1$  u. s. f. Die Punkte  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ , ... bilden eine auf  $AC$  liegende Punktreihe, die somit von  $P$  aus gesehen mit der Reihe  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , ... auf  $QC$  und von  $Q$  aus gesehen mit der Reihe  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ , ... auf  $PA$  perspektiv liegt; zugleich gehen die Strahlen des Büschels  $B$  ( $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  ...) durch die bezüglichen Punkte jener Reihe. Alle diese Reihen und Büschel sind projektiv.

Auch die Geraden  $TU$ ,  $QS$ ,  $BA$  und  $CD$  schneiden sich in einem Punkte  $N$ , analog die Geraden  $UT_1$ ,  $QS_1$ ,  $BA$  und  $CD_1$  in einem Punkte  $N_1$ , u. s. f. Die Punkte  $N$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ , ... bilden eine auf  $AB$  liegende Reihe, die somit von  $U$  aus gesehen mit der Reihe  $T$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ , ... auf  $QB$  und von  $Q$  aus gesehen mit der Reihe  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ , ... auf  $PA$  perspektiv liegt; zu-

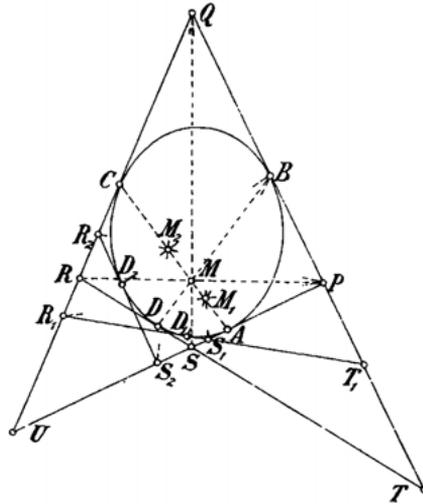


Fig. 8.

gleich gehen die Strahlen des Büschels  $C$  ( $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ , ...) durch die bezüglichen Punkte jener Reihe, und wieder sind alle Reihen und Büschel projektiv. Fassen wir unsere Resultate zusammen, so erhalten wir die Projektivität der Reihen  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , ...  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ , ... und  $T$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ , ... unter sich und mit den Büscheln  $B$  ( $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ , ...) und  $C$  ( $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ , ...). Dabei ist zum Beweis nur der Satz vom umgeschriebenen Viereck und eingeschriebenen Viereck verwendet worden, der sowohl für die durch projektive Punktreihen wie auch für die durch projektive Strahlbüschel erzeugten Kurven Gültigkeit hat. Daher der Satz: Nimmt man auf einem Kegelschnitt eine Reihe von Punkten an und zieht die zugehörigen Tangenten, dann ist der Strahlbüschel, dessen Strahlen jene Punkte mit einem beliebigen aber festen Punkt des Kegelschnittes verbinden, projektiv zu der Punktreihe, die jene Tangenten auf einer beliebigen aber festen Tangente des Kegelschnittes ausschneiden. Sonach kann jeder Kegelschnitt sowohl durch zwei projektive Strahlbüschel als auch durch zwei projektive Punktreihen erzeugt werden. Dabei darf man noch zwei be-

liebige Punkte des Kegelschnittes als Scheitel der Büschel und ebenso zwei beliebige Tangenten desselben als Träger der Punktreihen wählen.

**12.** Die doppelte Erzeugungsweise der Kegelschnitte gibt uns auch die Mittel an die Hand, beliebig viele Punkte und Tangenten desselben in einfachster Weise zu zeichnen. Zunächst gilt der Satz: Fünf Punkte einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, bestimmen einen Kegelschnitt, der sie enthält. Die aus zweien der gegebenen Punkte, etwa  $A$  und  $B$ , nach den übrigen  $C, D, E$  gezogenen Strahlen bestimmen nämlich zwei projektive Strahlbüschel, und diese erzeugen einen durch die fünf Punkte verlaufenden Kegelschnitt. Den nämlichen Kegelschnitt muß man nach 7 auch erhalten, wenn man irgend zwei andere unter den

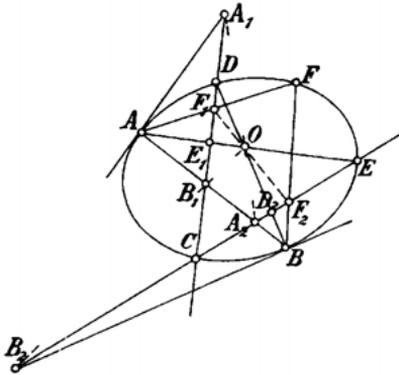


Fig. 9.

gegebenen Punkten als Scheitel zweier projektiver Strahlbüschel wählt, deren entsprechende Strahlen sich wieder in Punkten der Kurve schneiden.

Ist  $F$  irgend ein weiterer Punkt des Kegelschnittes, so sind die Strahlbüschel  $A(C, D, E, F, \dots)$  und  $B(C, D, E, F, \dots)$  projektiv (Fig. 9). Den ersteren schneiden wir mit  $CD$ , den letzteren mit  $CE$ , dann erhalten wir perspektive Punktreihen  $(C, D, E_1, F_1, \dots)$  und  $(C, D_2, E, F_2, \dots)$ .

Sonach geht  $F_1, F_2$  durch den Schnittpunkt  $O = DD_2 \times E_1E$ . Man erhält also jedesmal einen Punkt des Kegelschnittes, indem man eine beliebige Gerade durch  $O$  zieht, ihren Schnittpunkt auf  $CD$  mit  $A$  und ihren Schnittpunkt auf  $CE$  mit  $B$  verbindet; beide Verbindungslinien schneiden sich auf der Kurve. Da insbesondere dem Strahl  $AB$  des ersten Büschels im zweiten die Tangente in  $B$  entspricht, so verbinde man  $B_1 = AB \times CD$  mit  $O$ , dann geht die in  $B$  berührende Tangente durch  $B_2 = B_1O \times CE$ .

**13.** Die Gegenseiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks schneiden sich in drei Punkten einer Geraden. Dieser Satz heißt der Pascal'sche Satz und die Gerade die zu dem Sechseck gehörige Pascal'sche Gerade.<sup>2)</sup> Denn in Fig. 9 ist  $AFBDCE$  ein eingeschriebenes Sechseck, dessen Ecken auf dem Kegelschnitt völlig willkürlich gewählt sind, und es liegen die Punkte  $AF \times DC = F_1$ ,  $FB \times CE = F_2$  und  $BD \times EA = O$  auf

einer Geraden. Der Pascal'sche Satz ist also eine unmittelbare Folge der Erzeugungsweise eines Kegelschnittes durch zwei projektive Strahlbüschel. Während aber bei dieser zwei Punkte desselben als Scheitel der Büschel vor den anderen hervortreten, sind beim Pascal'schen Satz alle Punkte gleichberechtigt. Wir haben ja auch bereits gesehen, daß die Scheitel der Büschel sich nicht vor den anderen Punkten des Kegelschnittes auszeichnen.

Kennt man fünf Punkte  $BDCEA$  des Kegelschnittes, so findet man einen weiteren, wenn man durch  $A$  einen beliebigen Strahl zieht, seinen Schnittpunkt auf  $CD$  mit  $O$  verbindet, diese Linie mit  $CE$  schneidet und dann von  $B$  aus einen Strahl durch diesen Schnittpunkt zieht. Die Strahlen durch  $A$  und  $B$  liefern einen neuen Punkt des Kegelschnittes.

Aus unserer Figur erkennt man auch, daß die Umkehrung des Pascal'schen Satzes Geltung hat. Die Ecken eines Sechsecks, dessen drei Paar Gegenseiten sich in drei Punkten einer Geraden schneiden, liegen stets auf einem Kegelschnitt.

Sechs Punkte  $ABCDEF$  geben je nach der Reihenfolge, in der man sie anordnet, zu 60 verschiedenen Sechsecken Veranlassung, so daß im ganzen 60 verschiedene Pascal'sche Gerade auftreten, und auf jeder von ihnen schneiden sich dreimal je zwei der fünfzehn Verbindungslinien jener sechs Punkte.

14. Der Pascal'sche Satz läßt eine Reihe von Spezialisierungen zu, auf die wir noch etwas näher eingehen müssen. Rücken zwei Ecken des Sechsecks einander unendlich nahe, so wird ihre Verbindungslinie zur Tangente; das Sechseck geht in ein Fünfeck über. Ist  $ABDCE$  dieses Fünfeck und  $a$  die Tangente in  $A$ , so liegen die Schnittpunkte  $AB \times CE = A_2$ ,  $BD \times EA = O$  und  $DC \times a = A_1$  auf einer Geraden (Fig. 9). Schreibt man einem Kegelschnitt ein Fünfeck ein, so liegen die Schnittpunkte der ersten und vierten Seite, der zweiten und fünften Seite, sowie der dritten Seite mit der Tangente in der gegenüberliegenden Ecke auf einer Geraden.

Dieser Satz liefert, falls man fünf Punkte eines Kegelschnittes  $A, B, D, C, E$  kennt, die zugehörigen Tangenten. So schneidet die Verbindungslinie von  $AB \times CE$  und  $BD \times EA$  auf  $DC$  einen Punkt der Tangente im Punkte  $A$  aus. Er liefert aber auch, falls von einem Kegelschnitt vier Punkte  $A, B, D, C$  und in einem von ihnen, etwa  $A$ , die Tangente  $a$  bekannt ist, beliebig viele weitere Punkte. Man ziehe durch  $C$  irgend einen Strahl, schneide ihn mit  $AB$  und verbinde den Schnittpunkt mit  $DC \times a$ ; diese Gerade trifft  $BD$  in

einem Punkt, den wir mit  $A$  verbinden. Die Strahlen durch  $C$  und  $A$  schneiden sich dann auf dem Kegelschnitt. Durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben ist ein Kegelschnitt völlig bestimmt.

**15.** Rücken von den sechs Ecken des Pascal'schen Sechsecks zweimal zwei zusammen, so entsteht ein Viereck mit zwei Tangenten in zwei seiner Ecken. Sei etwa  $ABCD$  in Figur 7 dieses Viereck, das zusammen mit den Tangenten in  $A$  und  $C$  ein Pascal'sches Sechseck vorstellt, dann liegt der Schnittpunkt  $U$  der letzteren mit  $L = AB \times CD$  und  $N = BC \times DA$  in gerader Linie. Fügt man dagegen dem Viereck die Tangenten in  $B$  und  $D$  hinzu, dann folgt aus dem so gebildeten Pascal'schen Sechseck, daß die Punkte  $T, L$  und  $N$  einer Geraden angehören. Schreibt man einem Kegelschnitt ein gewöhnliches Viereck ein, so schneiden sich die Tangenten in seinen Gegenecken in zwei Punkten, deren Verbindungslinie auch die Schnittpunkte seiner Gegenseiten enthält.

Die vier Punkte des Kegelschnittes geben noch zu zwei weiteren Vierecken Veranlassung, nämlich zu  $ABDC$  und  $ADBC$ . Führt man die gleiche Überlegung wie vorher aus, so erkennt man, daß einerseits  $L, M, Q, S$  und andererseits  $N, M, P, R$  auf einer Geraden liegen. Hiernach erscheint der Satz in 9 als eine Folgerung aus dem Pascal'schen Satz.

Zugleich ergibt sich der Satz: Durch drei Punkte und die Tangenten in zweien von ihnen ist ein Kegelschnitt bestimmt. Sind (Fig. 7)  $A, B, C$  drei Punkte und  $AU$  und  $CU$  zwei Tangenten des gesuchten Kegelschnittes, dann ziehe man durch  $C$

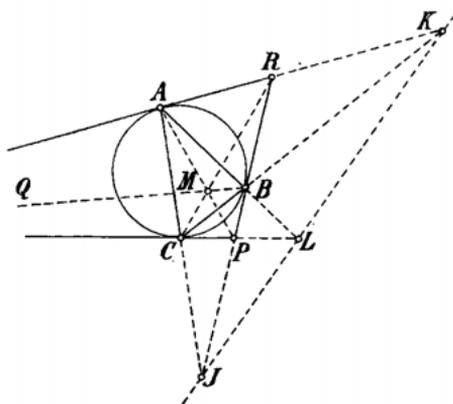


Fig. 10.

irgend einen Strahl, der  $AB$  in  $L$  schneiden möge, und durch  $A$  einen Strahl nach dem Punkte  $N = UL \times BC$ , so schneiden sich die Strahlen durch  $C$  und  $A$  auf dem Kegelschnitt.

**16.** Rücken die sechs Ecken des Pascal'schen Sechsecks paarweise zusammen, so entsteht ein eingeschriebenes Dreieck mit den Tangenten in seinen drei Ecken. Das liefert un-

mittelbar den Satz: Schreibt man einem Kegelschnitt ein Dreieck ein, so schneiden die Tangenten in seinen Ecken die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten einer Geraden. In Figur 10 sind dies die drei Punkte  $J, K, L$ .

17. Fünf Gerade einer Ebene, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, bestimmen einen Kegelschnitt, der sie berührt. Die auf zwei von den gegebenen Geraden,  $a$  und  $b$ , durch die übrigen  $c, d, e$  ausgeschnittenen Punkte bilden nämlich zwei projektive Punktreihen, und diese erzeugen einen die fünf Geraden berührenden Kegelschnitt. Ist  $f$  irgend eine von seinen weiteren

Tangenten (Fig. 11), so sind die von den Tangenten auf  $a$  und  $b$  ausgeschnittenen Punktreihen  $(C_1, D_1, E_1, F_1, \dots)$  und  $(C_2, D_2, E_2, F_2, \dots)$  projektiv und folglich die Strahlbüschel  $P_1(C_1, D_1, E_1, F_1, \dots)$  und  $P_2(C_2, D_2, E_2, F_2, \dots)$  perspektiv, wo  $P_1 = c \times d$  und  $P_2 = c \times e$  ist. Demnach liegt der Punkt  $P_1F_1 \times P_2F_2 = F$  auf der Geraden  $D_2E_1$ . Man erhält also jedesmal eine Tangente des Kegelschnittes, in dem man von  $P_1$  und  $P_2$  nach einem beliebigen Punkt von  $D_2E_1$  Strahlen zieht und die Punkte, die sie auf  $a$  bez.  $b$  ausschneiden, miteinander verbindet. Da insbesondere dem Punkt  $a \times b = B_1$  der ersten Reihe in der zweiten der Berührungspunkt  $B_2$  entspricht, so geht die Verbindungslinie von  $P_2$  mit  $P_1B_1 \times D_2E_1$  durch  $B_2$  hindurch.

18. Die Verbindungslinien der Gegenecken eines einem Kegelschnitt umgeschriebenen Sechseits schneiden sich in einem Punkt. Dieser Satz heißt der Brianchon'sche Satz und der Punkt der zu dem Sechseit gehörige Brianchon'sche Punkt.<sup>3)</sup> Denn in Figur 11 sind  $afbdce$  die Seiten eines umgeschriebenen Sechseits, deren Wahl völlig willkürlich ist, und es schneiden sich die Geraden  $F_1P_1, F_2P_2$  und  $D_2E_1$  in einem Punkt. Der Brianchon'sche Satz ist eine unmittelbare Folge der Erzeugungsweise eines Kegelschnittes durch zwei projektive Punktreihen. Während aber bei dieser zwei Tangenten derselben als Träger der Reihen vor den anderen hervortreten, sind beim Brianchon'schen Satz alle Tangenten

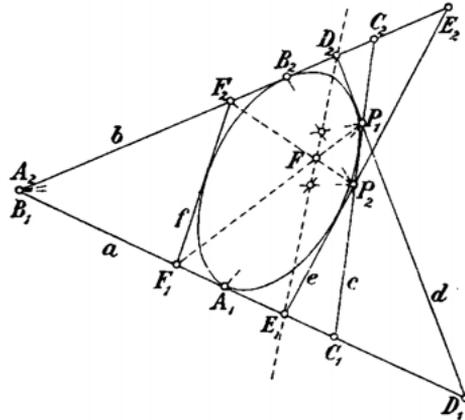


Fig. 11.

gleichberechtigt. Es ist uns ja auch schon bekannt, daß die Träger der Punktreihen sich vor den übrigen Tangenten des Kegelschnittes nicht auszeichnen.

Kennt man fünf Tangenten  $bdcea$  eines Kegelschnittes, so findet man eine weitere, wenn man auf  $a$  einen beliebigen Punkt, etwa  $F_1$ , annimmt und den Punkt  $F_1P_1 \times E_1D_2$  mit  $P_2$  verbindet; diese Gerade schneidet  $b$  in einem Punkt  $F_2$ , der mit  $F_1$  verbunden eine neue Tangente des Kegelschnittes liefert.

Aus der Figur ersieht man auch, daß die Umkehrung des Brianchon'schen Satzes Geltung hat. Schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken eines Sechsseits in einem Punkt, so gibt es immer einen Kegelschnitt, der seine sechs Seiten berührt.

Sechs Gerade  $abcdef$  geben je nach der Reihenfolge, in der man sie anordnet, zu 60 verschiedenen Sechsseiten Anlaß, so daß im ganzen 60 verschiedene Brianchon'sche Punkte auftreten, und durch jeden von ihnen gehen drei Gerade, die je zwei der 15 Schnittpunkte jener sechs Geraden verbinden.

19. In gleicher Weise wie vorher der Pascal'sche Satz läßt auch der Brianchon'sche eine Reihe von Spezialisierungen zu. Rücken zwei der sechs Tangenten eines Kegelschnittes einander unendlich nahe, so fallen auch ihre Berührungspunkte zusammen und ihr Schnittpunkt geht in den gemeinsamen Berührungspunkt über. Es liegen dann zwei Seiten des Brianchon'schen Sechsseits auf der nämlichen Tangente, ihr gemeinsamer Endpunkt ist deren Berührungspunkt. Sind  $aecdb$  die fünf Seiten und ist  $A_1$  der Berührungspunkt von  $a$  (Fig. 11), so schneiden sich  $E_1D_2$ ,  $P_2A_2$  und  $P_1A_1$  in einem Punkt. Schreibt man einem Kegelschnitt ein Fünfseit um, so schneiden sich die Verbindungslinien der ersten und vierten Ecke, der zweiten und fünften Ecke, sowie der dritten Ecke mit dem Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite in einem Punkt.

Dieser Satz liefert, falls man fünf Tangenten  $abdce$  eines Kegelschnittes kennt, ihre zugehörigen Tangenten. So schneiden sich die Verbindungslinien von  $a \times b$  mit  $c \times e$  und von  $b \times d$  mit  $e \times a$  in einem Punkt, und der Strahl von  $d \times c$  gezogen durch diesen Punkt geht durch den Berührungspunkt  $A_1$  von  $a$ . Er liefert aber auch, falls von einem Kegelschnitt vier Tangenten  $abdc$  und von einer unter ihnen, etwa  $a$ , der Berührungspunkt  $A_1$  bekannt sind, beliebig viele weitere Punkte. Man wähle (Fig. 11) auf  $c$  einen beliebigen Punkt, etwa  $P_2$ , und verbinde ihn mit  $a \times b$ , man verbinde ferner

$A_1$  mit  $c \times d$  und den Schnittpunkt dieser beiden Geraden mit  $b \times d$ ; schneidet diese Verbindungslinie die Tangente  $a$  in  $E_1$ , so ist  $P_2E_1$  eine neue Tangente des gesuchten Kegelschnittes. Durch vier Tangenten und den Berührungspunkt von einer unter ihnen ist ein Kegelschnitt völlig bestimmt.

20. Als Spezialfall des Brianchon'schen Sechsseits erscheint auch jedes einem Kegelschnitt umgeschriebene Viereck. Dabei vertreten zwei Seiten des letzteren mit ihren Berührungspunkten je zwei aufeinanderfolgende Seiten des ersteren mit ihren Schnittpunkten. Seien etwa  $abcd$  vier Tangenten und  $ABCD$  ihre Berührungspunkte, sei ferner  $P = d \times b$ ,  $Q = b \times c$ ,  $R = c \times a$ ,  $S = a \times d$  (Fig. 12). Dann werden  $PB$ ,  $BQ$ ,  $QR$ ,  $RA$ ,  $AS$ ,  $SP$  die aufeinanderfolgenden Seiten eines Brianchon'schen Sechsseits, also schneiden sich  $PR$ ,  $QS$  und  $BA$  in einem Punkt. Auch  $PR$ ,  $QS$  und  $CD$  gehen durch den nämlichen Punkt, wie man von dem Sechsseit  $PQCRSD$  ausgehend erkennt. Schreibt man einem Kegelschnitt ein gewöhnliches Viereck um, so gehen die Verbindungslinien der Berührungspunkte seiner Gegenseiten durch den Schnittpunkt seiner Diagonalen.

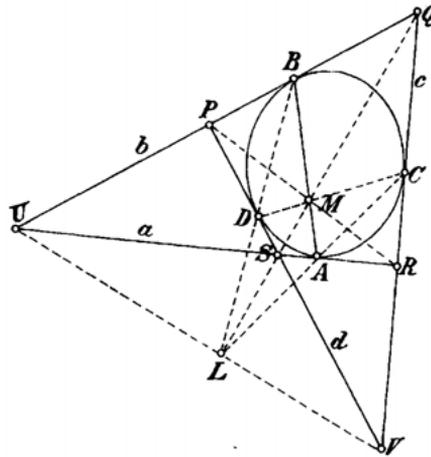


Fig. 12.

Bedenkt man ferner, daß die vier Tangenten  $abcd$  noch zwei weitere Vierecke liefern, nämlich  $SUQV$  und  $RUPV$ , so erhält man den Satz in 9 auch als Folgerung aus dem Brianchon'schen Satz.

Zugleich folgt der Satz: Durch drei Tangenten und die Berührungspunkte von zweien unter ihnen ist ein Kegelschnitt bestimmt. Sind (Fig. 12)  $a$ ,  $b$ ,  $c$  drei Tangenten, ferner  $A$  und  $B$  die Berührungspunkte von  $a$  und  $b$ , so wähle man auf  $AB$  einen beliebigen Punkt und ziehe von  $Q = b \times c$  und  $R = a \times c$  Strahlen durch ihn; diese schneiden  $a$  bez.  $b$  in Punkten, deren Verbindungslinie eine Tangente des gesuchten Kegelschnittes ist.

21. Rücken die sechs Seiten des Brianchon'schen Sechsseits paarweise zusammen, so entsteht ein umgeschriebenes Dreieck; seine



Strahlbüschel  $(t, a, b, c, d)$  und  $(t_1, a_1, b_1, c_1, d_1)$  projektiv und zugleich ist der erstere zu dem Büschel  $S_2 (S, A_2, B_2, C_2, D_2)$  kongruent. Demnach ist auch der zweite Büschel zu dem dritten projektiv und sogar perspektiv, da beide den Strahl  $t_1 = S_2 S$  entsprechend gemein haben. Es liegen also die Schnittpunkte von  $a_1$  und  $S_2 A_2$ , von  $b_1$  und  $S_2 B_2$ , von  $c_1$  und  $S_2 C_2$ , von  $d_1$  und  $S_2 D_2$  auf einer Geraden  $e$ . Die perspektive Beziehung, für die  $S$  das Zentrum,  $e$  die Achse bildet und  $S_1, S_2$  ein Paar entsprechender Punkte sind, läßt den Büschel mit dem Scheitel  $S$  ungeändert und verwandelt den Büschel  $S_1$  in den Büschel  $S_2$ . Insbesondere bildet sie den Strahl  $d_1$  in den Strahl  $S_2 D_2$  und den beliebigen Punkt  $D$  von  $k$  in den Punkt  $D_2$  von  $k_2$  ab, w. z. b. w.

Ein Kegelschnitt läßt sich stets durch Perspektive in einen Kreis verwandeln, wobei man einen beliebigen Punkt auf ihm zum Zentrum wählen kann. Diese perspektive Beziehung zwischen Kreis und Kegelschnitt läßt sich auch zur Konstruktion des letzteren verwenden. Zu jedem Strahl durch  $S$  gibt es einen entsprechenden durch  $S_2$  und einen entsprechenden durch  $S_1$ ; der erste und zweite schneiden sich auf  $k_2$ , der zweite und dritte auf  $e$ , der dritte und erste auf  $k$ . Sucht man insbesondere die Verschwindungslinie und ihren Pol in bezug auf den Kreis auf, so erhält man als entsprechenden Punkt zu diesem Pole den Mittelpunkt des Kegelschnittes (vergl. 265 u. 270 Bd. I). Die Punkte der Verschwindungslinie bilden paarweise mit ihrem Pol ein Polardreieck des Kreises; den durch den Pol gehenden Seiten eines solchen Dreiecks entsprechen in der Perspektive zwei konjugierte Durchmesser des Kegelschnittes. Wir kommen im nächsten Abschnitt auf diese Eigenschaften zurück.

**23.** Einen Kegelschnitt  $k$  durch fünf Punkte  $A, B, C, D, E$  kann man auch in folgender Weise in einen dazu perspektiven Kreis  $k_2$

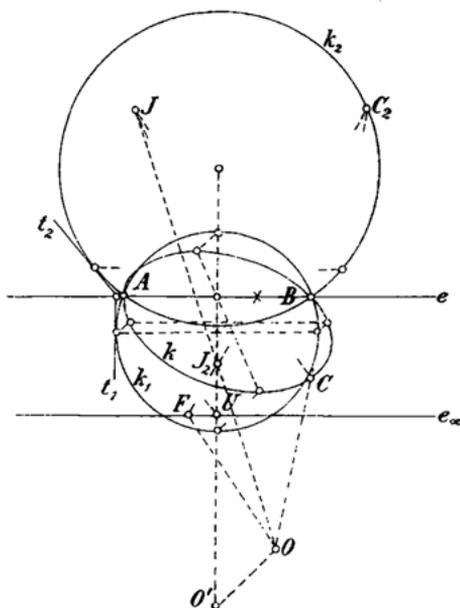


Fig. 14.

überführen. Man zeichne nach 14 die Tangenten  $AJ$  und  $BJ$  in  $A$  und  $B$ ; dann lege man durch diese beiden Punkte einen beliebigen Kreis  $k_2$  und ziehe seine Tangenten  $AJ_2$  und  $BJ_2$  (Fig. 14). Sollen  $k$  und  $k_2$  perspektiv sein, und ist  $e = AB$  die Achse der Perspektive, so müssen sich  $J$  und  $J_2$  dabei entsprechen. Zugleich entspricht dem Punkt  $C$  von  $k$  ein Punkt  $C_2$  von  $k_2$ , und zwar liegt  $C_2$  auf der Verbindungslinie von  $J_2$  mit dem Punkte  $e \times JC$ . Die Geraden  $JJ_2$  und  $CC_2$  schneiden sich aber im Zentrum  $O$  der Perspektive. In der Tat bildet die Perspektive, die  $e$  zur Achse,  $O$  zum Zentrum und  $C_2$  und  $C$  zu entsprechenden Punkten hat, den Kreis  $k_2$  in einen Kegelschnitt ab, der  $AJ$  in  $A$ ,  $BJ$  in  $B$  berührt und durch  $C$  geht. Da es aber nur einen derartigen Kegelschnitt gibt (15), so muß er mit dem Kegelschnitt  $k$  durch die fünf gegebenen Punkte identisch sein.

24. Dem unendlich fernen Punkt von  $CJ$  entspricht der Fluchtpunkt  $F$  auf  $C_2J_2$  ( $OF \parallel CJ$ ) und der unendlich fernen Geraden die Fluchtlinie  $e_\infty$  durch  $F$  ( $e_\infty \parallel e$ ). Ist  $k$  eine Ellipse, so schneidet  $e_\infty$  den Kreis  $k_2$  nicht. Dann läßt sich eine neue perspektive Beziehung angeben, die den Kreis  $k_2$  in einen neuen Kreis  $k_1$  überführt, wobei  $e$  wiederum die Achse, aber  $e_\infty$  die Verschwindungslinie ist, während das neue Zentrum  $O'$  auf der Mittelsenkrechten von  $AB$  liegen muß (246 Bd. I). Schneidet dieselbe  $e_\infty$  in  $U$  und legt man von  $U$  eine Tangente  $t_2$  an  $k_2$ , so entspricht ihr bei der neuen Perspektive eine zu  $e$  senkrechte Tangente  $t_1$  an  $k_1$  ( $t_2 \times t_1$  auf  $e$ ). Es läßt sich also  $k_1$  als einer der beiden Kreise durch  $A$  und  $B$  zeichnen, die  $t_1$  berühren; das Zentrum  $O'$  ist ein Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise  $k_2$  und  $k_1$  (244 Bd. I).

Nach 162 Bd. I liegt nun der Kegelschnitt  $k$  auch zu dem Kreise  $k_1$  perspektiv; hierbei ist  $e$  wiederum die Achse und das Zentrum liegt mit  $O$  und  $O'$  in gerader Linie. Aber die Perspektive, welche  $k$  in  $k_2$  verwandelt, führt die unendlich ferne Gerade in  $e_\infty$  über, während die Perspektive, welche  $k_2$  in  $k_1$  verwandelt, die Gerade  $e_\infty$  wieder in die unendlich ferne Gerade überführt. Bei der perspektiven Beziehung zwischen  $k$  und  $k_1$  gehen somit unendlich ferne Punkte wieder in unendlich ferne Punkte, also parallele Gerade wieder in parallele Gerade über. Das will sagen, daß  $k$  und  $k_1$  affin sind;  $e$  ist die Achse und  $OO'$  die Richtung der Affinität. Der zu  $e$  normale Durchmesser von  $k_1$  geht dabei in einen Durchmesser der Ellipse  $k$  über, dessen Verlängerung den Punkt  $J$  trägt. Das in 270 u. 271 im I. Band abgeleitete Resultat wird hier bestätigt. Jede Ellipse läßt sich als affines Bild eines Kreises darstellen.

Schon in 24 Bd. I haben wir die Aufgabe gelöst: eine Ellipse durch fünf gegebene Punkte zu zeichnen, indem wir sie dort als eine zum Kreis affine Kurve definierten. Hier sind wir von der Definition ausgegangen, wonach die Ellipse das Erzeugnis zweier projektiver Strahlbüschel ist, und haben gezeigt, daß auch die so definierte Ellipse stets als Parallelprojektion eines Kreises oder als sein affines Bild gewonnen werden kann.

### Pol und Polare eines Kegelschnittes; Mittelpunkt, Durchmesser und Achsen.

25. Wir haben in 9 und 10 den Satz abgeleitet: Schreibt man einem Kegelschnitt in den nämlichen vier beliebig gewählten Punkten ein vollständiges Viereck ein und ein Vierseit um, so verbinden die Diagonalen des letzteren die Diagonalpunkte des ersteren. Schon in 251 u. ff. Bd. I hatten wir den engen Zusammenhang zwischen diesem Satz und den Eigenschaften von Pol und Polare bemerkt, hier wollen wir diesen Satz zum Ausgangspunkt der Polarentheorie der Kegelschnitte machen.

In Figur 7 liegen auf der Geraden  $MN$  noch die vier weiteren Punkte  $P, R, H, J$ . Durch zwei von ihnen, etwa  $P$  und  $J$ , ist diese Gerade bestimmt. Die Wahl des Punktes  $L$  und der Sehne  $AB$  durch  $L$  genügt aber, um  $P$  als Schnitt der Tangenten in  $A$  und  $B$ , sowie  $J$  als vierten harmonischen Punkt zu  $A, B$  und  $L$  zu konstruieren. Hält man also den Punkt  $L$  und die eine Sehne durch ihn, nämlich  $AB$ , fest, während man die andere Sehne  $CD$  sich um  $L$  drehen läßt, so bewegen sich zwar auch die Punkte  $H, R, M$  und  $N$  auf der Geraden  $PJ$ , die Lage der Geraden selbst aber bleibt ungeändert. Hält man dagegen die Sehne  $CD$  fest und läßt die Sehne  $AB$  sich um  $L$  drehen, so bleiben  $R$  und  $H$  fest und damit wiederum die Lage der Geraden.

Demnach kann man beide Sehnen nacheinander Drehungen um  $L$  ausführen lassen, was auch eine Bewegung der sechs Punkte  $M, N, P, R, H, J$  nach sich zieht, ohne daß der Träger dieser Punkte seine Lage verändert. Das will aber doch sagen, daß die Gerade  $MN$  nur von der Wahl des Punktes  $L$ , nicht aber von der Wahl der durch  $L$  gezogenen Sehnen abhängt. Man nennt  $MN$  die Polare des Punktes  $L$  und  $L$  den Pol der Geraden  $MN$ .\*) Aus der Figur können wir nun unmittelbar die schon früher aufgezählten Eigenschaften von Pol und Polare hinsichtlich des Punktes  $L$  und der Geraden  $l$  ablesen.

$\alpha$ ) Je zwei beliebige Sehnen durch den Pol besitzen vier Endpunkte, deren vier Verbindungslinien sich zweimal zu zwei auf der Polare schneiden (woraus ihre Konstruktion folgt).

$\beta$ ) Jede Sehne durch den Pol bestimmt in ihren Endpunkten zwei Tangenten, die sich auf der Polare schneiden.

$\gamma$ ) Jede Sehne durch den Pol wird von diesem und seiner Polare harmonisch geteilt.

$\delta$ ) Die Tangenten aus dem Pol — falls es solche gibt — haben ihre Berührungspunkte auf der Polare. Eine aus  $L$  an den Kegelschnitt gezogene Tangente ist nämlich als unendlich kleine Sehne aufzufassen, und da  $L$  außerhalb der Sehne liegt, muß der vierte harmonische Punkt auf ihr liegen, d. h. er fällt mit dem Berührungspunkt der Tangente zusammen.

**26.** Die Fig. 7 läßt uns erkennen, daß nicht nur  $MN$  die Polare von  $L$  ist, sondern daß auch  $LM$  die Polare von  $N$  und  $LN$  die Polare von  $M$  ist. Denn  $BC$  und  $AD$  sind zwei Sehnen durch  $N$ ; deshalb schneiden sich die vier Verbindungslinien ihrer Endpunkte paarweise auf der Polare von  $N$ , nämlich  $BD$  und  $AC$  in  $M$  und  $AB$  und  $CD$  in  $L$ . Das Dreieck  $LMN$  hat die besondere Eigenschaft, daß jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke ist. Ein solches Dreieck nennt man ein Polardreieck des Kegelschnittes.

Der Anblick unserer Figur lehrt uns sofort die beiden Sätze: Die Diagonalepunkte eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen vollständigen Vierecks  $ABCD$  bilden die Ecken eines Polardreiecks. Die Diagonalen eines dem Kegelschnitte umschriebenen Vierseits  $PQRS$  bilden die Seiten eines Polardreiecks.

**27.** Der wichtigste Satz der Polarentheorie lautet nun: Geht die Polare eines Punktes  $L$  durch einen Punkt  $N$ , so geht auch umgekehrt die Polare von  $N$  durch den Punkt  $L$ . Zieht man nämlich durch  $N$  eine beliebige Sehne  $BC$  (Fig. 7) und verbindet ihre Endpunkte  $B$  und  $C$  mit  $L$ , so schneiden diese den Kegelschnitt noch je in einem Punkte  $A$  resp.  $D$ .  $AB$  und  $CD$  sind aber zwei Sehnen durch  $L$ ; die vier Verbindungslinien ihrer Endpunkte schneiden sich somit paarweise in zwei Punkten der Polare von  $L$ . So wird  $BC$  von  $AD$  in einem Punkte der genannten Polare getroffen; dies kann jedoch nur der Punkt  $N$  sein, da nach der Voraussetzung  $N$  ein Punkt dieser Polare ist. Nun gehen  $BC$  und  $AD$  durch  $N$ , folglich liegt  $L = AB \times CD$  auf der Polare  $n$  von  $N$ . Zwei Punkte, von denen jeder auf der Polare des andern liegt, heißen harmonische oder konjugierte Pole in bezug auf

den gegebenen Kegelschnitt. Die Beziehung zwischen beiden ist wechselseitig, und falls ihre Verbindungslinie den Kegelschnitt schneidet, liegen sie zu diesen Schnittpunkten harmonisch. Das folgt unmittelbar aus den Eigenschaften von Pol und Polare.

**28.** Die soeben gewonnenen Resultate kann man noch in anderer Form aussprechen. Bewegt sich ein Punkt  $L$  auf einer Geraden  $n$ , so dreht sich seine Polare  $l$  um den Pol  $N$  dieser Geraden und umgekehrt. Da nämlich hierbei  $L$  stets auf  $n$  liegt, oder mit andern Worten die Polare  $n$  von  $N$  stets durch  $L$  geht, so muß auch die Polare  $l$  von  $L$  stets durch  $N$  gehen, w. z. b. w.

Hieraus ergibt sich auch die Konstruktion des Poles  $L$  einer Geraden  $l$ . Man nehme dazu auf  $l$  zwei beliebige Punkte  $J$  und  $K$  an und bestimme ihre Polaren  $i$  und  $k$  nach 25 $\alpha$ . Der Punkt  $i \times k$  ist dann der Pol von  $l$ ; denn die Polare eines jeden Punktes von  $l$  geht ja durch den zu  $l$  gehörigen Pol  $L$ .

**29.** Liegt der Pol einer Geraden  $l$  auf einer Geraden  $n$ , so liegt auch umgekehrt der Pol von  $n$  auf der Geraden  $l$ . Denn ist  $L$  der Pol von  $l$  und  $N$  der Pol von  $n$ , so liegt  $L$  nach der Voraussetzung auf  $n$ . Da somit die Polare von  $N$  durch  $L$  geht, muß nach dem Satze in 27 auch die Polare von  $L$ , also  $l$ , durch  $N$  gehen. Zwei Gerade, von denen jede durch den Pol der andern geht, heißen harmonische oder konjugierte Polaren in bezug auf den gegebenen Kegelschnitt.

Kann man vom Schnittpunkt zweier konjugierter Polaren Tangenten an den gegebenen Kegelschnitt legen, so teilen sie den Winkel dieser Tangenten harmonisch. Sind  $l$  und  $m$  die konjugierten Polaren,  $L$  auf  $m$  und  $M$  auf  $l$  die zugehörigen Pole, so ist  $LM$  die Polare von

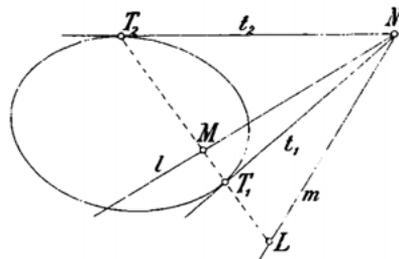


Fig. 15.

$N = l \times m$  nach der vorigen Nummer (Fig. 15). Die Berührungspunkte  $T_1$  und  $T_2$  der von  $N$  an den Kegelschnitt gelegten Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  liegen auf der Polare von  $N$ , d. h. auf  $LM$ .  $L$  und  $M$  sind aber konjugierte Pole und teilen deshalb die Sehne  $T_1T_2$  harmonisch, und somit teilen auch  $l$  und  $m$  den Winkel der Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  harmonisch.

**30.** Nach dem Vorausgehenden gelten offenbar auch die Sätze: Die harmonischen Pole zu einem gegebenen Pole  $P$  in

bezug auf einen Kegelschnitt liegen auf einer Geraden  $p$ , der Polare von  $P$ . Die harmonischen Polaren zu einer gegebenen Polare  $p$  in bezug auf einen Kegelschnitt gehen durch einen Punkt  $P$ , den Pol von  $p$ . Ferner ist klar: Berührt die Polare den Kegelschnitt, so ist ihr Pol der Berührungspunkt, und umgekehrt. In Fig. 15 teilen  $M$  und  $L$  die Sehne  $T_1T_2$  harmonisch. Nähert sich nun  $L$  dem Punkt  $T_1$ , so nähert sich auch  $M$  diesem Punkt, und rückt  $L$  in  $T_1$  hinein, so tut dies auch  $M$ . Es ist aber  $M$  der Pol von  $LN$ ; rückt also der Pol auf den Kegelschnitt, so wird seine Polare zur Tangente in ihm.

Ein Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes heißt äußerer oder innerer Punkt, je nachdem seine Polare denselben schneidet oder nicht (vergl. 258 Bd. I).

**31.** Der in 28 aufgestellte Satz kann noch in folgender Weise erweitert werden: Beschreibt ein Punkt eine Punktreihe, so

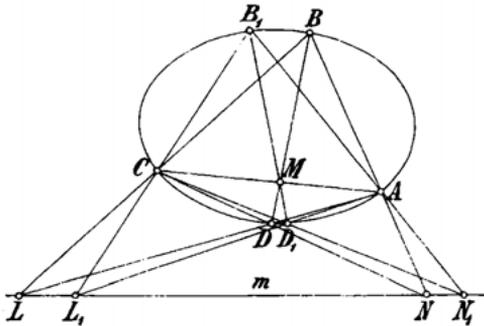


Fig. 16.

beschreibt die ihm in bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zugehörige Polare einen Strahlbüschel, der projektiv zur Punktreihe ist und umgekehrt. Bewegt sich der Punkt  $L$  auf einer Geraden  $m$ , so dreht sich seine Polare  $l$  um den Pol  $M$  von  $m$ . Die Konstruktion der Polare des Punktes  $L$

in seinen verschiedenen Lagen, die wir mit  $L, L_1, L_2, \dots$  bezeichnen, führen wir folgendermaßen aus (Fig. 16). Durch  $M$  legen wir irgend eine Sehne  $AC$ , die wir für alle Konstruktionen festhalten. Die Geraden  $LA$  und  $LC$  schneiden den Kegelschnitt noch in je einem Punkte  $D$  resp.  $B$ . Nach 25  $\alpha$  liegen dann die Punkte  $AC \times BD$  und  $AB \times CD$  auf der Polare  $l$  von  $L$ . Da aber  $l$  durch den Punkt  $M$  von  $AC$  geht, so schneiden sich  $AC$  und  $BD$  in  $M$ , während sich  $AB$  und  $CD$  in einem Punkte  $N$  der Geraden  $m$  schneiden müssen (man konstruiert ja geradezu die Polare  $m$  von  $M$  als Verbindungslinie der Punkte  $AB \times CD = N$  und  $AD \times BC = D$ ). Ganz ebenso verbindet die Polare  $l_1$  des Punktes  $L_1$  die Punkte  $M$  und  $N_1 = AB_1 \times CD_1$ , wobei  $M$  als Schnittpunkt der Sehnen  $AC$  und  $B_1D_1$  erscheint. Wir können uns noch weitere Polaren konstruiert

denken; dabei wird allgemein die Polare von  $L_i$  als Verbindungslinie der Punkte  $M$  und  $N_i = AB_i \times CD_i$  erhalten. Auf der Geraden  $m$  befinden sich nun zwei projektive Punktreihen  $(L, L_1, L_2, \dots)$  und  $(N, N_1, N_2, \dots)$ . Denn zieht man von  $C$  aus Strahlen nach den Punkten der ersten Reihe und von  $A$  aus Strahlen nach denen der zweiten, so erhält man zwei Strahlbüschel, deren Scheitel auf dem Kegelschnitt liegen und deren entsprechende Strahlen sich in Punkten  $B, B_1, B_2, \dots$  desselben schneiden. Solche Büschel sind aber nach 5 u. 7 projektiv. Aus der Projektivität jener Reihen können wir sofort schließen, daß auch die Punktreihe  $(L, L_1, L_2, \dots)$  und der Strahlbüschel  $M(N, N_1, N_2, \dots)$  projektiv sind, w. z. b. w.

**32.** Die beiden Punktreihen  $(L, L_1, L_2, \dots)$  und  $(N, N_1, N_2, \dots)$  sind indessen nicht nur projektiv, sondern sogar involutorisch. Um dies zu beweisen, haben wir nach 220 Bd. I nur zu zeigen, daß dem Punkte  $N$  als einem Punkt der ersten Reihe in der zweiten Reihe wiederum der Punkt  $L$  entspricht. Von einem Punkte  $L_i$  der ersten Reihe gelangt man aber zu dem entsprechenden  $N_i$  in der zweiten, indem man  $L_i$  mit  $C$  verbindet, diese Gerade mit dem Kegelschnitt in  $B_i$  schneidet; dann liegt  $N_i$  auf der Verbindungslinie von  $B_i$  mit  $A$ . Fällt  $L_i$  mit  $N$  zusammen, so rückt  $B_i$  nach  $D$  und  $DA$  schneidet auf  $m$  den entsprechenden Punkt  $N_i$  aus, der sich also mit  $L$  deckt. Die Punktepaare  $LN, L_1N_1, L_2N_2, \dots$  sind harmonische Pole in bezug auf den gegebenen Kegelschnitt. Das gibt den Satz: Auf einer jeden Geraden bilden die Paare harmonischer Pole eine Involution. Schneidet die Gerade den Kegelschnitt, so sind ihre Schnittpunkte die Doppelpunkte der Involution. Das letztere ist ohne weiteres klar, da diese Schnittpunkte zu jedem Paar harmonischer Pole harmonisch liegen (223 Bd. I).

Betrachtet man in Fig. 16 die harmonischen Polaren durch den Punkt  $M$ , so erkennt man sofort, daß sie involutorische Strahlbüschel bilden, da sie die Gerade  $m$  in den Punktepaaren  $LN, L_1N_1, L_2N_2, \dots$  einer Involution schneiden. Alle durch einen Punkt gehende Geraden ordnen sich in bezug auf einen Kegelschnitt in Paare harmonischer Polaren zusammen und diese bilden eine Involution. Kann man von dem Punkt aus Tangenten an denselben legen, so sind sie die Doppelstrahlen der Involution.

**33.** Aus der Fig. 16 können wir noch weitere Schlüsse ziehen. Indem wir von den einzelnen Punkten des Kegelschnittes aus Strahlenpaare nach den festen Punkten  $A$  und  $C$  ziehen, schneiden diese auf der

Geraden  $m$  die Punktepaare einer Involution aus, welche harmonische Pole bilden. Dabei ist nur die Voraussetzung gemacht, daß  $AC$  durch den Pol  $M$  von  $m$  geht, daß also  $m$  und  $AC$  harmonische Polaren sind. Die Verbindungslinien beliebiger Punkte  $B, B_1, \dots$  eines Kegelschnittes mit zwei festen Punkten  $A$  und  $C$  desselben schneiden jede Gerade  $m$ , die durch den Pol von  $AC$  geht, in harmonischen Polen  $L$  und  $N, L_1$  und  $N_1, \dots$

34. Die Resultate der letzten Nummern haben wir aus der Fig. 16 mit Hilfe des eingeschriebenen Vierecks abgeleitet. Wir können sie aber auch aus den Eigenschaften des umgeschriebenen Vierseits gewinnen (Fig. 17). Lassen wir hier den Punkt  $M$  und

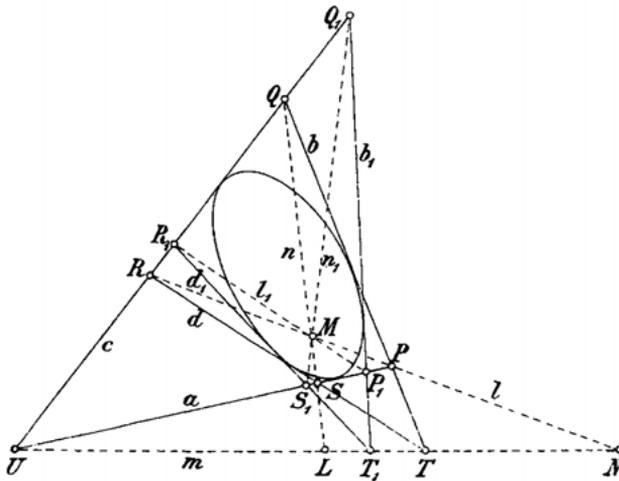


Fig. 17.

somit auch seine Polare  $m$  ungeändert und halten ferner den Punkt  $U$  und die durch ihn gehenden Seiten  $a$  und  $c$  des Vierseits fest, während wir dem Punkte  $T$  verschiedene Lagen  $T, T_1, T_2, \dots$  auf  $m$  erteilen. Dann nehmen auch die Seiten  $b$  und  $d$  des Vierseits verschiedene Lagen an und ebenso seine Diagonalen  $l = PR$  und  $n = QS$ . Doch gehen diese letzteren in allen ihren Lagen  $l$  und  $n, l_1$  und  $n_1, l_2$  und  $n_2, \dots$  durch den Punkt  $M$  und bilden harmonische Polaren. Man erhält je zwei harmonische Polaren durch  $M$  dadurch, daß man die festen Tangenten  $a$  und  $c$  mit einer beliebigen weiteren Tangente, etwa  $b$ , schneidet und die Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  mit  $M$  verbindet. Da verschiedene Tangenten  $b, b_1, b_2, \dots$  auf  $a$  und  $c$  projektive Reihen  $P, P_1, P_2, \dots$  und  $Q, Q_1, Q_2, \dots$  ausschneiden, so sind auch die Strahlbüschel  $M(P, P_1, P_2, \dots)$  und  $M(Q, Q_1, Q_2, \dots)$

projektiv und sogar involutorisch. Denn dem Punkt  $S$  der ersten Reihe entspricht der Punkt  $R$  der zweiten; die Strahlen  $MP = MR$  und  $MQ = MS$  entsprechen sich also vertauschbar. Hiermit sind aber die Sätze in 31 und 32 aufs neue bewiesen. Auch erkennen wir aus diesen Darlegungen den Satz: Die Schnittpunkte beliebiger Tangenten eines Kegelschnittes mit zwei festen Tangenten  $a$  und  $c$  desselben liefern mit irgend einem

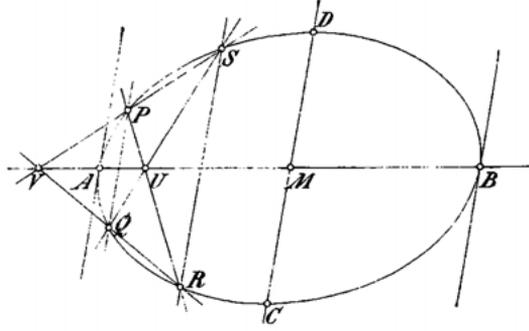


Fig. 18.

Punkt  $M$ , der harmonischer Pol zu  $U = a \times c$  ist, verbunden harmonische Polaren  $l$  und  $n$ ,  $l_1$  und  $n_1, \dots$

**35.** Der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt auf jeder Sehne eines Kegelschnittes sind harmonische Pole. Hieraus folgt: Die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines Kegelschnittes liegen auf einer Geraden, der Polare ihres unendlich fernen Punktes (ihrer Richtung); dieselbe heißt ein Durchmesser des Kegelschnittes.

Der Durchmesser enthält die Pole aller der gedachten Sehnen, insbesondere also die Berührungspunkte der zu ihnen parallelen Tangenten des Kegelschnittes (Fig. 18, 19, 20).

Liegt die Kurve gezeichnet vor, so wird ein Durchmesser  $AB$  mit Hilfe zweier paralleler Sehnen  $PQ$  und  $RS$  konstruiert, indem man ihre Endpunkte wechselseitig verbindet und den Durchmesser durch die Punkte  $U = PR \times QS$  und  $V = PS$

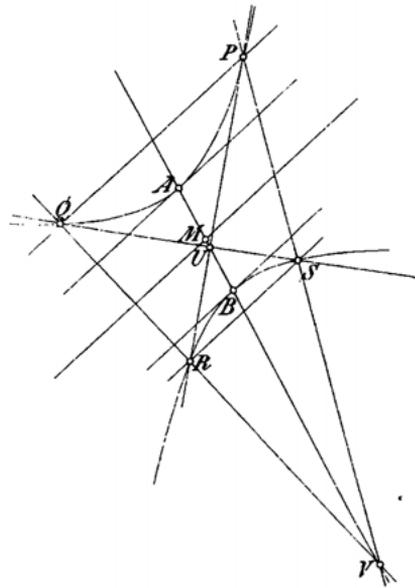


Fig. 19.

$\times QR$  legt.