GESCHICHTE

DER

ELEMENTAR-MATHEMATIK

IN SYSTEMATISCHER DARSTELLUNG

VON

DR. JOHANNES TROPFKE,
OBERLEHRER AM FRIEDRICH-REAL-GYMNASIUM ZU BERLIN.

ZWEITER BAND.

GEOMETRIE. LOGARITHMEN.
EBENE TRIGONOMETRIE. SPHÄRIK UND SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE. REIHEN. ZINSESZINSRECHNUNG. KOMBINATORIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG. KETTENBRÜCHE. STEREOMETRIE. ANALYTISCHE GEOMETRIE. KEGELSCHNITTE. MAXIMA UND MINIMA.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG
VERLAG VON VEIT & COMP.
1903

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Dem ersten Bande, der die Geschichte des Rechnens und der Algebra enthält, folgt nunmehr nach Jahresfrist der zweite, in dem die weiteren Kapitel der Elementarmathematik behandelt sind.

Der Begriff der Elementarmathematik ist durchgängig so gefaßt worden, daß er allein das mathematische Pensum der höheren Lehranstalten umschließt; darüber hinausgehende Gebiete sind nur ausnahmsweise berücksichtigt worden.

Die gewählte Anordnung in einzelne Teile macht keinen Anspruch auf strenge Folgerichtigkeit; sie schließt sich im großen und ganzen dem Verlaufe des Schulpensums an.

Die herangezogene Literatur erstreckt sich in beiden Bänden bis zum Jahre 1900; mit diesem Zeitpunkte wurde die Ausarbeitung abgeschlossen. Neuere Forschungen wurden nur, wo es die Drucklegung gestattete, verwertet. v. Braunmühl's Geschichte der Trigonometrie war bei Fertigstellung des Manuskriptes noch nicht im ersten Bande erschienen; jedoch konnten die von ihm gebotenen wichtigen Resultate, soweit sie über die bereits niedergeschriebenen Darstellungen hinausgingen, nachträglich verarbeitet werden. Der zweite Band des erwähnten Werkes wurde leider zu spät veröffentlicht, um noch in gleicher Weise benutzt werden zu können.

Berlin, im Sommer 1903.

Der Verfasser.

Zu dem vorliegenden zweiten Bande sind aus dem soeben erschienenen zweiten Teil der *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* von v. Braunmühl, Leipzig 1903, noch folgende Ergänzungen nachzutragen:

S. 130 Z. 1: Newton bemerkte bereits in einem Briefe vom 24. X. 1676 an Oldenburg, daß, wenn man π mit dieser Reihe auf 20 Stellen erhalten wolle, man 5000 Millionen Glieder zusammenziehen müsse; bei Anwendung der Arcus-sinus-reihe wären von arc sin 45° nur 55—60 Glieder zu nehmen. (v. Br. II, S. 65.)

S. 130 Z. 6 v. u.: Vega benutzte auch noch die von Euler aufgestellte Beziehung

$$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{79};$$

Buzengeiger (1771—1835) empfahl

$$\frac{\pi}{4} = 8 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10} - 4 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{515} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

(v. Br. II, S. 155.)

S. 130—131: Es wäre noch die Reihe

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^2} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^4} + \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^6} + \ldots$$

anzuführen, die F. C. Maier 1726 bei seiner Berechnung von π verwendet hat. 5 Glieder liefern 3,1415; jedes weitere erhöht die Genauigkeit um eine neue Stelle. (Comm. Petr. III; v. Br. II, S. 81.)

S. 131: Die Berechnungen Rutherford's (1798—1871) finden sich in den Phil. Transact. 1841, 283; benutzt ist die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{70} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{99}.$$

Gauss (Opera II, 497) legte die Formeln

$$\frac{\pi}{4} = 12 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{18} + 8 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57} - 5 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$$

$$= 12 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{38} + 7 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} + 20 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57} + 24 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{268}$$

zu Grunde. (v. Br. II, S. 225.)

S. 153: Es ist hinzuzufügen, daß John Speidell (1607—1646) zuerst eine Tafel (1619) mit den (Neper'schen) Logarithmen aller sechs trig. Funktionen und mit einer kleinen reinlogarithmischen Tabelle (1—1000) veröffentlichte. (v. Br. II, S. 26.)

S. 157 Z. 21: Die älteste vierstellige Tafel ist die *Tabula compendiosa Logarithmorum sinuum*, Upsalae 1698 von Petrus Elvius. (Eneström, Bibl. math. 1884, 121; v. Br. II, S. 37.)

S. 167 Anm. 648: Diesen Fehler hat bereits Ursinus (1624)[595a] gefunden und verbessert. (v. Br. II, S. 19 Anm. 2.)

S. 175 Anm. 667: Das logarithmische Komplement verwendete schon Gunter 1620 in seinem *Canon triangulorum* (vgl. S. 153). (v. Br. II, S. 30.)

S. 178: Einen Hilfswinkel zur Erleichterung logarithmisch-trigonometrischer Rechnungen benutzte zum erstenmal Rob. Anderson; seine Behandlungsart teilt Th. Streete (1626—1696) in der *Astronomia Carolina* 1661 mit. (v. Br. II, S. 44.)

S. 178: Den Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Zahlen aus den Logarithmen derselben leitete bereits Cavalieri im *Compendio delle*

Regole Trigonometriche, Bologna 1639, probl. 92, S. 486—492, auf trigonometrischem Wege ab. (v. Br. II, S. 37.)

S. 215 Z. 2: Die Schreibart co. sinus ist von Gunter 1620 in seinem *Canon triangulorum* benutzt (vgl. S. 153). (v. Br. II, S. 30.)

S. 219: Gleichungen (statt der bis dahin üblichen Proportionen) verwendet in der Trigonometrie zuerst Neper, der durch die logarithmische Umwandlung zu dieser Neuerung veranlaßt wurde. (v. Br. II, S. 11.)

S. 219: Schon Jakob Bernoulli (1654—1705) verwendete 1691 die Schreibweise sin. $A\,C$ — ähnlich bei tang. und sec. —, die man als Funktionsbezeichnung für veränderliche Bogen auffassen kann. (v. Br. II, S. 67.)

S. 224: Die richtige Vorzeichenbestimmung des Tangens in den verschiedenen Quadranten gelang zuerst de Lagny 1705 (Hist. et Mém. de Paris). (v. Br. II, S. 72.)

S. 228: Das Additionstheorem der Tangens- und Secansfunktion scheint zuerst von Jakob Hermann, einem Schüler Jakob Bernoulli's, ausgesprochen zu sein, und zwar in der Form

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta):(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=r^2:(r^2-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)$$
$$\sec(\alpha+\beta):r\qquad\qquad=\sec\alpha\cdot\sec\beta:(r^2-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta),$$

die er geometrisch ableitete. (Acta Erudit. 1706; v. Br. II, S. 72.)

S. 229: Die Reihe

$$\sin n\varphi=n\cdot\sin\varphi+\frac{(1-n^2)\cdot n}{3!}\sin\varphi^3+\frac{(1-n^2)(9-n^2)\cdot n}{5!}\sin\varphi^5+\ldots$$

ist zuerst von Newton 1676 (Comm. ep. 106)[583] aufgestellt worden. Einen Beweis fügte de Moivre 1698 zu. (v. Br. II, S. 68—69.)

S. 229 Z. 8—9: Die angegebenen Formeln für $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$ sind schon 1701 (April, Acta Eruditorum) von Johann Bernoulli veröffentlicht worden. Die entsprechenden Formeln für $\operatorname{tg} n\alpha$ und $\sec n\alpha$ stellte 1705 (Hist. et Mém. de Paris) de Lagny auf. (v. Br. II, S. 69—70.)

S. 230 Z. 14 v. u.: Die Notizensammlung ist von einem Schüler Tycho's geschrieben. (v. Br. II, S. VIII.)

S. 233 Z. 11 v. u.: Die Formel für die Tangente des doppelten Winkels ist zuerst von Pell aufgestellt worden:

$$(r^2-\operatorname{tg}^2\alpha):2r^2=\operatorname{tg}\alpha:\operatorname{tg}2\alpha$$

(nach F. v. Schooten, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo Algebraico*, Amst. 1661, S. 368; v. Br. II, S. 43).

S. 240: Die erste rechnerische Ableitung der Formel für

$$\sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

geschah durch Caswell, *Trigonometria plana et sphaerica*[849] (vor 1685). (v. Br. II, S. 47.)

S. 240: Die Formel

$$\sin\gamma=\frac{2}{a\cdot b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

findet sich erst in Newton's *Arithmetica universalis* 1707,[864] Probl. XI, XII. (v. Br. II, S. 87.)

S. 241: Aus Th. Simpson's *Trigonometry* (1765, 2. Aufl.) sind noch als neu die Formeln zu erwähnen

$$(b+a):(p-q)=\cos\frac{\gamma}{2}:\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$(b-c):(p-q)=\sin\frac{\gamma}{2}:\cos\frac{\beta-\alpha}{2},$$

wo p, q die durch die Höhe auf c entstandenen Abschnitte bedeuten. (v. Br. II, S. 93.)

S. 258 u.: Daß der Cosinussatz allein ausreicht, hatte schon F. C. Maier 1727 behauptet, ohne aber einen Beweis beizubringen. (v. Br. II, S. 96.)

S. 266 Z. 29ff.: Auf Grund der trigonometrischen Formeln hatte G. Heinsius (1709—1769, Leipzig) die Doppeldeutigkeit erschöpfend untersucht. (Acta Eruditorum 1756; v. Br. II, S. 128—129.)

S. 278: P. Crüger (1634)[598] verwendet den Cosinussatz unter logarithmischer Umwandlung in der Form

$$\cos\alpha = \frac{c - \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{c}}{2c}.$$ (v. Br. II, S. 25.)

S. 284 Z. 7—8 v. u.: Neper deutet den Beweis nur kurz an. Eine vollständige Ableitung giebt erst Cavalieri im *Directorium generale*, Bologna 1632. (v. Br. II, S. 35.)

S. 285 Z. 1: Die Formel für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ist schon in der Vorrede Gellibrand's zur *Trigonometria Britannica* (1633)[600] enthalten. (v. Br. II, S. 29.)

S. 285 Z. 6: Die Polarformel

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$$

ist zuerst von Kepler abgeleitet. (Opera VII, S. 364; v. Br. II, S. 22—23.)

S. 286: Weder Neper noch Briggs geben Beweise für die angeführten Formeln. Die erste vollständige Ableitung findet sich in Oughtred's *Trigonometria*, 1657. (v. Br. II, S. 42—43.)

S. 286: In der uns geläufigen Form treten die Neper'schen Analogien zum erstenmal in Gellibrand's *Trigonometria Britannica*[600] (93, 99, 100, 105) auf. (v. Br. II, S. 30.)

S. 286: Die Formeln

$$\sin(a+b):\sin(a-b) = \operatorname{ctg}\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}:\operatorname{tg}\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}:\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{c_1+c_2}{2}:\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}:\operatorname{tg}\frac{c_1-c_2}{2},$$

wo γ_1 und γ_2 bezw. c_1 und c_2 die durch die Höhe entstandenen Teile von γ und c sind, fand Caswell (vgl. zu S. 240) in den hinterlassenen Papieren des Thomas Baker (1625—1690). (v. Br. II, S. 48.)

S. 305: Die ersten umfangreichen Neuberechnungen unter Benutzung unendlicher Reihen sind von Sharp (1651—1742) unternommen worden. Seine Werte wurden von Gardiner in einer Neuauflage von Sherwin's Logarithmentafel 1741 veröffentlicht. (v. Br. II, S. 85.)

Bd. I, S. 264: Eine trigonometrische Lösung quadratischer Gleichungen giebt bereits Cavalieri im *Compendio delle Regole Trigonometriche*, Bologna 1639. (v. Br. II, S. 37.)

Inhalt.

Dritter Teil. **Die Geometrie.**

Seite

A. Allgemeiner Teil . . . . . 3— 20
1. Überblick der geschichtlichen Entwicklung der Elementargeometrie . . . . . 3— 10
2. Die Sprache der Geometrie. Figuren . . . . . 10— 14
3. Axiome, Definitionen. — Allgemeine Fachausdrücke . . 14— 20
B. Besonderer Teil . . . . . 20—138
1. Die gerade Linie. Der Winkel . . . . . 20— 29
2. Das Dreieck. — Die Kongruenz . . . . . 29— 37
3. Die Konstruktionsaufgaben . . . . . 38— 45
4. Das Viereck . . . . . 45— 53
5. Der Kreis . . . . . 53— 65
6. Die Flächenberechnung und Flächenvergleichung . . . 65— 81
7. Die Lehre von der Ähnlichkeit . . . . . 81— 97
8. Die regelmäßigen Polygone . . . . . 97—108
9. Die Kreisberechnung . . . . . 108—138

Vierter Teil. **Die Logarithmen.**

A. Der Begriff des Logarithmus. Die ersten Tafeln . . . . . 141—155
B. Die Technik der logarithmischen Tafeln . . . . . 155—164
C. Berechnungsmethoden der Logarithmen . . . . . 164—172
D. Das logarithmische Rechnen. — Symbole, Formeln, Fachwörter. — Additionslogarithmen . . . . . 172—181
E. Logarithmische Reihen. Die natürlichen Logarithmen . . . . 181—186

Fünfter Teil. **Die ebene Trigonometrie.**

A. Geschichtlicher Überblick . . . . . 189—195
B. Die trigonometrischen Funktionen . . . . . 195—221
1. Der Begriff des Sinus und Cosinus eines Winkels . . . 195—207
2. Der Begriff des Tangens und Cotangens eines Winkels . 207—210
3. Der Begriff des Secans und Cosecans eines Winkels . . 210—212
4. Das Wort sinus . . . . . 212—214
5. Das Wort cosinus . . . . . 214—215
6. Die Worte tangens und cotangens . . . . . 215—216
7. Die Worte secans und cosecans 216
8. Die Symbole . . . . . 216—221
C. Formeln aus der Goniometrie . . . . . 221—233
D. Formeln aus der Trigonometrie . . . . . 234—248
1. Der Sinussatz . . . . . 234—237
2. Der Cosinussatz . . . . . 237—238
3. Der Tangenssatz . . . . . 238—239
4. Formeln für den Fundamentalfall a, b, c . . . . . 240—242
5. Formeln für den Flächeninhalt . . . . . 242—244
6. Diversa . . . . . 245—246
7. Spezielle Vierecksberechnungen . . . . . 246—248

Sechster Teil. **Die Sphärik und die sphärische Trigonometrie.**

A. Geschichtlicher Überblick . . . . . 251—259
B. Die Sphärik . . . . . 259—271
1. Definitionen. Fachausdrücke . . . . . 259—261
2. Die Kreise auf der Kugelfläche . . . . . 261—264
3. Die sphärischen Dreiecke und Polygone . . . . . 264—271

Seite

C. Die sphärische Trigonometrie . . . . . 271—306
1. Das rechtwinklige Dreieck . . . . . 271—274
2. Das schiefwinklige Dreieck . . . . . 274—296
a) Der Sinussatz . . . . . 274—275
b) Der Cosinussatz . . . . . 275—279
c) Der Cotangentensatz . . . . . 279—280
d) Die Fundamentalfälle . . . . . 280—288
Sonderformeln für einzelne Fundamentalfälle . . . 284—288
1. Fundamentalfall $a\,b\,c$ bezw. $\alpha\,\beta\,\gamma$ . . . . . 284—285
2. Fundamentalfall $a\,\gamma\,b$ bezw. $\alpha\,c\,\beta$ . . . . . 286—288
e) Der Inhalt und Umfang des sphärischen Dreiecks . 288—289
f) Sätze und Formeln für andere Dreieckstücke . . . 289—294
g) Die Beziehungen zwischen dem ebenen und sphärischen Dreiecke . . . . . 295—296
Anhang: Trigonometrische Tafeln . . . . . 296—306

Siebenter Teil. **Die Reihen.**

A. Die arithmetischen Reihen . . . . . 309—314
B. Die geometrischen Reihen . . . . . 315—318
C. Die arithmetischen Reihen höherer Ordnung . . . . . 318—323
D. Die höheren Reihen . . . . . 323—340

Achter Teil. **Die Zinseszinsrechnung** . . . . 341—348

Neunter Teil. **Die Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung** . . . . . 349—358

Zehnter Teil. **Die Kettenbrüche** . . . . . 359—366

Elfter Teil. **Die Stereometrie.**

A. Geschichtlicher Überblick . . . . . 369—373
B. Besonderer Teil . . . . . 373—404
1. Die geraden Linien und Ebenen im Raum . . . . . 373—377
2. Die Volumen- und Oberflächenberechnungen . . . . . 377—404
a) Allgemeines . . . . . 377—378
b) Das Parallelepipedon und Prisma . . . . . 378—381
c) Die Pyramide . . . . . 381—387
d) Der Cylinder und der Kegel . . . . . 387—390
e) Die Kugel und die allgemeinen Rotationskörper . . 390—396
f) Allgemeine Körper. Das Cavalieri'sche Prinzip. Die Simpson'sche Regel . . . . . 396—404

Zwölfter Teil. **Die analytische Geometrie.**

A. Die analytische Geometrie der Ebene . . . . . 407—423
B. Die analytische Geometrie des Raumes . . . . . 423—425
C. Die Fachausdrücke . . . . . 425—428

Dreizehnter Teil. **Die Kegelschnitte.**

A. Geschichtlicher Überblick . . . . . 431—444
B. Besonderer Teil . . . . . 444—456
Die Parabel . . . . . 448—450
Die Ellipse . . . . . 450—454
Die Hyperbel . . . . . 454—456

Vierzehnter Teil. **Die Maxima und Minima** . 457—465

Register . . . . . 466—494
Zusätze und Verbesserungen zum ersten Bande . . . . . 494—496

DRITTER TEIL

DIE GEOMETRIE

A. Allgemeiner Teil.

I. Überblick der geschichtlichen Entwicklung der Elementargeometrie.

Zwei Jahrtausende auf- und abwogender Geschichte haben an dem System der Elementargeometrie nicht zu rütteln vermocht. Was der Alexandriner Euklid um 300 vor unserer Zeitrechnung schrieb, ist auch heute in Inhalt und Form der eiserne Bestand der Schulmathematik; ja, sein Lehrbuch wird noch zuweilen unmittelbar dem Unterricht untergelegt. Nur wenige Zusätze und Fortsetzungen sind dem euklidischen System eingegliedert, mehreres Unnötige ausgeschieden worden. Stolzer als ein Denkmal von Stein, schärfer und reiner in der Linienführung als irgend ein Kunstwerk, hat es sich der Jetztzeit erhalten. Was der junge Grieche, der erwartungsvoll an die Thür mathematischer Weisheit klopfte, durchdenken, lernen und üben mußte, das arbeitet mit gleicher Andacht in der heutigen Zeit der strebsame Quartaner und Tertianer durch.

Welch bewunderungswürdiges Genie — einzig in der Geschichte der Mathematik — muß Euklid's Hand geführt haben, als er ein solches Meisterstück, wie aus einem Gusse, zu schaffen vermochte! Solche Fragen staunender Anerkennung drängten und drängen sich jedem seiner Jünger unwillkürlich auf. — Der Historiker ist kritischer. Nie ist eine Geistesthat unvermittelt in die Welt getreten, sondern Forscher auf Forscher trugen, jeder nach seiner Kraft, das Ihrige dazu bei, bis das Werk im Glanze dastand! Ist der, der es schließlich krönte, der Baumeister?

Die kritische Sonde hat auch bei Euklid diese Erfahrung bestätigt. Nicht der vermeintliche Homer ist er, dessen Geistesflug den Griechen das Nationalepos schenkte, sondern der wahre Homer, der die Seele seines Volkes an der Quelle der Erzählung, in der Überlieferung, studierte und das Gesammelte zum harmonischen Ganzen vereinigte.

Griechische Mitteilungen verweisen selbst den Ursprung der Geometrie in das Land der Nilanwohner, nach *Ägypten*. Die Erzählung, daß bei diesen die Geometrie allmählich durch die stets

zu wiederholenden, von den jährlichen Überschwemmungen bedingten Landvermessungen entstand, ist bei HERODOT[1] als Hypothese, bei Späteren[2] als Thatsache überliefert worden. Der Anblick der majestätischen Pyramiden- und Tempelbauten (bis 4000 v. Chr.), ihre genaue Durchforschung in Bauart, Ausschmückung und Inschriften, die wissenschaftliche Durchsicht der gefundenen Papyrusrollen, besonders des unter dem Namen des „Rechenbuches des AHMES“ bekannt gewordenen Papyrus Rhind[3] (2000—1700 v. Chr.) geben überraschende Aufschlüsse über ägyptische Kenntnisse in der Geometrie. Ziemlich genaue Versuche der Kreisquadratur, schwierigere Flächenberechnungen, wie am gleichschenkligen Dreieck und gleichschenkligen Trapez durch Näherungsformeln, Zerlegung von Figuren in leichter zu berechnende, ja Anfänge einer Ähnlichkeitslehre in der Rekonstruktion konstanter Neigungswinkel bilden den Gipfelpunkt der gefundenen Resultate. Aber hierin besteht nach der Ansicht bewährter Forscher nicht das einzige Verdienst der Ägypter; man muß annehmen, daß sie schon geometrische Lehrbücher besessen haben, wie uns ein solches für das Rechnen durch einen glücklichen Zufall erhalten ist, und in diesen muß sich im Zusammenhang mit dem gleichsam schon fachmännisch erteilten geometrischen Unterricht eine feste, berufsmäßige formale Sprache und Satzanordnung herausgebildet haben, deren Anfänge im Rechenbuch des AHMES nachzuweisen sind, deren Ausläufer jene starr gefügte euklidische Form bildet, die in ihrer Zweckmäßigkeit zu allen Zeiten rühmend anerkannt ist.

Durch den Geist der lernbegierigen, wissensdurstigen *Griechen* trat eine Neugeburt ägyptischer Wissenschaft ein. Zur Erweiterung trug auch das Eindringen *babylonischer* Gelehrsamkeit bei. Aus dieser stammt so mancherlei, das zu den Grundlagen griechischer Mathematik gehört, wie die Lehre von den Eigenschaften paralleler Linien, die Konstruktion des regelmäßigen Sechseckes, die Einteilung des Kreises in 360 Teile, Sätze aus der Kreis- und Dreieckslehre.

In besseren Boden als den griechischen konnte die Geometrie

[1] HERODOT, lib. II, cap. 109, ed. DIETSCH, Leipzig 1882, S. 168. — [2] HERON, *Geometria*, cap. 2, ed. HULTSCH, Berlin 1864, S. 43 Z. 12—22; cap. 106, § 1 S. 138 Z. 31 bis S. 139 Z. 13. STRABONIS, *Geographica*, lib. 16, cap. 2, § 24, ed. MÜLLER-DIDOT, Bd. II, Paris 1877, S. 644 Z. 48—50, lib. 17, cap. 1, § 3, S. 699 Z. 54 bis S. 670 Z. 7. EUDEMI, *Fragmenta*, ed. SPENGEL, Berl. 1866, S. 113 (Anm. 4). DIODORI *Bibliotheca Historica*, I. 81, ed. DINDORF-VOGEL, Bd. I, Leipzig 1888, S. 136. — [3] *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, Papyrus Rhind des British Museum, übersetzt und erklärt v. AUG. EISENLOHR, Leipzig 1877.

nicht verpflanzt werden. Mit Feuereifer gaben sich die aufstrebenden griechischen Schulen dem neuen Studium hin, das berühmte Gelehrte, wie THALES von Milet (um 624—548) und PYTHAGORAS (um 580 Samos — 501 Megapontum), von ihren Reisen aus fremden Ländern mitgebracht hatten. Zu den Erfindungen und Entdeckungen, die diesen Reisenden als Eigentum zugeschrieben werden, haben der Hauptsache nach solche gesammelten Mitteilungen besonders aus Ägypten und Babylon den Anstoß gegeben.

Die Schule des PYTHAGORAS löste zuerst Geometrie als reine, selbständige Wissenschaft von der steten Verbindung mit der Praxis los. Sie beherrschte die Lehre von den Parallellinien, die Winkelsätze des Dreieckes, die Kongruenz und Flächengleichheit von Dreiecken, verwandte diese zu den sogenannten Verwandlungsaufgaben, erfand den pythagoreischen Lehrsatz und die stetige Teilung. Die Beweisart war bis über die Mitte des fünften Jahrhunderts hinaus altertümlich, wie wir aus den uns überlieferten Bruchstücken des HIPPOKRATES (um 440 v. Chr., Chios)[4] wissen. Die Beweise waren mehr Erfahrungsbeweise, zerlegt in viele einzelne Sonderfälle, denen der Zusammenhang fehlte. Erst mit HIPPOKRATES setzt die vielgerühmte griechische Strenge ein. In peinlichster Genauigkeit wird die Voraussetzung gefaßt, mit ängstlicher Erwägung aller nur möglichen Einwürfe die Konstruktion der entsprechenden Figuren entworfen, auf jeden Hilfssatz beim Beweis mit breiter Umständlichkeit eingegangen, da man sein Bekanntsein bei dem Zuhörer nicht voraussetzen durfte. Diesem äußerst fühlbaren Mangel jeder Vorkenntnisse half HIPPOKRATES selbst ab, indem er zum erstenmal *„Elemente"* zusammenstellte. Ganz besonders widmete sich der Athener PLATON (429—348 v. Chr.) der Grundlegung der Mathematik. Indem er jeden Satz auf Vordersätze zurückführte, gelangte er schließlich zu den Definitionen, Axiomen und Postulaten; es ist sein Verdienst, diese aus der Gesamtheit herausgeschält und einzeln formuliert zu haben. Ihm wird ferner die Erfindung der analytischen Methode wie die der indirekten Beweisform zugeschrieben. Als weitere Elementenschreiber nennt die Überlieferung den LEON (um 370; Schüler des PLATON) und den THEYDIOS (um 320 v. Chr., Magnesia). Alles bis dahin Geleistete trat aber in den Schatten, als EUKLID (um 300

[4] Überliefert in den Fragmenten des EUDEMUS von Rhodos (um 334 v. Chr., Schüler des ARISTOTELES), der eine Geschichte der Mathematik schrieb. — *Eudemi fragmenta, quae supersunt*, ed. L. SPENGEL, Berlin 1866, S. 122 ff. — Über HIPPOKRATES vgl. noch BRETTSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euclid*, Leipzig 1870.

v. Chr., Alexandria) sein großes Werk (*στοιχεῖα*, *elementa*)[5] der Öffentlichkeit übergab. Aus der Formvollendung, in der er seine Zusammenstellung ausführte, ist zu erklären, daß die Werke seiner Vorgänger innerhalb der nächsten Menschengeneration verschwanden und kaum die Namen ihrer Verfasser übrig ließen. Euklid ist der Elementenschreiber *κατ' ἐξοχήν, ὁ στοιχειωτής*! Er scheint sich ziemlich streng an die Originalarbeiten der ersten Bearbeiter auf den einzelnen Teilgebieten angeschlossen zu haben: Buch I, II und im wesentlichen IV und VI dürften die geometrischen Resultate der Arbeiten in der pythagoreischen Schule, Buch VII—IX deren arithmetische Untersuchungen wiedergeben. Eine zweite, verallgemeinerte Zahlenlehre (Buch V und zum Teil VI) wird auf Eudoxus v. Knidos (408—355 v. Chr., Schüler des Archytas und Platon) zurückzuführen sein. Buch X fußt auf Vorarbeiten des Theätet (um 390 v. Chr., Heraklea), enthält jedoch gewiß auch viel Originalarbeiten Euklid's selbst (Bd. I, S. 224—225); zu seinem Eigentum gehört u. a. auch noch der heutige Schulbeweis des pythagoreischen Lehrsatzes.

Anderseits hat aber auch Euklid nicht alles aufgenommen, was an elementarmathematischen Sätzen zu seiner Zeit bekannt war; so unterdrückte er u. a. den Satz von den Lunulae des Hippokrates — wohl in Erkenntnis seiner Nichtverwendbarkeit bei der Kreisquadratur (s. S. 111). Solche nicht aufgenommenen Sätze, deren elementarer Charakter jedoch feststand, nannte die Folgezeit *στοιχειώδη*.[6]

Die schnelle Verbreitung und ausschließliche Anerkennung des euklidischen Werkes ist oben erwähnt. Die auf uns gekommenen Handschriften haben als gemeinsamen Ausgangspunkt eine Bearbeitung des Theon von Alexandria (um 365 n. Chr.), der an der ursprünglichen Fassung Änderungen, durch Einfügung von Zusätzen, kleinen Erläuterungen u. s. w., vornahm.

Die Wichtigkeit solcher Zusammenfassungen pflegt darin zu liegen, daß hinterher die systematisierte, in ihrem Bestand gefestigte Wissenschaft einen ungeahnten Aufschwung nimmt. Man vergleiche die glänzenden Leistungen des ein Halbjahrhundert nach Euklid lebenden Archimedes (287—212 v. Chr., Syrakus), die in einer Reihe einzelner, hochwichtiger Abhandlungen verteilt sind. Seine Quadratur des Kreises, der Ellipse und der Parabel, die erschöpfende

[5] Vgl. Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euclid*, Leipzig 1882. —
[6] Procli Diadochi *in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, ed. Friedlein, Leipzig 1873, S. 72. (Proklus 410—485 n. Chr.; Byzanz, Athen.)

Aufstellung der halbregelmäßigen Körper, die Kubatur der Kugel und anderer Rotationskörper zeugen von einer Gewandtheit, die in der damaligen Zeit und noch heute geradezu bewunderungswürdig erscheint, — man vergleiche ferner die Erfolge seines jüngeren Zeitgenossen Apollonius von Pergä (zwischen 250 und 200 in Alexandria, dann in Pergamum), des Verfassers jenes großen Fundamentalwerkes in der Geometrie der Kegelschnitte, und man wird ermessen können, welch hohe Stufe der Entwicklung die Mathematik auf euklidischer Grundlage erreichte.

Mit Heron von Alexandria (erstes Jahrh. v. Chr.), dem Vertreter der praktischen und technischen Geometrie (siehe Bd. I, S. 97—98, 151, 209) wird der Gipfelpunkt griechischer Mathematik überschritten; wir erwähnen von ihm nur jene bekannte Vorschrift, den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen, der neben vielen anderen Berechnungs- und Ausmessungsregeln zum erstenmal in seinem Werke zu finden ist. Nach dem Beginn unserer Zeitrechnung werden die Namen bedeutenderer Vertreter der Geometrie immer seltener. Nur Menelaos von Alexandria (um 98 n. Chr.), dem wir in der Geschichte der sphärischen Geometrie wiederbegegnen werden, Klaudius Ptolemaeus (beobachtete zwischen 125 und 151 n. Chr. in Alexandria), dessen Hauptverdienste auf dem Gebiete der Astronomie liegen, und schließlich Pappus (Ende des dritten Jahrhunderts n. Chr., Alexandria), der in der Hauptsache eine kompilatorische Thätigkeit entwickelte, vermochten ihre Namen in der Geschichte der Geometrie in Erinnerung zu halten, wie die nach ihnen benannten Lehrsätze beweisen.

Griechenlands Blüte war vorbei. Die *Römer* wußten als Erben das Überkommene nicht zu bewahren, geschweige denn fortzubilden. Bedauerlich schwach ist das Verständnis, das in den Kreisen römischer Agrimensoren heronischer Feldmeßkunst entgegengebracht wird. Zu besserer Entwicklung gelangte ein anderer Ausläufer griechischer Geometrie, der in *Indiens* fruchtbarem Boden Wurzeln schlug. Es ist viel gestritten worden, ob die indische Mathematik griechische Bestandteile aufweist, ob sie aus sich allein entstanden ist oder ob sie sogar überschüssige Kraft nach Alexandrien hat abfließen lassen. An das letzte ist indes für die Geometrie sicher nicht zu denken, da die jetzt zugänglichen indischen Schriften von mannigfacher Ähnlichkeit mit heronischer Mathematik, deren höheres Alter feststeht, Zeugnis ablegen. Zwar lernten wir die indischen Mathematiker für Rechenkunst und Algebra als hochbegabte Erfinder kennen (vgl. Bd. I, S. 5, 10, 41—42, 98, 128, 225, 296—297), für die Geometrie ist ihnen

jedoch gleiche Erfindungskraft nicht zuzuerkennen. Immerhin ist die Art, wie der ihnen zuströmende Stoff behandelt wird, original. Der Inder kennt nicht das Zurückgehen auf Definitionen, Axiome u. s. w. Was ihm an Spekulation fehlt, ergänzt er in glücklichster Weise durch die Anschauung, so daß bei gar nicht leichten Sätzen das einzige Wort „Siehe!“, das der anschaulich gezeichneten Figur beigefügt ist, den ganzen Beweis für die ausgesprochene Behauptung ersetzen kann — ein Verfahren, unmöglich für strenge, griechische Geometrie! Ein zweites, für die Mathematik der Inder charakteristisches Hilfsmittel ist die algebraische Behandlung geometrischer Probleme, die den Vorzug besitzt, ihre anerkannte Meisterschaft in der algebraischen Analysis auf ein, ihnen weniger genehmes Gebiet übertragen zu können. Dennoch sind wirkliche Erweiterungen des Bestandes der Elementargeometrie in Indien nicht zu verzeichnen; nur auf eine Verallgemeinerung der heronischen Dreiecksformel für Sehnenvierecke wird aufmerksam zu machen sein.

Die mathematischen Untersuchungen der Inder bilden eingeschaltete Kapitel in den großen astronomischen Werken, die von Aryabhatta (geb. 476 n. Chr.), Brahmagupta (geb. 598 n. Chr.), Bhaskara (geb. 1114 n. Chr.) verfaßt sind. Eine Fundgrube für indische Geometrie stellen auch die Çulvasûtras dar, eine Sammlung geometrischer Vorschriften, die der indische Ritus bei Bauten von Altären und Tempeln auf das strengste innehalten mußte.

Seltener wird in der Geschichte der Elementargeometrie auf spätere Zeiten zu verweisen sein. Die *Araber* pflegten griechische und indische Kenntnisse mit großem Interesse. Ihre Erfolge in der Geometrie der Kegelschnitte gehören indes nicht mehr der Elementargeometrie an; für diese finden wir nur in der Theorie der Vielflächner und der Konstruktionsaufgaben erwähnenswerte Resultate.

Was das *Abendland* unmittelbar aus dem Altertum durch Vermittlung von Boëthius (480 Rom — 524 Pavia; Staatsmann und Gelehrter) und Gerbert (940 Auvergne — 1003 Rom; seit 999 Papst Sylvester II) übernahm, ist herzlich wenig und beschränkt sich auf praktische, ausmessende Geometrie, wie sie die römischen Agrimensoren schon dürftig genug aus Heron's Schriften entlehnt hatten. Erst über arabische Autoren hinweg gelangte griechische Geometrie in reinerer Form zum Abendlande. Auch hier, wie in anderen Gebieten der so weiten Mathematik, muß Leonardo von Pisa (1220 *Practica geometriae*) und ganz besonders Jordanus Nemorarius († 1237, Ordensgeneral; *De triangulis*) wegen der selbständigen Behandlung des von ihren Vorgängern übernommenen Stoffes rühmend genannt werden. Sie sind

die Bahnbrecher einer neuen, freilich sehr langsam fortschreitenden Periode mathematischer Wissenschaft. Für lange Zeit bilden sie die Gewährsmänner abendländischer Gelehrten, die aus ihnen ihre ganze Weisheit entlehnen. Unter dem durch sie vermittelten Einfluß arabischer Geometrie stand die mittelalterliche Gelehrsamkeit bis zur zweiten Hälfte des fünfzehnten Jahrhunderts. Jetzt endlich eröffnete die Zeit des Humanismus ein direktes Zurückgehen auf die alten Quellen, zunächst auf die Schriften der römischen Agrimensoren, schließlich auch auf die älteren Originale.

Die erste in deutscher Sprache geschriebene Geometrie stammt aus dem Ende des vierzehnten Jahrhunderts und ist unter dem Namen der *Geometria Culmonensis* bekannt.[7] Der unbekannte Verfasser, der zu ihrer Niederschrift von dem Hochmeister Konrad von Jungingen angeregt wurde, fügte der ursprünglich lateinischen Ausarbeitung eine ziemlich freie deutsche Übersetzung bei. Der Inhalt ist rein feldmesserischer Natur und nur dazu bestimmt, die Regeln und Vorschriften der damals sehr handwerksmäßig betriebenen Feldmeßkunst zusammenzufassen.

Während die Arbeiten Peurbach's (1423—1461, Universität Wien) und Regiomontanus' (1436 Königsberg in Unterfranken — 1476 Rom; Wien, Italien, Nürnberg) ein eifriges Studium guter römischer und griechischer Quellen verraten, zeigen die geometrischen Kapitel des Widmann'schen Rechenbuches von 1489[7a] nur Spuren direkter Beschäftigung mit den römischen Agrimensoren. Wurde auch allmählich der alte Bestand wiedergewonnen, so blieb doch das Tempo in der Weiterbildung ein sehr langsames. Erst das siebzehnte Jahrhundert brachte einen wesentlichen Fortschritt. Descartes' große Entdeckung (1637 *Géométrie*) verband die Geometrie mit der Algebra und schuf in der analytischen Geometrie (siehe die Geschichte derselben: Teil XII) ein fruchtbares Mittel, das der Mathematik zu ungeahnten Triumphen verhalf. Infinitesimalbetrachtungen, deren erste Verwendung uns in Keplers' *Stereometria doliorum* von 1615 und in Cavalieris' *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* 1635 entgegentreten, vereinigten sich mit der analytischen Geometrie, um schließlich als herrlichste Frucht die Differential- und Integralrechnung zu zeitigen. Aber auch auf dem Wege der antiken Geometrie lernte man weiterwandern und schuf in der pro-

[7] *Geometria Culmonensis. Ein agronomischer Traktat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen (1393—1407)*, herausg. v. D. H. Mendthal, Leipzig 1886 (Publikationen des Vereins für die Geschichte von Ost- und Westpreußen). — [7a] Vgl. Bd. I, Anm. 55.

jektivischen Geometrie eine neue Wissenschaft, die die tiefsten Einblicke in das Wesen der Raumlehre erschloß. Das neunzehnte Jahrhundert brachte philosophische Durcharbeitungen der Grundlagen und entwickelte eine allgemeine, von den speziellen Eigenschaften unseres Raumes unabhängige, absolute Geometrie.

2. Die Sprache der Geometrie. Figuren.

Im Gegensatz zu der Algebra ist die Ausdrucksweise, deren man sich in der Geometrie bedient, wenig ausgebildet; sie ist in der Periode stecken geblieben, in der sich die Algebra von der Zeit Diophant's bis zum Auftreten Vieta's befand (vgl. Bd. I, S. 124—127). Die Beweise werden in mehr oder minder breiten Auseinandersetzungen vorgeführt, unter Benutzung abkürzender Zeichen, stellenweis unterbrochen von algebraähnlichen Rechnungen. Das Ideal einer symbolischen Geometrie, das mannigfach angestrebt ist, wird sich kaum erreichen lassen. Die Algebra geht bei ihren Rechnungen immer wieder auf die wenigen Grundoperationen zurück, deren Anwendung fast stets ohne weitere Einschaltung eines begleitenden Textes aus den Rechnungsresultaten selbst klar ist; bei komplizierteren Operationen genügt die Anführung der gerade benutzten Formel. Anders in der Geometrie. Die Zusammenziehung vieler Schlüsse in eine Denk- oder Anschauungsoperation, die Formulierung von Lehrsätzen, die stete Berufung auf bereits bewiesene Sätze, die nicht in der durchsichtigen Gestalt einer Formel uns entgegentreten, machen es vielfach unmöglich, ohne erläuternden Wortlaut auszukommen. Die beigefügten Zeichnungen können zwar erheblich zur Kürzung des Beweises beitragen. Doch bedürfen auch sie zumeist einer Beschreibung, da verwickeltere Figuren über den Verlauf der vorgenommenen Konstruktion nur wenig unmittelbar verraten; hierin tritt aber gerade der außerordentliche Vorteil algebraischer Formeln klar zu Tage.

So weit als möglich sollte man algebraische Schreibweise heranziehen; ohne Zweifel wird hierdurch die Übersicht außerordentlich erhöht und damit das Verständnis erleichtert, besonders wenn, wie in der Schule, mündlicher Unterricht hinzukommt.

Figuren kannte bereits das altägyptische Rechenbuch des Ahmes[8] (zwanzigstes bis achtzehntes Jahrhundert v. Chr.). In ihm begegnet dem Leser u. a. die Figur eines gleichschenkligen Drei-

[8] Eisenlohr, S. 125 (Anm. 3).

eckes, das eigentümlicher Weise nicht auf der Basis stehend, wie wir es gewöhnt sind, sondern liegend, mit der Spitze nach rechts, gezeichnet ist und an seinen Seiten die betreffenden Maßzahlen trägt. Zuweilen wird auch die Maßzahl des Inhaltes einer Figur eingeschrieben. Das Hineinschreiben der Maßzahlen finden wir auch bei dem griechischen Feldmesser HERON (erstes Jahrhundert v. Chr.); es bestärkt dies den Geschichtsforscher, die HERON'sche Sammlung als aus ägyptischen Quellen stammend aufzufassen. Bei den Griechen hatte sich, vielleicht seit der Zeit der Pythagoreer, die Gewohnheit herausgebildet, die Ecken der Figuren mit Buchstaben zu bezeichnen. Man hat Grund anzunehmen,[9] daß HIPPOKRATES von Chios (um 440 v. Chr.) diese Übung bereits besaß. Bei EUKLID (um 300 v. Chr.) ist der Buchstabe Jota, *I*, in der Figurenbezeichnung grundsätzlich ausgeschlossen, wohl um Verwechslungen mit einem einfachen Strich zu vermeiden. In jenen altertümlichen Bruchstücken, die man auf HIPPOKRATES zurückführen zu können meint,[9] ist dies noch nicht der Fall. — Die griechische Sitte, Buchstaben an die Ecken zu schreiben, drang nach Indien und wurde später von den Arabern übernommen. Sehr oft verrät die Reihenfolge der in arabischen Schriften benutzten Buchstaben, zu denen wohl arabische Zeichen, aber in der Reihenfolge des griechischen Alphabetes, verwendet sind, die Anlehnung an griechische Quellen.[10] Auch mittelalterliche Mathematiker, wie REGIOMONTANUS (1436—1476), wählten häufig noch statt *a*, *b*, *c*, *d* u. s. w. die Reihenfolge *a*, *b*, *g*, *d*. Einen gewissen Abschluß fand diese Auswahl der Buchstaben, wenigstens für Dreiecke, im achtzehnten Jahrhundert, indem nach Vorgang von EULER die Ecken bezw. Winkel ständig mit *A*, *B*, *C*, die gegenüberliegenden Seiten mit *a*, *b*, *c* gekennzeichnet wurden; die zugehörige Winkelbezeichnung α, β, γ ist nicht vor Beginn des neunzehnten Jahrhunderts allgemein üblich geworden (vgl. Trigonometrie, Teil V, B. 8). — Ist es nötig, für eine gewisse Gruppe von Punkten einer Figur eine gemeinsame Eigenschaft äußerlich durch die Bezeichnung anzudeuten, so bedient man sich heute eines und desselben Buchstabens unter Hinzufügung von Indices, wie sie LEIBNIZ 1675/76 zum erstenmal benutzt hatte (vgl. Bd. I, S. 151). Vor LEIBNIZ, und bevor sein Vorschlag weitere Verbreitung fand, mußte man sich in solchem Falle

[9] BRETSCHNEIDER S. 114, Note 2 (Anm. 4); vgl. auch CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. II, 2. Auflage, Leipzig 1894 (von hier ab kurz mit II^b bezeichnet), S. 194. — [10] CANTOR, I^b, S. 681, vgl. daselbst, Anm. 2.

begnügen, denselben Buchstaben mehrfach zu setzen.[11] Nicht unzweckmäßig ist das Verfahren, das Simon Stevin (1548 Brügge — 1620 Leiden; Kaufmann, später im Staatsdienst als Ingenieur) befolgt, wenn er bei Gelegenheit des trigonometrischen Fundamentalfalles b, c, γ die Doppeldeutigkeit des Punktes B dadurch hervorhebt, daß er die sich ergebenden Punkte B mit $\dot{B}, \ddot{B}$ bezeichnet.[12] Man könnte hierin übrigens auch die ersten Anfänge von Buchstaben mit Indices erkennen.

Zeichen für oft wiederkehrende Worte finden sich bereits in alten Handschriften, wie in einem Manuskript der heronischen Dioptra: ∇ für Dreieck, $\underline{\underline{o\nu}}$ für Parallelogramm, $\square$ für Rechteck,[13] oder in einer Pappushandschrift: $\bigcirc$ für Kreis, $=$ für parallel, $\square$ für *τετράγωνον*, $\triangle$ oder ∇ für *τρίγωνον*;[14] auch in mittelalterlichen Drucken begegnet uns zuweilen $\triangle$ für Dreieck, $\measuredangle$ für Winkel, $\perp$ für senkrecht, $\parallel$ für parallel.[15] Eine systematische Verwendung dieser Zeichen, wie sie in der Neuzeit anzutreffen ist, bleibt aber dabei ausgeschlossen. Eine Ausnahme macht im Mittelalter das weiter unten (S. 13) noch hervorzuhebende Werk Hérigone's von 1634, *Cursus mathematicus*, in dem solche Zeichen ständig und zweckbewußt benutzt sind. Das moderne Zeichen $\sim$ für ähnlich, aus einem liegenden s (= similis) entstanden, ist von Leibniz vorgeschlagen worden.[16] Von demselben ist die Zeichenzusammenstellung $\cong$ für das euklidische „ähnlich und gleich", unser „kongruent", gewählt worden.[17] Chr. v. Wolff schreibt in seinen *Elementa Matheseos universalis* (Halle 1717) noch „$=$ et $\sim$".[18]

Die Abhandlung, in der diese Zeichen zum erstenmal gegeben sind, wurde von Leibniz im August 1679 niedergeschrieben.[16] Sie

[11] So bei Gregorius von St. Vincentius, *Opus geometricum*, Antwerpen 1847, S. 27 u. öfters. Bl. Pascal (1623—1662), Oeuvres, ed. Faugère (Hachette), Paris 1882, Bd. III, S. 370—446. Johann Bernoulli (1667—1748), Acta Eruditorum, Mai 1697, Opera omnia, Lausanne-Genf 1742, I, S. 192; Figurentafel IX, Nr. 37, 2. Joh. Wallis (1656—1703), *de sectionibus conicis*, 1655, Opera math., I, Oxford 1695, S. 303ff. — [12] Les oeuvres math. de Simon Stevin, augment. par Alb. Girard, Leiden 1634, II, S. 15. — [13] Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque imperiale, Bd. 19, Paris 1858, S. 173. — [14] Pappi Alexandri collectiones (*συναγωγή*), Gr. lat. c. comment. ed. F. Hultsch, Berlin 1876—78, Bd. III[b], Anhang S. 129—132. — [15] Wallis, *Algebra*, 1693, Opera omnia Bd. II, Oxford 1695, S. 347. — [16] Leibniz, *Characteristica geometrica* (Manuskript 10/VIII 1679); Werke, ed. Gerhardt, 3. Folge, Bd. V, S. 153 Z. 9 v. u.: „*Similitudinem ita notabimus:* $\sim$." — [17] Leibniz (ebendaselbst) schreibt: „$A\,B\,C \simeq C\,D\,A$. *Nam* $\sim$ *mihi est signum similitudinis, et* $=$ *aequalitatis, unde congruentiae signum compono, quia quae simul et similia et aequalia sunt, ea congrua sunt.*" — [18] Bd. I., Geometrie, § 236 (Anm. 68).

hat den Hauptzweck, eine Art geometrischen Kalküls der algebraischen Symbolik an die Seite zu stellen. Leider ist dieser eigenartige Versuch in den Anfängen stecken geblieben. LEIBNIZ selbst hat ihn nicht einmal der Öffentlichkeit übergeben, vielleicht weil er bei befreundeten Mathematikern wie HUYGENS[19], mit denen er über seinen Vorschlag in Briefwechsel trat, keine Gegenliebe fand.[20]

Für die Elementargeometrie hatte PIERRE HÉRIGONE in seinem eben erwähnten *Cursus mathematicus* von 1634 eine solche, von LEIBNIZ ganz allgemein angestrebte Begriffsschrift aufgestellt und durchgeführt. Seine Ausdrucksweise ähnelt auch in der äußeren Anordnung, der Trennung von Voraussetzung, Behauptung, Beweis, außerordentlich der modernen Form. Die Lehrsätze sind doppelsprachig, lateinisch und französisch, abgefaßt; die Durchführung des Beweises bedarf dessen nicht, da seine Zeichensprache allgemein verständlich ist. Ein Beispiel aus seinem Werke,[21] dem wir die moderne Form beifügen, wird das Verfahren HÉRIGONE's am besten erläutern. (Die Figur ist ein Parallelogramm mit den im Umkreis gesetzten Buchstaben $ACDB$, die Diagonale CB wird gezogen.)

L. I, Theor. XXIII, Schol. I. Omne quadrilaterum habens latera opposita aequalia, est parallelogrammum. Tout quadrilatere qui a les costez opposez égaux, est parallelogramme.	Ein Viereck, in dem die Gegenseiten paarweise gleich sind, ist ein Parallelogramm.

	Hypoth.	
	ab 2/2 cd	Vor. $AB = CD$
	ac 2/2 bd	$AC = BD$
	Req. π. demonstr.	Beh. $ABCD$ ♯
	ad est ◇	Bew. Zum Bew. verbinde man B mit C, dann ist
	Praeparatio	
1. p. 1	bc est ___	1. $AB = CD$ (nach Vor.)
	Demonstratio	2. $BC = BC$ (Jede Größe ist sich selbst gleich)
hyp.	ab 2/2 cd	
	bc est commun.	3. $AC = BD$ (nach Vor.)
hyp.	ac 2/2 bd	$\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (S. S. S.)[22]
8. 1	$< abc$ 2/2 bcd, α	$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$ (hom. Stücke)
8. 1	$< bca$ 2/2 cbd, β	$\sphericalangle BCA = \sphericalangle CBD$ (hom. Stücke)
α. 27. 1	$ab = cd$	$AB \parallel CD$ (an gleichen Wechselw.)
β. 29. 1	$ac = bd$	$AC \parallel BD$ (an gleichen Wechselw.).
concl.	$abcd$ est ◇	

[19] LEIBNIZ, Werke, ed. GERHARDT, Bd. II, Berl. 1850, S. 19 ff. — [20] Daselbst. S. 27. — [21] Bd. I, S. 43. — [22] S. S. S. ist eine empfehlenswerte Abkürzung

Die hier auftretenden Zeichen HÉRIGONE's sind: 2/2 für gleich (vgl. Bd. I, S. 138), ◇ für Parallelogramm, ___ für gerade Linie, = für parallel, π. für *ad* (aus der Proportionslehre entnommen). Req. π. dem. heißt *requisitum ad demonstrandum*, d. h. Behauptung. Die am linken Rand stehenden Vermerke sind Hinweise auf die benutzten Sätze.

3. Axiome, Definitionen. — Allgemeine Fachausdrücke.

Strengere Untersuchungen über die Grundlegung der Geometrie stellte zuerst die Schule PLATON's an. Die nach und nach auftauchenden Grundsätze und Erklärungen wurden genau formuliert und an die Spitze des geometrischen Systems gesetzt, in der Art, wie eine solche Sammlung den Elementen EUKLID's vorausgeschickt ist (siehe unten S. 15). Eine große Anzahl dürfte auf PLATON (429 bis 348 v. Chr.; Athen) selbst zurückzuführen sein; einige lassen sich in platonischen Dialogen nachweisen, für andere ist ARISTOTELES (384—322 v. Chr.; Athen) Gewährsmann.[23]

Im Dialog „*Menon*“[24] begegnet uns die Definition: „Figur ist die Grenze des Körpers“; an anderer Stelle[25] heißt es: „Gerad ist, dessen Mitte die beiden Enden deckt“ eine Erklärung, die auch bei ARISTOTELES[26] vorkommt und so aufzufassen ist, daß, wenn man die Strecke längs ihrer Richtung betrachtet, sie nur als Punkt sichtbar ist. Die in fast keinem modernen Lehrbuch fehlende Erklärung des Punktes als Grenze einer Linie, der Linie als Grenze einer Fläche, der Fläche als Grenze eines Körpers ist ebenfalls als platonisch von ARISTOTELES überliefert.[27] Die Linie als eindimensionales Gebilde, „Länge ohne Breite“, heißt bei ARISTOTELES nach PLATON's Vorgang „*μῆκος ἀπλατές*“,[28] die Fläche entsteht ihm aus dem Breiten und Schmalen „*ἐπίπεδον ἐκ πλάτεος καὶ στενοῦ*“,[29] der

für die Berufung auf den Kongruenzsatz: „Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen“ (analog: S. W. S. — W. S. W. — etc.) — vorgeschlagen von dem am 4. III. 1895 verstorbenen Gymnasialprofessor WORPITZKY (FRIEDR. WERDER'sches Gymn. zu Berlin). — [23] Vgl. HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig 1874, S. 135—136. — [24] PLATON, *Menon*, 76 A, ed. STALLBAUM, Vol. VI, sect. II, Gothae et Erfordiae 1836, S. 45 Z. 7: „*στερεοῦ πέρας σχῆμα εἶναι.*“ — [25] PLATON, *Parmenides*, 137 E., ed. ASTIUS, Leipzig 1821, Bd. III, S. 32 Z. 2—3: „*καὶ μὴν εὐθύ γε, οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ.*“ — [26] ARISTOTELES, *Topica*, VI 11, Berl. Akademieausgabe 1831, Bd. I, S. 148 rechts 30: „*εὐθύ, οὗ τὸ μέσον ἐπιπροσθεῖ τοῖς πέρασιν.*“ — [27] ARISTOTELES, *Topica*, V I4, Berl. Akad.-Ausg., I, S. 141 rechts 19—20. — [28] ARISTOTELES, *Topica*, VI 6, S. 143 rechts 12. — [29] ARISTOTELES, *Met.*, I 9, Akad.-Ausg. 1831, Bd. II, S. 992 links 12. —

Körper ist durch den Besitz der drei Dimensionen charakterisiert: „*σῶμα τὸ ἔχον τρεῖς διαστάσεις*“.[30] Auch euklidische Grundsätze lassen sich bei ARISTOTELES nachweisen; mehr als einmal bringt er vor, daß Gleiches, von Gleichem subtrahiert, wieder Gleiches giebt.[31] Ebenso findet sich für den allgemeinen Begriff Axiom bei ARISTOTELES zum erstenmal eine Definition.[32]

Die euklidischen Elemente liefern uns diese Definitionen in strenger, kunstgerechter, abgeschlossener Fassung. Der praktische Geometrieunterricht kann sich mit dieser starren Form nicht begnügen; es stellen sich Zusätze und Erläuterungen als notwendig heraus, um dem Zuhörer oder Schüler die abstrakten Wahrheiten verständlicher zu machen. Derartige Umschreibungen und Ergänzungen sind uns schon aus dem Altertum bekannt. Wie wir oft bemerken konnten, vertritt auch hier die Geometrie des Alexandriners HERON (erstes Jahrhundert v. Chr.) die Praxis, im Gegensatz zu der reinen Theorie. Wir stellen im folgenden die Definitionen EUKLID's und HERON's zusammen, um den Unterschied recht klar zu zeigen.

EUKLID (ed. HEIBERG, Leipzig 1883, S. 2).	HERON (ed. HULTSCH, Berlin 1864, S. 7 ff.).
1. *Σημεῖόν ἐστι, οὗ μέρος οὐθέν.* Punkt ist, was keinen Teil hat.	1. *Σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθὲν ἢ πέρας ἀδιάστατον ἢ πέρας γραμμῶν.* Punkt ist, was keinen Teil hat, oder eine dimensionslose Grenze oder Grenze einer Linie.
3. *Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.* Die Grenzen der Linie sind Punkte.	
2. *Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.* Linie, eine Länge ohne Breite.	2. *Γραμμὴ δέ ἐστι μῆκος ἀπλατὲς καὶ ἀβαθὲς . . . γίγνεται δὲ σημείου ῥυέντος ἄνωθεν κάτω ἐννοίᾳ τῇ κατὰ τὴν συνέχειαν, περιέχεταί τε καὶ περατοῦται σημείοις, πέρας ἐπιφανείας αὐτὴ γενομένη . . .* Linie ist eine Länge ohne Breite und Tiefe . . . sie entsteht, wenn ein Punkt von
6. *Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.* Die Grenzen der Fläche sind Linien.	

[30] ARISTOTELES, *Topica*, VI 5. Berl. Akad.-Ausg., Bd. I, S. 142 rechts Z. 24/25. — [31] Z. B. ARISTOTELES, *Met.*, XI. 4, Berl. Akad.-Ausg., Bd. II, S. 1061 Z. 20: „*Ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρουμένων ἴσα λείπεσθαι.*“ — [32] ARISTOTELES, *Metaph.*, III, cap. 3, Berl. Akad.-Ausg., Bd. II, S. 1005 links Z. 19 ff. —

oben nach unten ohne Unterbrechung fortbewegt wird (fließt); sie wird zusammengesetzt und begrenzt durch Punkte und ist selbst die Grenze einer Fläche.

4. *Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτοῖς σημείοις κεῖται.* Eine Gerade ist eine Linie, die zwischen den in ihr befindlichen Punkten immer gleichmäßig (in derselben Anordnung und Richtung) liegt.

4. . . . wie Euklid, dann: *ἥτις δύο δοθέντων σημείων ἡ μεταξὺ ἐλαχίστη ἐστι τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν*; . . . zwischen zwei gegebenen Punkten ist sie die kürzeste der Linien, die diese beiden Punkte als Grenze haben.

5. *Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.* Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.

5. . . . wie Euklid, dann: *ἡ πέρας σώματος καὶ τόπου . . . γίγνεται δὲ ῥύσει ὑπὸ γραμμῆς κατὰ πλάτος ἀπὸ δεξιῶν ἐπ' ἀριστερὰ ῥεούσης . . .* sie ist die Grenze eines Körpers . . . und entsteht durch Fortbewegen (Fließen) einer Linie längs der Breite von rechts nach links.

7. *Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.* Ebene ist eine Fläche, die zwischen den in ihr befindlichen Geraden immer gleichmäßig (Nr. 4) liegt.

7. . . . wie Euklid, dann: *ἧς ἐπειδὰν δύο σημείων ἅψηται εὐθεῖα, καὶ ὅλη αὐτὴ κατὰ πάντα τόπον παντοίως ἐφαρμόζεται* . . ., wenn eine Gerade zwei ihrer Punkte enthält, so liegt diese Gerade gänzlich in ihr.

7a. *Στερεόν ἐστι σῶμα τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον . . . περατοῦται δὲ πᾶν στερεὸν ὑπὸ ἐπιφανειῶν.* Körper ist, was Länge, Breite, Tiefe hat . . . begrenzt wird jeder Körper von Flächen.

8. *Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.* Ebener Winkel ist die Neigung zweier sich in einer Ebene treffenden und nicht in einer Geraden liegenden Linien.

8. *Γωνία ἐστὶ συναγωγὴ πρὸς ἓν σημεῖον ὑπὸ κεκλασμένης ἐπιφανείας ἢ γραμμῆς ἀποτελουμένη.* Winkel ist die Einengung an einem Punkte, die durch eine geknickte Fläche oder Linie gebildet wird.

9. *Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.* Sind die einschließenden Linien Gerade, so heißt der Winkel geradlinig.

10. *Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.* Wenn eine Gerade, die eine zweite schneidet, gleiche Nebenwinkel erzeugt, so heißt jeder dieser gleichen Winkel ein Rechter und die schneidende Gerade heißt senkrecht zu der Geschnittenen.

10. *Ὀρθὴ μὲν οὖν ἐστι γωνία ἡ τῇ ἀντικειμένῃ ἴση. ἀντικείμεναι δέ εἰσιν ἃς ποιεῖ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα.* Recht ist der seinem Nebenwinkel gleiche Winkel. Nebenwinkel sind diejenigen Winkel, die eine auf einer zweiten stehende Gerade erzeugt.

Es ist kaum anzunehmen, daß die angegebenen Zusätze Eigentum Heron's sind. Zum Teil sind Lehrsätze, wie in 7., in die Erklärung mit hineingenommen, zum Teil haben wir es aber auch mit neuen, zu den euklidischen im Gegensatz stehenden Definitionen zu thun. Man vergleiche die Winkeldefinitionen 8., vor allem die genetische Definition der Linien und der Flächen in 2. und 5., die mit Hinzunahme des Begriffes der Begrenzung aufgestellt sind. Die letzten Definitionen erscheinen uns zwar in der erhaltenen griechischen Litteratur hier zum erstenmal; doch würde es zu weit gegangen sein, zu behaupten, daß sie heronischen oder wenigstens nacheuklidischen Ursprunges sind. Die genetische Defi-

nition liegt zu nahe, um nicht auch in platonischer oder pythagoreischer Zeit vorhanden gewesen zu sein; nur wird sie dem strengen Theoretiker nicht bestimmt genug erschienen sein und darum keinen Platz in den Elementen Euklid's, sondern etwa nur im mündlichen Vortrag der in der Geometrie unterrichtenden Gelehrten gefunden haben.

Zusatz 4., daß die gerade Linie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten darstellt, ist der einzige Satz, der vor Heron (erstes Jahrhundert v. Chr.), aber immer noch nach Euklid (um 300 v. Chr.) nachweisbar ist. In seiner Abhandlung über die Kugel und den Cylinder[33] geht Archimedes (287—212 v. Chr., Syrakus) von diesem Satze als Axiom aus und sagt: „*Λαμβάνω δὲ ταῦτα· τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν*“ (Ich nehme an, daß von den Linien, die gleiche Endpunkte besitzen, die gerade Linie die kürzeste sei).

Über die Grundlagen der Geometrie ist noch oft im Altertum geschrieben worden; eingehenderen Bericht giebt uns darüber Proklus (410—485 n. Chr.; Byzanz, Athen) in seinem Kommentar zu dem ersten Buche der Elemente Euklid's.[6] Angelpunkte bleiben immer die euklidischen und heronischen Definitionen. Darüber hinaus kamen auch die arabischen Gelehrten nicht. Die Scholastik des frühen Mittelalters bevorzugte die heronischen Bewegungsdefinitionen und leitete aus ihnen den Begriff der Kontinuität ab. Ganz modern klingt die Erklärung des Jordanus Nemorarius (Deutscher; † 1237, Ordensgeneral der Dominikaner), die aussagt, daß eine Linie ein stetiges Gebilde erster Ordnung, Fläche und Körper solche höherer Ordnung seien: „*Simplex autem continuitas in linea est, duplex quoque in superficie, triplex in corpore. Punctus est fixio simplicis continuitatis.*“[34]

In späterer Zeit geht man wieder auf die euklidischen Sätze zurück. Es dürfte interessant sein, ältere deutsche Fassungen kennen zu lernen. Johannes Widmann von Eger, der Verfasser des ältesten deutschen gedruckten Rechenbuches (Leipzig 1489; vgl. Bd. I, Anm. 55), das auch Geometrie enthält, sagt wörtlich:

„punctus iſt eyn kleyn Dingk dz nicht zu teylen iſt.
linea iſt eȳ ausſtreckung die alleyn zu meſſen iſt ynn die leng.
Superficies iſt eȳ außtreckūg die man miſt nach der leng vñ nach der preyt.

[33] Archimedes, ed. Heiberg, Leipzig 1880—81, *Περὶ σφ. καὶ κύκλ.* I., Bd. I, S. 8 Z. 22—24. Übersetzung von Nizze, Stralsund 1824, S. 44. — [34] *De triangulis*, lib. I, def., ed. M. Curtze, Heft VI der Mitteilungen des Coppernicusvereins zu Thorn, 1887, S. 3.

Corpus iſt eyn ausztreckung die man miſt nach leng preyt vnd tieff oder dick.

Angulus iſt ein Winckel der do gemacht iſt von zweyen lini."

In dem Rechenbuch des Simon Jacob 1565, einem der verbreitetsten Lehrbücher des sechzehnten Jahrhunderts, heißt es viel ausführlicher:

„Ein Punct iſt ein vntheilbares reines ſtüpfflein | welches mit keinem Inſtrument mag gemacht | ſondern muß allein mit dem verſtandt gefaßt werden |

Ein Lini iſt ein langer riß | der kein breiten hat | wirt im werck nicht geſehen | ſondern allein mit dem verſtandt gefaßt.

Ein Flech oder Ebne iſt die | ſo allein in die leng vnd breit gemeſſen wird.

Eine ebne oder waſſerrechte Flech iſt ein ebner platz zwiſchen zweyen Linien der kürtzte begriff.

Ein Corpus iſt eine gröſſe ſo in die leng | breit und tieff gemeſſen wirt.

Ein ebner Winckel iſt wann zwo Linien bey einem Punkt einander alſo anrüren | daß wa ſolche fortgezogen würden | lieffen ſie creutzweiß vber einander.

Ein Circkelronde Linien [Kreis] iſt ein ronder riffz | der in der Mitte ein pünctlein hat | von welchem zu der ronden Linien allenthalben eine gleiche weite iſt."

Je mehr wir uns der Neuzeit nähern, desto verschiedenartiger werden die Formulierungen, in die jeder Verfasser — wenigstens in neuester Zeit — sein geometrisches Glaubensbekenntnis hineinzulegen sucht. Es ist eine sehr dankenswerte, aber die Kräfte des einzelnen fast übersteigende Arbeit, eine systematische Übersicht dieser Fassungen zu geben, wie sie für das letzte Jahrhundert von Schotten[35] in Angriff genommen ist. Ein weiteres Behandeln des sehr umfangreichen Stoffes würde über den hier gesteckten Rahmen hinausgehen.

Auf einige Fachausdrücke sei noch im folgenden eingegangen.

Unter *μαθήματα* faßte Platon's Akademie alle Lehrgegenstände des wissenschaftlichen Unterrichtes zusammen. Die Schule des Aristoteles spezialisierte das Wort und faßte mit ihm nur die Logistik (Rechenkunst) und Arithmetik (wissenschaftliche Zahlenlehre), Geometrie der Ebene und des Raumes, Musik und Astronomie zu-

[35] Schotten, *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichtes. Eine vergleichende Planimetrie.* Leipzig 1870.

sammen. Die Trennung zwischen praktischer und theoretischer Wissenschaft, die Plato in der Scheidung zwischen Logistik und Arithmetik eingeführt hatte, nahm ARISTOTELES bei der Geometrie vor, indem er die Geodäsie der reinen Geometrie gegenüberstellte.[365]

Das Wort Punkt ist lateinischen Ursprungs. Das eigentliche *punctum* gen. neutr. (*σημεῖον*, bei ARISTOTELES *στιγμή*) wurde allmählich durch die männliche Form *punctus, puncti* (bei PLINIUS, *punctus, punctūs*) verdrängt. Die Form *punctus* findet sich schon in den Schriften der Agrimensoren[36] (erstes und zweites Jahrh. n. Chr.), des BOËTHIUS (480—524),[37] des JORDANUS NEMORARIUS († 1237)[38] und erst recht bei Späteren wie LUCA PACIUOLO 1494,[39] WIDMANN 1489[40] u. a. Auch in den deutschen geometrischen Schriften hieß es anfangs „das Punkt", so in der *Geometria Culmonensis*: „in daſſelbige punkt ſ lege das rechte winkelmoſe vnde ſtrecke eyne linie."[41]

Das Wort Linie ist das lateinische *linea* (griech. *γραμμή*). Die Gerade heißt bei EUKLID *εὐθεῖα* (sc. *γραμμή*; *recta linea*).

Für Fläche gebrauchen die Pythagoreer *χροιά*, die Mathematiker bis ARISTOTELES *ἐπίπεδον*. Nach ARISTOTELES spezialisiert sich das Wort auf den Begriff „Ebene" (*planum*), während für das allgemeine „Fläche" (*area*) — wie behauptet wird, nach Vorgang PLATON's — *ἐπιφάνεια* üblich wird.[42]

Der Raum wird bei EUKLID mit *στερεόν* bezeichnet.

σχῆμα ist jede Figur, sei sie räumlich oder flächenhaft.

B. Besonderer Teil.

I. Die gerade Linie. Der Winkel.

Ein erheblicher Fortschritt in der Theorie der Geraden über die euklidische Lehre hinaus gehört erst den letzten Jahrhunderten an. Seit dem Anfang des siebzehnten Jahrhunderts werden negative Strecken anerkannt, allgemeiner seit der Schöpfung der analytischen Geometrie durch DESCARTES. In die Elementargeometrie wurde der Unterschied zwischen der Geraden AB und der entgegengesetzten BA

[36] *Die Schriften der römischen Feldmesser*, ed. BLUME, LACHMANN u. RUDORFF, Berl. 1848, 360, 29; 374, 13. — [37] BOËTIUS, *instit. arithm.*, II. 30, ed. FRIEDLEIN, Leipzig 1867, S. 121 Z. 23 u. öfters. — [38] *De triangulis*, S. 3 Z. 3 (Anm. 34). — [39] LUCA PACIUOLO, *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*, Venedig 1494, Teil II, S. 1[a]. — [40] Rechenbuch, Leipzig 1489, das dritte vñ letzte teyl u. s. w. (202. Blatt, Vorderseite). — [41] S. 66 (Anm. 7). — [42] LAËRTIUS DIOGENES, III. 24, § 19. ed. COBET, Paris 1850, S. 74 Z. 15 v. u.

im neunzehnten Jahrhundert durch MOEBIUS (1790—1868 Leipzig) gebracht und daraus eine neue geometrische Behandlungsart gewonnen, die bedeutende Resultate erzielte.[43] Auf der anderen Seite hatte DESARGUES (1593—1662; Paris, Lyon, Baumeister) ganz neue Wege eingeschlagen, indem er Büschel von Geraden (*ordonnance de droites*), die sich im Endlichen oder Unendlichen schneiden, seinen Untersuchungen zu Grunde legte[44] und damit die Anfänge einer projektivischen Geometrie (siehe S. 94) schuf, die in STEINER (1796 bis 1863; Berlin) ihren größten Meister sieht.

In der Definition des Winkels (*γωνία, angulus*) ist bis heutzutage keine Einigkeit erzielt. In der Hauptsache sind es zwei Erklärungsversuche, die in verschiedensten Formen auftreten. Die Auffassung des Winkels als Neigung oder, genauer gesagt, als Richtungsunterschied zweier Geraden geht auf EUKLID (lib. I. def. 8 — vgl. S. 17), durch ihn wahrscheinlich auf die platonische Schule (viertes Jahrh. v. Chr.) zurück. Eine Modifikation hiervon stellt den Winkel als Drehungsgröße hin,[45] zieht also noch mechanische Prinzipien hinein. Demgegenüber versteht BERTRAND[46] (1778) unter Winkel das unendliche Ebenenstück, das durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen gebildet wird. Ihm schließt sich BALTZER (1818 bis 1887, Prof. in Königsberg) in seinen *Elementen*[47] an und verbreitet dadurch diese Definition in Deutschland.[48]

Die Hervorhebung des Drehungssinnes veranlaßte MOEBIUS, entsprechend seiner Auffassung einer Strecke, zwischen den Winkeln ABC und CBA streng zu scheiden (vgl. oben).[49]

Einer der ältesten geometrischen Begriffe ist der Begriff des rechten Winkels (*γ. ὀρθή, angulus rectus,* bei BOËTHIUS auch *a. normalis*), da er aus der senkrechten Stellung irgend eines Gegenstandes zum Erdboden, aus der aufrechten Haltung des Menschen

[43] MOEBIUS, *Der barycentrische Kalkül*, Leipzig 1827, § 1. MOEBIUS, Werke, Bd. I, ed. BALTZER, Leipzig 1885, S. 26. — [44] DESARGUES, 1639, *Brouillon project d'une atteinte aux éuénemens des rencontres d'un cone avec un plan*, ed. POUDRA, Paris 1864, I, S. 104. — [45] THIBAUT, *Grundriß der reinen Mathematik*, 2. Aufl. Göttingen 1809, S. 168. — [46] BERTRAND, *Développement nouveau de la partie élémentaire des math.* Genève 1778. Bd. II, S. 6: „*Un angle est une portion de superficie plane contenue entre deux lignes droites, qui se coupent et sont terminées à leur point de section.*“ — [47] BALTZER, *Die Elemente der Mathematik*, Bd. II (3. Aufl. Leipzig 1870. S. 5). — [48] Vgl. die sehr eingehende Darstellung bei SCHOTTEN, Bd. II, 1893, S. 94—183 (Anm. 35). — [49] MOEBIUS, *Über eine neue Behandlungsweise der anal. Sphaerik*, § 1, Leipzig 1846. Werke, II, ed. KLEIN, Leipzig 1886, S. 4/5. *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geom. Darstellung*, § 8. Abh. der Kgl. Sächs. Akad. der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Bd. II, 1855. Werke, II, S. 255.

selbst folgte. Jüngeren Datums ist seine Übertragung in eine beliebige Ebene. Allmählich werden sich Verfahren eingestellt haben, rechte Winkel auf dem Erdboden abzustecken, etwa für Grundrisse von Tempeln und anderen Gebäuden. Eine solche Methode ist zum Beispiel die Bildung eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Seiten 3, 4 und 5 mittels eines in solche Abschnitte geteilten Seiles. Es ist sehr wahrscheinlich, daß sowohl die alten Ägypter, als auch die Babylonier Kenntnis gerade von diesem Verfahren besaßen.[50]

Die Definition, die Euklid für eine Senkrechte (*κάθετος πρὸς ὀρθὰς* sc. *γωνίας* oder kurz *κάθετος*) giebt (lib. I, def. 10, vgl. S. 17) — als solche Linie, die eine andere Gerade so schneidet, daß gleiche Nebenwinkel entstehen —, ist die noch jetzt übliche. Sie ist ebenso, wie die Einteilung der Winkel in spitze, stumpfe und rechte auf vorplatonische Zeit anzusetzen, vielleicht ägyptischen Ursprungs (Euklid: *γωνία ὀξεῖα, ἀμβλεῖα, ὀρθή* — bei Boëthius [fünftes Jahrh. v. Chr.] *angulus acutus, obtusus* oder *hebes, rectus* oder *normalis* — Leonardo von Pisa 1220: *angulus acutus, amplus vel obtusus, rectus* — Widmann 1489: ſcharpfer, (geſcheffter) weyter, rechter Wincket).

Der Satz von den Nebenwinkeln (Euklid: *αἱ ἐφεξῆς γωνίαι* I, def. 10; Heron: *ἀντικείμεναι* vgl. S. 17 Nr. 10 — *deinceps positi*) muß, mindestens praktisch, den Ägyptern bekannt gewesen sein. Euklid behandelt ihn im ersten Buch unter Nr. 13, die Umkehrung in I, 14. Der Satz von den Scheitelwinkeln (Euklid: *αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι*;[51] *anguli verticales, a. ad verticem*) soll nach Proklus[52] (410—485 n. Chr.; Byzanz, Athen), dem Kommentator Euklid's, von Thales (um 640 Milet — 548 Athen) erfunden worden sein. Proklus beruft sich dabei auf Eudemus (um 334 v. Chr.; Rhodos, Schüler des Aristoteles), der die erste Geschichte der Mathematik geschrieben haben soll. Der Beweis Euklid's (lib. I, 15; unser Schulbeweis) sei der erste strenge gewesen. Trotz dieser bestimmten Überlieferung ist mit Sicherheit anzunehmen, daß Thales den Satz in Ägypten kennen gelernt, ihn vielleicht aber als erster in Griechenland mitgeteilt haben mag. Das deutsche Wort Scheitelwinkel ist durch

[50] Cantor, I[3], S. 62, 102. — [51] Ed. Heiberg, Leipzig 1883, Bd. I, S. 40 Z 7. — [52] Proklus S. 299 Z. 1 ff. (Anm. 6): „*Τοῦτο τοίνυν τὸ θεώρημα δείκνυσιν, ὅτι δύο εὐθειῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσιν, εὑρημένον μὲν, ὡς φησὶν Εὔδημος, ὑπὸ Θαλοῦ πρώτου, τῆς δὲ ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως ἠξιωμένον παρὰ τῷ στοιχειωτῇ . . .*“ (Dieser Satz sagt aus, daß, wenn zwei Gerade einander schneiden, die Winkel an dem Schnittpunkt gleich sind. Gefunden ist er, wie Eudemus mitteilt, zuerst von Thales; eines leichtfaßlichen Beweises wurde er von dem Elementenverfasser (Euklid) gewürdigt.)

KÄSTNER's *Anfangsgründe*[53] allgemein üblich geworden; bis dahin findet man in der Regel Vertikalwinkel. Das Wort Nebenwinkel verwendet bereits v. WOLFF in seinem gleichnamigen Lehrbuch.[54]

Die Wörter Komplement- und Supplementwinkel gehören ursprünglich nicht der Geometrie, sondern der Trigonometrie an. Es scheint, als ob arabische Astronomen wenigstens für einen Bogen, der einen anderen zu einem Viertelkreis ergänzt, eine besondere Bezeichnung hatten, für die im Lateinischen complementum eintrat. Dieses Wort kommt zwar in einer lateinischen Übersetzung, die PLATO VON TIVOLI im zwölften Jahrhundert von dem sehr bedeutenden astronomischen Werke *De motu stellarum* des Ostarabers ALBATTANI († 929; Damaskus) anfertigte, nicht vor, sondern wird durch Umschreibungen, wie *quod ad perficiendum 90 deficit* (was zur Vollendung von 90° fehlt)[55] ersetzt; auch in den Schriften des LEONARDO PISANO (1202 *liber abaci*; 1220 *practica geometriae*) ist es nicht nachweisbar — aber den beiden großen deutschen Astronomen GEORG v. PEURBACH[56] (1423—1461, Wien) und REGIOMONTANUS[57] (1436—1476; Wien, Italien, Nürnberg), denen gute arabische Quellen zur Verfügung standen, ist es so geläufig, daß man auf älteren Ursprung schließen muß. Durch sie gelangte *Complementum* auch in den sich mit dem Ende des sechzehnten Jahrhunderts in größerer Fülle einstellenden trigonometrischen Lehrbüchern zur Einführung, so bei LANSBERGE 1591, VIETA 1593–4, PITISCUS 1600, SCHWENTER 1618, SNELLIUS 1627, CAVALIERI 1643 u. a.— Das Wort supplementum für einen Bogen (bezw. Winkel), der einen anderen zu einem Halbkreis (180°) ergänzt, ist wahrscheinlich ein von CAVALIERI (1591?—1647, Bologna) erfundenes Kunstwort. Von keinem anderen der eben angeführten Verfasser wird es erwähnt, selbst nicht von SCHWENTER (*Geometria practica*, 1. Aufl. 1618; 2. Aufl. 1627), der eine umfassende Zusammenstellung von Erklärungen damals gebräuchlicher Fachwörter giebt. LANSBERGE (1591, *Geometria*

[53] A. G. KÄSTNER, *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie . . .*, 1. Aufl. 1759, 2. Aufl. 1764 Göttingen. — [54] CHR. Freiherr v. WOLFF, *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*, 1. Aufl. 1710 Magdeburg, Aufl. v. 1750, S. 133. — [55] *Rudimenta astronomiae Alfragani; item Albategnius astronomus peritissimus de motu stellarum cum demonstr. geom. et addit. Johannis de Regiomonte*, Norimbergae 1537, ed. SCHÖNER, S. 14 (aus dem Nachlasse REGIOMONTAN's). — [56] *Tractatus Georgii Peurbachii super propositiones Ptolemaei de Sinubus et chordis. Item compositio tabularum Sinuum per Joannem de Regiomonte. Adjectae sunt et Tabulae sinuum duplices per eundem Regiomontanum*, Norimbergae 1541. — [57] *De triangulis omnimodis* libri quinque (verfaßt um 1464) — ed. SCHÖNER, Norimbergae 1533.

triangulorum) benutzt sogar an einer Stelle die Wendung „*complementum ad semicirculum*“.[58] Hingegen definiert Cavalieri 1643 sofort am Anfang seines trigonometrischen Lehrbuches[59] ausdrücklich nicht nur *complementum*, sondern auch *supplementum* und zwar in dem Sinne, in dem wir es heute noch verwenden. Eingang fand das neue Wort nur schwer. Es fehlt noch im *Lexicon mathematicus* von Vitalis (1668) und im *Cursus mathematicus* von Schott (1674, Frankfurt a. M.).

Die Theorie der Parallellinien gehört zu den Kapiteln der Mathematik, die fast zu allen Zeiten schwebende Fragen bildeten. Ebenbürtig tritt sie hierin der Quadratur des Kreises an die Seite; beide wurden erst im neunzehnten Jahrhundert erledigt.

Der Begriff paralleler Linien (παράλληλος, eigentlich εὐθεῖαι παρ' ἀλλήλας ἠγμέναι — ähnlich wie proportio aus *pro portione*) wird in dreifacher Weise aufgestellt. Euklid (I, def. 35 nach Lorenz' Übersetzung) sagt: „Parallel sind gerade Linien, die, so weit man sie auch an beiden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.“[60] Auf dasselbe kommt hinaus, wenn gefordert wird, daß die Linien sich nicht schneiden, daß sie sich im Unendlichen treffen oder daß sie im Unendlichen einen Punkt gemeinsam haben. Den letzten Formulierungen begegnen wir erst vom siebzehnten Jahrhundert an. So hatte Kepler (1571—1630; Graz, Prag, Linz, Ulm) gelegentlich (1609) die parallelen Geraden als solche bezeichnet, die sich im Unendlichen schneiden.[61] Endgültig führt den unendlich fernen Punkt erst Desargues (1593—1662; Paris, Baumeister) ein;[62] wieder aufgenommen hat ihn Newton (1643 bis

[58] *Geometria Triangulorum*, Lugd. Batav. 1591, lib. IV, Satz 16, S. 197 Z. 7 bis 8. Adrian Metius (*Doctrinae sphaer. libri V*, 1593) sagt bei der Definition des Komplementwinkels noch ausdrücklich: „*Anguli obtusi complementum appellamus residuum quod ipsi deest ad duos rectos.*“ (Das Komplement eines stumpfen Winkels ist der Rest, der ihm an zwei Rechten fehlt) (Ausg. Amsterdam 1632, V. Nr. 14, S. 75.) Ähnlich Pitiscus, *Trigonometria*, Aufl. 1600, lib. I, Nr. XII, S. 3; Snellius, *Doctrina triangulorum canonica*, Lugd. Batav. 1627, I, prop. III, S. 5. — [59] F. B. Cavalieri, *Trigonometria plana et sphaerica, linearis et logarithmica*, Bononiae 1643, S. 2, XII. Noch in der Descriptio von Neper (Anm. 1077) wird supplementum durch *reliquus ad semicirculum angulus* umschrieben. — [60] Euklid, ed. Heiberg, I. def. 33, S. 8 Z. 3—5: „παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.“ [61] *Paralipomena in Vitellionem* IV. 4, Kepler's Werke, ed. Frisch, Vol. II, Frankfurt a. M. und Erlangen 1859, S. 186 unten. — [62] ed. Poudra, I, S. 105 (Anm. 44).

1727; Cambridge, London) in seinen *Principien* von 1687,[63] in größerem Umfange verwendet ihn 1832 STEINER (1796—1863; Berlin).[64] — Die zweite Erklärung hebt hervor, daß die beiden Linien, die man parallel nennt, immer dieselbe Richtung haben oder, besser ausgedrückt, mit einer Transversalen gleiche Winkel bilden. Zum erstenmal findet sich diese Fassung bei VARIGNON (1654—1722, Paris) in seinen nachgelassenen, 1731 im Druck erschienenen *Elementen*;[65] er ist von späteren Verfassern oft wiederholt worden. — Die richtigste Definition dürfte diejenige sein, die die Konstanz des Abstandes zwischen den beiden Geraden hervorhebt. Von POSIDONIUS (128—44 v. Chr.; Rhodos) bereits vorgeschlagen,[66] ist sie doch nicht vor dem sechzehnten Jahrhundert in die Lehrbücher eingedrungen. Sie ist zuerst wieder enthalten in der Geometrie des PETRUS RAMUS (1515—1572; Paris),[67] von dieser aus ist sie dann in eine größere Anzahl von Lehrbüchern des sechzehnten bis achtzehnten Jahrhunderts eingedrungen; vor allem gelangte sie durch WOLFF's *Elemente* zu weiterer Verbreitung.[68]

Das elfte Axiom des ersten Buches EUKLID's (richtiger in anderer Ausgabe: Das fünfte Postulat) sagt aus, daß zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die beiden inneren an einer Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, sich genugsam verlängert an ebenderselben Seite schneiden.[69] Schon die Schöpfer der Grundlagen der Geometrie, deren Resultate EUKLID, wie wir betont, nur zusammenfaßte, mußten die Unmöglichkeit eines Beweises für diesen Satz eingesehen haben; sonst würden sie ihn nicht an die Stelle gesetzt haben, wo wir ihn heute finden. Aber zu allen Zeiten hat es Gelehrte gegeben, die sich mit der Entdeckung seines Beweises abquälten. Den Reigen der uns bekannten Bearbeiter eröffnete PTOLEMÄUS[70] (beobachtete zwischen 125 und 151

[63] *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. I, Lemma 22, S. 87 Z. 17—18 „*Lineae parallelae sunt quae ad punctum infinite distans tendunt.*“ — [64] STEINER, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berl. 1832, cap. I, § 2. — Gesammelte Werke, Berl. 1881—82, I, S. 241. — [65] *Élémens de mathématique*, Paris 1731, II, S. 17 nach CANTOR, III², S. 506. — [66] PROKLUS, ed. FRIEDLEIN, S. 176 Z. 6 ff. (Anm. 6). — [67] *Petri Rami Arithmeticae libri duo, geometriae XXVII a Lazaro Schonero recogniti*, Francofurti 1592. — [68] CHR. v. WOLFF, *Elementa Matheseos universae*, Halle 1717, Teil I, Geom. § 78. — [69] EUKLID, ed. HEIBERG, I, S. 8 Z. 15—19: „*Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.*“ — [70] PROKLUS, ed. FRIEDLEIN, S. 362 Z. 12 ff. (Anm. 6).

n. Chr. in Alexandria), dem vermeintlichen Ziele am nächsten kam LEGENDRE (1752—1833; Paris).[71]

PTOLEMÄUS zeigte, daß, wenn zwei innere entgegengesetzte Winkel an zwei von einer dritten geschnittenen Geraden zusammen zwei Rechte betragen, dann dies auch auf der anderen Seite der Schneidenden der Fall sein müsse. Liegt demnach auf der einen Seite ein Schnittpunkt, so muß auch auf der anderen Seite ein solcher liegen, d. h. die beiden Geraden müßten zusammenfallen, was nicht eintritt. Dieser ptolemäische Beweis ist neuerdings (BERTRAND, 1778)[72] wieder von der Elementargeometrie aufgenommen worden und wird oft in den Schulen so behandelt, daß man die Kongruenz, also die Deckungsmöglichkeit der beiden, von den Parallelen eingeschlossenen, ebenen Streifen links und rechts von der Schneidenden anschaulich zu machen sucht.

Schon das Altertum (PROKLUS) hatte den inneren Zusammenhang des elften Axioms mit dem Satze von der Winkelsumme im Dreiecke erkannt. Hierauf baute LEGENDRE weiter und wies unanfechtbar nach[71], daß die Winkelsumme nicht größer als 180° sein kann, und daß, wenn die Winkelsumme bei einem Dreiecke 180° beträgt, dies dann bei jedem der Fall sei. Der fehlende Nachweis, daß die Winkelsumme auch nicht kleiner als 180° sein könne, mißlang ihm ebenso, wie allen seinen Vorgängern.

Man hatte einen Ausweg aus der schwierigen Lage darin zu finden gesucht, daß man das Parallelenaxiom fallen ließ und andere Forderungen dafür aufstellte, ein Mittel, durch das man indes nichts besserte, sondern nur die Schwierigkeit auf ein anderes Gebiet übertrug. So ersetzte WALLIS (1616—1703, Prof. der Geometrie in Oxford) das elfte Axiom durch die Forderung, daß sich zu jedem Dreieck ein ähnliches in beliebig großem Maßstabe zeichnen lasse;[73] diesen Gedanken nahmen CARNOT und LAPLACE, in neuester Zeit DELBOEUF wieder auf.[74] Auch LEGENDRE

[71] LEGENDRE, 3. Aufl. der *Élémens* (1. Aufl. Paris 1794), Géométrie Note 2 und Mém. de Paris Bd. XII, 1833, S. 365 ff. Es hat sich durch Untersuchungen BELTRAMIS (*Un precursore italiano di Legendre et di Lobatschefsky.* Atti della Reale Academia dei Lincei, 1889, Serie IV, Vol. V, S. 441—448) herausgestellt, daß die Sätze LEGENDRE's wie auch eine Anzahl der Resultate von LOBATSCHEFSKIJ und BOLYAI schon einmal in einem Werke des Jesuiten SACCHERI (1687—1733, Turin, Pavia): *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Mediolani 1733, abgeleitet sind. Vgl. hierzu und überhaupt für die Geschichte der Parallelentheorie: STÄCKEL u. ENGEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis Gauß*, Leipzig 1895. — [72] *Développement nouveau* etc. Bd. II, prop. VII, S. 17 (Anm. 46). — [73] *De postulato quinto et definitione quinta lib. 6 Euclidis disceptatio geometrica.* Werke Bd. II, Oxoniae 1693, S. 665—678. — [74] LAPLACE, *Exposition du système*

(1823)[75] machte einen derartigen Vorschlag und nahm an, daß, wenn innerhalb eines Winkelraumes irgend ein Punkt gegeben ist, es stets möglich sei, durch ihn eine Gerade zu ziehen, die die beiden Schenkel des Winkels schneiden; er hatte aber auch hierin in Lorenz (1791) schon einen Vorgänger.[76]

Überall vergebliches Bemühen! Die Lösung brachte Gauss (1777—1855, Göttingen). Ihm war es (seit 1792)[77] zur Gewißheit geworden — was andere bloß ahnten[78] —, daß das elfte Axiom nur eine Erfahrungsthatsache sei, ein Beweis somit zu den Unmöglichkeiten gehöre. Das elfte Axiom deckt sich mit der eindeutig zu lösenden Forderung, durch einen Punkt außerhalb einer Geraden eine Parallele zu dieser Geraden zu ziehen. Gauss[79] und nach ihm

du monde, 5 éd., Paris 1824, L. V, chap. 5 note. Delboeuf, *Prolegomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats*, Liège 1860. Delboeuf, *L'ancienne et les nouvelles géométries*, *Revue philosophique*, dirigée per Th. Ribot, Bd. 36, 1893, S. 449—484. Bd. 37, 1894, S. 353—383 — nach Engel u. Stäckel, S. 19. — [75] In der 12. Aufl. seiner Elemente, 1823. — [76] Lorenz, *Grundriß der reinen Mathematik*, Helmstedt 1791; vgl. Baltzer, *Über die Hypothese der Parallelentheorie*, Crelle's Journal, Bd. 73, Berlin 1871, S. 372—373. — [77] Nach Andeutungen in Briefen an Bessel und Schumacher 1829, 1831 und an Wolfgang Bolyai 1799 — vgl. Stäckel u. Engel, S. 215. — [78] So G. S. Klügel, *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*, Dissertation, Göttingen 1763, S. 19: „*Möglich wäre es freilich, daß Gerade, die sich nicht schneiden, von einander abweichen. Daß so etwas widersinnig ist, wissen wir nicht infolge strenger Schlüsse oder vermöge deutlicher Begriffe von der Geraden und der krummen Linie, vielmehr durch die Erfahrung und durch das Urteil unserer Augen*"; nach Stäckel und Engel, S. 140. Auch in Lambert (1728—1777; Oberbaurat in Berlin) ist ein Vorgänger in den Theorien von Gauss, Lobaschefskij und Bolyai entdeckt worden. Seine Untersuchungen sind in Hindenburg's Archiv für reine und angewandte Mathematik nach seinem Tode durch Joh. Bernoulli veröffentlicht (Jahrg. 1786, II, S. 137—164, III, S. 325 bis 358), später aber gänzlich in Vergessenheit geraten. (Stäckel u. Engel, S. 139—207). Dasselbe Schicksal traf die Untersuchungen Schweikart's (1780—1857; Marburg, Königsberg) und seines Neffen Taurinus (1794—1874, Köln); nur der letztere publizierte seine Resultate: 1825 *Theorie der Parallellinien*; 1826 *Geometriae prima elementa* (Stäckel u. Engel, S. 239 ff.) — [79] α) Brief v. Gauss an Bolyai, 1799, Gött., Berichte, Bd. 22, 1877. β) Gauss' Anzeigen in den Götting. gelehrt. Anzeigen, Bd. II, 1816, S. 617—622 (Werke IV, 364 ff.) zu Schwab, *Commentatio in primum elementorum Euclidis librum*, und Metternich, *Vollständige Theorie der Parallel-Linien*, in den Gött. gel. Anzeigen Bd. III, 1822, S. 1725—1726 (Werke IV, S. 368 ff.) zu C. R. Müller, *Das Parallelenaxiom*. γ) Gauss' Briefe an Bessel u. umgekehrt, 1829—1830, Gött. Berichte, Bd. 22; 1877. δ) Gauss' Briefe an Schumacher und umgekehrt (1831, 1846). (Briefwechsel, herausgegeben v. Peters, Bd. II, Altona 1860, S. 255, 266, Bd. V, Altona 1863, S. 246). Vgl. Stäckel u. Engel, S. 219 ff.

Lobatschefskij[80] (1793—1856; Kasan) und J. Bolyai[81] (1802—1860; Klausenburg, Maros-Vásárhely) nahmen an, daß zwei Parallelen möglich seien, und entwickelten auf Grund dieser Annahme eine neue Geometrie, in der sie auf keinen Widerspruch stießen (hyperbolische Geometrie). Ähnlich setzte Riemann (1826—1866, Göttingen) 1854 voraus,[82] daß keine Parallele durch einen Punkt zu einer Geraden gezogen werden könne, und vermochte auch mit dieser Annahme eine einwurfsfreie Geometrie (elliptische G.) zu begründen. Felix Klein[83] lehrte 1871 die Unmöglichkeit von Widersprüchen in den nicht-euklidischen Geometrieen, womit das Suchen nach Beweisen für das euklidische Axiom endgültig abgeschnitten wurde. — —

Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so entstehen an den zwei Schnittpunkten im ganzen acht Winkel, die paarweis betrachtet, je einer an je einem Schnittpunkt, verschiedene Lagen zu einander besitzen. In der Benennung dieser Winkel herrscht bedauerlicherweise noch heute ziemliche Uneinigkeit, die für den Schulunterricht durchaus verwerflich ist. Es scheint, als ob man sich jetzt auf die Namen

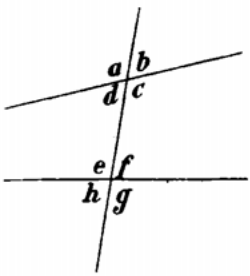

Fig. 1.

1. Gegenwinkel $(a, e-b, f-c, g-d, h)$,
2. Wechselwinkel $(a, g-b, h-c, e-d, f)$,
3. entgegengesetzte Winkel $(a, h-b, g-c, f-d, e)$,
4. verschränkte Winkel $(a, f-b, e-c, h-d, g)$

einigen will. Schön sind diese Namen nicht; äußerlich haben schon 1. und 3. den Gleichklang gegen sich. Aber wenn in jedem Lehrbuch neue Vorschläge gemacht werden, kommt man erst recht nicht zum

[80] Lobatschefskij *Neue Anfangsgründe mit einer vollständigen Theorie der Parallelen* (im Kasanschen Boten 1829; in den gelehrten Schriften der Universität Kasan, 1835 bis 1838); *Géométrie imaginaire* 1837 (Crelle's Journal, Bd. 17, Berlin 1837, S. 295—320); *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Berlin 1840; franz. v. Houël, Paris 1866); *Pangeometria* (2. Aufl., Neapel 1874). — Collect. compl. d. Oeuvres géométr. Bd. I, Kasan 1883, Bd. II, Kasan 1886. — [81] I. Bolyai, Appendix zu *Tentamen in elementa mattheseos*, Maros-Vásárhely, 1832 (franz. v. Houël: *La science absolue de l'espace* etc. Paris 1868; deutsch durch Frischauf, Leipzig 1872). — [82] *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationsschrift, 10. VI. 1854. Ges. Werke, Leipzig 1876, S. 254 ff. — [83] F. Klein, *Über die Nicht-Euklidische Geometrie*, Gött. Nachrichten 1871, Nr. 17; Math. Annalen 4, Leipzig 1871, S. 575—625; Bd. 6, Leipzig 1873, S. 112—145.

Ziel. Einheit in der Nomenklatur thut not; darum nehme man an, was am meisten verbreitet ist. — Der Name Wechselwinkel geht auf EUKLID I, 27 selbst zurück: *αἱ ἐναλλάξ γωνίαι*[84] (*alterni anguli*); doch werden darunter bei ihm nur die inneren Paare *d, f* bezw. *c, e* verstanden. Die Gegenwinkel *b, f* (analog die drei anderen Paare) nennt EUKLID „den äußeren Winkel *b* und den ihm an derselben Seite gegenüberliegenden inneren Winkel *f*".[85] Von Gruppe 3. kennt er nur *c, f* und *d, e* als „die beiden an einerlei Seite liegenden inneren Winkel".[86] Der Name „entgegengesetzte Winkel" erscheint in KÄSTNER's *Anfangsgründen*;[87] ob zum erstenmal, ist nicht sicher. Das Wort Gegenwinkel[88] kannten weder STURM 1707,[163] WOLFF 1750[54] noch KÄSTNER 1764,[53] KARSTEN 1767,[164] SEGNER 1773,[301] KLÜGEL 1798,[162] BUGGE-TOBIESEN 1800[104] in ihren Lehrbüchern; bei KOSACK 1852 ist es bereits in Übung.[89]

Die Sätze von den Winkeln an geschnittenen Parallelen sind bei EUKLID (I, 27—30) bereits vollständig vorhanden; sie sind in der pythagoreischen Schule ausgebildet worden, die zu den Flächenanlegungen ihrer sicher bedurfte.

2. Das Dreieck. — Die Kongruenz.

Die Einteilung der Dreiecke nach den Seiten und Winkeln hatte EUKLID (um 300 v. Chr.) bereits vorgefunden (*ἰσόπλευρον, ἰσοσκελές, σκαληνόν = aequilaterum, aequicrurum, scalenum*; *ὀρθογώνιον, ἀμβλυγώνιον, ὀξύγωνιον = rectangulum, obtusiangulum, acutiangulum*). Vielleicht ist diese Gruppierung schon bei den Ägyptern gebräuchlich gewesen; wenigstens enthält das altägyptische Rechenbuch des AHMES (zwanzigstes bis siebzehntes Jahrhundert v. Chr.)[3] eine größere Reihe von Aufgaben, die speziell das gleichschenklige Dreieck zu Grunde legen.

Die Höhe eines Dreiecks führt EUKLID nicht vor Beginn der Flächenlehre ein (lib. VI, def. 4);[90] selbstverständlich wird er

[84] Ed. HEIBERG, I, S. 66 Z. 19 — bei LEONARDO PISANO, *Pract. geom.* 1220, II, S. 2 (Anm. 38): „*anguli, qui permutati sunt, sibi invicem equantur.*" — [85] Ed. HEIBERG, I, S. 68 Z. 14—15: „*ἡ ἐκτὸς γωνία καὶ ἡ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.*" — [86] Daselbst. Z. 16: „*αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο γωνίαι.*" — [87] II. Aufl. 1764, S. 180 (Anm. 53). — [88] LEONARDO VON PISA, 1220, *Practica geometriae*, ed. BONCOMPAGNI, Rom 1862, II, S. 2: „*exterior angulus est interiori anguli sibi opposito equalis.*" — [89] KOSACK, *Beiträge zu einer system. Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung*, Nordhausen 1852 (nach SCHOTTEN, II, S. 376, vgl. Anm. 35). — [90] VI, def. 4, ed. HEIBERG, II, Leipz. 1884, S. 72 Z. 11—12: „*Ὕψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς*

auch die verschiedenen Lagen einer Höhe (innerhalb oder außerhalb des Dreiecks) gekannt haben, wenn auch erst HERON (erstes Jahrhundert v. Chr.) eingehender darüber spricht.[91] Die Projektion einer Seite auf eine andere nennt HERON *ἀποτομή*[92] oder, falls sie auf die Verlängerung fällt, *ἐκβληθεῖσα*.[93] Im Mittelalter stellt sich dafür seit LEONARDO v. PISA (1220 *Practica geometriae*)[94] und JORDANUS NEMORARIUS († 1237)[95] allgemein das Wort *casus* ein (z. B. bei REGIOMONTAN, WIDMANN). Für Höhe sagt WIDMANN (1489) *cathetus*, gelegentlich auch *diameter*.

Für Basis wird das deutsche Wort Grundlinie seit SIMON JACOB (1565, Rechenbuch) üblich.[96]

Für das rechtwinklige Dreieck sind jetzt die Namen Hypotenuse und Kathete üblich. Das Wort *ὑποτείνουσα* (die darüber spannende) wird von den Alten im eigentlichen Sinne des Wortes gebraucht. So bezeichnet HERON, nachdem er die Maße zweier Seiten eines Dreiecks genannt hat, die dritte Seite als *ὑποτείνουσα*, ganz gleich, ob das Dreieck schiefwinklig,[97] recht- oder stumpfwinklig[98] ist; jedoch ist die Reihenfolge in den letzten beiden Dreiecksgattungen immer so, daß die größte Seite zuletzt genannt, nie also etwa eine Kathete oder eine kleinere Seite im stumpfwinkligen Dreieck mit *ὑποτείνουσα* aufgeführt wird. Auch beim Viereck wird *ὑποτείνουσα* ähnlich für die vierte Seite verwendet, wenn drei andere Seiten zuerst ins Auge gefaßt sind.[99] — Bei BOËTHIUS (480 Rom — 524 Pavia; römischer Staatsmann und Gelehrter) ist die Bezeichnung *hypotenusa* bereits für die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite fest geworden. Bezeichnet er die einem spitzen (bezw. stumpfen) Winkel gegenüberliegende Seite gelegentlich[100] mit *hypotenusa major* und *minor*, so thut er dies nur, nachdem er durch Fällen eines Lotes zwei rechtwinklige Dreiecke erhalten hat, in denen die betreffenden Seiten nun wirklich Hypo-

ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.“ (Höhe ist bei jeder Figur das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Lot.) — [91] HERON, *Geometrie*, cap. 24 ff.; für die aus dem Dreieck herausfallende Höhe siehe cap. 32, ed. HULTSCH, Berl. 1863, S. 72. — [92] HERON, *Geometrie*, cap. 12, § 4; ed. HULTSCH, S. 56 Z. 23 u. ö. — [93] Daselbst cap. 32, § 2, S. 73 Z. 5. — [94] LEONARDO PISANO, II, S. 35 Z. 4, 5 u. ö. (Anm. 88). — [95] JORDANUS NEMORARIUS, *De triangulis* IV, prop. 25; ed. CURTZE, S. 45 (Anm. 34). — [96] Rechenbuch, 1565, Frankfurt a. M., S. 282: „Baſis wirt genennet ein jede Linj | ſo gantz im grundt ligt | wirdt derhalben etwan genennet ein Grundtlinj.“ — [97] HERON, *Geometrie*, cap. 24, S. 63 Z. 28 (Anm. 2); so auch bei PTOLEMAEUS (zwischen 125 u. 151 n. Chr. in Alexandria), z. B. ed. TALMA, Paris 1813—1816, S. 36 Z. 16. — [98] HERON, *Geometrie*, cap. 32, S. 72 Z. 25. — [99] Daselbst cap. 82, S. 109 Z. 8. — [100] BOËTIUS, *Ars geom.* II, S. 413 Z. 18, S. 414 Z. 19—20 (Anm. 37).

tenusen sind. Dieselbe spezielle Verwendung des Wortes findet sich auch in den feldmesserischen Schriften des M. Junius Nipsus (um 180 n. Chr.).[101] Im Mittelalter erscheint hypotenusa (oft hypothenusa, wie bei Widmann 1489, im *Lexicon mathematicum* von Vitalis, Paris 1668) nur in Verbindung mit dem rechtwinkligen Dreieck. Pitiscus (*Trigonometrie*, Aufl. v. 1610, I, 30) definiert geradezu: „*In triangulis rectangulis subtendens rectum speciatim hypotenusa dicitur, includentia uero rectum perpendiculum et basis: pro libitu.*“

Das Wort Kathete hat seine spezielle Bedeutung sehr spät erhalten. *Κάθετος* (*ἡ κάθετος* sc. *εὐθεῖα γραμμή*, die herabgelassene Gerade; *ἡ κάθετος*, techn. Senkblei) ist ursprünglich ein Fachausdruck für „Lot“ und wird so bereits vom ältesten, uns vollständig erhaltenen griechischen Schriftsteller Autolykos v. Pitane (um 330 v. Chr.)[102] gebraucht (siehe auch Euklid, S. 22). Seit ältesten Zeiten, vielleicht schon bei ägyptischen Mathematikern, stellte man sich ein rechtwinkliges Dreieck so hin, daß der eine Schenkel des rechten Winkels Grundlinie ist, wodurch der andere Schenkel die Höhe wird. So erklärt sich die von Heron ab bis zum achtzehnten Jahrhundert hin gebräuchliche Zusammenstellung *βάσις*, *κάθετος*, *ὑποτείνουσα* (*basis, cathetus, hypoteinusa*) für die Seiten eines solchen Dreieckes. *Cathetus* behielt dabei seine Bedeutung Lot völlig bei, wird daher bei mittelalterlichen Mathematikern (wie Vieta) oft durch *perpendiculum* ersetzt. Merkwürdigerweise wird von Boëthius an[103] *cathetus* als masculinum angesehen. Noch das achtzehnte Jahrhundert sagt der *cathetus* (so v. Wolff, *Elementa* 1717,[68] Lambert 1765,[544] Karsten 1767 *Anfangsgründe*[163]). Im *Vollständigen mathematischen Lexikon*, Leipzig 1747, Gleditsch'sche Buchhdlg., S. 283 (Verfasser ungenannt) ist noch die Trennung zwischen der *basis* und dem *cathetus* im rechtwinkligen Dreieck gemacht, aber betont, daß jeder der beiden Schenkel des rechten Winkels der *cathetus* sein könne. Demgemäß entscheidet sich der Sprachgebrauch am Ende des achtzehnten Jahrhunderts für die Mehrzahl „die Katheten“; für den Singular stellt sich mit Beginn des neuen Jahrhunderts daraus „die Kathete“ ein.[104] — —

Die Lehre von dem Dreieck, den Größenverhältnissen von Seiten und Winkeln, der Kongruenz mit ihren Anwendungen ist

[101] ed. Blume etc. S. 297 (Anm. 36). — [102] Autolycus, ed. Hultsch, Leipzig 1885, vgl. Index. — [103] Boëtius, *Ars geom.*, lib. II, S. 408 Z. 12 (Anm. 37): „*cathetus pari numero insignitus, id est VIII pedibus mensuratus*“. — [104] So „*Anfangsgründe*“ von Bugge, deutsch v. Tobiesen, 1800, Altona S. 332.

von PYTHAGORAS und seinen Schülern in der Hauptsache durchgeführt worden. Ihre Forschungen hat EUKLID in dem ersten Buche seiner Elemente zusammengestellt.

Genaueres wissen wir nur von einzelnen Sätzen, wie über den Satz von der Winkelsumme im Dreieck (EUKLID, I, 32). PROKLUS, der Kommentator EUKLID's,[6] erzählt,[105] daß EUDEMUS zufolge (Rhodos, um 334 v. Chr., Schüler von ARISTOTELES; Verfasser der ersten Geschichte der Mathematik) die Pythagoreer diesen Satz entdeckt und mittels einer Parallelen, die sie durch eine Ecke zu der Gegenseite zogen, bewiesen haben. Eine andere Überlieferung führt uns noch weiter in die Vorgeschichte zurück. Der Bericht des GEMINUS,[106] von EUTOKIUS (ASKALON, 480 v. Chr. geboren) mitgeteilt,[107] sagt, daß die Alten das Theorem der Winkelsumme für jede besondere Form des Dreiecks, zuerst für das gleichseitige, dann für das gleichschenklige und zuletzt für das ungleichseitige getrennt bewiesen haben. Es würde sich hieraus eine Hinaufdatierung bis in die Zeit des THALES (um 624 Milet — 548 Athen), vielleicht sogar in die ägyptische Zeit, rechtfertigen. EUKLID beweist in dem Teil seines ersten Buches, dessen Sätze vom Parallelentheorem unabhängig sind, zunächst (I, 17), daß zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, dann später (I, 32) präzisiert er ihn dahin, daß die Winkelsumme zwei Rechte beträgt. Den Beweis vollführt er mit Benutzung des Satzes vom Außenwinkel, indem er diesen durch eine Parallele zu der Gegenseite in passende Stücke zerlegt.

Der moderne Beweis für die Winkelsumme mit Hilfe einer Geraden, die, der Reihe nach an je einem Endpunkte um den zugehörigen Außenwinkel gedreht, wieder in die Anfangslage zurückkommt — woraus sich die Gesamtdrehung über die Außenwinkel hinweg gleich vier Rechten, also die Summe der Innenwinkel gleich 180^0 ergiebt — erscheint zum erstenmal in THIBAUT's *Grundriß der reinen Mathematik*[45] (2. Aufl. 1809, S. 177—179; noch nicht in der 1. Aufl. von 1801). Seine Verallgemeinerung auf Vielecke ist durch HOFFMANN 1873[108] vorgenommen worden.

[105] PROKLUS, ed. FRIEDLEIN, S. 379 Z. 1—16 (Anm. 6). — [106] GEMINUS (*Γεμῖνος* oder *Γέμινος*) lebte wahrscheinlich um 77 n. Chr. auf Rhodus. Aus einem uns unbekannten Werk desselben entlehnen sowohl PROKLUS (410—485 n. Chr.) wie EUTOKIUS (geb. 480 n. Chr.) geschichtliche Notizen. CANTOR, I^b, S. 378 bis 381. — [107] EUTOKIUS, Kommentar zu den *Conica* des APPOLONIUS, ed. HALLEY, Oxford 1710, S. 9 Z. 7 ff. APOLLONIUS, ed. HEIBERG, Leipzig 1891 bis 1893, Bd. II, S. 170 Z. 4 ff.; vgl. HANKEL, S. 95 f. (Anm. 23). — [108] HOFFMANN's Zeitschrift, IV, 1873, S. 106; gegen SCHOTTEN, I, S. 366 (Anm. 35).

Den Satz vom Außenwinkel soll PHILIPPUS v. Mende (Ägypten; um 378 v. Chr., Schüler PLATON's) gefunden haben.[109] Das Wort Außenwinkel entstand erst im neunzehnten Jahrhundert; die Elementarmathematiker des achtzehnten Jahrhunderts, v. WOLFF 1750,[54] KARSTEN 1767,[164] BUGGE 1800[104] u. a. sagen nach dem Vorbilde EUKLID's (*ἡ ἐκτὸς γωνία*)[110] „der äußere Winkel".

Der Satz von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreiecke gehört zu den mathematischen Elementartheoremen, deren Erfindung von den Alten dem THALES von Milet zugeschrieben wird.[111] So wörtlich wird diese Überlieferung aber nicht zu verstehen sein. THALES hat den Satz wahrscheinlich während seines ägyptischen Aufenthaltes kennen gelernt und wird ihn nur seinen Landsleuten zuerst überbracht haben; vielleicht ist aber der erste strenge Beweis sein Eigentum. — Der Beweis EUKLID's (I, 5) ist ziemlich umständlich. Er verlängert die Schenkel AB und AC um die gleichen Stücke BF und CG und folgert zunächst die Kongruenz der Dreiecke AFC und AGB. Mit Hilfe der dadurch erhaltenen Gleichheiten $FC = BG$ und $\sphericalangle BFC = \sphericalangle CGB$ wird nun die Kongruenz der Dreiecke FBC und GCB, dadurch die Übereinstimmung der Winkel FBC und GCB und sonach auch ihrer Nebenwinkel ABC und ACB nachgewiesen.

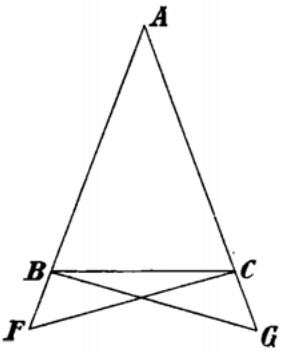

Fig. 2.

Die Beweismethode, nach der das Dreieck ABC umgeklappt und auf sich selbst zur Deckung gebracht wird, scheint PAPPUS (Ende des dritten Jahrhunderts n. Chr., Alexandria) in seinen Bemerkungen zu EUKLID zuerst angewendet zu haben; wenigstens deuten neuere Forscher[112] eine Stelle bei PROKLUS,[113] die aus dem nicht erhaltenen Kommentar des PAPPUS stammt, in diesem Sinne. Das Drehungsprinzip wird im Mittelalter nur vereinzelt gebraucht, z. B. von VARIGNON (1654

[109] FELIX MÜLLER, *Zeittafeln*, Leipzig 1892, S. 13. — [110] ed. HEIBERG, I, S. 76 Z. 15. — [111] PROKLUS, S. 250 Z. 20 ff. (Anm. 6): „*Τῷ μὲν οὖν Θαλῇ τῷ παλαιῷ πολλῶν τε ἄλλων εὑρέσεως ἕνεκα καὶ τοῦδε τοῦ θεωρήματος χάρις. λέγεται γὰρ δὴ πρῶτος ἐκεῖνος ἐπιστῆσαι καὶ εἰπεῖν, ὡς ἄρα παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσίν.*" (Dem alten THALES dankt man die Erfindung vieler anderer, insbesondere auch dieses Satzes. Er soll nämlich zuerst erfaßt und ausgesprochen haben, daß in jedem gleichschenkligen Dreiecke die Winkel an der Grundlinie gleich sind). — [112] HEIBERG, *Litterarische Studien über Euclid*, S. 163 (Anm. 5). — [113] PROKLUS, S. 249 Z. 20 — S. 250 Z. 20 (Anm. 6).

bis 1722, Paris) in seinen *Elementen* von 1731;[114] in der Neuzeit ist es zu einem wichtigen und anschaulichen Beweismittel geworden.[115]

Die Umkehrung des Satzes von den Basiswinkeln giebt EUKLID Gelegenheit zu dem ersten bei ihm auftretenden indirekten Beweis (I, 6). —

Der Begriff der Kongruenz von ebenen Figuren wird von EUKLID, also auch von seinen Vorgängern, nicht scharf aufgestellt. Unter gleich versteht EUKLID stets nur flächengleich. Vorhanden ist der Begriff indes; denn er operiert mit den ihm bekannten drei Kongruenzsätzen genau so, wie wir es heute zu thun pflegen. Heißt es Buch I, Satz 4: „Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zwei Seiten des anderen, jede für sich, gleich sind und ein Winkel einem Winkel gleich ist, der nämlich, den die gleichen Seiten einschließen: dann ist auch die dritte Seite der dritten gleich; auch sind die Dreiecke selbst einander gleich; und von den übrigen Winkeln sind die, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, ebenfalls einander gleich",[116] so fehlt eben zu dem Begriff der Kongruenz nur das Wort. Dagegen tritt in der Stereometrie bei EUKLID ein Fachausdruck auf, der zugleich auch den Begriff des Symmetrisch-Kongruenten umfaßt; in der zehnten Definition des 11. Buches heißt es nämlich: „Gleiche und ähnliche Körper (*ἴσα καὶ ὅμοια στερεά*) sind die, welche von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebenen begrenzt werden."

Der Fachausdruck kongruent ist abzuleiten von dem Worte congruere (= übereinstimmen), das in den lateinisch geschriebenen Lehrbüchern verwendet wird. v. WOLFF (1717, *Elementa*)[68] definiert: „*Congruere dicuntur, quorum iidem termini esse possunt*", KARSTEN 1760[299] (*Mathesis theoretica* § 14): „*Extensa congruere dicuntur, quorum extrema, per quae terminantur, omnia coincidunt*", und (daselbst § 15): „*Extensa, quae sibi mutua congruunt, sint aequalia.* Bei beiden kommt aber in den eigentlichen Kongruenzsätzen das Wort *congruens* nicht vor. In den deutschen Bearbeitungen von WOLFF 1750,[54] KÄSTNER 1764,[53] KARSTEN 1767,[164] SEGNER 1773,[301] BUGGE 1800[104] fehlt dieser terminus ebenfalls noch; für ihn tritt das euklidische gleich und ähnlich ein.

[114] *Élémens de mathématique*, Teil II, S. 10; nach CANTOR, III², S. 506. — [115] Vgl. Dr. FRESENIUS, HOFFMANN's Zeitschrift, II, 1871, S. 1. — [116] ed. HEIBERG, I, S. 16: „*Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.*"

Erst mit dem neunzehnten Jahrhundert beginnt sein allmählicher Einzug in die Sprache der Elementargeometrie, so bei THIBAUT, *Grundriß der reinen Mathematik*,[45] 1. Aufl. 1801, S. 163; v. FORSTNER, *Sphärik*, 1827, S. 10, u. a. Über das Kongruenzzeichen siehe S. 12.

Den Kongruenzsatz, der die Gleichheit einer Seite und der beiden anliegenden Winkel voraussetzt (kurz: W.S.W.-satz),[22] weist EUDEMUS,[4] wie PROKLUS[6] erzählt,[117] dem THALES zu; die Kenntnisse des THALES sind aber, wie wiederholt bemerkt, ägyptischer Herkunft. EUDEMUS folgert seine Behauptung aus den Entfernungsbestimmungen, die jener vollzogen habe, da bei ihnen die Kenntnis dieses Satzes Voraussetzung sei. THALES soll nämlich gezeigt haben, wie man die Entfernung eines Schiffes aus dem Komplement des Depressionswinkels, unter dem es von der Spitze eines Turmes mit bekannter Höhe erscheint, finden könne. Nach anderer Überlieferung[118] habe THALES auch die Höhen von Gegenständen (wie einer Pyramide) angeben können, indem er ihren Schatten zu einer Zeit maß, zu der die Größe aller Gegenstände ihrer Schattenlänge gleich ist. Dritte Quellen[119] wollen wissen, daß er die Anwendbarkeit dieser Methode für jede beliebige Zeit erweitert habe, indem er Vergleiche mit einem der Länge nach bekannten Stabe und der Größe seines Schattens anstellte. Schon daß diese feldmesserische Aufgabe bei HERON[120] (erstes Jahrhundert v. Chr.), der sich sehr eng ägyptischen Mustern anlehnt, wieder auftaucht, läßt die Bezugsquelle des THALES klar erkennen.

Fest steht, daß schon die Pythagoreer einige Sätze zum Nachweis der Kongruenz, die sie zu ihren Flächenanlegungen brauchten, gekannt haben. Bei EUKLID sind es ihrer drei: S.W.S., S.S.S. und

[117] PROKLUS, S. 352 Z. 13—18 (Anm. 6): „*Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτο ἀνάγει τὸ θεώρημα. τὴν γὰρ τῶν ἐν θαλάττῃ πλοίων ἀπόστασιν δι' οὗ τρόπου φασὶν αὐτὸν δεικνύναι τούτῳ προσχρῆσθαί φησιν ἀναγκαῖον.*“ (EUDEMUS führt in seiner Geschichte der Geometrie diesen Satz auf THALES zurück; er behauptet, daß jener ihn bei dem Verfahren, mittels dessen er dem Bericht nach die Entfernung der Schiffe auf dem Meere bestimmte, notwendigerweise gebraucht habe.) — [118] LAERTIUS DIOGENES I, 27, ed. COBET, Paris 1830, S. 6 letzte Zeilen; ferner PLINIUS, *Historia naturalis*, XXXVI, cap. 17, ed. DETLEFSEN, Vol. V, Berlin 1873, lib. VII, § 82, S. 170 Z. 82—84: „*Mensuram altitudinis earum* (sc. pyramidum) *omnemque similem deprehendere invenit Thales Milesius umbram metiendo qua hora par esse corpori solet.*“ (Die Höhe der Pyramiden oder eine ähnliche zu bestimmen, gelang dem Milesier Thales dadurch, daß er ihren Schatten zu der Zeit maß, zu der er dem Körper gleich zu sein pflegt.) — [119] PLUTARCH, *Moralia*, *Septem sapientium convivium*, ed. DÜBNER-DIDOT, Bd. III, Paris 1885, *Moralia*, Bd. I, S. 174 Z. 39 ff. — [120] HERON, *Stereometrie*, cap. 31, S. 180 Z. 6—18 (Anm. 2).

S.W.W. (bezw. W.S.W.); er leitet sie jedoch nicht im Zusammenhange ab.[121] An der Spitze steht der S.W.S.-satz, Buch I, Nr. 4; er wird durch Aufeinanderlegen der Dreiecke, so daß Punkt für Punkt und Seite für Seite sich deckt, bewiesen. Der S.S.S.-satz, der im Satz 8 folgt (mit einem Hilfssatz Nr. 7), wird ebenso wie der erst im 26. Satz gegebene S.W.W.-satz auf indirektem Wege erledigt. Proklus fügt in seinen Scholien zum W.S.W.-satz einen Beweis durch Aneinanderlegen der beiden Dreiecke mit zwei entsprechenden Seiten hinzu; er führt ihn durch eine Hilfslinie auf die Betrachtung zweier Paare gleichschenkliger Dreiecke zurück — vgl. die modernen Schulbeweise für den S.S.S.- und S.S.W.-satz.

Merkwürdig ist, daß der sogenannte vierte Kongruenzsatz, der die Gleichheit zweier Seitenpaare und eines Gegenwinkelpaares erfordert, S.S.W.-satz, in Euklid's Elementen fehlt; um so auffallender ist das, als der entsprechende Ähnlichkeitssatz in seiner vollen Allgemeinheit, nicht nur unter der Annahme, daß der Winkel der größeren Seite gegenüberliegt, sondern auch mit der Bedingung, daß die anderen Gegenwinkel gleichartig sind, ausgesprochen wird (Buch VI, Satz 7).[122] Man könnte hervorheben, daß Euklid nur solche Sätze — dem Charakter von Elementen gemäß — zusammengestellt habe, auf die man sich bei Beweisen späterer Sätze des Systems zu berufen hat; da der S.S.W.-satz nirgends herangezogen zu werden braucht, rechtfertige dies sein Weglassen. Aber das Gleiche kann man von dem zugehörigen Ähnlichkeitssatz aussagen, und doch ist dieser, obgleich an keiner Stelle eine Zurückbeziehung auf ihn zu finden ist, in das VI. Buch aufgenommen. Vielleicht liegt eine Erklärung in der historischen Entstehung der Elemente. Im ersten Buch giebt Euklid pythagoreische Forschungen wieder; im sechsten hat er die Arbeiten des Eudoxus (Knidos, 408—355 v. Chr.) zu Grunde gelegt — und nun ist es möglich, daß, während Pythagoras nur drei Kongruenzsätze kannte, Eudoxus die Zahl der Ähnlichkeitssätze auf vier ergänzte, und Euklid sich mit Pietät streng den Vorarbeiten anschloß. Die Einschiebung eines späteren Bearbeiters kann der

[121] Euklid, ed. Heiberg, I, S. 16, 26, 62. — [122] ed. Heiberg, II, S. 94 Z. 16 bis 21: „*Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.*“ (Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel einem Winkel gleich ist, die Seiten aber, welche ein anderes Winkelpaar einschließen, proportioniert sind, von den übrigen Winkeln jeder zugleich kleiner oder nicht kleiner als ein Rechter ist, dann sind die Dreiecke gleichwinklig, und zwar sind die Winkel einander gleich, welche von den proportionierten Seiten eingeschlossen sind.)

vierte Ähnlichkeitssatz kaum sein, da sich dieser die Gelegenheit, auch mit einem vierten Kongruenzsatz zu glänzen, schwerlich hätte entgehen lassen. Im Gegenteil wird in späteren Scholien zu EUKLID I. 26[123] mit falsch angebrachtem Scharfsinn und großem Überfluß an Worten nachzuweisen versucht, daß überhaupt nur die drei euklidischen Hauptsätze möglich seien.

Die drei Kongruenzsätze S.W.S. — S.S.S. — S.W.W. bilden bis zum achtzehnten Jahrhundert einen festen Bestandteil der Elementargeometrie: ihre Dreizahl wird typisch. So sagt CHR. v. WOLFF (1679—1754; Halle) in seinen *Anfangsgründen* von 1710[54] — einem Buche, das viele Auflagen erlebte und bis über die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts hinaus das herrschende Lehrbuch war — im Vorwort: „Die meisten Beweise sind aus den drei Lehrsätzen von der Gleichheit der Triangel hergeleitet." Demzufolge führt er auch nur jene drei Sätze und die zugehörigen Fundamentalkonstruktionen im eigentlichen Texte auf. In der Ausgabe von 1750 erscheint mit einem Mal der S.S.W.-satz[124] in seinem ganzen Umfange, ohne daß übrigens die angeführte Stelle in der Vorrede geändert ist! KÄSTNER's *Anfangsgründe* (Ausgabe von 1764)[53] übergehen ihn wieder. KLÜGEL's *analytische Geometrie* (1770, Braunschweig) betont die Doppeldeutigkeit der Konstruktion und hebt hervor, daß die trigonometrische Formel ebenfalls Zweideutigkeiten enthalte, also kein Widerspruch in der Geometrie entstehe (daselbst S. 18—21). SEGNER lehnt sich in seinen *Anfangsgründen* (1773, Halle)[301] an WOLFF's Verbesserung an, fordert aber, daß die dem Winkel gegenüberliegende Seite die größere sei. „Man brauche aber diesen Satz zu selten, als daß es nötig wäre, sich dabei aufzuhalten" (daselbst S. 191). In BERTRAND's *Développement nouveau de la partie élémentaire des math.* Genf 1778, II. S. 40, begegnet uns die Fassung, daß das andere Gegenwinkelpaar gleichartig sein müsse (*de même nom*). LEGENDRE's *Elemente* (I. prop. 18, 2. Aufl. Paris 1808) geben nur den Fall des rechtwinkligen Dreieckes und lassen den entsprechenden Ähnlichkeitssatz fort; BALTZER bevorzugt in seinen *Elementen* (6. Aufl., Leipzig 1883, § 5. 4. S. 34) die Formulierung mit der größeren Seite, und nach ihm die meisten neueren Verfasser.

---

[123] ed. HEIBERG, Bd. V, Berl. 1888, S. 168—170. — [124] S. 150, Lehrs. 5: „Wenn in zween rechtwinklichten Triangeln ABC und abc, $AB = ab$ und $BC = bc$ oder auch in zween spitzwinklichten oder stumpfwinklichten über dieses der Winkel $A = a$, so sind die ganzen Triangel einander gleich und $AC = ac$, $B = b$ und $C = c$."

3. Die Konstruktionsaufgaben.

Konstruktionsaufgaben bildeten sicher den ersten Ausgangspunkt geometrischer Kenntnisse überhaupt. Selbst bei tief stehenden Völkern werden gewisse, unbewußt in ihnen schlummernde Grundbegriffe durch die Praxis ausgelöst. Gerade Linien durch gespannte Fäden darstellen, Pfähle senkrecht in den Boden einsetzen, Zeltstangen geneigt im Boden so befestigen, daß sie gleich lang sind, möglichst rechteckige oder kreisrunde Plätze als Grundriß für primitive Bauten auf dem Boden aufreißen, stellen die ersten Spuren konstruktiver Thätigkeit dar. Nicht unwahrscheinlich ist, daß sich allmählich auch Regeln für solche technischen Aufgaben in der Praxis herausbildeten, auf die der Zufall die Bauenden führte. Besonders wird das der Fall sein können, wenn ein Volk seßhaft geworden ist und sich Bedürfnisse nach festen Bauten geltend machen. Lange vor jeder uns zugänglichen Überlieferung werden sich solche Regeln vererbt haben müssen, ehe sie zu einer bewußten Anwendung gelangten, wie wir sie bereits in den ältesten ägyptischen Bauten vorfinden, die heute noch mit größter Bewunderung über ihre mathematische Genauigkeit betrachtet werden.

Das Technische in diesen Aufgaben muß von der theoretischen Behandlung getrennt gehalten werden. Zu theoretisch-mathematischen Aufgaben wurden die Konstruktionen erst, als der abstrakte Geist griechischer Geometer sie zur heutigen Gestalt verarbeitete. In diesem Sinne ist es zu verstehen, wenn Griechen, die nur Überlieferer und Verarbeiter ägyptischer Wissenschaft waren, als Erfinder unserer Fundamentalkonstruktionen genannt werden.

Gehen wir zu den einzelnen Aufgaben über, so können selbstverständlich die wirklichen Erfinder nicht genannt, sondern nur ihr erstes Erscheinen in mündlicher oder schriftlicher Überlieferung angegeben werden.

Die ersten beiden Aufgaben, Eine gegebene Strecke oder einen gegebenen Winkel halbieren, werden in der griechischen Litteratur nicht einmal mit bestimmten Namen verknüpft, wie die späteren Gelehrten es so gern zu thun pflegen. Euklid behandelt Buch I, Satz 9 die Winkelhalbierung und erst mit ihrer Hilfe zeigt er die Halbierung einer Strecke (I. 10).

Ebenso wie diese beiden, ist auch die dritte Fundamentalaufgabe, In einem gegebenen Punkt ein Lot errichten, sicher ägyptischen Ursprungs. Die bekannte zweite Lösungsart mittels

des Peripheriewinkels im Halbkreis ist, soweit bekannt, zuerst von Regiomontanus (Joh. Müller aus Königsberg i. Franken, 1436 — Rom 1476; Wien, Italien, Nürnberg) angegeben worden, und findet sich als Anmerkung zu III. 30 in dem von ihm benutzten Euklidexemplar.[125]

Die vierte Aufgabe, Von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade ein Lot fällen, trägt bereits einen bestimmten Namen. Proklus (410—485 n. Chr.; Byzanz, Athen), der ausführliche Kommentarien zu Euklid's erstem Buch verfaßt hat,[6] nennt den Oenopides von Chios, einen jüngeren Zeitgenossen des Anaxagoras (also um 465 v. Chr.), als denjenigen, der diese Aufgabe gelöst habe;[126] damit kann aber höchstens gesagt sein, daß die bei Euklid gegebene Lösungsart (I, 12) dem Oenopides zuzuschreiben ist,[127] da anderweitige Lösungen, dem Bedürfnis der Praxis entsprechend, längst bei Griechen und Römern bekannt gewesen sein müssen.

Auch die weitere Aufgabe, An eine gegebene Gerade einen gegebenen Winkel antragen (Eukl. I, 23), soll Eigentum des Oenopides sein.[128] Mit ihrer Hilfe löst Euklid (I, 31) die Aufgabe, Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine Parallele ziehen.

Einen mächtigen Aufschwung nahmen die geometrischen Konstruktionsaufgaben unter der Macht griechischer Abstraktion. Zuerst nur gebraucht, um dem bedächtig in seinen Schlußfolgerungen vorwärts schreitenden Mathematiker die nötige Sicherheit und Gewißheit von der Existenz der abstrakten Begriffe zu geben, wie wir es bei Euklid sehen, der mit ihnen die Existenz eines Halbierungspunktes auf einer Strecke, eines Lotes zu einer Geraden u. s. w. zeigt, werden sie schließlich Selbstzweck. Es bildet sich eine Theorie ihrer Behandlung heraus, die unter Platon's (429—348 v. Chr., Athen) Händen ihre Vollendung empfing. Nach zwei Richtungen setzte dieser hochgeniale Mathematiker und Philosoph ein. Er schuf als fruchtbares Werkzeug für die Invention die analytische Methode und begrenzte anderseits den Umfang des Gebietes durch die Forderung, nur Zirkel und Lineal zu benutzen. In der Akademie Platon's fand ferner die Festlegung der äußeren Form statt, in der wir heute noch geometrische Konstruktionsaufgaben behandeln. An die Spitze tritt die Stellung der Aufgabe, in der *πρότασις* allgemein gefaßt, in der *ἔκθεσις* mit Bezug auf die vorliegende bestimmte Figur. Die

[125] Cantor, II^b, S. 280. — [126] Proklus, ed. Friedlein, S. 283 (Anm. 6). — [127] Brettschneider, S. 65 (Anm. 4). — [128] Proklus, S. 333 Z. 5 (Anm. 6).

ἀνάλυσις setzt die Lösung als bekannt voraus und versucht, rückwärtsgehend, Schlüsse zu ziehen, die ein Zurückführen auf bekannte Konstruktionen bezwecken. Ist dieses erreicht, so kann nunmehr auf entgegengesetztem Wege in der *κατασκευή* die eigentliche Lösung gegeben werden, deren Richtigkeit dann in der *ἀπόδειξις* nachgewiesen wird. In den meisten Fällen könnte die *ἀνάλυσις* zur Erledigung der Aufgabe genügen; die synthetische Behandlung in der *ἀπόδειξις* bringt dann nur das Gefundene in umgekehrter Reihenfolge noch einmal. Wohl bewußt aber, daß die analytische Methode auch zu nicht passenden Nebenlösungen kommen kann, da nicht jeder Schluß umkehrbar ist, verlangt die strenge griechische Behandlung jeder Zeit den synthetischen Beweis hinterher.

In der Hand geschickter Mathematiker hat diese Platon'sche Methode die größten Erfolge gehabt und eine Mannigfaltigkeit der Aufgaben gezeitigt, von denen uns nur der geringste Teil überliefert ist. Die Konstruktionsaufgaben bildeten einen Hauptstoff für die griechische Mathematik und jeder werdende Mathematiker mußte sich in ihrer Lösung Gewandtheit verschaffen. Eine Sammlung vorbereitenden Übungsstoffes war in dem *τόπος ἀναλυόμενος* (Sammelwerk analytischer Natur) von Aristaeus dem Älteren (um 320 v. Chr., Athen), Euklid (um 300 v. Chr., Alexandria) und Apollonius von Pergä (beobachtete zwischen 250 u. 200 v. Chr. in Alexandria, dann in Pergamum) niedergelegt, ist aber leider nicht auf uns gekommen. Erhalten ist eine Sammlung von Pappus (Ende des dritten Jahrh. n. Chr.), in der die zum Verständnis und Gebrauch notwendigen Sätze zusammengestellt sind.[129]

Zweierlei Errungenschaften flossen aus der Anwendung der analytischen Methode. Erstens gab sie Gelegenheit zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die gestellte Aufgabe lösbar ist. Diese Frage war von Platon zuerst angeregt, dann von seinem Schüler Leon (um 370 v. Chr.) in ihrer Notwendigkeit erkannt worden, so daß seitdem der Behandlung der geometrischen Aufgabe noch ein *διορισμός* (determinatio) folgte. In diesem *διορισμός* liegen die Keime einer Theorie der Maxima und Minima (siehe Abschnitt XIV); Apollonius ist der erste, der solche Untersuchungen als „würdig, auch ihrer selbst wegen vorgenommenen zu werden", bezeichnet. — Zweitens hat sich der Begriff des „geometrischen Ortes" beim Gebrauch der analytischen Methode in der platonischen Schule allmählich entwickelt. Das Wort *τόπος* kommt zwar schon bei Archytas

[129] Pappus, *Συναγωγή*, lib. VII, ed. Hultsch, II, S. 634ff. (Anm. 14).

(um 430—365, Tarent) vor, wie uns EUTOKIUS (geb. 480 n. Chr. zu Askalon) aus der Geschichte der Mathematik, die EUDEMUS (Rhodos, um 334 v. Chr.; Schüler des ARISTOTELES) verfaßt hatte, überliefert,[130] hat aber bei ihm noch nicht den Wert eines anerkannten Fachausdruckes. Später unterschieden die Alten drei Arten geometrischer Örter,[131] deren Trennung natürlich heute nicht mehr aufrecht erhalten wird: 1. *τόποι ἐπίπεδοι* (ebene Örter): Gerade und Kreis, 2. *τόποι στερεοί* (körperliche Örter): Kegelschnitte, 3. *τόποι γραμμικοί*, nach unserer Bezeichnung: höhere Kurven.

Als ein weiteres Verdienst PLATON's in der Theorie der Konstruktionsaufgaben wurde oben erwähnt, daß er bei ihrer Ausführung nur Lineal und Zirkel zulassen wollte. Die Benutzung des Lineals beim Zeichnen dürfte uralt sein, weniger die des Zirkels, dessen Erfindung die griechische Sage dem Neffen des DÄDALUS, TALUS, zuschreibt.[132] Im altägyptischen Rechenbuch des AHMES (zwanzigstes bis siebzehntes Jahrh. v. Chr.) finden sich Figuren, bei denen man erkennen kann, daß sie mit Benutzung des Lineals, aber ohne die eines Zirkels gezeichnet sind. Wenn PLATON die genannte Forderung aufstellte, so wandte er sich gegen die Zulassung höherer Kurven, wie der Kegelschnitte, und gegen die Anwendung der sogenannten instrumentalen oder Bewegungsgeometrie. PLUTARCH überliefert zwei Stellen,[133] in denen sich PLATON tadelnd über ein Hinausgehen über Zirkel und Lineal ausspricht, „weil so der Vorzug der Geometrie verdorben und aufgehoben werde, sofern man sie wieder auf den sinnlichen Standpunkt zurückführe, statt sie in die Höhe zu heben und mit ewigen und körperlosen Bildern zu beschäftigen".[134] Übrigens wird trotz der Überlieferung angezweifelt, daß gerade PLATON diese Forderung aufgestellt habe, da er selbst für das Problem der Würfelverdoppelung nach EUTOKIUS[135] eine Lösung (siehe unten), die auf Bewegungsgeometrie beruht, angegeben hat. Mag dem sein, wie es will, — nach PLATON ist die Forderung nach alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal da und wird streng innegehalten, wie uns auch EUKLID's *Elemente* besonders im zehnten Buche bei der Behandlung der Irrationalitäten zeigen.

---

[130] ARCHIMEDES, ed. HEIBERG, III, S. 100 Z. 10 (Anm. 33). — [131] Nach PAPPUS, VII, cap. 22, 29, ed. HULTSCH, S. 662 Z. 6—7, S. 672 Z. 6 ff. — [132] OVID, *Metamorphos.*, VIII, 247—249. — [133] PLUTARCH, *Quaestionum convivalium*, lib. VIII, cap. 1, ed. DÜBNER-DIDOT, Vol. IV, Moralia, Bd. II, Paris 1890, S. 876 Z. 9—12 und *Vita Marcelli*, cap. 14, § 5, ed. DOEHNER-DIDOT, Vol. I, Vitae. I, S. 364 Z. 46 ff. — [134] HANKEL, S. 155—156 (Anm. 23). — [135] ARCHIMEDES, ed. HEIBERG, III, S. 66 Z. 21—S. 70.

Unter Bewegungsgeometrie versteht man eine Lösungsmethode, in der ein oder mehrere Lineale durch Probieren, teils gleitend, teils drehend, in eine solche Stellung geschoben werden, daß sich ein Schnittpunkt irgendwie bestimmter Art ergiebt. Das älteste, uns überlieferte Beispiel dieses Lösungsverfahrens wird, wie eben erwähnt, von Eutokius als platonisch mitgeteilt. Die hierzu nötige Vorrichtung besteht aus einem festen rechten Winkel MZN und einem beweglichen, rechtwinkligen Kreuz B, VW, PQ. Zwei

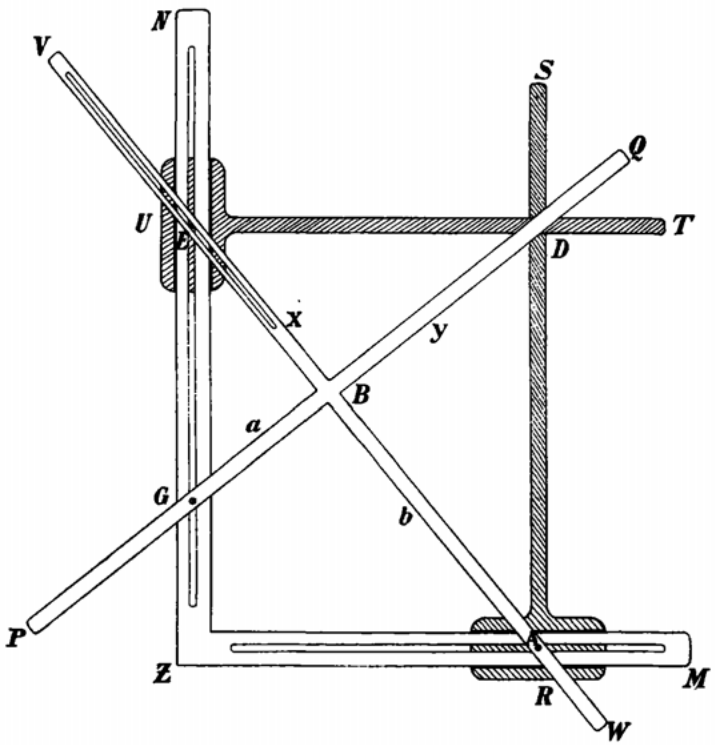

Fig. 3.

weitere Lineale RS und TU dürfen nur senkrecht zu den Schenkeln des rechten Winkels verschoben werden. Auf dem Kreuz sind feste Punkte G und A so anzunehmen, daß $GB = a$ und $BA = b$ vorgeschriebene Längen sind. Nunmehr ist durch Bewegen des Kreuzes, dessen Punkte A und G aber auf den Schenkeln MZ bzw. NZ verbleiben müssen, und Verschieben der beiden Lineale RS und TU der Apparat in eine solche Lage zu bringen, daß ein Rechteck $ADEZ$ entsteht, durch dessen drei Ecken ADE die Schenkel BW, BQ, BV

des Kreuzes hindurchgehen. Eine solche Anordnung ist stets möglich. Ist sie gelungen, so ist $a:x = x:y = y:b$, woraus, wenn etwa $b = 2a$,

$$x^3 = 2a^3$$

gefolgert werden kann, so daß sich x als Kante des Würfels ergiebt, der das doppelte Volumen des Würfels a^3 besitzt (vgl. Bd. I, S. 208, 270).

Noch zwei andere, zu gleichem Zwecke ersonnene Apparate werden uns aus dem Altertum mitgeteilt. Der Erfinder des einen ist Eratosthenes (276 Kyrene — 194 v. Chr., Alexandria),[136] der des anderen Heron (erstes Jahrh. v. Chr.).[137] Auch in späteren Zeiten hat man dieser instrumentalen Geometrie Interesse entgegengebracht. Aus arabischen Schriften können ebenfalls Beispiele angeführt werden; so treffen wir in einer geometrischen Abhandlung der sogenannten „Drei Brüder" (um 865 n. Chr., Bagdad) — *liber trium fratrum de geometria*[138] — auf eine solche Aufgabe. Sogar der Name Bewegungsgeometrie (Géométrie mobile) ist arabischen Ursprungs; er findet sich zum erstenmal in einer Abhandlung des Alsidschzi (um 972 n. Chr.).[139] Schließlich erwähnen wir noch aus dem Mittelalter eine Lösung der Winkeldreiteilung, die Jordanus Nemorarius (Deutscher, † 1237; Ordensgeneral der Dominikaner) mit Zuhilfenahme einer sich bewegenden Geraden ausführt.[140]

Die Forderung Platon's, nur mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, kann noch weiteren Beschränkungen unterworfen werden. So kann erstens verlangt werden, nur mit dem Lineal zu zeichnen, zweitens, ausschließlich den Zirkel zu benutzen.

Die alleinige Verwendung des Lineals war eine Forderung, die sich in der französischen Schule Carnot's (1753—1823), des Verfassers der *géométrie de position* (Paris 1803) einstellte. Es leuchtet ein, daß nur solche Aufgaben damit ausführbar sind, die, in Gleichungen umgesetzt, auf rationale Ausdrücke führen. In einer Abhandlung Brianchon's (1785—1870; Paris) *Les applications de la théorie des transversales* (1818) werden viele Fälle gezeigt, in denen man mit dem Lineal auskommt. Brianchon selbst legte Wert darauf

[136] Vgl. Anm. 135; ferner Pappus, *Συναγωγή*, III, cap. 23, ed. Hultsch, I, S. 56 Z. 18 ff.; III, cap. 21, S. 54 Z. 31.; Vitruvius, *De architectura libri decem*, ed. Rose, Müller-Strübing, Leipz. 1867, S. 217 Z. 6; vgl. Cantor, I^b, S. 315—316. — [137] *Ἥρωνος Κτησιβίου βελοποικά* in *Veterum mathematicorum Athenaei, Bitonis, Apollodori, Heronis, Philonis et aliorum opera*, Paris 1693, S. 143 ff.; ferner Pappus, III, cap. 26—27, ed. Hultsch, Bd. I, S. 62—64; vgl. Cantor, I^b, S. 350—351. — [138] Vgl. Cantor, I^b, S. 690—691. — [139] *L'algèbre d'Omar Alkhayjâmî* ed. Woepcke, Paris 1851, Abhandlung E: *Traité de la trisection de l'angle rectiligne* par ... Alsidjzî, S. 120 Z. 2. — [140] Jordanus Nemorarius, *De triangulis*, IV, 20; ed. Curtze, S. 38—39 (Anm. 34).