EINFÜHRUNG

IN DIE

THEORETISCHE PHYSIK

mit besonderer Berücksichtigung
ihrer modernen Probleme

von

ARTHUR HAAS
Dr. phil., a. o. Professor an der Universität Leipzig

Erster Band

Mit 50 Abbildungen im Text

Zweite, unveränderte Auflage

BERLIN UND LEIPZIG 1921
VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER
WALTER DE GRUYTER & CO.
VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG :: J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG :: GEORG REIMER :: KARL J. TRÜBNER :: VEIT & COMP.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Die völlige Neugestaltung, die unser Naturbild in der letzten Zeit durch die großartigen Fortschritte der theoretischen Physik erfahren hat, hat in weiten Kreisen ein lebhaftes Interesse für die Probleme dieses Wissenszweiges geweckt. Manche, denen es an der Zeit oder an den Vorkenntnissen fehlt, um die modernen theoretisch-physikalischen Originalabhandlungen selbst oder um Werke zu studieren, die einzelnen speziellen Gegenständen gewidmet sind, werden vielleicht den Wunsch nach einer nicht zu umfangreichen Darstellung hegen, die von durchaus modernen Gesichtspunkten aus und unter Benutzung moderner Methoden einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der gesamten theoretischen Physik gewährt und, ohne zu sehr in Einzelheiten einzugehen, doch ein exaktes Verständnis der Grundlagen und der Hauptprobleme dieser Wissenschaft ermöglicht.

Eine solche Darstellung in einer auch für das Hochschulstudium geeigneten Form zu bieten, ist das Ziel des vorliegenden Buches. Es ist aus Vorlesungen entstanden, die durch einige Semester der Verfasser an der Universität in Leipzig gehalten hat, und bei denen ihn das Bestreben leitete, nach Möglichkeit „klassische“ und moderne Physik zu einem einheitlichen Ganzen zu vereinigen. Für die Auswahl und Begrenzung des Stoffes war vor allem dabei die Frage der Beziehungen zwischen der theoretischen Physik und unserem Naturbilde maßgebend. Dem Verfasser handelte es sich vor allem darum, zu zeigen, wie einerseits das Bedürfnis nach einer möglichst einheitlichen und möglichst einfachen Erklärung der Naturerscheinungen die Entwicklung der theoretischen Physik beeinflußt hat und welch gewaltige Umwälzungen andererseits in unserer Naturanschauung gerade in den letzten Jahrzehnten durch die Ergebnisse der theoretischen Forschung herbeigeführt worden sind. Als Ziel der Darlegungen ergab sich somit im einzelnen die Auffindung, Ableitung und exakte Begründung bestimmter Gesetze oder Beziehungen oder Auffassungen, die für unsere moderne Naturanschauung eine grundlegende Bedeutung besitzen. Nur solche Untersuchungen, die für die Erreichung dieses Zieles mittels eines lückenlosen, streng logischen Aufbaues unmittelbar oder mittelbar notwendig erschienen, haben in das vorliegende Buch Aufnahme gefunden; alles übrige wurde hingegen weggelassen. So wurden namentlich (obwohl in anderen einführenden Lehrbüchern ausführlich behandelt) die Ergebnisse aller Forschungen beiseite gelassen, die lediglich eine genaue quantitative Beschreibung bestimmter, für die Praxis wichtiger Erscheinungen herbeiführen sollen oder aber dem Zwecke dienen, an physikalischen Problemen die Eleganz gewisser mathematischer Methoden zu zeigen. Daher findet sich z. B. in dem vorliegenden Buche weder etwas über die Formveränderungen elastischer Körper, noch über die Theorie der Wechselströme, noch auch über die Ausbreitung der Wärme in verschieden geformten Körpern.

In mathematischer Hinsicht werden in dem vorliegenden Buche nur die Grundregeln der Differential- und Integralrechnung als bekannt vorausgesetzt; sonst werden alle in der Darstellung benötigten mathematischen Sätze (sofern sie nicht ganz elementarer Natur sind) in dem Buche selbst, dort, wo sie gebraucht werden, abgeleitet. Auch leichte Zwischenrechnungen wurden in diesem Buche mit Absicht stets vollkommen durchgeführt. Wenn der Leser, der noch Anfänger ist, sich — wie das wohl bei der Lektüre vieler Lehrbücher der Fall ist — stundenlang den Kopf darüber zerbrechen muß, wie wohl eine Zwischenrechnung aussehen mag, die als leicht bezeichnet, aber nicht angegeben wird, dann wird nur allzusehr seine Aufmerksamkeit von wichtigen physikalischen Fragen auf mathematische Nebensächlichkeiten abgelenkt. Um diese Möglichkeit bei Lesern dieses Buches unbedingt zu vermeiden, wurde eine zu breite Form der mathematischen Zwischenbetrachtungen einer zu knappen entschieden vorgezogen.

Der vorliegende erste Band der „Einführung in die theoretische Physik" umfaßt die Theorie der Bewegung, der Elektrizität und des Lichtes; der zweite Band, der voraussichtlich Ende 1919 erscheinen dürfte, soll die Theorie der Wärme, die Atomistik, die Quanten- und die Relativitätstheorie enthalten. Seine einzelnen Kapitel sollen im besondern behandeln: die Thermodynamik, die Theorie der Wärmestrahlung, die statistische Physik, die kinetische Gastheorie, die Molekulartheorie, die Quantentheorie, die Theorie der Spektren, die Relativitätstheorie, die Theorie der Materie und die Gravitationstheorie. Der zweite Band soll auch in seinem Anhang (für beide Bände gemeinsam) eine chronologische Übersicht über die geschichtliche Entwicklung der theoretischen Physik und ein Namenverzeichnis mit biographischen und literarischen Hinweisen enthalten.

Herr cand. math. Benno Kurze in Leipzig hatte die große Freundlichkeit, die Korrekturbogen des ersten Bandes einer sehr gründlichen Durchsicht zu unterziehen. Für seine Mühe und seinen Rat sei ihm herzlichst gedankt, und ebenso für wertvolle Verbesserungsvorschläge zu einzelnen Abschnitten den Damen und Herren: Dr. phil. Rudolf Gross in Greifswald, Dr. phil. Walter Kangro in Leipzig, Dr. phil. Gerda Laski in Wien, cand. math. Aenni Nitsche in Leipzig, Dr. Rudolf Schmid in Wien und cand. math. Harry Schmidt in Leipzig. Aufrichtig dankbar bin auch dem Verlage von Veit & Comp. für die außerordentliche Bereitwilligkeit, mit der er trotz der großen, durch den Krieg verursachten Schwierigkeiten bei der Fertigstellung dieses Buches allen meinen Wünschen entgegengekommen ist.

Leipzig, im November 1918.

Arthur Haas.

Inhalt.

Einleitung. Seite

Ziel und Entwicklung der theoretischen Physik 3

I. Kapitel. Die Bewegung des freien materiellen Punktes.

§ 1. Das Beharrungsprinzip und der Kraftbegriff 9
§ 2. Das zweite NEWTONsche Bewegungsgesetz 11
§ 3. Die ungleichförmige geradlinige Bewegung (Die Physik und die Infinitesimalrechnung) 15
§ 4. Die rechtwinklige Auflösung der krummlinigen Bewegung (Die Physik und die analytische Geometrie) 22
§ 5. Die natürlichen Bewegungsgleichungen 29
§ 6. Die Bewegungsgleichungen in ebenen Polarkoordinaten 33
§ 7. Die Ableitung des NEWTONschen Gravitationsprinzipes aus den KEPLERschen Gesetzen der Planetenbewegung 35
§ 8. Flächengeschwindigkeit und statisches Moment 40
§ 9. Die lebendige Kraft und das Potential 47
§ 10. Die Vektorgrößen 54
§ 11. Die Grundregeln der Vektorrechnung 57
§ 12. Die mechanischen Grundformeln in vektorieller Schreibweise 65

II. Kapitel. Die Bewegung von Systemen freier Massenpunkte.

§ 13. Der Satz vom Massenmittelpunkt 71
§ 14. Der Satz von der Erhaltung des gesamten Drehimpulses 75
§ 15. Der Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie 78

III. Kapitel. Die allgemeinen Prinzipe der Dynamik.

§ 16. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen 82
§ 17. Das Prinzip von D'ALEMBERT und die allgemeine Bewegungsformel von LAGRANGE 87
§ 18. Die Gewinnung der partikularen Bewegungsgleichungen aus der allgemeinen Bewegungsformel von LAGRANGE 89
§ 19. Das HAMILTONsche Prinzip 94
§ 20. Die generalisierten Bewegungsgleichungen von LAGRANGE 98

IV. Kapitel. Die Relativbewegung.

§ 21. Die Geschwindigkeit der Relativbewegung 103
§ 22. Die Beschleunigung der Relativbewegung 110
§ 23. Das mechanische Relativitätsprinzip 112

V. Kapitel. Die Bewegung starrer Körper.

Seite
§ 24. Das Bild des starren Körpers 114
§ 25. Translation und Rotation eines starren Körpers 118
§ 26. Die Zusammensetzung der an einem starren Körper angreifenden Kräfte 123
§ 27. Die Rotation um eine feste Achse 127
§ 28. Das Trägheitsmoment als Tensorgröße 131
§ 29. Die EULERschen Gleichungen 135

VI. Kapitel. Die Bewegung der Flüssigkeiten.

§ 30. Das Bild des deformierbaren Körpers 138
§ 31. Das Vektorfeld der Geschwindigkeit 143
§ 32. Strömung, Wirbel und Dilatation 145
§ 33. Der Satz von GAUSS (Die Divergenz eines Vektors) 148
§ 34. Der Satz von STOKES (Die Rotation eines Vektors) 153
§ 35. Der Satz von GREEN (Die kombinierten vektoriellen Differentialoperationen) 156
§ 36. Der Spannungszustand in einem deformierbaren Körper 159
§ 37. Die hydrodynamischen Grundgleichungen 164

VII. Kapitel. Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.

§ 38. Das Gesetz von COULOMB 170
§ 39. Das elektrostatische Feld 173
§ 40. Das magnetostatische Feld 188
§ 41. Der elektrische Strom (Die Gesetze von OHM und JOULE) 193
§ 42. Das Gesetz von BIOT und SAVART und die erste Hauptgleichung des elektromagnetischen Feldes 195
§ 43. Die ponderomotorische Wirkung zwischen elektrischen Strömen . . . 200
§ 44. Die Induktionsströme und die zweite Hauptgleichung des elektromagnetischen Feldes 205
§ 45. Der Einfluß des Zwischenstoffes auf die elektrischen und magnetischen Erscheinungen 208
§ 46. Die Theorie der dielektrischen Polarisation 213
§ 47. Die Grundlagen der MAXWELLschen Theorie 215
§ 48. Der Satz von POYNTING 219
§ 49. Die MAXWELLschen Gleichungen für homogene quellenfreie Isolatoren . 221

VIII. Kapitel. Allgemeine Theorie der Schwingungen.

§ 50. Die lineare harmonische Schwingung 223
§ 51. Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung 227
§ 52. Die elliptische Schwingung 230
§ 53. Die gedämpfte Schwingung 234
§ 54. Die erzwungene Schwingung 238
§ 55. Die ebene Welle 242
§ 56. Die Kugelwelle 247

IX. Kapitel. Theorie des Lichtes.

§ 57. Die Wellennatur des Lichtes 251
§ 58. Die Interferenz des Lichtes 253
§ 59. Die Transversalität der Lichtschwingungen 256

Seite

§ 60. Die elektromagnetischen Wellen und die elektrische Natur des Lichtes 259
§ 61. Das Reflexions- und das Brechungsgesetz 264
§ 62. Die Gleichungen von FRESNEL 268
§ 63. Die Polarisation durch Reflexion und Brechung 272
§ 64. Die totale Reflexion 276
§ 65. Das optische Verhalten der Metalle 281
§ 66. Die Ausbreitung des Lichtes in Kristallen 287

X. Kapitel. Die Elektronentheorie.

§ 67. Das elektrolytische Grundgesetz von FARADAY 297
§ 68. Die Grundgleichungen der Elektronentheorie 302
§ 69. Die Kathodenstrahlen 306
§ 70. Die elektromagnetische Masse 309
§ 71. Der Lichtdruck 312
§ 72. Die Dispersion des Lichtes 315
§ 73. Die Grundlagen der Magnetooptik 320
§ 74. Die Molekularströme 325
§ 75. Die Röntgenstrahlen 332
§ 76. Die Radioaktivität 348
§ 77. Die elektrische Theorie der Materie 353

Anhang.

Zusammenfassung des Inhalts des ersten Bandes 357
Übersicht über die häufigsten Bezeichnungen 379

Sachverzeichnis zum ersten Band 381

Erster Band.

Theorie der Bewegung, der Elektrizität und des Lichtes.

Einleitung.

Ziel und Entwicklung der theoretischen Physik.

Die theoretische Physik ist die Lehre von den ursächlichen Zusammenhängen zwischen den Erscheinungen in der Natur, sofern diese nicht infolge ihres eigenartigen Charakters den Gegenstand einer besonderen Wissenschaft bilden, wie dies etwa bei den Vorgängen des Lebens, bei den astronomischen Phänomenen oder den chemischen Prozessen der Fall ist. Während der Experimentalphysik die Feststellung, die Aufsuchung und die Beschreibung sowie die Sammlung und Ordnung von Erfahrungstatsachen obliegt, besteht die Aufgabe der theoretischen Physik in deren Erklärung.

Eine Tatsache erklären, heißt, sie auf eine andere zurückführen. Eine Tatsache A kann also nie an sich erklärt werden, sondern stets nur mit Bezug auf eine andere Tatsache B, derart, daß gezeigt wird, daß aus der Existenz von B auch die Existenz von A folgt. Diese Erklärung der Tatsache A durch die Tatsache B wird dann als vollkommen angesehen, wenn sich beweisen läßt, daß die Existenz von A aus der Existenz von B mit derselben logischen Notwendigkeit folgt, wie ein Satz der Mathematik aus dem anderen. Ein ursächlicher Zusammenhang zwischen den Erfahrungstatsachen A und B kann aber auch mittelbar hergestellt werden, nämlich durch Konstruktion einer Annahme C, aus der mit derselben Notwendigkeit wie die Tatsache B auch die Tatsache A folgt.

Zu einer Gruppe physikalischer Erfahrungstatsachen, die ein bestimmtes Erscheinungsgebiet betreffen, lassen sich auf diese Weise grundlegende Annahmen ersinnen, aus denen sich die Gruppe jener Erfahrungstatsachen mit derselben logischen Notwendigkeit ergibt wie die Lehrsätze des Euklid aus seinen Axiomen.[1] Eine Gesamtheit solcher Zusammenhänge, die die Erfahrungstatsachen mit den zu dem Zwecke ihrer Erklärung ersonnenen Grundannahmen verknüpft, bezeichnet man als eine physikalische Theorie.

[1] Man denke etwa an die Bewegungsgesetze Newtons.

Der mathematischen Methode bedient sich die theoretische Physik, weil unter allen möglichen Arten von Deduktionen die mathematischen die vollkommensten sind und weil die durch solche Deduktionen gewonnenen Ergebnisse eine quantitative und daher viel genauere Beschreibung der Naturvorgänge ermöglichen. So entsteht der theoretischen Physik eine weitere, mit ihren übrigen freilich unlösbar verbundene Aufgabe in der Auffindung der mathematischen Beziehungen, also der Gleichungen, die in allgemeiner Form eine exakte Beschreibung der physikalischen Erscheinungen ermöglichen.

Die „Ökonomie der Wissenschaft“[2] erfordert es aber nun, daß die mathematischen Deduktionen und infolgedessen auch deren Ergebnisse nicht komplizierter seien, als es für den Zweck der betreffenden Untersuchung notwendig ist. Andererseits führen aber schon verhältnismäßig einfache physikalische Probleme oft zu ungeheuer komplizierten mathematischen Untersuchungen.[3] Der Theorie erwächst dadurch die Aufgabe einer möglichst weitgehenden Vereinfachung aller Probleme. Dies erreicht sie dadurch, daß sie bei allen zu behandelnden Vorgängen aus der Wahrnehmung dessen, was sich in der Wirklichkeit abspielt, nur das heraushebt, was für die Betrachtung wesentlich erscheint[4], daß sie hingegen von allem anderen als Unwesentlichem abstrahiert. Die theoretische Physik konstruiert sich derart als Gegenstand ihrer Untersuchungen selbst ideale Vorgänge und Zustände von einer Einseitigkeit, die wir in der bunten Mannigfaltigkeit des natürlichen Geschehens nie wahrnehmen und von einer Einfachheit, der die Wirklichkeit und das Experiment zwar nahekommen, die sie aber doch nie erreichen können.[5]

Auf ideal einfache Vorgänge eines bestimmten Typus vermag aber nun die theoretische Physik auch Phänomene zurückzuführen, die dem menschlichen Beobachter völlig anders geartet erscheinen. Dies wird dadurch möglich, daß die theoretische Physik stets von der (durch die Erfahrung keinesfalls widerlegbaren) Hypothese Gebrauch machen kann, daß in hinreichend starker Vergrößerung die Natur unvergleichlich ein-

[2] Dieser wichtige Begriff ist von MACH aufgestellt worden.

[3] Z. B. das Problem der Bewegung von drei einander nach dem Gravitationsgesetze anziehenden Massenpunkten.

[4] Betrachtet man vom rein mechanischen Standpunkt aus die Bewegung der Erde um die Sonne, so läßt man dabei die gleichzeitig erfolgenden Wärmevorgänge außer acht usw.

[5] Die Reibung läßt sich bei der Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene zwar vermindern, aber nicht beseitigen.

facher erscheinen müßte als bei der Beobachtung durch die menschlichen Sinne.[6]

Die theoretische Physik vermag derart Bilder zu konstruieren, mittels deren sie eine bestimmte Gruppe schwer erfaßbarer Erscheinungen deuten kann als andersartige, leichter begreifbare[7] Vorgänge, die sich allerdings in einer Welt von viel kleineren Dimensionen abspielen müßten, als die unserer Sinnenwelt es sind. Indem so die theoretische Physik Vorgänge, deren Wesen ihr zunächst noch unklar ist, interpretiert als Vorgänge von einem von ihr bereits erforschten Typus[8], vermag sie die von ihr in einem bestimmten Zweige der Physik gewonnenen Ergebnisse auf andere Zweige zu übertragen. Eine Theorie eines bestimmten Erscheinungsgebietes, die derart auf der Grundlage eines Bildes entsteht, vermag oft nicht nur (was ja zunächst ihre Aufgabe ist) die schon bekannten Erfahrungstatsachen des Erscheinungsgebietes als notwendige Folgen der Grundvorstellungen des Bildes abzuleiten; sie ist oft auch imstande — und darin offenbart sich vor allem ihre Leistungsfähigkeit — noch unbekannte neue Phänomene vorauszusagen und so dem experimentellen Forscher den Weg zu der Entdeckung neuer Erfahrungstatsachen zu weisen. Auf der anderen Seite ergibt sich dadurch aber auch die Möglichkeit einer experimentellen Prüfung einer Theorie und unter Umständen auch einer experimentellen Entscheidung über die Richtigkeit ihrer Grundannahmen.

So ist jede physikalische Theorie an die Erfahrung gebunden. Auf Grund des Materials von Erfahrungstatsachen, das die Experimentalphysik liefert, müssen die Grundannahmen des Bildes konstruiert werden. Ergibt sich andererseits aber auch nur eine einzige Erfahrungstatsache, die in offenbarem und nicht zu beseitigendem Widerspruch zu Folgerungen steht, die sich mit Notwendigkeit aus den Grundannahmen einer Theorie ergeben, so erscheint durch diese Erfahrungstatsache die Theorie widerlegt. Jede Theorie muß sich somit den Erfahrungstatsachen anpassen, deren Kreis sich wiederum ständig erweitert, und unterliegt daher notwendigerweise der Möglichkeit von Veränderungen. Diese können entweder nur in kleinen Modifikationen der Grundannahmen

---

[6] Diese Idee stammt aus der antiken Atomistik, die eine Schöpfung DEMOKRITS darstellt.

[7] Als die am leichtesten begreifbaren Vorgänge galten — wenigstens bis vor kurzem — die mechanischen. Daher der charakteristische Ausspruch von HUYGENS: Dans la vraye philosophie on conçoit la cause de tous les effets naturels par des raisons de méchanique. Ce qu'il faut faire à mon avis ou bien renoncer à toute espérance de jamais rien comprendre dans la physique (Anfang des Traité de la lumière).

[8] Man denke etwa an die kinetische Theorie der Wärme.

oder in der Hinzufügung neuer Hypothesen, bisweilen aber auch in der Neuerrichtung des ganzen Gebäudes einer Theorie auf völlig frischer Grundlage bestehen.

Die Frage, ob eine einem bestimmten Bilde zugrundeliegende Annahme wahr sei, ist daher im allgemeinen wohl besser durch die beiden Fragen zu ersetzen, ob die Annahme zu keiner einzigen, mit der Erfahrung in Widerspruch stehenden Folgerung führt, und ferner, ob das auf der Annahme beruhende Bild brauchbar und nützlich sei. Allerdings werden wir um so eher geneigt sein, eine solche hypothetische Annahme für wirklich zutreffend zu halten, je größer die Zahl ganz verschiedenartiger, an sich schwer erklärbarer Erfahrungstatsachen ist, die sich aus der Annahme deduzieren lassen.

Die theoretische Physik erscheint so als der Inbegriff einer Menge von physikalischen Theorien, deren jeder bestimmte Hypothesen — sei es in Form eines Bildes, sei es in der Form gewisser Axiome — zugrunde liegen. Die theoretische Physik muß aber eine einheitliche Wissenschaft sein. Die Grundannahmen der einzelnen Theorien dürfen daher untereinander in keinem Widerspruche stehen. Die theoretische Physik muß aber auch eine möglichst ökonomische Wissenschaft sein. Sie muß daher danach trachten, nach Möglichkeit einzelne Theorien miteinander zu verschmelzen[9], sie auf gemeinsamer Grundlage aufzubauen und so das physikalische Naturbild zu vereinheitlichen. Weiterhin muß es aber auch ihr Ziel sein, die Zahl der grundlegenden Hypothesen ständig zu verringern und diese selbst ständig zu vereinfachen, damit aus einer möglichst geringen Zahl möglichst einfacher und möglichst plausibler Grundannahmen auf möglichst einfachem und einheitlichem Wege sich womöglich alle von der Experimentalphysik festgestellten Erfahrungstatsachen ergeben. Das Streben nach fortschreitender Vereinfachung und Vereinheitlichung des Naturbildes beherrscht so die Entwicklung der theoretischen Physik.

Der Grund zu dieser Entwicklung wurde bereits von den großen Naturphilosophen der Griechen gelegt, die die wichtigsten der Begriffe und Ideen schufen, auf denen das heutige System der theoretischen Physik aufgebaut ist.[10] Daneben fanden auch bereits im Altertum die durch Euklid und Archimedes zu so hoher Vollkommenheit gelangten Methoden der Geometrie Anwendung auf einzelne Probleme der Statik und der geometrischen Optik. Auf diese beiden Zweige der theoretischen

[9] Das großartigste Beispiel einer solchen Verschmelzung stellt die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Lichtes dar.

[10] Vgl. des Verfassers Schrift: „Der Geist des Hellenentums in der modernen Physik“ (Leipzig 1914).

Physik waren auch die wenigen Fortschritte beschränkt, die das Mittelalter zu verzeichnen hatte.

Erst durch Galilei wurde auch die Dynamik Gegenstand der exakten theoretischen Forschung. Ihre Fortbildung verdankte sie vor allem der Infinitesimalrechnung, deren Begründer Newton zugleich in seinen „Mathematischen Prinzipien der Naturlehre" den ersten großartigen Versuch unternahm, nach dem Vorbilde der Geometrie Euklids aus wenigen Axiomen das ganze System der Physik auf rein deduktivem Wege durch mathematische Methoden abzuleiten. Auch die optischen Erscheinungen suchte Newton bereits mittels der Sätze der Mechanik zu erklären, ein Versuch, den in ähnlicher Weise, allerdings auf Grund anderer Voraussetzungen, gleichzeitig ebenfalls Huygens unternahm.

Die Fortschritte des 18. Jahrhunderts betrafen auf dem Gebiete der theoretischen Physik fast ausschließlich die Mechanik. Durch Euler wurde sie — und damit die Physik überhaupt — in eine enge Verbindung mit der analytischen Geometrie gebracht, und ihre Vollendung erreichte die streng mathematische Methode in der Physik durch die „Analytische Mechanik" von Lagrange.

In den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts erfuhr das Gebiet der theoretischen Physik eine große Erweiterung. Nach dem Vorbilde von Lagrange schuf Fourier eine analytische Theorie der Wärme. Fresnel vermochte aus wenigen Grundannahmen durch rein mathematische Deduktionen die verwirrende Fülle der optischen Erscheinungen zu erklären, die zu seiner Zeit bekannt wurden; und Ampère begründete die Theorie der Elektrodynamik, indem er zeigte, daß sich alle damals bekannten Phänomene der Elektrizität und des Magnetismus als notwendige Folge einiger Elementargesetze ergeben.

Die Mitte des 19. Jahrhunderts brachte die Begründung der Thermodynamik auf energetischer Grundlage, zugleich die Ausbildung der kinetischen Gastheorie und damit eine Fülle interessanter neuer Probleme. Im Jahre 1873 erschien Maxwells Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, das einen völlig neuen Abschnitt in der Entwicklung der theoretischen Physik einleitete. Elektrizitätstheorie und Optik wurden dadurch auf eine neue gemeinsame Grundlage gebracht und von einem großen Teile ihrer früheren Unklarheiten befreit.

Am Ende des 19. Jahrhunderts vollzieht sich die Erweiterung der Maxwellschen Theorie zu der Elektronentheorie, die zugleich ein neues Weltbild auf rein elektrischer Grundlage entstehen läßt. Das tiefere Eindringen in die Probleme der Wärmestrahlung hat im Beginn des 20. Jahrhunderts die Begründung der Quantentheorie zur Folge. Diese führt wieder zu großen Erfolgen in der Theorie der Spektren, wodurch die wertvollsten Aufschlüsse über den Aufbau des Atoms gewonnen werden. Eine völlige Umwälzung in den Grundlagen der Physik wird aber durch die Relativitätstheorie herbeigeführt, die als eine Schöpfung EINSTEINS eine ganz neue Auffassung des Wesens von Raum, Zeit, Bewegung und Materie hervorruft und die die bisherige Physik als Spezialfall einer viel allgemeineren Physik erscheinen läßt. Die Grundgesetze der Physik nehmen dadurch neue Formen an, und eine Fülle neuer, ungeahnter Zusammenhänge erschließt sich der physikalischen Forschung.

Die Grundlagen der Elektronen-, der Quanten- und der Relativitätstheorie werden vielleicht im Laufe der weiteren Entwicklung noch wesentliche Veränderungen erfahren. Was indessen diese drei Theorien bisher im einzelnen zu leisten vermochten, ist so gewaltig, die durch sie bewirkte Ausrottung tief eingewurzelter und doch unhaltbarer Vorurteile so unbestreitbar, die durch sie vollzogene Erweiterung unseres Naturbildes so großartig, daß die Zeit, in der diese drei Theorien entstanden sind, wohl mit Recht stets als eine Blütezeit in der Geschichte der Physik gelten wird.

Zu der klassischen theoretischen Physik steht die moderne in keinem Widerspruch. Die stürmischen Fortschritte der letzten zwei Jahrzehnte haben das alte Gebäude der theoretischen Physik nicht niedergerissen, sie haben es vollendet; und wie die geschichtliche Entwicklung der klassischen Physik sich in der modernen fortsetzt, so ist auch ein Verständnis der modernen Auffassungen nur möglich auf der Grundlage der klassischen Theorien.

I. Kapitel.

Die Bewegung des freien materiellen Punktes.

§ 1. Das Beharrungsprinzip und der Kraftbegriff.

Die Lehre von der Bewegung ist als exakter Wissenszweig durch GALILEI begründet worden. Sein großes Verdienst besteht darin, daß er, im Gegensatze zu seinen Vorgängern und namentlich zu ARISTOTELES, zuerst klar zwischen den wesentlichen Eigenschaften der Bewegung und ihren unwesentlichen, sie hemmenden Begleiterscheinungen unterschied, zu denen vor allem die Reibung und der Luftwiderstand gehören. Indem GALILEI von den Bewegungshindernissen, die sich im Experimente zwar sehr vermindern, nie aber ganz beseitigen lassen, völlig abstrahierte, gelangte er zu dem Begriffe der idealen Bewegung, für die er auf Grund seiner Beobachtungen über die Pendelschwingungen ein oberstes Gesetz in dem Prinzipe von der völligen Umkehrbarkeit des idealen mechanischen Vorganges aufstellte.

Aus diesem Prinzipe folgerte GALILEI ganz richtig, daß jede Bewegung, die unter dem Einflusse der Schwere längs einer schiefen Ebene abwärts mit einer bestimmten Beschleunigung erfolgt, in der umgekehrten Richtung, also aufwärts, mit einer gleich großen Verzögerung erfolgen müsse (wobei natürlich das Fehlen aller Bewegungshindernisse vorausgesetzt ist). Hieraus konnte aber GALILEI weiter schließen, daß bei einer idealen horizontalen Bewegung ebensowenig wie eine Beschleunigung auch eine Verzögerung möglich sein könne, daß somit eine solche Bewegung, bei der der Körper dem Einflusse der Schwere entzogen ist, ewig mit gleich bleibender Geschwindigkeit fortdauern müßte.

Nachdem DESCARTES diesen von GALILEI nur nebenbei aufgefundenen Satz in seiner vollen Tragweite erfaßt und zugleich dahin ergänzt hatte, daß ein Körper seine Bewegung stets nur in gerader Linie, nie aber in gekrümmter fortzusetzen strebe, fand das Beharrungsprinzip seine dauernde Formulierung in dem ersten NEWTONschen Bewegungsgesetze. Ein jeder Körper — so lehrt dieses — beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, jenen Zustand zu ändern.[1] Als gleichförmig wird dabei eine Bewegung bezeichnet, bei der in gleichen Zeiten gleiche Stücke Weges zurückgelegt werden, bei der also die Geschwindigkeit, die man bei der gleichförmigen Bewegung als den Quotienten aus einem beliebigen Stücke des Weges und der zu seiner Zurücklegung erforderlichen Zeit definieren kann, ihren Wert während der ganzen Bewegung ungeändert beibehält.

Die gleichförmige, geradlinige Bewegung erscheint also für einen Zustand charakteristisch, in dem der bewegte Körper allen äußeren Einflüssen entzogen ist. Weicht die Bewegung eines Körpers von der geraden Linie ab oder ändert sich seine Geschwindigkeit, so muß man somit als Grund dieser Abweichung eine äußere Ursache annehmen, die den Körper, wenn er ruhte, aber frei beweglich wäre, in Bewegung versetzen würde, und die man eben mit einem althergebrachten, leider aber in mehrfachem Sinne gebrauchten Ausdrucke als Kraft bezeichnet.

Es ist nun eine wichtige Erfahrungstatsache, daß man jede Kraft, die einen frei beweglichen Körper in Bewegung zu setzen strebt, daran durch einen Zug verhindern kann, der von einem Gewichte von bestimmter Größe in bestimmter Richtung ausgeübt wird.[2] Infolgedessen kann man eine in einem Punkte angreifende Kraft dadurch bestimmen, daß man angibt, wie groß ein Gewicht sein und in welcher Richtung es auf den Punkt einen Zug ausüben müsse, um die Wirkung der zu bestimmenden Kraft aufzuheben. Indem man dieses Gewicht mit einem als Einheit festgesetzten Gewichte vergleicht, kann man die Größe der Kraft messen, und da, wie die Erfahrung lehrt, zwei gleich große, aber entgegengesetzte Zugkräfte einander aufheben, so muß man der Kraft eine Richtung zuschreiben, die der Richtung des sie kompensierenden Zuges gerade entgegengesetzt ist.

Die Erfahrungstatsache, daß eine Kraft hinsichtlich ihres physikalischen Wirkungsvermögens durch Angabe ihrer Größe und ihrer Richtung völlig bestimmt ist, brachte zuerst Stevin auf den Gedanken, eine in einem Punkte angreifende Kraft symbolisch durch eine von dem Angriffspunkte ausgehende Strecke darzustellen, die dieselbe Richtung hat wie die Kraft und die ebenso viele Längeneinheiten umfaßt, als die Kraft Krafteinheiten enthält.

Von der großen Fruchtbarkeit dieses Gedankens überzeugte sich Stevin, als er von dem primitiven Erfahrungssatze von der gegenseitigen Aufhebung zweier entgegengesetzt gleicher Zugkräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte zu der nächstliegenden Frage weiterschritt, unter welchen Bedingungen drei in einem und demselben Punkte an-

[1] Lex motus I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

[2] Man denke etwa an einen beweglichen Magnetpol, der von einem festen angezogen wird.

greifende Zugkräfte einander in ihren Wirkungen aufheben oder, wie man sagt, einander das Gleichgewicht halten. Diese Frage konnte nämlich STEVIN auf Grund seiner Versuche dahin beantworten, daß drei in einem Punkte angreifende Zugkräfte einander dann das Gleichgewicht halten, wenn sich die Strecken, die diese Kräfte nach Größe und Richtung repräsentieren, zu einem Dreiecke zusammenfügen lassen. (Dreieck ABE in Fig. 1; hierbei sei A der gemeinsame Angriffspunkt der durch die Strecken AB, AC und AD dargestellten Kräfte. Natürlich ist $BE = AD$ und $EA = AC$.)

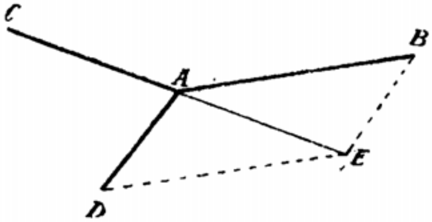

Fig. 1.

Halten aber nun die erste und zweite Kraft zusammengenommen der dritten das Gleichgewicht, so kann man sich die erste und zweite Kraft durch eine einzige Kraft ersetzt denken, die man als die Resultierende aus diesen beiden Kräften bezeichnet und die nach dem früher Gesagten der (durch die Strecke EA dargestellten) dritten Kraft entgegengesetzt gleich sein muß. Hieraus folgt aber auf Grund des vorhin erwähnten Dreieckstheorems der Satz vom Kräfteparallelogramm: Die Resultierende aus zwei in einem Punkte angreifenden Kräften wird nach Größe und Richtung durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt, dessen Seiten nach Größe und Richtung die beiden Einzelkräfte repräsentieren.

Den Vorgang, durch den man aus den Strecken AB und BE die Strecke AE erhält, bezeichnet man als geometrische Addition dieser Strecken. Man kann somit auch sagen, daß man den geometrischen Repräsentanten der Resultierenden zweier Kräfte durch geometrische Addition der Repräsentanten der Einzelkräfte erhält — ein Prinzip, das sich ohne weiteres auch auf die Zusammensetzung von beliebig vielen Kräften erweitern läßt, die in einem Punkte angreifen. Ein System von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte kann sich also nur dann im Gleichgewichte befinden, wenn die von dem Angriffspunkte ausgehende geometrische Addition der Repräsentanten aller dieser Kräfte wieder zu dem Angriffspunkte zurückführt.

§ 2. Das zweite NEWTONsche Bewegungsgesetz.

Da nach dem Beharrungsprinzipe bei der Bewegung eines jeden frei beweglichen Körpers der Einfluß einer Kraft eine Abweichung von der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung bewirken muß, so entstand der physikalischen Forschung, sobald einmal diese Erkenntnis gewonnen war, ein grundlegendes Problem in der Frage, in welchem Zusammenhange mit der Größe und Richtung der einwirkenden Kraft die Änderungen stehen, die unter ihrem Einflusse die Geschwindigkeit und die Richtung eines sich bewegenden Körpers erfahren.

Die Grundlage aller darauf bezüglichen Untersuchungen bilden Galileis Forschungen über die Bewegung der Körper unter dem Einflusse der irdischen Schwere.

Galilei ging von der Vermutung aus, daß die Fallbewegung (wenn man von den Bewegungshindernissen absieht), eine beschleunigte Bewegung von einem recht einfachen Typus darstellen müsse. Da jedenfalls von einem solchen sehr einfachen Typus eine in Gedanken konstruierbare Bewegung ist, bei der die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleiche Zuwüchse erfährt, so definierte Galilei probeweise eine solche Bewegung als gleichförmig beschleunigt. Durch das Experiment konnte er sich davon überzeugen, daß in der Tat die Gesetze, die sich für eine derart als gleichförmig beschleunigt definierte Bewegung auf mathematischem Wege deduzieren lassen (so vor allem die Proportionalität zwischen Fallraum und Quadrat der Fallzeit), sowohl bei dem freien Falle als auch bei einer Bewegung längs einer schiefen Ebene erfüllt sind.

Eine zweite ungemein wichtige Entdeckung Galileis betraf die Tatsache, daß (falls man von dem Luftwiderstande absieht) alle Körper unabhängig von ihrem Gewichte und von ihrer sonstigen Beschaffenheit gleich schnell fallen — sowohl im freien Falle als auch auf einer schiefen Ebene von bestimmter Neigung.

Drittens ergab sich aus Galileis Forschungen, daß bei der Bewegung auf einer schiefen Ebene von der Höhe h und der Länge l, wobei nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm nicht ein dem Gewichte Q gleicher Zug, sondern nur ein Zug von der Größe $Q \cdot h/l$ angewendet werden muß, um den Körper im Zustande der Ruhe zu erhalten, auch die Beschleunigung in demselben Verhältnisse verkleinert erscheint, nämlich gleich ist $g \cdot h/l$, wenn man mit g die Beschleunigung des freien Falles bezeichnet.

Viertens schließlich zeigten Galileis Untersuchungen über die Wurfbewegung, daß auch dann, wenn die Richtung der Bewegung mit der der Kraft nicht zusammenfällt, sich vielmehr ständig ändert, die Bewegung des Körpers dennoch so erfolgt, als ob er neben einer durch das Beharrungsvermögen bedingten gleichförmig geradlinigen Bewegung überdies noch, und unabhängig von jener, eine gleichförmig beschleunigte in der Richtung der Kraft ausführen würde. Es ist, wie bereits Galilei erkannte, eine grundlegende physikalische Erfahrungstatsache, daß man die Bewegung, die ein Körper von ainer innerhalb seiner Bahn beliebig gewählten Stelle aus weiterhin dusführt, durch die Annahme erklären kann, daß der Körper von dieser Stelle aus gleichzeitig, doch unabhängig voneinander, zwei Bewegungen ausführe: erstens eine durch das Beharrungsvermögen beeingte gleichförmig geradlinige in der Richtung, die der Körper an der betreffenden Stelle der Bahn hatte, und mit der Geschwindigkeit, die er dort besaß, und zweitens eine bloß durch die Kraft verursachte, die in der Richtung der Kraft erfolgt und die man sich an der gewählten Stelle der Bahn mit der Geschwindigkeit Null beginnend zu denken hat.

Aus dieser physikalischen Erfahrungstatsache folgt, wie ebenfalls GALILEI erkannte, daß sich die tatsächliche Bewegung des Körpers stets dadurch ermitteln lassen muß, daß man die beiden in Gedanken angenommenen Einzelbewegungen nach dem geometrischen[1] Prinzipe des Bewegungsparallelogramms zusammensetzt. Man findet nämlich, wenn die als Ausgangspunkt der beiden fingierten Einzelbewegungen gewählte Stelle der Bahn A genannt und diese Stelle von dem Körper zur Zeit t_1 durchlaufen wird, den Aufenthaltsort des Körpers zu einer beliebigen anderen Zeit t_2, indem man von dem Punkte A aus nach Größe und Richtung die Wege aufträgt, die der Körper bei den beiden Einzelbewegungen in der Zeit von t_1 bis t_2 unter den gemachten Voraussetzungen durchlaufen würde. Durch diese beiden von dem Punkte A ausgehenden Wegstrecken ist ein Parallelogramm, das sogenannte Bewegungsparallelogramm, bestimmt, dessen dem Punkte A gegenüberliegende Ecke den gesuchten Aufenthaltsort des Körpers zur Zeit t_2 darstellt.

Aus den besprochenen Entdeckungen GALILEIS ließen sich bereits mehrere wichtige und für die ganze Physik grundlegende Schlüsse ziehen, die ihre verallgemeinernde Zusammenfassung dann in dem zweiten NEWTONschen Bewegungsgesetze fanden.

Aus einem Vergleiche der gleichförmig beschleunigten Bewegungen, die ein und derselbe Körper auf schiefen Ebenen von verschiedener Neigung ausführt, folgt nämlich, daß das Verhältnis zwischen der die Bewegung bewirkenden Kraft und der erteilten Beschleunigung immer gleich ist dem Quotienten aus dem Gewichte des Körpers und der Beschleunigung des freien Falles. Dieser Quotient stellt somit eine für den Körper charakteristische individuelle Konstante dar, die man mit einem Ausdrucke, der in der Physik lange in sehr unklarer Weise gebraucht wurde, als die Masse des Körpers bezeichnet.[2] Unter Be-

---

[1] Denn es ist gewiß eine rein geometrische Erkenntnis, daß ein Körper, der sich in einer vertikalen Röhre gleichförmig beschleunigt nach abwärts bewegt, eine Parabel beschreibt, wenn diese Röhre durch irgendeine Vorrichtung, etwa ein Zahnradgetriebe, seitwärts bewegt wird. Daß aber, um beim Beispiele des Wurfes zu bleiben, das Beharrungsvermögen, das ein sich selbst überlassener Körper nach dem Beharrungsprinzipe im kräftefreien Zustande zeigt, auch durch die gleichzeitige Einwirkung der Schwerkraft nicht beeinträchtigt wird, ist gewiß eine physikalische Erkenntnis.

[2] Allerdings ist die Beschleunigung des freien Falles (die man bekanntlich aus Pendelbeobachtungen ermittelt) selbst wieder auf der Erdoberfläche veränderlich. Daß aber trotzdem die Masse eines Körpers als dessen individuelle Konstante angesehen werden darf, zeigt die Tatsache, daß in demselben Verhältnisse wie die Beschleunigung des freien Falles auch das mit einer Federwage gemessene Gewicht

nutzung dieses Begriffes kann man also die bei dem Beispiele der schiefen Ebene erfüllte Proportion, derzufolge sich die von einer Kraft bei einem Körper hervorgebrachte Beschleunigung zu der Beschleunigung des freien Falles ebenso verhält wie diese Kraft zu dem Gewichte des Körpers, auch in die Form kleiden, daß die wirkende Kraft proportional sei dem Produkte aus der Masse des Körpers und der ihm erteilten Beschleunigung.

Andererseits zeigten GALILEIS Untersuchungen über die Wurfbewegung, daß die Bewegung, die nach dem Prinzipe des Bewegungsparallelogramms zu der durch das Beharrungsvermögen bedingten hinzugefügt werden muß, um die tatsächliche Bewegung zu ergeben, und die somit die Abweichung der tatsächlichen Bewegung von der geradlinigen gleichförmigen darstellt, immer die Richtung der wirkenden Kraft besitzt.

Indem nun NEWTON in genialer Weise die bereits von GALILEI gewonnenen Erkenntnisse zusammenfaßte, aber auch vertiefte und verallgemeinerte, konnte er die Grundfrage der Physik, in welcher Weise eine auf einen Körper wirkende Kraft dessen Bewegung beeinflusse, in seinem zweiten Bewegungsgesetze dahin beantworten, daß die Änderung der durch das Produkt aus der Masse und ihrer Geschwindigkeit gemessenen Bewegung der einwirkenden Kraft proportional sei und in deren Richtung erfolge.[3] Da sich die Masse mit der Zeit nicht ändert, die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit aber als Beschleunigung bezeichnet wird, so wird also die Änderung der Bewegung durch das Produkt aus der Masse und der Beschleunigung gemessen. Aber NEWTON beschränkte sein zweites Bewegungsgesetz keineswegs auf den Fall einer konstanten Beschleunigung, sondern dehnte es auf alle beliebigen Bewegungen aus, so daß also auch für den Fall einer in beliebiger Weise veränderlichen Kraft stets die augenblickliche Beschleunigung der augenblicklichen Größe der Kraft proportional sein und mit deren augenblicklicher Richtung übereinstimmen muß.

Nicht als selbständiges Axiom, sondern als Zusatz zu dem zweiten Bewegungsgesetze wurde von NEWTON das eine wichtige Erfahrungstatsache ausdrückende Prinzip angesehen, demzufolge die Wirkung einer Kraft auf einen Körper ganz unabhängig davon ist, ob an demselben Körper gleichzeitig noch andere Kräfte einwirken oder nicht. Die Wirkungen mehrerer an demselben Körper gleichzeitig angreifender Kräfte sollen einander in keiner Weise beein-

---

variiert. Daß ein Körper unter der Einwirkung verschieden großer Kräfte diesen proportionale Beschleunigungen annimmt, läßt sich noch anschaulicher als durch Änderung der Neigung einer schiefen Ebene an der bekannten ATWOODschen Fallmaschine demonstrieren.

[3] Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur. — Vgl. hierzu Definitio II: Quantitas motus est mensura eiusdem orta ex velocitate et quantitate materiae coniunctim.

trächtigen, sondern sollen sich, voneinander unabhängig, übereinander lagern, so daß sich die Gesamtwirkung durch Superposition der Einzelwirkungen ergibt.

§ 3. Die ungleichförmige geradlinige Bewegung. (Die Physik und die Infinitesimalrechnung.)

Das zweite NEWTONsche Bewegungsgesetz bildet die Grundlage des Wissenszweiges, der sich die Erforschung der Bewegungen in ihrem Zusammenhange mit den einwirkenden Kräften zur Aufgabe macht und den man als Dynamik[1] bezeichnet. Ähnlich wie in allen exakten Wissenszweigen, so ist auch in diesem ein fortschreitender Ausbau der Theorie nur dadurch möglich geworden, daß die Dynamik zunächst von minder wesentlichen Eigenschaften der wirklichen Bewegungen und der wirklichen Bewegungsobjekte abstrahierte und dadurch möglichst einfache künstliche, fingierte Typen von Bewegungsvorgängen schuf und zunächst für diese eine vollständige Theorie zu entwickeln suchte.

Das einfachste überhaupt denkbare Bewegungsobjekt stellt nun zweifellos ein Körper dar, dessen gesamte Masse in einem einzigen Punkte konzentriert ist. Man bezeichnet einen solchen fingierten Körper als Massenpunkt oder als materiellen Punkt.[2] Seine Bewegung sieht die Theorie als durch keinerlei Bewegungshindernisse, wie Reibung und Luftwiderstand, beeinträchtigt an; auch betrachtet die Theorie zunächst nur solche Fälle, in denen der bewegte Massenpunkt frei ist, d. h. in seiner Bewegung keinerlei Beschränkungen durch irgendwelche von vornherein vorgeschriebene Bedingungen unterliegt.[3]

Das einfachste Problem der Dynamik des freien materiellen Punktes stellt seine gleichförmig beschleunigte Bewegung unter

---

[1] Im Gegensatze hierzu bezeichnet man die rein geometrische Untersuchung der geometrisch konstruierbaren Bewegungsformen — ohne Rücksicht auf die Bewegungsursachen — als Kinematik oder auch als Phoronomie. So sind z. B. die Gl. 4 des § 6 Formeln der Kinematik, da zu ihrer Ableitung keine physikalischen Kenntnisse notwendig sind. Man kann die Kinematik als eine Erweiterung der Geometrie ansehen, die statt mit drei Koordinaten mit vieren operiert, indem sie zu den drei räumlichen noch eine Zeitkoordinate hinzunimmt.

[2] Die fingierte Konzentration der Masse in einem einzigen Punkte bedingt namentlich dann eine wesentliche Vereinfachung des Problems, wenn die wirkende Kraft eine Funktion des Ortes ist, sich also von Stelle zu Stelle ändert, in welchem Falle natürlich die Berücksichtigung der räumlichen Ausdehnung des Körpers die Aufgabe sehr verwickeln würde. Weiter hat die fingierte Konzentration der Masse den Vorteil, daß von allen Kräften, die im Innern eines wirklichen Körpers auftreten, von allen Formänderungen sowie von allen etwaigen Drehungen abstrahiert werden kann.

[3] Vgl. § 16.

dem Einflusse einer konstanten und stets gleich gerichteten Kraft dar. Nachdem dieses Problem bereits vollständig durch GALILEIS Forschungen über den freien Fall gelöst worden war, entstand der Physik ein bereits schwierigeres, für alle weiteren Untersuchungen jedoch grundlegendes Problem in der Frage, wie sich ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer Kraft bewege, deren Richtung zwar stets mit der Richtung der Bewegung übereinstimme, deren Größe jedoch veränderlich sei.

Das Mittel zur Lösung dieser Aufgabe der ungleichförmigen geradlinigen Bewegung bietet das zweite NEWTONsche Bewegungsgesetz, demzufolge in jedem Augenblicke die veränderliche einwirkende Kraft dem Produkte aus der Masse und der Momentanbeschleunigung proportional ist. So entstand vor allem die Aufgabe, für eine ganz beliebige Bewegung die Beschleunigung in einen exakten Zusammenhang mit dem Wege und der Zeit zu bringen, und da ja der Begriff der Beschleunigung aus dem der Geschwindigkeit hervorgegangen ist, so galt es zunächst, für eine ganz beliebige Bewegung eine genaue Formel für die Momentangeschwindigkeit zu gewinnen.

Der Begriff der Geschwindigkeit ist aus der Betrachtung der einfachsten überhaupt möglichen, nämlich der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung hervorgegangen, bei der sie als der Quotient aus einem beliebigen Stücke des Weges und der zur Zurücklegung dieses Wegstückes erforderlichen Zeit definiert wird. Bezeichnet man also mit s die veränderliche Entfernung von einem festen, in der geraden Bahn gelegenen Punkte, so findet man die Geschwindigkeit folgendermaßen. Man bestimmt für zwei beliebige Augenblicke, die um t_1, bzw. t_2 Zeiteinheiten später eintreten sollen als der als Ausgangspunkt der Zeitmessung gewählte Augenblick, die zugehörigen Werte von s, die mit s_1 und s_2 bezeichnet werden mögen. Dann ist die Geschwindigkeit[4]

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \,. \tag{1}$$

Aus der Definition der gleichförmigen Bewegung folgt, daß der Wert, der sich für die Geschwindigkeit nach dieser Formel ergibt, völlig unabhängig davon ist, ein wie großes und welches Stück der Bewegung man der Berechnung von v zugrunde legt.

Dies trifft nun bei einer beliebigen Bewegung im allgemeinen gewiß nicht zu, und darum hat es dann auch keinen Sinn, von einer Geschwindigkeit der Bewegung schlechthin zu sprechen. Zunächst einmal sind die Strecken, die der Massenpunkt in der Zeiteinheit durchläuft (die Zahlenwerte dieser Strecken müssen ja nach Formel (1) dem Zahlen-

[4] Die üblichen Bezeichnungen erklären sich aus den Anfangsbuchstaben der lateinischen Worte: velocitas, spatium, tempus. Für die Geschwindigkeit wird bisweilen auch der Buchstabe c als Anfangsbuchstabe des Wortes celeritas gebraucht. Doch pflegt man jetzt das Zeichen c der Lichtgeschwindigkeit vorzubehalten.

werte der Geschwindigkeit gleich sein), in verschiedenen Teilen der Bahn im allgemeinen verschieden groß. Man darf also dann nur von einer Momentangeschwindigkeit sprechen, die der Massenpunkt in einem bestimmten Augenblicke und an einer bestimmten Stelle der Bahn besitzt. Diese Momentangeschwindigkeit, deren Begriff mit einiger, aber noch keineswegs mit völliger Klarheit bei GALILEI[5] auftritt, gibt also nach Größe und Richtung den Weg an, den der Körper in der Zeiteinheit in geradliniger, gleichförmiger Bewegung infolge seines Beharrungsvermögens zurücklegen würde, wenn er in dem betreffenden Augenblicke plötzlich dem Einflusse der die Geschwindigkeits- und Richtungsänderungen verursachenden Kraft entzogen würde.[6]

Mit der Aufstellung des Begriffes der Momentangeschwindigkeit entsteht nun auch die Frage nach ihrem quantitativen Zusammenhange mit Weg und Zeit. Die Physik beantwortet diese Frage, indem sie die Betrachtung der ungleichförmigen Bewegung auf die Betrachtung der gleichförmigen zurückführt. Die Möglichkeit einer solchen Zurückführung des komplizierteren auf den einfacheren Fall beruht auf der allgemeinen Erkenntnis, daß die Abweichungen, die ein Objekt von einem als einfacher erkannten Typus aufweist, vernachlässigt werden können, wenn nur genügend kleine Teile des Objektes ins Auge gefaßt werden, und daß die ziemliche Übereinstimmung der beiden Fälle (des komplizierteren und des einfacheren) sich um so mehr einer vollständigen Übereinstimmung nähert, ein je kleinerer Teil des komplizierteren Objektes betrachtet wird.

So kann man für nicht zu große Gebiete die Erdoberfläche statt als kugelförmig als eben ansehen; für nicht allzu große Fallräume kann davon abgesehen werden, daß sich der Wert der Erdbeschleunigung mit der Entfernung vom Erdmittelpunkte, also während des Falles, ändert. Wir sehen die Sekunde für unsere Zeitmessungen als konstante Einheit an, obwohl der Sterntag, dessen genau fixierten Bruchteil doch die Sekunde bildet, allmählich länger werden muß.

Ebenso kann man, wenn die unregelmäßige Bewegung nur durch eine Zeit betrachtet wird, die klein ist gegenüber einer solchen Zeit, in der sich die Geschwindigkeit und die Richtung merklich ändern, von der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit und von der Krümmung der Bahn abstrahieren und also mit ziemlicher Annäherung die tatsächlich ungleichförmige und krummlinige Bewegung zwischen zwei Punkten A und B durch eine fingierte, geradlinige und gleichförmige Bewegung zwischen diesen beiden Punkten sich ersetzt denken.

Bezeichnet man das kleine Zeitintervall, das der Massenpunkt

---

[5] Vgl. des Verfassers „Grundgleichungen der Mechanik", Vorl. 5.

[6] Daß man eine derartige Bedingung verwirklichen kann, zeigt ein Experiment an der ATWOODschen Fallmaschine.

braucht, um von A nach B zu gelangen, mit Δt, und hat die Sehne zwischen den Punkten A und B die Länge Δs, so ist also die Geschwindigkeit der fingierten geradlinigen, gleichförmigen Bewegung, durch die man sich mit ziemlicher Genauigkeit die tatsächliche, unregelmäßige ersetzt denken kann,

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Der Wert von $\bar{v}$ hängt hierbei, da die tatsächliche Bewegung ungleichförmig ist, bei gegebener Lage des Punktes A noch von der Lage des Punktes B, also von der Größe des Wegelementes Δs und somit auch von der Größe des Zeitintervalls Δt ab. Je kleiner man indessen Δt wählt, desto geringer wird der Einfluß, den auf den Wert von $\bar{v}$ die Größe von Δt hat, desto größer wird somit die Übereinstimmung zwischen der tatsächlichen und der fingierten geradlinigen, gleichförmigen Bewegung für das betrachtete Stück der Bewegung. Man drückt diese Tatsache in der Sprache der Mathematik derart aus, daß man sagt, daß der richtige Wert der Momentangeschwindigkeit v durch den Grenzwert, durch den Limes, dargestellt werde, dem sich der Differenzenquotient $\Delta s/\Delta t$ bei immer kleiner werdendem Δt nähert.[7] Der richtige Wert von v ist, wie man auch sagt, gleich dem Werte, den der Quotient $\Delta s/\Delta t$ annimmt, wenn Δt unendlich klein wird. Da unendlich kleine Größen neben endlich großen ebenso vernachlässigt werden können, als ob sie Null wären, so drückt man dies auch durch die Formel aus

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{3}$$

Besteht z. B. zwischen Weg und Zeit (so wie bei dem freien Fall) der durch die Erfahrung ermittelte Zusammenhang

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 ,$$

so findet man für die Momentangeschwindigkeit nach Gl. 3

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \left\{ \frac{g}{2} \left[\frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \right] \right\} = \lim_{\Delta t = 0} \left\{ g t + \frac{g \cdot \Delta t}{2} \right\}$$

Man hat nun Δt immer kleiner werden zu lassen, bis es so klein ist,

---

[7] Hierbei ist allerdings stillschweigend vorausgesetzt, daß ein solcher Grenzwert überhaupt existiert, was, vom rein mathematischen Gesichtspunkte aus betrachtet, keineswegs selbstverständlich wäre. Indessen muß man annehmen, daß s immer eine stetige Funktion von t ist, weil man, wenn man Diskontinuitäten in der Bewegung für möglich hielte, zu der paradoxen Folgerung geführt würde, daß ein Körper von einer Stelle des Raumes zu einer anderen gelangen könnte, ohne einen Weg zwischen den beiden Stellen durchlaufen zu haben. Daß s aber nicht nur eine stetige, sondern immer auch eine differentiierbare Funktion von t ist, ist ein notwendiges Postulat, falls man nicht zur Vorstellung unendlich großer Kräfte geführt werden will.

daß der zweite Summand in der geschlungenen Klammer neben dem ersten einfach verschwindet; dann wird

$$v = g\,t\ .$$

Man nennt nun, wenn $y = f(x)$ eine beliebige Funktion der unabhängigen Veränderlichen x ist, den Grenzwert, dem sich der Quotient

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

mit immer kleiner werdendem Δx nähert, den Differentialquotienten von y nach x[8] oder auch die Ableitung der Funktion $f(x)$ und bezeichnet ihn durch das Symbol $\frac{dy}{dx}$. Es ist also bei der geradlinigen Bewegung die Momentangeschwindigkeit gleich dem Differentialquotienten des Weges nach der Zeit[9] oder

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{4}$$

Da sich die Richtung der Sehne zwischen zwei Punkten einer Kurve mit abnehmender Distanz der beiden Punkte immer mehr der Richtung der Tangente an der betreffenden Stelle der Kurve nähert, so schließt die frühere Betrachtung in ihrer Anwendung auf eine krummlinige Bewegung zugleich das wichtige Resultat in sich, daß die Richtung der Momentangeschwindigkeit mit der Richtung der Bahntangente zusammenfällt.

Die von Newton aufgestellte Formel (4) reduziert das physikalische Problem der Bestimmung der Momentangeschwindigkeit bei gegebener Abhängigkeit der Bahn von der Zeit auf ein rein mathematisches Problem, auf ein Problem der Differentialrechnung. Denn ist — der Einfachheit halber soll zunächst nur eine geradlinige Bahn betrachtet werden — die Entfernung s von einem festen Punkte in ihrer Abhängigkeit von der Zeit gegeben, etwa in Form der Gleichung $s = f(t)$, so genügt es zur Bestimmung der Geschwindigkeit, die Funktion zu ermitteln, die die Eigenschaft hat, die Ableitung der Funktion $f(t)$ darzustellen. Haben wir auf Grund eigenen mathematischen Wissens oder durch Nachschlagen in einem Lehrbuche der Mathematik festgestellt, welche diese Funktion ist, die $f'(t)$ genannt werde, so können wir ohne weiteres behaupten, daß zu einer beliebigen Zeit t_1 der Massenpunkt die Geschwindigkeit $f'(t_1)$ habe.[10]

[8] Dementsprechend nennt man die Größen ds und dt Differentiale. Ist s von t abhängig, so kann natürlich auch nicht mehr ds von dt unabhängig sein. Zur Vermeidung von Unklarheiten empfiehlt es sich aber namentlich für den Anfänger, lieber von Differentialquotienten als von Differentialen zu sprechen.

[9] Newton, der zugleich mit Leibniz, doch unabhängig von ihm, die Differentialrechnung begründete (obwohl von ihren Methoden die Mathematiker schon früher oft Gebrauch gemacht hatten), nannte den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit die Fluxion des Weges.

[10] $f'(t_1)$ ist der Wert, den die Funktion $f'(t)$ annimmt, wenn $t = t_1$ wird.

Auch das umgekehrte Problem, die Berechnung der Bahn eines Körpers bei gegebener Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit, wird durch die Gl. 4 auf ein rein mathematisches Problem zurückgeführt, nämlich auf ein Problem der Rechnungsart, die der Differentialrechnung entgegengesetzt ist und die als Integralrechnung[11] bezeichnet wird. Ist also die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit bekannt, etwa durch die Gleichung $v = \varphi(t)$, wobei zunächst wieder nur eine geradlinige Bewegung betrachtet werden soll, so erscheint dann das Problem der Ortsbestimmung auf das mathematische Problem zurückgeführt, die Funktion $\Phi(t)$ zu ermitteln, deren Ableitung die Funktion $\varphi(t)$ ist. Da aber zwei Funktionen, die sich voneinander nur durch eine additive Konstante unterscheiden, dieselbe Ableitung haben, so sind trotzdem unendlich viele Lösungen des physikalischen Problems möglich. Es ist nämlich

$$s = \Phi(t) + C \ , \tag{5}$$

wobei C jeden beliebigen Wert annehmen kann. Diese Willkür verschwindet erst, wenn der Aufenthaltsort des Körpers zu irgend einer bestimmten Zeit bekannt ist. Befindet sich der Körper etwa zur Zeit t_1 in der Entfernung s_1 von dem Ursprunge, so kann man auf Grund dieser Tatsache mittels der Beziehung

$$s_1 = \Phi(t_1) + C$$

der Gl. 5 die Form geben

$$s - s_1 = \Phi(t) - \Phi(t_1)$$

Am zweckmäßigsten ist es, die Zeit von dem Augenblicke an zu zählen, in dem der Körper den als Bahnursprung gewählten Ort verläßt; denn dann verschwindet die Konstante völlig aus der Gl. 5, woferne für $t = 0$ auch $\Phi(t)$ Null wird.

War einmal das Problem der Momentangeschwindigkeit gelöst, so bereitete es der Physik weiter keine Schwierigkeit, auch die Momentanbeschleunigung bei einer ungleichförmig beschleunigten Bewegung in einen Zusammenhang mit Weg und Zeit zu bringen. Denn bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die konstante Beschleunigung durch die der Gl 1 durchaus analoge Formel definiert

$$b = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \ , \tag{6}$$

so daß also die konstante Beschleunigung numerisch gleich ist dem Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit. Der Wert, der sich aus der Gl. 6 für b ergibt, ist bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung wieder unabhängig davon, welches und ein wie großes Stück der Bewegung man betrachtet.

---

[11] Die Integralrechnung ist zugleich mit der Differentialrechnung ausgebildet worden, und zwar als Calculus summatorius hauptsächlich durch Leibniz.

Bei der ungleichförmig beschleunigten Bewegung tritt an die Stelle der Gl. 6 natürlich eine allgemeinere, und durch eine Überlegung, die durchaus derjenigen analog ist, die zu dem Ausdrucke für die Momentangeschwindigkeit führte, ergibt sich die Beziehung

$$b = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d v}{d t} \tag{7}$$

Denn da nach dem zweiten NEWTONschen Bewegungsgesetze Unstetigkeiten der Geschwindigkeit nur durch die Annahme unendlicher Kräfte erklärt werden könnten, müssen wir annehmen, daß die Geschwindigkeit eine stetige differentiierbare Funktion der Zeit sei. Ist nun $f'(x)$ die Ableitung der Funktion $y = f(x)$, so nennt man in der Mathematik eine Funktion $f''(x)$, die wiederum die Ableitung der Funktion $f'(x)$ darstellt, die zweite Ableitung von $f(x)$ oder den zweiten Differentialquotienten von y nach x; man bezeichnet ihn mit $\frac{d^2y}{dx^2}$. Aus den Gl. 4 und 7 folgt also, daß bei einer geradlinigen Bewegung die Momentanbeschleunigung gleich ist dem zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit, oder daß

$$b = \frac{d^2 s}{d t^2} \,. \tag{8}$$

Nachdem derart die Momentanbeschleunigung in eine Beziehung zu Weg und Zeit gebracht ist, läßt sich nun ohne weiteres auch ein exakter Ausdruck für das zweite Bewegungsgesetz in dessen Anwendung auf eine ungleichförmige, jedoch geradlinige Bewegung aufstellen. Da die Kraft dem Produkte aus der Masse und der Momentanbeschleunigung proportional ist, so kann sie einem Vielfachen aus diesem Produkte und aus einem Proportionalitätsfaktor gleichgesetzt werden, dessen Größe nur von der Art des Kraftmaßes abhängt. Der Proportionalitätsfaktor wird Eins, fällt also einfach weg, wenn als Krafteinheit die Kraft definiert wird, die der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung erteilt. Setzt man nun im besonderen mit Rücksicht auf die Definition der Beschleunigung durch Gl. 6 die Beschleunigungseinheit gleich dem Quotienten aus der Geschwindigkeitseinheit und der Zeiteinheit und die Geschwindigkeitseinheit wiederum gemäß Gl. 1 gleich dem Quotienten aus der Längen- und der Zeiteinheit[12], so kann man also, wenn man die Kraft mit K

[12] Als Längeneinheit gilt in der theoretischen Physik das Zentimeter, d. i. der hundertste Teil eines in Sèvres bei Paris aufbewahrten Normallängenmaßes. Als Zeiteinheit gilt die Sekunde, d. i. der $24 \times 60 \times 60$ste Teil des Sterntages. Als Einheit der Masse gilt das Gramm, d. i. der tausendste Teil einer in Sèvres aufbewahrten Normalmasse, die mit ziemlicher Genauigkeit gleich ist der Masse von 1 dm^3 Wasser bei 4° C. Die Einheit der Kraft, die also einem Gramm eine Beschleunigung von der Größe der Beschleunigungseinheit erteilt, wird nach dem griechischen Worte Dynamis (gleich Kraft) als Dyne bezeichnet. Da der Masse von 1 g das eigene Gewicht eine Beschleunigung erteilt, die nach Ablauf von 1 sec (seit Beginn der Kraft-

bezeichnet[13], die Formel (8) ohne weiteres zu der Gleichung erweitern

$$K = m \cdot \frac{d^2 s}{d t^2} \tag{9}$$

Auf Grund dieser Gleichung läßt sich bei gegebener Kraft die Abhängigkeit der Bahn von der Zeit bestimmen, indem man die Gl. 9 zweimal integriert, wobei jedoch zwei willkürliche Integrationskonstanten auftreten. Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man etwa das Beispiel des vertikalen Wurfes nach aufwärts betrachtet. Hierfür lautet die Bewegungsgleichung, wenn s in der Aufwärtsrichtung positiv gerechnet wird,

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = -g .$$

Hieraus folgt durch einmalige Integration

$$v = -g t + C_1$$

und durch abermalige Integration

$$s = -\tfrac{1}{2} g t^2 + C_1 t + C_2 \tag{10}$$

Damit die beiden Integrationskonstanten bekannt seien, müssen entweder für eine bestimmte Zeit Lage und Geschwindigkeit oder aber für zwei Zeiten die zugehörigen Werte von s gegeben sein. Wählt man als festen Punkt, von dem aus die Werte von s gemessen werden, den Punkt, in dem sich der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ befindet, und nennt man die Geschwindigkeit, mit der er diesen Punkt verläßt, v_0 (die sog. Anfangsgeschwindigkeit), so nimmt die Gl. 10 die einfachere Form an

$$s = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t . \tag{11}$$

§ 4. Die rechtwinklige Auflösung der krummlinigen Bewegung. (Die Physik und die analytische Geometrie.)

Das Problem der geradlinigen Bewegung ist, wie im vorhergegangenen Abschnitte dargelegt wurde, vollkommen durch die Beziehung gelöst, daß in jedem Augenblicke der Bewegung der zweite Differentialquotient der von einem festen Punkte aus gemessenen Entfernung nach der Zeit gleich ist dem Quotienten aus der augenblicklichen Größe der Kraft und aus der Masse des bewegten materiellen Punktes. Auf den einfacheren Fall der geradlinigen Bewegung, bei der sich der Ein-

wirkung) eine Geschwindigkeit von 981 cm in der Sekunde herbeiführt, so ist die Dyne ungefähr gleich einem Gewichte von 1,02 mg. Symbolisch schreibt man als Benennung von Geschwindigkeitsgrößen gemäß Gl. 1 cm/sec oder cmsec^{-1}. Man nennt dann den Ausdruck cmsec^{-1} die Dimension der Geschwindigkeit. In analoger Weise ergibt sich als Dimension der Beschleunigung cmsec^{-2} und als Dimension der Kraft gcmsec^{-2}.

[13] Häufig wird die Kraft auch mit dem Buchstaben P (als dem Anfangsbuchstaben des Wortes pondus, gleich Gewicht) bezeichnet.

fluß der Kraft nur in einer Änderung der Größe der Geschwindigkeit, nicht auch in einer Änderung der Richtung äußert, konnte nun Euler den komplizierteren Fall einer ganz beliebigen krummlinigen Bewegung zurückführen, indem er die Dynamik auf Grund des physikalischen Satzes vom Kräfteparallelogramm und des geometrischen Prinzipes vom Bewegungsparallelogramm mit der analytischen Geometrie verknüpfte.

Der Satz vom Kräfteparallelogramm zeigt, wie man nach Größe und Richtung die Resultierende aus zwei in einem Punkte angreifenden Kräften bestimmen kann. Er ermöglicht aber auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe, die darin besteht, zwei Kräfte derart zu ermitteln, daß ihre Zusammensetzung nach dem Parallelogrammprinzip eine gegebene Kraft ergibt. Man bezeichnet diese der Kräftezusammensetzung entgegengesetzte Operation als die Zerlegung einer gegebenen Kraft in ihre Komponenten oder Teilkräfte. Da aber nun jede gegebene Strecke die Diagonale zu einer doppelt unendlichen Mannigfaltigkeit von Parallelogrammen darstellen kann (man kann nämlich jede der beiden aneinander stoßenden Parallelogrammseiten unabhängig von einander beliebige Winkel mit der Diagonale bilden lassen), so ist die Aufgabe der Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten erst dann bestimmt, wenn entweder die Richtung und die Größe einer der beiden Komponenten oder aber die Größen beider Komponenten oder schließlich die Richtungen der beiden Komponenten von vornherein festgelegt sind.

Unter allen möglichen Arten der Zerlegung ist nun die am wichtigsten, bei der die Richtungen der beiden Komponenten miteinander einen rechten Winkel bilden.[1] Denn da in diesem Falle die die Gesamtkraft darstellende Strecke die Diagonale eines Rechteckes bildet, so gilt für die rechtwinklige Zerlegung (aber auch nur für sie) die einfache Beziehung, daß die Komponente gleich ist der Gesamtkraft, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den die Richtung der Komponente mit der der Gesamtkraft einschließt. Die in eine bestimmte Richtung fallende Komponente der orthogonal zerlegten Kraft, die man kurzweg als die Komponente der Kraft nach der betreffenden Richtung bezeichnet, wird also dargestellt durch die auf diese Richtung bezogene Projektion der die Gesamtkraft repräsentierenden Strecke.

Man kann nun, wenn man eine gegebene Kraft in zwei zu einander normale Komponenten zerlegt hat, eine der beiden Komponenten in einer Ebene, die auf der anderen Komponente senkrecht steht, abermals in zwei untereinander normale Subkomponenten spalten und

[1] Auch bei diesem Probleme ist noch immer eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen möglich. Die Aufgabe wird erst dann bestimmt, wenn die Richtung oder die Größe einer der beiden Komponenten gegeben ist.

somit im allgemeinen jede Kraft in drei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen. Da bei der räumlichen orthogonalen Zerlegung die Gesamtkraft durch die körperliche Diagonale, die Teilkräfte aber durch die drei Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds dargestellt werden, so gilt auch für die räumliche ebenso wie für die ebene rechtwinklige Zerlegung die einfache Beziehung, daß jede Komponente gleich ist der Gesamtkraft, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den ihre Richtung mit der der Gesamtkraft bildet.

Obwohl nun die analytische Geometrie schon in der Mitte des 17. Jahrhunderts durch DESCARTES[2] begründet worden war, verging doch merkwürdigerweise noch mehr als ein Jahrhundert[3], bis auch die Physiker erkannten, wie große Vorteile mit dieser neuen Methode verbunden sind. Zunächst einmal wird durch die analytische Methode auf eine höchst einfache Weise eine vollkommene Bestimmung einer Kraft nach Größe und Richtung möglich. Denn Größe und Richtung sind vollkommen gegeben, sobald die Zahlenwerte der Komponenten der Kraft nach den drei Koordinatenachsen bekannt sind. Bezeichnet man nämlich die Größen dieser Komponenten entsprechend den drei Koordinatenachsen[4] mit X, Y, Z, so ist, wie ohne weiteres die geometrische Betrachtung der die Gesamtkraft und die Teilkräfte darstellenden Strecken zeigt, die Größe K der Gesamtkraft durch die Gleichung gegeben

$$K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,, \tag{1}$$

[2] In dem 1637 veröffentlichten „Discours".

[3] Dies erklärt sich hauptsächlich daraus, daß sich NEWTON in seinen 1687 erschienenen grundlegenden „Mathematischen Prinzipien der Naturlehre" nach dem streng befolgten Vorbilde EUKLIDS einer rein synthetischen Methode bediente.

[4] Bekanntlich sind zwei verschiedene Arten von räumlichen Koordinatensystemen möglich, die man als englisches und französisches Koordinatensystem unterscheidet (da jenes früher hauptsächlich von englischen, dieses von französischen Physikern benutzt wurde). Von einem Punkte der positiven z-Achse aus betrachtet, erscheint eine Drehung, die auf kürzestem Wege von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse führt, bei einem englischen Systeme dem Uhrzeiger entgegengesetzt, bei einem französischen Systeme hingegen im Sinne des Uhrzeigers zu verlaufen. Bei einem englischen Systeme haben die positiven x-, y- und z-Achsen zueinander dieselbe Richtung wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand, bei einem französischen Systeme wie dieselben Finger der linken Hand. Bei einem englischen Systeme führt eine Drehung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse in Verbindung mit einem Fortschreiten längs der z-Achse in positiver Richtung zu einer Bewegung in einer rechtsgängigen Schraubenlinie, bei einem französischen Systeme hingegen zu einer Bewegung in einer linksgängigen Schraube. Man spricht deshalb auch statt von englischem und französischem von einem Rechts- und einem Linkssystem. Jedes der beiden Systeme stellt das Spiegelbild des anderen dar und kann daher mit dem anderen nie zur Deckung gebracht werden. Für die Betrachtung elektromagnetischer Vorgänge ist das englische Koordinatensystem vorteilhafter, weshalb es auch heute allgemein gebraucht wird.

während die drei Winkel α, β und γ, die die Richtung der Kraft mit den drei Koordinatenachsen bildet, durch die Gleichungen bestimmt sind

$$\cos\alpha = \frac{X}{K}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{K}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{K} \tag{2}$$

(wobei in diesen Gleichungen für K der aus der Gl. 1 sich ergebende Wert einzusetzen ist).[5]

Da also durch die Werte von X, Y und Z auch die Richtung der Kraft gegeben ist, so entfällt bei der Verwendung eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Notwendigkeit von Winkelangaben zur Bestimmung der Kraftrichtung. Es genügt die alleinige Angabe der Größen der drei Teilkräfte in den von vorneherein gegebenen Richtungen, um von der eigentlichen Kraft außer der Größe auch die Richtung zu wissen. Das schwierigere Problem der Bestimmung nach Größe und Richtung erscheint dadurch auf das einfachere Problem der alleinigen Größenbestimmung zurückgeführt; allerdings sind an die Stelle des einen schwierigeren Problems drei einfachere getreten, die jedoch untereinander durchaus wesensgleich sind.

Durch die analytische Methode erfährt auch das Problem der Kräftezusammensetzung eine große Vereinfachung; die Betrachtung der die Kräfte darstellenden Strecken zeigt sogleich, daß die Zusammensetzung zweier Kräfte mit den Komponenten X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 eine Resultierende ergibt, deren Komponenten gleich sind $X_1 + X_2$, $Y_1 + Y_2$, $Z_1 + Z_2$. Die Resultierende aus p in einem Punkte angreifenden Kräften, deren Komponenten X_i, Y_i, Z_i sind ($i = 1$ bis p) ist also, wenn die rechtwinkligen Komponenten der Resultierenden mit R_x, R_y, R_z bezeichnet werden, analytisch durch die drei Gleichungen bestimmt

$$R_x = \Sigma X_i, \quad R_y = \Sigma Y_i, \quad R_z = \Sigma Z_i. \tag{3}$$

Hierdurch erscheint die Aufgabe der geometrischen Addition verschieden gerichteter Strecken auf das in vieler Hinsicht einfachere Problem der Aneinanderreihung gleichgerichteter Strecken und somit auf das Problem der arithmetischen Addition von Zahlen zurückgeführt.

In einer ganz analogen Weise bietet nun die analytische Methode auch die Möglichkeit, das kompliziertere Problem der krummlinigen Bewegung auf das einfachere der geradlinigen Bewegung zurückzuführen. Denn nach dem Parallelogrammprinzip können wir uns auch die tatsächliche krummlinige Bewegung, die ein Massenpunkt von einem Punkte P seiner Bahn aus bis zu einem beliebigen

[5] Von den drei Winkeln α, β, γ sind natürlich nur zwei unabhängig variabel, während der dritte mit den beiden anderen stets durch die aus der Geometrie bekannte Beziehung verknüpft ist

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

anderen vollführt, in drei geradlinige, zu einander senkrechte Teilbewegungen aufgelöst denken[6], die den drei Koordinatenachsen parallel verlaufen.

Andererseits können wir nach dem Parallelogrammprinzip aber auch die Geschwindigkeit, die der Massenpunkt in dem Punkte P zur Zeit t_0 hat, in drei Komponenten nach den Koordinatenachsen zerlegen, die mit v_x, v_y, v_z bezeichnet werden mögen. Da die Momentangeschwindigkeit nach § 3 stets die Richtung des jeweiligen Bahnelementes hat, so muß somit die Strecke, die nach Größe und Richtung die Momentangeschwindigkeit darstellt, mit den Koordinatenachsen dieselben Winkel bilden wie das Bahnelement, dessen Projektionen auf die drei Koordinatenachsen dx, dy, dz sind. Es müssen also die Proportionen bestehen

$$v_x : v = dx : ds$$
$$v_y : v = dy : ds$$
$$v_z : v = dz : ds\,.$$

Da andererseits aber wegen der Kleinheit von ds die Bewegung während des Zeitelementes dt als gleichförmig angesehen und infolgedessen gesetzt werden kann

$$v = \frac{ds}{dt}\,,$$

so ergeben sich die Beziehungen

$$v_x = \frac{dx}{dt}\,, \quad v_y = \frac{dy}{dt}\,, \quad v_z = \frac{dz}{dt}\,. \tag{4}$$

Der Differentialquotient dx/dt ist aber nichts anderes als die Geschwindigkeit, mit der die der x-Achse parallele Teilbewegung erfolgt, und man erkennt somit aus den Gl. 4, daß in jedem Augenblicke die Komponenten der tatsächlichen Geschwindigkeit nach den drei Koordinatenachsen gleich sind den Geschwindigkeiten der drei zueinander senkrechten Partialbewegungen, in die man sich die tatsächliche Bewegung aufgelöst denken kann.

Sind nun v_x, v_y, v_z die Komponenten der Geschwindigkeit im Punkte P zur Zeit t_0, so mögen die Komponenten der Geschwindigkeit zur Zeit $t_0 + \Delta t$ mit v_x', v_y', v_z' bezeichnet werden. Die Strecke, die man zu der Strecke mit den Komponenten v_x, v_y, v_z geometrisch hinzuaddieren muß, um die Strecke mit den Komponenten v_x', v_y', v_z' zu erhalten, stellt die in dem Zeitelement Δt erfolgende Änderung der Geschwindigkeit dar, die also sowohl in einer Änderung des Betrages als auch in einer Änderung der Richtung der Geschwindig-

[6] Diese nur „im Geiste vorzunehmende" Zerlegung (denn tatsächlich führt der Massenpunkt ja nur eine Bewegung aus) bezeichnet EULER als „Resolutio motus". Man beachte, daß im übrigen „Resolutio" nur die lateinische Übersetzung des griechischen Wortes „Analysis" ist.

keit besteht. Vergrößert man die Strecke, die die in dem Zeitelemente Δt erfolgende Geschwindigkeitsänderung darstellt, nun noch im Verhältnis $\Delta t : 1$ (indem man nämlich durch Δt dividiert) und läßt man überdies Δt immer kleiner werden, so ergibt sich eine gerichtete Strecke, die nach Größe und Richtung die auf die Zeiteinheit bezogene momentane Geschwindigkeitsänderung, also die momentane Beschleunigung darstellt. Die Komponenten dieser Strecke b_x, b_y, b_z müssen folglich gleich sein

$$b_x = \lim_{\Delta t = 0} \frac{v_x' - v_x}{\Delta t} \text{ usw.,}$$

und somit ergeben sich die einfachen Beziehungen

$$(5) \qquad \begin{cases} b_x = \dfrac{d v_x}{dt} = \dfrac{d^2 x}{dt^2}, \\[2mm] b_y = \dfrac{d v_y}{dt} = \dfrac{d^2 y}{dt^2}, \\[2mm] b_z = \dfrac{d v_z}{dt} = \dfrac{d^2 z}{dt^2}. \end{cases}$$

Es sind also auch in jedem Augenblicke die Komponenten der tatsächlichen Beschleunigung gleich den Beschleunigungen, die in demselben Augenblicke die drei zueinander senkrechten Partialbewegungen haben.

Da nun nach dem zweiten NEWTONschen Bewegungsgesetze die Beschleunigung stets dieselbe Richtung wie die Kraft hat, so müssen die Proportionen erfüllt sein

$$b_x : b = X : K,$$
$$b_y : b = Y : K,$$
$$b_z : b = Z : K.$$

Weil aber andererseits nach dem zweiten NEWTONschen Bewegungsgesetze

$$\frac{K}{b} = m$$

ist, so ergeben sich als analytischer Ausdruck des zweiten NEWTONschen Bewegungsgesetzes die sogenannten Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes in rechtwinkligen Koordinaten in der Form:

$$(6) \qquad \begin{cases} X = m \dfrac{d^2 x}{dt^2}, \\[2mm] Y = m \dfrac{d^2 y}{dt^2}, \\[2mm] Z = m \dfrac{d^2 z}{dt^2}. \end{cases}$$

Wie diese Gleichungen zeigen, erscheint somit in der Tat durch die rechtwinklige Auflösung das Problem der krummlinigen Bewegung zurückgeführt auf das einfachere Problem einer geradlinigen Bewegung, für die die Richtung der Kraft stets mit der Richtung der Bewegung zusammenfällt und für die eben die einfache Gl. 9 des § 3 gilt.

Zum Schlusse möge noch der Fall betrachtet werden, daß sich ein Massenpunkt unter der gleichzeitigen Einwirkung zweier Kräfte bewege, deren Komponenten X_1, Y_1, Z_1, bzw. X_2, Y_2, Z_2 seien. Betrachten wir einen beliebigen Punkt der Bahn P (dessen Koordinaten x_0, y_0, z_0 seien), so können wir dann die Bewegung, die der Massenpunkt von dem Punkte P der Bahn aus tatsächlich ausführt, nach dem Prinzipe des Bewegungsparallelogramms uns aus drei speziellen Bewegungen zusammengesetzt denken (deren jede wir natürlich wiederum in je drei zueinander senkrechte Partialbewegungen auflösen können).

Die erste spezielle Bewegung sei so beschaffen, wie sie der Massenpunkt ausführen würde, wenn im Punkte P plötzlich die Einwirkung der beiden Kräfte aufhören und der Massenpunkt sich nur mehr infolge seines Beharrungsvermögens weiter bewegen würde, mit der Geschwindigkeit, die er zuletzt besaß, und in der Richtung, die er zuletzt inne hatte. Die Koordinaten des Punktes, den der Massenpunkt bei dieser speziellen Bewegung zu einer Zeit t passiere (die Zeit werde vom Augenblicke des Verlassens des Punktes P an gezählt), mögen mit x', y', z' bezeichnet werden; dann ist es, da diese erste Spezialbewegung nach dem Beharrungsprinzip gleichförmig und geradlinig sein muß, klar, daß

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2} = 0 \tag{7}$$

ist.

Die zweite und die dritte Spezialbewegung seien so beschaffen, wie sie der Massenpunkt ausführen würde, wenn er bis zu einem bestimmten Augenblicke im Punkte P ruhen und dann erst plötzlich entweder die Einwirkung der ersten Kraft allein (ohne die zweite Kraft) oder aber der zweiten Kraft allein (ohne die erste) beginnen würde. Die Koordinaten des Ortes, den bei einer dieser beiden Spezialbewegungen der Massenpunkt zur Zeit t nach dem Verlassen des Punktes P passieren würde, mögen mit x_1, y_1, z_1, bzw. mit x_2, y_2, z_2 bezeichnet werden. Da nach dem Zusatze zum zweiten NEWTONschen Bewegungsgesetze (§ 2) die Wirkungen der beiden Kräfte von einander völlig unabhängig sein und durch einander nicht im mindesten beeinträchtigt werden sollen, so müssen bei der tatsächlichen Bewegung somit stets gleichzeitig beide Gleichungen erfüllt sein

$$X_1 = m\frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad X_2 = m\frac{d^2x_2}{dt^2}. \tag{8}$$

Andererseits ist nach dem Prinzipe des Bewegungsparallelogrammes die x-Koordinate der Stelle, die der Massenpunkt zur Zeit t bei der tatsächlichen Bewegung passiert (vgl. Gl. 3)

$$x - x_0 = (x' - x_0) + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_0), \tag{9}$$

woraus zufolge der Konstanz von x_0 und der Gl. 7 folgt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der Masse, so findet man auf Grund der Gl. 8

$$X_1 + X_2 = m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{10}$$

Zwei analoge Gleichungen gelten natürlich für die Komponenten nach der y- und der z-Richtung.

Da sich die Gl. 10 ohne weiteres auch auf das Zusammenwirken von beliebig vielen in einem Punkte angreifenden Kräften ausdehnen läßt, so kann man diese Gleichung auch in der Form aussprechen, daß sich ein Massenpunkt, auf den gleichzeitig mehrere Kräfte einwirken, so bewegt, als ob auf ihn nur eine einzige Kraft wirken würde, die die Resultierende aller dieser Kräfte darstellt.

§ 5. Die natürlichen Bewegungsgleichungen.

Wenn sich auch die rechtwinklige Auflösung der Bewegung durch besondere Einfachheit auszeichnet, so ist doch in manchen Fällen auch eine andere Art der Zerlegung vorteilhaft, die zu den sogenannten natürlichen Bewegungsgleichungen führt. Ebenso wie die in dem vorigen Abschnitte abgeleiteten Gleichungen stammen auch die natürlichen Bewegungsgleichungen von Euler, der sich in seiner 1736 erschienenen „Mechanik“ noch ausschließlich ihrer bediente, bis er, durch das Beispiel Mac Laurins auf diesen Gedanken gebracht, in seiner 1763 veröffentlichten „Theorie der Bewegung starrer Körper“ systematisch die Dynamik mit der analytischen Geometrie des Raumes verknüpfte.[1]

Während die in dem vorigen Abschnitte dargelegte Methode das Problem der krummlinigen Bewegung auf das Problem dreier geradliniger Bewegungen reduziert, führt die Methode, deren Ergebnis die natürlichen Bewegungsgleichungen sind, die unregelmäßige krummlinige Bewegung einerseits auf die ungleichförmige geradlinige zurück, andererseits auf eine gleichförmige Kreisbewegung, also auf zwei Spezialfälle der Bewegung, bei denen sich entweder nur der absolute Betrag der Geschwindigkeit oder aber nur die Richtung, nicht aber beide zugleich, ändern.

Das Problem der ungleichförmigen geradlinigen Bewegung ist durch die Newtonsche Gleichung (Gl. 9 des § 3) gelöst; für die mit konstanter Geschwindigkeit erfolgende Kreisbewegung aber hat noch vor Newton zuerst Huygens[2] die Größe und Richtung der Beschleu-

[1] Vgl. des Verfassers „Grundgleichungen der Mechanik“, Vorl. 7 u. 8.

[2] In dem „Horologium oscillatorium“.

nigung ermittelt. Denn eine solche muß ja vorhanden sein, weil sonst der bewegte Körper nicht ständig von der geraden Bahn abweichen könnte.

Um die Größe und die Richtung der Beschleunigung bei einer beliebigen Kreisbewegung zu ermitteln, betrachtet man die Bewegung während zweier aufeinander folgender Zeitelemente von der gleichen Größe Δt, in denen der Massenpunkt auf dem Kreisumfange nacheinander (Fig. 2) die beiden Bogenelemente AB und BB' zurücklege. Diese tatsächliche Bewegung kann man sich nun nach dem Prinzipe des Bewegungsparallelogramms in zwei zueinander senkrechte Teilbewegungen zerlegt denken, deren eine in der Richtung der im Punkte A konstruierten Tangente verlaufe und deren andere, da sie zu jener normal sein soll, zum Kreismittelpunkte gerichtet sein muß. In gleicher Weise kann man auch die gesamte Beschleunigung in zwei Komponenten nach diesen beiden Richtungen zerlegen.

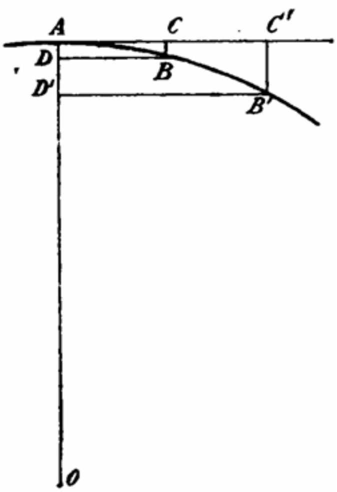

Fig. 2.

Die Tangentialkomponente der Beschleunigung, die mit b_t bezeichnet werde, findet man zufolge der Definition der Beschleunigung (Gl. 6 des § 3), indem man den Unterschied der Geschwindigkeit im zweiten und ersten Zeitelement bei der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit bestimmt und diese Differenz noch durch Δt dividiert. Es ist also

$$(1) \qquad b_t = \lim_{\Delta t=0}\left[\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{CC'}{\Delta t} - \frac{AC}{\Delta t}\right)\right] = \lim_{\Delta t=0}\left[\frac{AC' - 2AC}{(\Delta t)^2}\right].$$

Wenn nun der Winkel AOB mit φ_1 und der Winkel BOB' mit φ_2 bezeichnet wird (O sei der Mittelpunkt des Kreises), so ist wegen der Kleinheit von Δt

$$b_t = \lim_{\Delta t=0}\left[\frac{r\,\mathrm{tg}\,(\varphi_1 + \varphi_2) - 2r\,\mathrm{tg}\,\varphi_1}{(\Delta t)^2}\right].$$

Wenn nun Δt unendlich klein wird, so werden auch die Winkel φ_1 und φ_2 unendlich klein, und infolgedessen können dann die trigonometrischen Tangenten der Winkel durch die im Bogenmaße gemessenen Winkel selbst ersetzt werden.[3] Man findet dann

$$(2) \qquad b_t = \lim_{\Delta t=0}\left\{\frac{r\varphi_2 - r\varphi_1}{(\Delta t)^2}\right\}.$$

Nun ist aber $r \,.\, \varphi_1$ gleich dem Bogenelemente AB, und somit ist $r\varphi_1/dt$ die Geschwindigkeit der Kreisbewegung im ersten Zeitelement, die mit

[3] Denn es ist $\lim\limits_{\varphi=0} \mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{\lim \sin\varphi}{\lim \cos\varphi} = \dfrac{\varphi}{1}$.

v_1 bezeichnet werde. $r\varphi_2/dt$ ist die Geschwindigkeit im zweiten Zeitelement, die v_2 genannt werde. Der Wert, dem sich der Bruch in Gl. 2 nähert, wenn das Zeitelement immer kleiner wird, ist also nichts anderes als der Differentialquotient der Geschwindigkeit der Kreisbewegung nach der Zeit; es ist

$$b_t = \frac{dv}{dt}. \tag{3}$$

Diese Beziehung gilt für jede beliebige ungleichförmige Kreisbewegung. Ist im besonderen die Kreisbewegung gleichförmig, so daß also $v_2 = v_1$ ist, so wird natürlich $b_t = 0$, und es ist dann die Gesamtbeschleunigung zum Kreismittelpunkte gerichtet.

Um nun für eine beliebige Kreisbewegung die radiale Komponente der Beschleunigung, die mit b_r bezeichnet werde, zu bestimmen, geht man von der der Gl. 1 analogen Beziehung aus (Fig. 2)

$$b_r = \lim_{\Delta t = 0}\left[\frac{AD' - 2\,AD}{(\Delta t)^2}\right]. \tag{4}$$

Nun ist aber

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot 2\,r,$$

weil AB die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks bildet, dessen Hypotenuse der Durchmesser und dessen anliegender Hypotenusenabschnitt AD ist. Somit ist

$$b_r = \frac{1}{2\,r}\lim_{\Delta t = 0}\left[\frac{\overline{AB'}^2 - 2\,\overline{AB}^2}{(\Delta t)^2}\right]. \tag{5}$$

Läßt man nun Δt unendlich klein werden, so kann man die Sehnen $\overline{AB'}$ und $\overline{AB}$ den Bogenelementen $\widehat{AB'}$ und $\widehat{AB}$ gleichsetzen. Es ist aber $\widehat{AB}$ gleich $v\,.\,dt$ und ebenso

$$\widehat{AB'} = \widehat{AB} + \widehat{BB'} = v\,dt + (v + dv)\,dt.$$

Infolgedessen nimmt die Gl. 5, da neben unendlich kleinen Größen unendlich kleine Größen höherer Ordnung verschwinden, die einfache Gestalt an

$$b_r = \frac{v^2}{r}. \tag{6}$$

Diese Größe stellt bei einer ganz beliebigen Kreisbewegung die radiale Komponente der Beschleunigung, bei einer gleichförmigen Kreisbewegung aber die gesamte Beschleunigung dar, die in diesem Falle auch die Zentripetalbeschleunigung[4] genannt wird.[5]

---

[4] Bezeichnet man die konstante Umlaufszeit mit T, so ergibt sich als anderer Ausdruck der Gl. 6 die Formel

$$b_r = \frac{4\,r\pi^2}{T^2}. \tag{6b}$$

[5] Bei einer ganz beliebigen Kreisbewegung ist die gesamte Beschleunigung durch die beiden Komponenten b_t und b_r stets vollständig bestimmt; denn die Be-

Die Gl. 3 und 6 behalten aber nun auch dann ihre Gültigkeit, wenn die ungleichförmige Bewegung nicht in einem Kreise, sondern in einer ganz beliebigen, im allgemeinen sogar in einer doppelt gekrümmten Kurve[6] erfolgt. Denn um die Beschleunigung zu bestimmen, genügt es stets, die Geschwindigkeitswerte in zwei aufeinander folgenden, gleich großen Zeitelementen zu vergleichen, und hierzu reicht wiederum stets die Betrachtung eines Kurvenstückes aus, das, wenn das Zeitelement verschwindend klein wird, nur von drei benachbarten Punkten gebildet wird. Welcher Art nun aber auch immer die Bahnkurve ist, so kann man doch nach einem bekannten Satze der Geometrie ein Kurvenstück, das nur drei benachbarte Punkte enthält, als Teil eines Kreises ansehen, den man den Krümmungskreis der Kurve an der betreffenden Stelle nennt und dessen Ebene man als die Schmiegungsebene[7] der betreffenden Stelle der Kurve bezeichnet.

Es müssen somit die Gl. 3 und 6 für eine ganz beliebige Bewegung anwendbar sein, wofern nur an die Stelle des Kreiszentrums der Krümmungsmittelpunkt, an die Stelle der zentripetalen Richtung die zum Krümmungsmittelpunkte weisende, die sogenannte Normalrichtung, an die Stelle des Kreisradius der Krümmungshalbmesser ϱ und an die Stelle der Kreisebene die Schmiegungsebene gesetzt werden.

Zerlegt man also die wirkende Kraft in drei zueinander senkrechte Komponenten in den Richtungen der Tangente, der Normalen und in einer zu diesen beiden und somit auch zur Schmiegungsebene senkrechten Richtung, die man als die Binormale bezeichnet, und nennt man diese drei Komponenten[8] der wirkenden Kraft K_t, K_n und K_b, so lauten, da ja bei einer freien Bewegung die Kraft stets der Beschleunigung proportional und mit ihr gleichgerichtet sein muß, die natürlichen Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes:

$$\left\{\begin{aligned} K_t &= m\frac{dv}{dt}, \\ K_n &= m\frac{v^2}{\varrho}, \\ K_b &= 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

schleunigung muß natürlich auch in der Ebene des Kreises liegen, weil ja sonst der bewegte Massenpunkt diese Ebene verlassen müßte.

[6] Eine Kurve heißt doppelt gekrümmt, wenn ihre Punkte nicht in einer Ebene liegen; ein einfaches Beispiel hierfür ist die Schraubenlinie.

[7] Oder Oskulationsebene.

[8] Das Achsensystem, nach dem hier die Zerlegung vorgenommen wird, ändert also — und hierin liegt der Nachteil dieser Methode — von Stelle zu Stelle seine Orientierung im Raume.