KOMPENDIUM

DER

THEORETISCHEN PHYSIK.

VON

DR. WOLDEMAR VOIGT,

O. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

IN ZWEI BÄNDEN.

ZWEITER BAND.

ELEKTRICITÄT UND MAGNETISMUS. OPTIK.

LEIPZIG,

VERLAG VON VEIT & COMP.

1896.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Nachdem im Vorwort zum ersten Bande das allgemeine Ziel bezeichnet worden ist, dem ich bei der Abfassung dieses Kompendiums nachgestrebt habe, und nachdem ebenda in Bezug auf den zweiten Band bemerkt worden ist, daß in ihm die Grundgesetze der Elektricitätslehre, des Magnetismus und der Optik „frei von speziellen Vorstellungen, allein aus den Resultaten der Beobachtung“ entwickelt werden sollten, bleiben hier nur noch die speziellen Gesichtspunkte zu erörtern, die bei der Behandlung dieser Gebiete maßgebend gewesen sind.

Die Darstellung der Elektricitätslehre hält sich insofern an den Gang der historischen Entwickelung, als sie, mit der Elektrostatik und dem Magnetismus beginnend, über den Elektromagnetismus zur Induktion leitet; aber es ist Sorge getragen, von allem Anfang an den allgemeinen Standpunkt einzunehmen, den erst die neueste Entwickelung der Wissenschaft der Betrachtung angewiesen hat. So ist, um nur ein Beispiel zu geben, die besondere Art der Einführung der Potentialfunktion durch die Rücksicht auf die späteren energetischen Betrachtungen bestimmt.

Sind nun auch der Darstellung der Theorie spezielle Vorstellungen über den Mechanismus der betrachteten Vorgänge nicht zu Grunde gelegt, und ist daher jene aus dem Kombinieren von Erfahrungsthatsachen und hypothetischen Anschauungen entstehende gemischte Methode vermieden, die in vielen Lehrbüchern benutzt wird, so sind doch die Resultate der Theorie, wo immer angängig, durch Zuhilfenahme der Begriffe von Ladungen und Strömungen veranschaulicht, und es ist dadurch der Anschluß an den gewöhnlichen Sprachgebrauch gewonnen.

Diese Behandlungsart, für welche Arbeiten von Beltrami und Hertz teilweise Vorbilder geliefert haben, dürfte am meisten die mittlere Linie halten zwischen den gleichzeitig wohl kaum voll zu befriedigenden Anforderungen an Strenge, an Anschaulichkeit und an naturgemäßes Fortschreiten vom Einfachen zum Zusammengesetzten.

Die Einheiten, welche der Darstellung durchaus zu Grunde liegen, sind die elektrostatisch-magnetischen, die Hertz in zwei fundamentalen Abhandlungen (Wied. Ann. Bd. 40 u. 41) benutzt hat, und die sich bei allen allgemeinen theoretischen Darstellungen in erster Linie empfehlen; doch ist an vielen Stellen auf die Änderungen hingewiesen, welche die Einführung des technisch gebräuchlichen, elektromagnetischen Maßsystemes in die Resultate der Theorie bewirken würde.

Auch die Nomenklatur ist im wesentlichen die von Hertz a. a. O. angewandte; z. B. unterscheide ich nach seinem Vorbilde freie und wahre Ladungen und bezeichne ihre Differenz als scheinbare oder influenzierte. Eine folgenreiche Erweiterung dieser Benennungen mag besonders hervorgehoben werden; ich ordne in Übereinstimmung mit der bekannten Ampère'schen Theorie den wahren elektrischen Strömen als scheinbare oder äquivalente die mit dem influenzierten Magnetismus gleichwertigen zu und bezeichne ihre Superposition als freie Ströme. Die Einführung der letzteren gestattet, eine große Zahl allgemeiner Sätze, besonders über Induktion, überaus einfach zu gewinnen und auszusprechen.

Eine besondere Schwierigkeit bot die Auswahl der Bezeichnungen oder Symbole. Es ist von autorisierter Seite die Mahnung ausgesprochen, sich hierin durchaus an Maxwell's Vorgang zu halten; aber so sehr ich ein allgemein angenommenes System von Bezeichnungen für einen Gewinn halten würde, so habe ich mich doch für das Maxwell'sche nicht entscheiden können.

Einmal aus inneren Gründen, insofern ich dasselbe nicht für durchaus glücklich halten kann; wenn man durch die Auswahl der Buchstaben Ähnlichkeit oder Verschiedenheit der dargestellten Funktionen andeuten kann und soll, so läßt das Maxwell'sche System, wie mir scheint, mancherlei zu wünschen übrig.

Sodann aus äußeren Gründen, insofern bei einem die ganze theoretische Physik umfassenden Kompendium Funktionen, die in verschiedenen Gebieten auftreten, vorteilhaft mit denselben Buchstaben bezeichnet werden, und hierdurch die freie Auswahl für ein einzelnes Gebiet wesentlich beschränkt ist.

Die von mir gewählte Bezeichnung schließt sich nach Möglichkeit, d. h., soweit der zuletzt erwähnte Umstand Freiheit ließ, an die von Hertz a. a. O. eingeführte an. Von den notwendigen Abweichungen ist besonders eine zu nennen, die dadurch veranlaßt ist, daß die Buchstaben L, M, N für die Komponenten der magnetischen Kraft nicht mehr verfügbar waren.

Um das Verständnis auch eines aus dem Zusammenhang gerissenen Kapitels der Elektricitätslehre nach Möglichkeit zu erleichtern, gebe ich nach dem Inhaltsverzeichnis eine Zusammenstellung der wichtigsten der im IV. Teil eingeführten Bezeichnungen; diese sind konsequent beibehalten, doch war es nötig, einzelne Buchstaben des Schemas vorübergehend auch in anderer Bedeutung zu benutzen. —

Für die Darstellung der Optik lag es natürlich nahe, wie mehrfach geschehen, die elektromagnetischen Gleichungen als Grundlage zu benutzen. Indessen führt dieser Weg ohne Zuhilfenahme mehr oder weniger bedenklicher Hypothesen bisher doch nicht eben weit, und seine Wahl hätte demnach jene gemischte Methode der Behandlung nötig gemacht, die ich schon in der Elektricitätslehre zu vermeiden gesucht habe. Ich habe vorgezogen, auch in der Optik über den Mechanismus des Vorganges eine bestimmte Vorstellung nicht einzuführen, die Grundgleichungen für den einfachsten Fall der Lichtausbreitung im leeren Raum direkt auf die Erfahrung zu basiren und ihnen im HAMILTON'schen Prinzip eine Form zu geben, die eine Verallgemeinerung auf kompliziertere Verhältnisse nach übersichtlichen Grundsätzen und unter steter Vergleichung mit der Erfahrung gestattete, — ein Weg, der dem in den einzelnen Kapiteln der Elektricitätslehre wiederholt angewandten durchaus parallel geht. Dabei ist natürlich nicht unterlassen, die Beziehungen der Resultate zu der elastischen und der elektromagnetischen Lichttheorie, wo immer angängig, deutlich hervorzuheben.

Die Vorgänge werden dargestellt mit Hilfe einer als Polarisationsvektor p bezeichneten gerichteten Größe, die identisch ist mit dem NEUMANN'schen Vektor der elastischen Theorie, und nahe zusammenhängt mit der magnetischen Kraft in der elektromagnetischen Theorie; der mit ihr rein geometrisch verbundene FRESNEL'sche Vektor d wird wesentlich nur als bequeme Abkürzung geführt. Für die Theorie der anomalen Dispersion werden weitere Vektoren P_h herangezogen, die an der ponderabeln Materie haften.

Die Benennungen sind im allgemeinen die gebräuchlichen; daß einfarbiges Licht nicht mehr als homogen bezeichnet ist, daß vielmehr unter einer homogenen ebenen Welle eine solche verstanden wird, in deren Ebenen mit Schwingungsform und Phase auch die Amplitude konstant ist, wird wohl kaum beanstandet werden.

Da die Rechnungen sehr viel mit komplexen Lösungen der Differentialgleichungen operiren, so ist der schon in der Mechanik nichtstarrer Körper angewandte Kunstgriff wieder eingeführt, zur Vermeidung von Verwechselungen alle komplexen Größen mit deutschen Lettern zu bezeichnen, ein Verfahren, das bei der Theorie der elektromagnetischen Schwingungen im engeren Sinne nicht angängig war, da hier das deutsche Alphabet schon heranzuziehen war, um nur für die reellen Größen genügende Bezeichnungen zu erhalten. —

Der Umfang des II. Bandes scheint auf den ersten Blick in Widerspruch zu stehen mit dem im Vorwort zum ersten Bande aufgestellten Ziele einer „kurz zusammenfassenden Darstellung". Indessen dürfte die Prüfung seines Inhaltes darthun, daß nur die große Zahl der in ihm besprochenen Erscheinungen den Umfang des Bandes bedingt hat, daß aber jedes einzelne Gebiet so kurz behandelt ist, als mit Vollständigkeit und Klarheit nur irgend verträglich war. In Bezug auf die Auswahl der durchweg möglichst einfachen Beispiele ist nach dem Vorwort zum ersten Bande verfahren: Gebiete von einfachster physikalischer Grundlage, also geringster Mannigfaltigkeit an Erscheinungen, sind, obwohl sie jederzeit das größte mathematische Interesse bieten, kärglich bedacht, und die Ausführlichkeit wächst mit dem Reichtum und der Verschiedenartigkeit der umfaßten Vorgänge. So nimmt — entgegen dem gewöhnlichen Verhältnis — die Elektrostatik der Leiter nur etwa den dritten Teil des Raumes ein, welcher der Elektrostatik der Dielektrica eingeräumt ist.

Eine geringe Ausdehnung über das absolut nötige Maß hinaus hat der Band durch kleine Wiederholungen erfahren, welche bestimmt sind, die Teile desselben möglichst in sich abzurunden und dem Leser ihr Studium außer dem Zusammenhang mit den übrigen zu ermöglichen. —

Auch in Bezug auf diesen Band bin ich Herrn Dr. Pockels für ausgiebige Hilfe bei der Redaktion und bei der Korrektur, sowie für die Aufstellung der Litteraturnachweise zu großem Dank verpflichtet. Korrekturen haben außer ihm Herr Prof. Riecke und Herr Dr. Schütz freundlicherweise durchgesehen. Das Sachregister haben die Herren Dr. Pockels und Schütz ausgearbeitet. Herr Dr. Sommerfeld hat die Güte gehabt, mir die Benutzung seiner schönen Arbeit über die Diffraction an der Halbebene zu ermöglichen, die erst nach Fertigstellung des Manuscriptes zu diesem Bande im Druck erschienen ist.

Den Herren Prof. Beltrami, Boltzmann und Farkas verdanke ich die Hinweise auf einige Ungenauigkeiten, die im ersten Bande übersehen worden sind, und die ich nun neben einer kleinen Zahl bemerkter Druckfehler im Anhang zu diesem berichtigt habe.

Es ist bei dem großen Umfang des bearbeiteten Stoffes mehr als wahrscheinlich, daß sich trotz der aufgewandten Sorgfalt noch andere Fehler eingeschlichen haben, und jeder Hinweis auf einen solchen würde mich zu Dank verpflichten. —

Ich fühle mich schließlich noch veranlaßt, die große Liebenswürdigkeit, mit welcher der Herr Verleger meiner Arbeit die vollste Freiheit gewährt hat, mit warmem Dank anzuerkennen und daran den Wunsch zu knüpfen, daß das von ihm gehegte Vertrauen sich bewähren und das von ihm verlegte Werk Interesse finden möchte.

Göttingen, im Februar 1896. **W. Voigt.**

Inhalt.

Vierter Teil. Elektricität und Magnetismus.

I. Kapitel. Elektrostatik.

II. Kapitel. Magnetismus.

III. Kapitel. Elektromagnetismus.

Fünfter Teil. Optik.

I. Kapitel. Die allgemeinen Grundlagen der Theorie.

II. Kapitel. Fortpflanzung ebener Wellen in durchsichtigen Medien.

Zusammenstellung der wichtigsten der im IV. Teil angewandten Bezeichnungen.

Wo dieselben Buchstaben für elektrische und für magnetische Größen benutzt sind, ist im Bedürfnisfalle die Unterscheidung durch beigesetzte Indices e und m bewirkt. Den Vektorgrößen sind im Nachstehenden ihre Komponenten in Klammer beigefügt.

E Energie, Λ Arbeits-, Ω Wärmemenge;
ε, α, ω dieselben Größen auf die Volumeneinheit bezogen.
K (Ξ, H, Z) Kraft $\left.\right\}$ beliebigen Ursprunges, auf einen beliebigen
Δ (Λ, M, N) Drehungsmoment $\left.\right\}$ ponderabeln Körper ausgeübt.
u, v, w und l, m, n Verschiebungs- und Drehungskomponenten.
$\Xi_x, \ldots \Xi_y$ allgemeine Druckkomponenten,
$X_x, \ldots X_y$ dergl. elastischen Ursprunges,
$\Lambda_x, \ldots \Lambda_y$ dergl. elektrischen oder magnetischen Ursprunges.
K (X, Y, Z) elektrische Feldstärke,
N, S, ihre Komponenten nach Richtungen n und s;
$\int S\,ds = L$, Linienintegral von K, räumliche elektromotorische Kraft,
$\int L\,dt = T$, Zeitintegral von L, Integralkraft.
R (A, B, C) magnetische Feldstärke.
ϱ, ϱ', ϱ'' wahre, freie, influenzierte elektrische oder magnetische Raumdichte,
σ, σ', σ'' dergl. Flächendichte,
m, m', m'' und e, e', e'' dergl. magnetische und elektrische Ladungen.
$\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) elektrische Polarisation,
$\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) magnetische Polarisation;
$\mathfrak{d}_{hk}$ elektrische Permeabilitäten oder Dielektricitätskonstanten,
$\mathfrak{m}_{hk}$ magnetische Permeabilitäten.
M (A, B, Γ) Gesamtmoment,
μ (α, β, γ) spezifisches Moment einer elektrischen oder einer magnetischen Verteilung;
ν spezifisches Moment einer magnetischen Doppelfläche.
$\mathfrak{e}_{hk}$ Elektrisierungs-, $\mathfrak{k}_{hk}$ Magnetisierungszahlen.
$\left.\begin{matrix}\varphi, \varphi', \varphi'' \\ \psi, \psi', \psi''\end{matrix}\right\}$ Potentialfunktion wahrer, freier, influenzierter $\left\{\begin{matrix}\text{Elektricitäten,} \\ \text{Magnetismen.}\end{matrix}\right.$
P_{hk} Potentialsprünge, flächenhafte elektromotorische Kräfte.
C_{hk} elektrische Kapacitätskoefficienten, V_{hk} Potentialkoefficienten.
Φ_{hk}, Ψ_{hk} Potentiale elektrischer und magnetischer Wechselwirkung,
Φ, Ψ elektrisches und magnetisches Potential eines Systemes auf sich selbst.
Γ_{hk} elektromagnetisches Potential eines Stromes auf die Stromeinheit, virtuelles Potential.
Π_{hk} desgl. zwischen zwei Stromeinheiten;

Q_{hk} Induktionskoefficient, Q Selbstinduktionskoefficient.
$\mathfrak{i}$ ($\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$), $\mathfrak{i}'$ ($\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$), $\mathfrak{i}''$ ($\mathfrak{u}''$, $\mathfrak{v}''$, $\mathfrak{w}''$) wahre, freie, äquivalente elektrische Stromdichte.
I, I', I'' desgl. Stromstärke.
$J = \int I\,dt$ Zeitintegral von I, Integralstromstärke.
U, V, W Vektorpotentiale wahrer elektrischer Ströme,
$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ Vektorpotentiale freier elektrischer Ströme.
$\mathfrak{l}_{hk}$ Konstanten der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit.
D elektrische Leitfähigkeit, W elektrischer Widerstand.
$\mathfrak{j}$ ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) elektrische Gesamtstromdichte, zusammengesetzt aus Leitungs-, Verschiebungs- und Konvektionsstrom.
$\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) magnetische Stromdichte.
$\mathfrak{v}$ Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum.

IV. Teil.

Elektricität und Magnetismus.

I. Kapitel.

Elektrostatik.

§ 1. Elektrisierung durch Reibung. Das COULOMB'sche Elementargesetz. Elektrische Potentiale.

Die Fundamentalbeobachtung der Elektrostatik ist die, daß im allgemeinen die Körper dadurch, daß man sie gegeneinander reibt, die Fähigkeit erhalten, fernwirkende Kräfte anderer Art, als zuvor, aufeinander auszuüben. Allerdings ist diese Eigenschaft nur bei einer gewissen Klasse von Körpern, den Nichtleitern, direkt nachweisbar, bei anderen nur dann, wenn man sie beobachtet, während sie durch einen Nichtleiter von der Erde isoliert sind; letzteres deutet man dahin, daß diese Körper die erhaltene Fähigkeit an die Erde abgeben, und nennt sie demgemäß Leiter. In dem durch Reibung erzielten Zustande bezeichnet man die Körper als elektrisiert, ohne damit eine andere Vorstellung zu verbinden, als die Fähigkeit zu jenen Fernwirkungen.

Reibt man zwei isolierte Stücken eines Körpers (1) an zwei Stücken eines Körpers (2), so stoßen sich danach die Stücke von gleicher Substanz ab, die von ungleicher ziehen sich an.

Verfährt man ebenso mit Stücken zweier Körper (3) und (4), von denen übrigens einer mit (1) oder (2) identisch sein darf, so gilt für sie einerseits das Gleiche; außerdem erfahren (3) und (4) aber auch Wirkungen von (1) und (2), und zwar wird jederzeit der eine von ihnen von (1) angezogen und von (2) abgestoßen, der andere umgekehrt; es verhält sich also der eine ebenso, wie der Körper (1), der andere ebenso, wie der Körper (2).

Man erhält hiernach überhaupt nur zwei Arten von Elektrisierung, welche Körper man auch aneinander reiben mag; hergebrachter Weise wird eine jede Erregung mit denjenigen beiden verglichen, welche durch Reibung von Glas an Harz entstehen, und je nach ihrem Verhalten als Glas- oder Harzelektricität unterschieden. —

Das Gesetz der Wechselwirkung zwischen ruhenden elektrisierten Körpern ist in dem Grenzfall sehr einfach, daß beide Körper sich innerhalb eines unendlichen homogenen Nichtleiters und zwar in einem gegenseitigen Abstand befinden, der als unendlich groß gegenüber ihren Dimensionen betrachtet werden kann.

Hier führt die nach den auf S. 112 des I. Bandes erörterten Methoden der Messung von Kräften ausgeführte Beobachtung zu folgenden Resultaten. Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich. Bei gleicher Natur des umgebenden Nichtleiters und bei gleicher Entfernung der beiden Körper ist die Intensität der Kraft von ihrer gegenseitigen Orientierung unabhängig, fällt also mit ihrer Richtung notwendig in die der Verbindungslinie; bei wechselnder Entfernung verhält sie sich dem Quadrat dieser Größe indirekt proportional. Mit wechselnder Natur des umgebenden Mediums variiert die absolute Größe der Kraft um einen der Substanz individuellen Faktor.

Um die Komplikationen zu vermeiden, die durch den letzteren Umstand bewirkt werden, wollen wir für die folgenden Entwickelungen zunächst immer denselben das System umgebenden homogenen unendlichen Nichtleiter, etwa den luftleeren — oder, was in Annäherung fast gleichwertig ist, den lufterfüllten — Raum voraussetzen.

Weiter ergeben die Messungen, daß zwei durch Aneinanderreiben elektrisierte isolierte Körper unter den oben vorausgesetzten Verhältnissen auf einen dritten elektrisierten Körper in gleichen Entfernungen Kräfte von gleicher Intensität ausüben, deren Richtungen aber nach dem früheren einander entgegengesetzt sind.

Diese Resultate gestatten die vollständige Aufstellung des gesuchten Gesetzes der Wechselwirkung, wenn man noch die nahezu selbstverständliche Annahme zu Hilfe nimmt, daß man gleich elektrisierte Körper in beliebiger Zahl herstellen kann, indem man gleich geformte Stücke derselben Substanz, z. B. Kupfer, in gleicher Weise an einem und demselben Körper von anderer Substanz, z. B. Seide, reibt.

Verbindet man nämlich n identische elektrisierte Körper (α), etwa mit Hilfe von unelektrischen Nichtleitern, in beliebiger Anordnung zu einem starren System, dessen Ausdehnung immer noch verschwindend sein mag gegen seinen Abstand von einem zweiten elektrisierten Körper (β), so kann man dieses System als einen Körper von n-mal so großer Elektrisierung wie (α) betrachten.

Innerhalb des gleichen Nichtleiters und in der gleichen Entfernung ist dann die von ihm ausgeübte Kraft das n-fache der zwischen (α) und (β) stattfindenden. Bildet man auch den zweiten Körper aus m identischen Stücken (β), so ist sie ver-$n.m$-facht.

Wir dürfen daher widerspruchslos von zwei elektrisierten Körpern (α_1) und (α_2), die unter gleichen Umständen auf einen dritten Körper (β) die Kräfte K_1 und K_2 ausüben, — gleichviel ob dieselben anziehende oder abstoßende sind — aussagen, daß diese Kräfte den Elektrisierungen von (α_1) und (α_2) proportional sind, und dürfen umgekehrt auch aus ersteren auf letztere schließen.

Als Einheit der Elektrisierung kann dabei zunächst die an irgend einem bestimmten Körper durch bestimmte Reibung an einem bestimmten anderen Körper erregte eingeführt werden. Ist eine solche Einheit festgesetzt, so kann man nun auch beliebige Elektrisierungen messen, indem man ihre Wirkungen mit derjenigen vergleicht, welche der Einheits- oder Meßkörper unter den gleichen Umständen erfährt oder ausübt.

Nach dem oben Zusammengestellten gilt für die absolute Größe der elektrischen Wechselwirkung zwischen zwei Körpern, welche gegen ihre Entfernung unendlich klein sind und die Elektrisierungen e_1 und e_2 besitzen, das von COULOMB[1]) aufgestellte Gesetz

$$|K| = f\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2},$$

worin f einen Faktor bezeichnet, der von der Art des den unendlichen Raum erfüllenden — zunächst flüssig oder gasförmig zu denkenden — Nichtleiters und von der für die Elektrisierungen gewählten Einheit abhängig, aber von der Art und Stärke der Elektrisierung, sowie von der Konfiguration des Systems unabhängig ist.

Das Gesetz stimmt formal völlig mit dem Ausdruck für die NEWTON'sche Gravitation zwischen zwei Massenpunkten überein; an der Stelle von deren Massen stehen hier die Elektrisierungen, die man deshalb auch als Elektricitätsmengen oder Ladungen auf den geriebenen Körpern bezeichnet.

Die Formel läßt sich demgemäß auch dahin deuten, daß die Kräfte nicht zwischen den geladenen ponderabeln Körpern, sondern zwischen ihren Ladungen — diese als Quantitäten eines Agens betrachtet — wirken. Indessen würde diese Auffassung nur dann innerlich berechtigt sein, wenn wir die Wirkungen auf Ladungen unter Umständen beobachten könnten, wo sie nicht an ponderabeln Körpern haften, was anscheinend nicht möglich ist. Überdies benutzt sie eine Hypothese über die Ursache der elektrischen Erscheinungen, die unnötig ist, und führt in ihren Konsequenzen auf Schwierigkeiten, die wir vermeiden, indem wir weiterhin wenigstens zunächst die verschiedenen Elektrisierungen, ähnlich wie etwa die Temperaturen, nur als verschiedene Zustände der ponderabeln Körper auffassen und die Kräfte jederzeit als auf diese wirkend denken.

Hiermit steht nicht im Widerspruch, daß wir mitunter des kürzeren Ausdruckes wegen die Kräfte als von den Ladungen ausgeübt bezeichnen werden. —

Bezieht man die Kraft auf die Richtung der von dem angezogenen Körper hinweg positiv gerechneten Verbindungslinie r_{12}, so hat man sie für eine Anziehung mit positivem, für eine Abstoßung mit negativem Vorzeichen zu versehen. Diese Verfügung kann man umgehen, wenn man den Elektrisierungen e_1 und e_2 selbst Vorzeichen beilegt, und man hat demgemäß die Glaselektricität als positiv, die Harzelektricität als negativ zu rechnen festgesetzt.

Hiermit ist zunächst nichts anderes, als eine bequeme Rechnungsweise bezweckt und keineswegs die Einführung negativer Quantitäten eines Agens in die Physik; indessen hindert nichts, zum Zwecke der Veranschaulichung die positive Elektrisierung als im Mehr-, die negative als im Weniger-Vorhandensein eines wirksamen Agens, verglichen mit dem unelektrischen Normalzustand, bestehend anzusehen.

Nach der gemachten Festsetzung ist sonach die Formel

1) $$K'_{12} = -f\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}, \quad K \parallel r_{12}$$

der Ausdruck für das Gesetz der Wirkung zwischen zwei gegen ihre Entfernung sehr kleinen elektrisierten Körpern, d. h. für diejenige zwischen zwei elektrisierten Massenpunkten (1) und (2).

Da die Größen e_1 und e_2 nach dem Vorausgeschickten von der gegenseitigen Lage der Massenpunkte unabhängig sind, so besitzt die Kraft K ein Potential, welches bis auf eine irrelevante Konstante lautet

1') $$\Phi'_{12} = f\frac{e_1 e_2}{r},$$

und aus dem die auf den Massenpunkt (h) wirkenden Kraftkomponenten sich berechnen gemäß den Formeln

$$\Xi_h = -\frac{\partial \Phi'_{12}}{\partial x_h}, \quad H_h = -\frac{\partial \Phi'_{12}}{\partial y_h}, \quad Z_h = -\frac{\partial \Phi'_{12}}{\partial z_h}, \tag{1''}$$

worin x_h, y_h, z_h die Koordinaten des Massenpunktes mit der Ladung e_h bezeichnen.

Da die Kraft K sich nach dem oben Dargelegten als die Wechselwirkung zwischen allen einzelnen Teilen der elektrisierten ponderabeln Körper darstellt, so ist es eine konsequente Anwendung des gefundenen Resultates, die obigen Gleichungen bei gegen ihre Entfernung nicht unendlich kleinen Körpern auf die zwischen den Massenelementen des einen und des anderen elektrisierten Körpers wirkenden Kräfte zu übertragen. Dabei ist die Elektrisierung durch die Anziehung oder Abstoßung definiert gedacht, welche das einzelne Raumelement, im unveränderten Zustande aus der Umgebung herausgenommen, auf den Normalkörper mit der Elektrisierung Eins ausüben würde.

Das Gesetz der Elementarwirkung wird hiernach lauten, falls de_1 und de_2 die Elektrisierungen oder Ladungen zweier Massenelemente der Konduktoren (1) und (2) bezeichnen, und r_{12} ihre Entfernung bedeutet,

$$d^2 K = -f\frac{de_1\, de_2}{r_{12}^2}; \tag{1'''}$$

ihm entspricht ein Elementarpotential

$$d^2 \Phi = +f\frac{de_1\, de_2}{r_{12}}. \tag{1''''}$$

Aus (1'''') folgt der Wert des Potentiales zwischen zwei endlichen elektrisierten Körpern, die, wie immer in diesem Kapitel, als ruhend angenommen sind,

$$\Phi_{12} = f\iint\frac{de_1\, de_2}{r_{12}}, \tag{2}$$

der seinerseits die Gesamtkomponenten Ξ_h, H_h, Z_h und die Gesamtmomente Λ_h, M_h, N_h der zwischen den beiden Körpern ausgeübten Kräfte bestimmt.

Um diesen Zusammenhang klarzustellen, bedienen wir uns der Resultate, die Bd. I, S. 102 bei der Bestimmung der Arbeit an einem starren Körper erhalten waren; die Übertragung ist zulässig, da es sich auch hier um starre Körper handelt, deren Elemente sich nur in bestimmten Zuständen befinden, die sie befähigen, eigentümliche Kräfte zu äußern.

Wir bezeichnen weiterhin, wie schon im ersten Band, durch δF die willkürliche Veränderung einer Funktion F, durch dF

die in der Zeit dt faktisch eintretende; ferner durch $\delta' P$ keine Variation, sondern nur einen willkürlich vorgeschriebenen unendlich kleinen Betrag von der Natur von P, durch $d'P$ einen analogen, der aber in der Zeit dt entsteht.

Verstehen wir dann unter $\delta' u_h$, $\delta' v_h$, $\delta' w_h$ Verschiebungen parallel den Koordinatenaxen, unter $\delta' l_h$, $\delta' m_h$, $\delta' n_h$ Drehungen um die Koordinatenaxen, die man dem Körper (h) erteilt, so ist

$$2') \quad \begin{cases} \Xi_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial u_h}, \quad H_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial v_h}, \quad Z_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial w_h}, \\[2ex] \Lambda_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial l_h}, \quad M_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial m_h}, \quad N_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial n_h}; \end{cases}$$

dabei bezeichnet der Index e noch ausdrücklich, daß bei den Bewegungen, auf die sich die Differentiationen beziehen, die elektrischen Zustände resp. die Ladungen aller Massenelemente ungeändert bleiben sollen, wie dies ohne weiteres daraus folgt, daß auf jedes Massenelement die Formeln (1‴) Anwendung finden.

Fassen wir die Gleichungen (2′) mit den Faktoren $\delta' u_h$, $\delta' v_h$, $\delta' w_h$, $\delta' l_h$, $\delta' m_h$, $\delta' n_h$ zusammen, summieren das Resultat über $h = 1$ und $h = 2$, und bezeichnen mit $\delta' A_{12}$ die Arbeit der Wechselwirkung bei den betreffenden Dislokationen, so erhalten wir

$$2'') \qquad \delta' A_{12} = \Xi_h \delta' u_h + \dots + N_h \delta' n_h = -\delta_e \Phi_{12},$$

wo der Index e dieselbe Bedeutung besitzt wie in (2′).

Wenden wir diese Formel auf zwei beliebige Körper (h) und (k) eines Systems von beiläufig n Körpern an und bilden die Summe über alle Kombinationen (h, k), die wie im ersten Teil mit Σ' bezeichnet werden mag, so erhalten wir die gesamte innere Arbeit

$$2''') \qquad \delta' A_i = \Sigma' \delta' A_{hk} = -\delta_e \Sigma \Phi_{hk}.$$

Soll die vorausgesetzte Dislokation ohne Beschleunigung durch äußere Kräfte bewirkt werden, so müssen dieselben an jedem Körper des Systems die aus den Wechselwirkungen entspringenden Kräfte gerade kompensieren; die von ihnen zu leistende Arbeit wird also gleich $-\delta' A_i$ oder gleich $+\delta_e \Sigma' \Phi_{hk}$ sein müssen.

Dies Resultat ist indessen keineswegs so zu verstehen, als ob durch eine äußere Arbeit in diesem Betrage die vorausgesetzte Veränderung des Systems faktisch bewirkt werden könnte. Denn noch wissen wir nicht, ob bei den wirklich vorgenommenen Dislokationen die Elektrisierungen stets so, wie dies oben angenommen ist, von selbst an den Massenelementen haften. Wenn aber nicht, so kann noch eine eigene Arbeit notwendig sein, um die ursprüngliche elektrische Verteilung zu erhalten. Wir kommen auf diese wichtige Frage weiter unten zurück. —

Ist der Körper (2) mit der Ladung Eins versehen und zugleich so klein gegen seine Entfernung von dem Körper (1), daß er als ein Massenpunkt betrachtet werden kann, so wollen wir ihn als einen Einheitspol und mit dem Symbol (0) bezeichnen. Das elektrische Potential Φ_{12} reduziert sich in diesem Falle auf das Einheitspotential

$$\Phi_{10} = f\int\frac{de_1}{r}, \tag{3)}$$

worin r den Abstand des mit der Ladung de_1 versehenen Massenelementes an der Stelle x_1, y_1, z_1 von dem Einheitspol an der Stelle x, y, z bezeichnet. Der Körper (1) ist im übrigen völlig beliebig, kann also auch ein System von räumlich getrennten Teilen bilden.

Nach dem soeben Entwickelten geben dann

$$X = -\frac{\partial_e \Phi_{10}}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial_e \Phi_{10}}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial_e \Phi_{10}}{\partial z}, \tag{3')}$$

worin der Index e dieselbe Bedeutung hat, wie in (2′), die Komponenten der von dem System (1) auf den Einheitspol ausgeübten Kraft; ihre Resultante werde durch K bezeichnet.

Hieraus folgt, daß, wenn man bei in den ruhenden ponderabeln Massen festgehaltenen elektrischen Ladungen Φ_{10} als Funktion der Koordinaten des Einheitspoles betrachtet, seine Änderung von Ort zu Ort Größe und Richtung der auf ihn wirkenden Kraft K einfach bestimmt. Die orthogonalen Trajektorien der Oberflächen $\Phi_{10} =$ Const. sind die Kraftlinien, d. h., ihre nach kleineren Werten Φ_{10} hin positiv gerechneten Elemente fallen an jeder Stelle mit der Richtung der dort wirkenden Kraft zusammen, und wenn man auf ihnen an beliebigen Orten unendlich kleine Längen abgrenzt, welche demselben unendlich kleinen Zuwachs von Φ_{10} entsprechen, so ist die Größe der Kraft K mit diesen Längen indirekt proportional.

Das Bereich, innerhalb dessen Φ_{10} für ein gegebenes System merklich mit dem Orte variiert, nennt man dessen elektrisches Feld, den oben definierten Vektor K bezeichnet man zum Unterschiede von der resultierenden Kraft K, die ein beliebiger geladener Körper erfährt, wohl auch als Feldstärke, ein Name, den wir benutzen werden, wo die Klarheit dadurch gefördert wird.

Vorgänge, bei welchen das elektrische Feld sich entweder zeitlich nicht ändert oder wenigstens jeden Augenblick dieselbe Gestaltung besitzt, als wenn die ponderabeln Massen des Systemes ihre augenblickliche Position dauernd inne hätten, bezeichnen wir als stationäre elektrische Prozesse. Sie umfassen außer den elektrostatischen Erscheinungen auch noch den größten Teil der im III. Kapitel zu behandelnden elektromagnetischen. Wie beide zu scheiden sind, wird weiter unten besprochen werden. —

§ 2. Elektrisierung durch Influenz und durch Berührung. Die elektrische Potentialfunktion. Zwei allgemeine Prinzipien. Das elektrostatische Maßsystem.

Sind einmal durch Reibung irgendwelche Körper elektrisiert, so kann man mit ihrer Hilfe andere, ursprünglich nicht elektrisierte, ohne Reibung in den Zustand bringen, auf elektrisierte Probekörper Kräfte auszuüben. Da wir diesen Zustand allein nach seiner Wirkung beurteilen, ist es konsequent, ihn, wie er auch bewirkt sein möge, stets als dem durch Reibung bewirkten gleichartig anzusehen, d. h., jede elektrische Kraft auf eine Elektrisierung zurückzuführen.

Bringen wir in das Feld, welches einen beliebigen endlichen oder unendlich kleinen elektrisierten Körper und außerdem unseren Meßkörper enthält, einen anderen unelektrischen Körper, Leiter oder Nichtleiter, so ändert sich die Kraft, welche der Meßkörper erfährt. Oder noch allgemeiner, wenn zwei elektrische Körper, von denen jedenfalls einer endlich ist, gleichzeitig auf den Meßkörper wirken, so ist die auf letzteren ausgeübte Wirkung nicht die Resultierende aus den Wirkungen, die nach Entfernung des zweiten Körpers jeder für sich in derselben Position ausüben würde.[2])

Nach dem vorangestellten Prinzip wirkt also die gleichzeitige Anwesenheit mehrerer elektrisierter Körper verändernd auf die Ladung eines jeden von ihnen ein; diesen Vorgang nennt man Elektrisierung durch Influenz.

Körper, welche unendlich klein sind gegen die Entfernung von anderen, können auf diese influenzierend wirken, werden aber selbst nicht merklich influenziert. Dies Resultat können wir zunächst, wie oben ausgesprochen, als Erfahrungsthatsache annehmen, werden es jedoch weiter unten aus einem allgemeinen Prinzip beweisen.

Die auf endliche Körper geübte Influenzierung ist je nach deren Natur verschieden stark. Isolierte Leiter werden unter denselben Umständen stärker influenziert, als gleich große und gleich gestaltete Nichtleiter, und unter letzteren ist wiederum eine Abstufung der Wirkung je nach der Substanz festgestellt. Ganz unzugänglich ist der Influenzierung kein bekannter Körper; doch ist anscheinend kein physikalischer Grund vorhanden, dergleichen Körper als unmöglich anzusehen. Da nun die Annahme solcher influenzloser oder absoluter Isolatoren für manche theoretische Entwickelungen nützlich ist, so wollen wir sie ausdrücklich zulassen. —

Aus dem soeben über Influenz Zusammengestellten ziehen wir zunächst eine Folgerung in Bezug auf das Einheitspotential Φ_{10} eines elektrischen Systemes (1), dessen sichere Auffassung eine gewisse Schwierigkeit bietet.

Nach der Art seiner Einführung ist Φ_{10} das Potential der Wechselwirkung zwischen dem elektrisierten System (1) und einem Körper (0), der die spezielle Eigenschaft besitzt, die Einheit der Ladung zu tragen und unendlich klein gegen die Entfernung von (1), kurz gesagt, ein Einheitspol zu sein. Wenn nun infolgedessen auch der Einheitspol selbst influenzlos ist, so wirkt er doch influenzierend auf das System (1), und dessen Ladung ist daher von seiner Position abhängig. Hieraus folgt, daß Φ_{10} die Koordinaten des Einheitspoles in doppelter Weise enthält: explicite in r, welches ja gleich $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$ ist, implicite in de_1.

Diese allgemeinere Abhängigkeit des Einheitspotentiales kommt nun aber offenbar in den Formeln (3'), die für uns die charakteristischen Eigenschaften von Φ_{10} aussprechen, gar nicht zur Geltung. In ihnen erscheint vielmehr die elektrische Ladung des wirkenden Systems (1) ganz unabhängig von der Anwesenheit und von dem Verhalten des Einheitspoles vorgeschrieben, kann beispielsweise durch Ursachen bestimmt sein, die in derselben Weise wirken, wenn der Einheitspol ganz entfernt, d. h. ins Unendliche gerückt wird.

Es dient zur Klärung der vorliegenden Verhältnisse, wenn wir das in diesem speziellen Sinne verstandene Einheitspotential von dem allgemein aufgefaßten durch die Bezeichnung unterscheiden. Wir setzen demgemäß, indem wir durch den Index e wieder die feste Gebundenheit der Ladungen an die ponderabeln Massen andeuten,

$$(\Phi_{10})_e = \left(f\int\frac{de_1}{r}\right)_e = \varphi \qquad 3'')$$

und nennen φ die Potentialfunktion des elektrischen Systemes (1).

Hierdurch ist dann festgesetzt, daß bei Benutzung der Potentialfunktion φ eines elektrischen Systemes weiterhin die influenzierende Wirkung des Einheitspoles auf das

System stets ausgeschlossen und demgemäß bei seinen Bewegungen die Ladung des Systems an dessen Massen haftend gedacht werden soll; dagegen mag bei Anwendungen der Potentiale Φ_{hk} der Wechselwirkung zwischen zwei Körpern (h) und (k) die Veränderung der Ladungen durch Influenz infolge von Dislokationen aus später hervortretenden Gründen ausdrücklich zugelassen bleiben.

Die Potentialfunktion φ eines Systemes ist somit von dem Potential Φ_{10} desselben auf einen Einheitspol — aus dem φ zuerst abgeleitet war — wesentlich unterschieden, aber der Potentialfunktion der Gravitation oder der NEWTON'schen Potentialfunktion vollständig gleichartig geworden. Wir können infolgedessen nunmehr die Formeln (3') für die Komponenten der Feldstärke einfacher schreiben

$$3'') \qquad X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ferner können wir auch alle die im III. Kapitel des I. Teiles über NEWTON'sche Potentialfunktionen erhaltenen Sätze auf die elektrische Potentialfunktion anwenden.

Hierzu sei bemerkt, daß es sich im Laufe der Entwickelung in der That notwendig erweisen wird, nicht nur räumlichen Gebilden, sondern auch Flächen und Kurven elektrische Ladungen zuzusprechen. Schon die Elektrisierung durch Reibung legt diese Vorstellung nahe; denn wenn dieselbe an einem Nichtleiter vorgenommen wird, kann man sich ihre Wirkung auch nur auf dessen Oberfläche erstreckt denken. Demgemäß übertragen wir die betreffenden Vorstellungen und Bezeichnungen von der NEWTON'schen auf die elektrische Potentialfunktion und definieren, indem wir die Elemente dk, do, ds des Körpers k, der Oberfläche o, der Kurve s einführen und unter de die auf ihnen befindliche Ladung — gemessen wie S. 3 und 5 gesagt — verstehen,

$$4) \qquad \frac{de}{dk} = \varrho, \quad \frac{de}{do} = \sigma, \quad \frac{de}{ds} = \tau,$$

soweit die Differentialverhältnisse einen bestimmten Grenzwert liefern, als die Raum-, Flächen- und Kurvendichte der Ladung. Elektrische Ladung von Kurven kommt nur selten in Betracht und soll daher bei allgemeinen Entwickelungen ausgeschlossen werden.

Wir lassen weiter auch elektrische Doppelflächen zu und bezeichnen das Produkt aus der Ladungsdichte σ jeder Fläche in ihren gegenseitigen Abstand λ

$$\sigma\lambda = \nu$$

als das elektrische Moment der Flächeneinheit.

Indessen dient es mitunter zur Vereinfachung sehr allgemeiner Überlegungen, davon Gebrauch zu machen, daß die Verteilungen der Elektricität auf Kurven, auf einfachen und auf doppelten Flächen sich auch als Grenzfälle räumlicher Verteilungen auffassen lassen, und demgemäß alle Dichten als räumliche aufzufassen. Wir werden dies Verfahren in der That vielfach vorteilhaft anwenden.

Für die demnächstige Anwendung ist es nützlich, die charakteristischen Eigenschaften der Potentialfunktionen dieser verschiedenen Verteilungen übersichtlich zusammenzustellen.

Allen gemeinsam ist das reguläre Verhalten der Funktion, wie aller Differentialquotienten, und die Erfüllung der Gleichung

$$\triangle \varphi = 0$$

außerhalb wirkender Ladungen; ferner das Verschwinden der Funktion im Unendlichen wie E/r_0, der ersten Differentialquotienten wie E/r_0^2, falls alle Ladungen im Gesamtbetrag E im Endlichen liegen und r_0 den Abstand vom Koordinatenanfang bezeichnet.

Die Potentialfunktion einer räumlichen Verteilung ist mit ihren ersten Differentialquotienten auch im Innern und in der Oberfläche der geladenen Körper regulär und erfüllt im Innern die Beziehung

$$\triangle \varphi = -4\pi f \varrho . \tag{4'}$$

Diejenige einer flächenhaften Verteilung geht stetig durch die sie tragende Oberfläche hindurch, während für die Differentialquotienten nach der Normalen gilt

$$\left(\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial n}\right)_1 + \left(\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial n}\right)_2 = -4\pi f \sigma ; \tag{4''}$$

hierin sind die Normalen n_1 und n_2 auf beiden Seiten der geladenen Fläche und von dieser hinweg positiv gerechnet.

Die Potentialfunktion einer Kurvenbelegung wird in der Kurve unendlich wie $-2f\tau l(n)$, worin n den normalen Abstand von der Kurve bezeichnet. Diejenige einer Doppelfläche ist überall endlich und genügt in der geladenen Fläche der Bedingung

$$\overline{\varphi}_+ - \overline{\varphi}_- = 4\pi f \nu , \tag{4'''}$$

worin die Werte φ_+ und φ_- auf der Seite der positiven, resp. der negativen Ladung zu nehmen sind; die Differentialquotienten gehen stetig durch die Grenze.

Auf diese Eigenschaften, die sich durch Grenzübergänge sämtlich aus denen der Potentialfunktion räumlicher Verteilungen ableiten lassen, werden wir weiter unten wiederholt Bezug nehmen. —

Die Elektrisierung durch Influenz erschwert ersichtlich die Aufsuchung fundamentaler Gesetze über elektrische Wirkung mit Hilfe von Beobachtungen ungemein. Denn die Einführung eines, gleichviel ob elektrisierten oder nicht elektrisierten Meßkörpers in das elektrische Feld eines Systemes ändert dieses ihrerseits mehr oder weniger, und ein Zurückschließen von den beobachteten Kräften auf die Verhältnisse des Feldes vor Einbringung des Meßkörpers erfordert im allgemeinen umständliche theoretische Erwägungen.

Nur ein einfacher Fall ist ausgenommen, der seiner prinzipiellen Bedeutung halber Hervorhebung verdient. Wenn jeder beliebige unelektrische Körper in jeder Position innerhalb des Feldes eine Einwirkung nicht erfährt, so darf man mit Gewißheit schließen, daß die Feldstärke gleich Null, die Potentialfunktion φ also konstant ist; denn im anderen Falle müßte der Körper durch Influenz geladen werden und ein Potential erfahren, welches durch (2) gegeben ist, also nicht in allen Positionen konstant oder gleich Null sein kann. —

Wir wenden uns nunmehr zu der genaueren Untersuchung der Influenzwirkungen, welche sich speziell an Leitern zeigen.

Die auffälligste Wirkung dieser Art, welche auch den Schlüssel zum Verständnis aller übrigen bietet, ist die Thatsache, daß jeder unelektrische Körper dadurch der Wirkung einer beliebigen elektrischen Verteilung vollständig entzogen werden kann, daß man ihn mit einer aus einem homogenen Leiter gebildeten Schale vollständig umgiebt, die ihn von allen geladenen Körpern sondert. Fassen wir diese Erscheinung als eine Wirkung der Influenzierung der Hülle auf, wozu wir berechtigt sind, da die letztere nach außen elektrische Kräfte übt, so kompensieren hier die influenzierten Ladungen für alle Punkte im Innern die Wirkung der äußeren Ladungen vollkommen.

Nach dem eben Gesagten werden wir aus der beschriebenen Beobachtung schließen müssen, daß in dem rings von einem homogenen Leiter umgebenen Hohlraume die Potentialfunktion φ konstant ist, und gleiches dürfen wir von dem Innern eines homogenen Leiters selbst aussagen, der unter der Wirkung einer äußeren ruhenden elektrischen Verteilung steht; denn jedes seiner inneren Volumenelemente können wir als innerhalb einer von den übrigen gebildeten leitenden Hülle befindlich ansehen. Die gleichen Erwägungen gelten mit einer weiter unten zu besprechenden Ausnahme auch für das Innere jedes homogenen Teiles eines aus mehreren Stücken zusammengesetzten Leiters.

Gemäß dieser Schirmwirkung kann man die Leiter als in Bezug auf die elektrischen Kräfte, welche von ruhenden Ladungen ausgehen, undurchlässig oder adiëlektrisch, die Nichtleiter umgekehrt als durchlässig oder diëlektrisch bezeichnen.

Wenn innerhalb eines Leiters die Potentialfunktion konstant ist, so verschwinden in demselben nach (3‴) die Kraftkomponenten X, Y, Z; die Feldstärke K ist also gleich Null. Von einem homogenen Leiter, der dieser Bedingung genügt, sagt man, daß er sich im elektrischen Gleichgewicht befindet, und unterscheidet überhaupt Zustände, bei denen in den homogenen Leitern die Kräfte K verschwinden, als elektrostatische von denen, bei welchen sie zwar auch zeitlich konstant oder nur in gewisser, S. 8 bemerkter Weise veränderlich, aber von Null verschieden sind, die man als stationäre elektromagnetische bezeichnet.

Der Name des elektrostatischen Zustandes beruht auf der, Bd. I, S. 260 erörterten Vorstellung, daß die Elektricität ein Fluidum wäre, das in den Leitern jeder elektrischen Kraft Folge zu leisten vermöchte und daher in denselben nur dann ruhen könnte, wenn dort die Kräfte verschwänden.

Ein konstanter Wert P von φ läßt weiter auch $\triangle\varphi$ identisch verschwinden, und dies hat nach (4′) die Folge, daß im Falle des elektrischen Gleichgewichtes innerhalb der Leiter die räumliche Dichte ϱ gleich Null ist. Gleiches gilt nach (4″) auch von der Flächendichte σ an der Begrenzung von Hohlräumen innerhalb eines Leiters, welche keine elektrisierten Körper enthalten.

Dagegen wird für die Grenze nach dem äußeren Raum und ebenso für die nach einem Hohlraum hin, welcher elektrisierte Körper enthält, die Formel (4″) sich auf $\overline{\partial\varphi}/\partial n_a = -4\pi f\sigma$ reduzieren, wobei die Normale n_a aus dem Leiter heraus positiv gerechnet ist; dort, und allein dort, werden sich also bei Leitern Ladungen, und zwar flächenhafte, vorfinden.

Über den Wert P, welchen die Potentialfunktion in einem homogenen Leiter oder aber in einem homogenen Stück eines heterogenen Leitersystemes annimmt, geben uns die bisherigen Entwickelungen noch keinen Aufschluß. An sich ist die Potentialfunktion nur bis auf eine additive Konstante definiert, die man auf verschiedene Weise bestimmen kann. Eine Verfügung enthält der obige Ansatz (1′), der Φ'_{12}, und somit φ, im Unendlichen verschwinden läßt. Eine andere gewinnt man, indem man berücksichtigt, daß im Innern der Erde der Wert der Potentialfunktion φ, mindestens sehr nahe, zeitlich konstant sein muß, denn die Wirkungen elektrischer Veränderungen, die an der Erdoberfläche innerhalb mäßiger Bereiche stattfinden, sind infolge der Größe der Erde unmerklich, und kosmische Einflüsse kommen anscheinend nicht in Betracht. Man kann also die Konstante auch dadurch bestimmen, daß man φ am Beobachtungsort in der Erde gleich Null setzt. Endlich ist es unter den in der Praxis gewöhnlichen Umständen, nämlich bei Beobachtungen in weiten Räumen, die ringsum von mit der Erde verbundenen Leitern begrenzt sind, zulässig, die beiden vorstehenden Verfügungen als gleichwertig zu betrachten, also φ gleichzeitig in der Erde und im Unendlichen Null zu setzen. Aber für einen aus beliebiger Substanz gebildeten Konduktor, gleichviel, ob derselbe isoliert oder zur Erde abgeleitet ist, haben wir durch das Bisherige noch kein Mittel erhalten, um den Wert von P zu bestimmen, den unter gegebenen Umständen die Potentialfunktion auf ihm annimmt. Dies erfordert Hilfsmittel, die wir erst später gewinnen werden. —

Eine zweite indirekte Methode zur Elektrisierung eines Leiters liefert die Berührung mit einem anderen, unelektrischen oder bereits elektrisierten Leiter. Während der Berührung bilden beide ein einziges Leitersystem, auf dessen homogenen Teilen (h) nach dem Vorstehenden die Potentialfunktion der ganzen Ladung je einen konstanten Wert P_h' besitzen muß. Nach der Trennung erweist sich im allgemeinen jeder Teil als elektrisch, und wiederum muß die Potentialfunktion der neuen Elektrisierung auf jedem homogenen Teil (h) einen konstanten Wert P_h haben. Aber über die Werte beider Systeme von Konstanten P_h wie P_h' geben uns die bisher zusammengestellten Grundsätze noch keinen Aufschluß; wie oben, so genügen also auch hier die bisherigen Mittel zur theoretischen Behandlung des Problems nicht.

Wir bedürfen dazu der Aufstellung zweier neuer, auf Erfahrungsthatsachen gegründeter Hypothesen oder Prinzipien.

Das erste Prinzip wollen wir dahin formulieren, daß durch keinen Prozeß, der sich ganz innerhalb eines abgeschlossenen, d. h. nach außen durch den leeren Raum begrenzten, Systemes von Leitern und Nichtleitern vollzieht, die Gesamtsumme der in oder auf denselben vorhandenen Ladungen sich ändert.

Dieses Prinzip ist eine Erweiterung des auf S. 2 erwähnten Erfahrungssatzes, welcher zeigt, daß bei der Reibung jederzeit gleiche und entgegengesetzte Elektrisierungen entstehen, und kann auch in anderen einfachen Spezialfällen leicht durch die Messung geprüft werden, während im allgemeinen sich nur gewisse aus ihm theoretisch abgeleitete Folgerungen zur Vergleichung mit der Beobachtung bieten.

Das zweite Prinzip sprechen wir dahin aus, daß je zwei in Berührung befindliche Leiter (h) und (k) im Zustande des elektrischen Gleichgewichtes eine Potentialdifferenz besitzen, die sogenannte elektromotorische Kraft P_{hk} der Kombination (h, k), welche nur von der Natur, sowie dem thermischen und mechanischen Zustand jener Leiter, aber nicht von ihrer Gestalt und Größe, sowie von der Gestalt und Größe ihrer Berührungsfläche abhängt [3]).

Dies Prinzip ist noch weniger einer direkten Prüfung zugänglich, als das vorige, zumal die Potentialdifferenzen, welche es betrifft, klein sind gegen die, mit welchen man sonst in der Elektrostatik operiert; die schärfste Prüfung geschieht durch Vergleichung gewisser theoretisch aus ihm gewonnener Folgerungen mit der Beobachtung.

Das erste Prinzip legt die Auffassung der elektrischen Ladungen als Quantitäten eines Agens so nahe, daß dieselbe in der Entwickelung der Elektricitätslehre eine große Rolle gespielt hat. Indessen ist sie keineswegs geboten; gerade die oben hervorgehobene Analogie der Elektrisierung eines ponderabeln Körpers mit seiner Erwärmung ist geeignet, dies klarzustellen. Nach dem Bd. I, S. 555 über den Vorgang der Wärmeleitung Entwickelten bleibt nämlich bei einem beliebigen körperlichen System, welches gegen Wärmeabgabe und -aufnahme geschützt ist, das Raumintegral über die Temperatur τ multipliziert in eine gewisse Funktion $\Gamma_p \varrho_o$ des Ortes, die von den thermischen Qualitäten der dort befindlichen ponderabeln Materie abhängt, bei allen innerhalb des Systemes stattfindenden Veränderungen konstant; dies Produkt $\tau \Gamma_p \varrho_o$ hat also in der Wärmelehre genau die Eigenschaft, wie oben die Elektrisierung; daß es trotzdem nicht eine auf die Volumeneinheit bezogene wirkliche und unzerstörbare Ladung repräsentiert, erhellt unmittelbar daraus, daß in dem S. 555 Vorhergehenden gezeigt ist, wie in dem thermisch isolierten System durch mechanische Einwirkung jenes Integral $\int \tau \Gamma_p \varrho_o dk$ geändert werden kann. Und analog kann es möglich sein, daß sich auf bisher noch nicht bekanntem Wege auch in einem, wie oben vorausgesetzt elektrisch isolierten System Änderungen der Gesamtladung bewirken lassen.

Von Anwendungen des ersten Prinzips sei jetzt nur eine einzige erwähnt, nämlich die Erklärung der oben erwähnten Thatsache, daß ein unendlich kleiner isolierter Körper durch Influenz nicht elektrisch erregt wird. In der That können nach seinem Inhalt durch Influenz in einem isolierten Körper nur gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität entstehen; ist nun der Körper unendlich klein, so sind dieselben einander unendlich nahe, neutralisieren sich also, wenn sie, wie anzunehmen gestattet ist, endlich sind, bezüglich ihrer Wirkung auf alle in endlicher Entfernung befindlichen Punkte vollkommen.

Das erste Prinzip giebt auch den bisher nur als Rechnungsgrößen eingeführten elektrischen Ladungen ein ganz neues Interesse und erweckt die Frage nach den für ihre Behandlung geeigneten Einheiten. Da Ladungen jederzeit an ponderabeln Massen haften, und ihre Größe bisher allein in dem Elementargesetz (1′) der Wechselwirkung und den aus ihm folgenden Formeln aufgetreten ist, so befinden wir uns, wie in der Einleitung S. 4, Bd. I ausgeführt ist, in der Lage, die Einheiten für die Ladungen willkürlich so wählen zu können, daß diese Formeln die einfachste Gestalt annehmen. Wir thun dies, indem wir für den leeren Raum (und damit angenähert für den lufterfüllten) den Faktor f gleich einer reinen Zahl, und zwar gleich Eins setzen. Dadurch wird für die Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Massenpunkten

5) $$K'_{12} = -\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}, \qquad \Phi'_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}$$

und somit die Einheit der Ladung als diejenige definiert, welche, auf einen Punkt konzentriert, im leeren Raum auf die gleiche in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausübt.

Für die Dimensionen der elektrischen Ladungen und Dichten ergiebt sich gleichzeitig, da $[K] = m l t^{-2}$, $[\Phi] = m l^2 t^{-2}$ ist,

5′) $$[e] = m^{1/2} l^{3/2} t^{-1},$$

5″) $$[\varrho] = m^{1/2} l^{-3/2} t^{-1}, \quad [\sigma] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}, \quad [\tau] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-1},$$

5‴) $$[\nu] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-1};$$

für die elektrische Kraft oder Feldstärke K, resp. ihre Komponenten, und für die elektrische Potentialfunktion erhält man

5⁗) $$[K] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}, \quad [\varphi] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}.$$

Dieses System von Einheiten und Dimensionen, welches aus der getroffenen Verfügung über den Faktor f hervorgeht, heißt das elektrostatische Maßsystem und soll hier ausschließlich benutzt werden. Auf ein anderes für die Technik besonders geeignetes gehen wir im IV. Kapitel kurz ein.

Durch die Festsetzung des Maßsystemes ist die theoretische Grundlage für die Messung elektrostatischer Größen gegeben. Was deren praktische Ausführung angeht, so folgt aus dem S. 4 Gesagten, daß die Gesamtladung eines beliebigen elektrisierten Körpers bestimmt werden kann, indem man die Kraft mißt, welche er auf einen Körper von gegebener Ladung innerhalb des leeren Raumes ausübt, während die gegenseitige Entfernung beider Körper unendlich groß ist gegen ihre Dimensionen. Diese Methode ist unvollkommen, da unter den genannten Umständen die Wirkung sehr schwach ist; wir werden aber später Mittel kennen lernen, diese Bestimmung mit größerer Genauigkeit auszuführen. —

Das zweite Prinzip giebt ein für die Praxis höchst wichtiges Mittel an die Hand, um Potentialdifferenzen und auch absolute Potentialwerte von einmal bestimmter Größe immer wieder in derselben Weise herzustellen; denn nach ihm besitzen die Teile einer Reihe hintereinander verbundener, nach außen isolierter Leiter bei gleicher Reihenfolge der Substanzen und bei gleicher Temperatur immer die gleichen relativen Potentiale, wie groß und wie gestaltet sie auch seien. Ist etwa die Potentialdifferenz zwischen dem $h$ten und $k$ten Körper P_{hk}, so nimmt der $h$te das absolute Potential P_{hk} an, wenn man den $k$ten zur Erde ableitet — vorausgesetzt, daß man die Potentialdifferenz P_{0k} der Erde gegen den $k$ten Leiter ignorieren und den Potentialwert der Erde gleich Null setzen kann.

Um insbesondere eine Anzahl von Potentialwerten herzustellen, die eine arithmetische Reihe bilden, kann man eine Folge von drei verschiedenen Leitern wiederholt aneinander fügen, sodaß eine Kette von der Anordnung

$$abc\,abc\,abc\ldots$$

entsteht; befolgen dann die elektromotorischen Kräfte P_{hk} nicht die spezielle Bedingung

$$P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} = 0,$$

die in der That, wie weiter unten zu erörtern, von gewissen Körpern allgemein erfüllt wird, so werden die Potentialdifferenzen der folgenden Leiter (a) gegen den ersten eine arithmetische Reihe bilden, und man kann absolute Potentiale von analoger Eigenschaft erhalten, wenn man den ersten Leiter (a) zur Erde ableitet. Solche Ketten sind zum Zwecke der Graduierung gewisser elektrostatischer Messinstrumente sehr brauchbar; bei ihrer Herstellung ist einzig zu beachten, daß die elektromotorischen Kräfte von der chemischen Beschaffenheit der Leiter stark abhängen, letztere also sicher definiert sein muß, damit verschiedene Ketten vergleichbare Reihen von Werten ergeben. Dieser Anforderung entspricht in sehr vollkommener Weise eine Anordnung, die von L. Clark angegeben ist, und bei welcher für die hintereinander geordneten Körper Quecksilber, eine Lösung von Quecksilbersulfat und Zinksulfat, und metallisches Zink gewählt sind.

Schließlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß der Sprung der Potentialfunktion in der Grenze zweier Leiter bei Festhaltung der Vorstellung elektrischer Ladungen die Annahme einer elektrischen Doppelschicht auf der Grenzfläche verlangt.[4]) Die Größe ihres Einheitsmomentes ν ist nach S. 10 mit dem bezüglichen Potentialsprung proportional, also von den gleichen Umständen abhängig und unabhängig, wie dieser.

§ 3. Die Eindeutigkeit des elektrostatischen Problems für Leiter. Allgemeine Sätze über die elektrische Verteilung auf Leitern.

Das allgemeinste Problem des elektrischen Gleichgewichtes für Leiter würde etwa folgendermaßen zu formulieren sein.

Gegeben ist ein im Endlichen liegendes System von unveränderlichen elektrischen Massen, — etwa gebildet durch beliebig erregte influenzlose Isolatoren, — daneben ein gleichfalls im Endlichen liegendes System von Leitern beliebiger Form und Substanz, teils miteinander oder mit derselben Stelle der Erde verbunden, teils isoliert; für erstere Leiter seien die Potentialsprünge, für letztere die Ladungen vorgeschrieben; zu bestimmen ist das Gesetz des dem System zugehörigen elektrischen Feldes, d. h. dasjenige seiner Potentialfunktion φ. Aus ihm berechnet sich dann die sogenannte Dichte der elektrischen Verteilung, wie auch das Potential, welches Konduktoren und Isolatoren erfahren.

Die Potentialfunktion φ hat folgende Bedingungen zu erfüllen. Im ganzen Raum außerhalb der Leiter muß sie sich regulär verhalten und der Gleichung

$$\triangle \varphi = -4\pi\varrho \tag{6}$$

genügen, in welcher ϱ die vorgeschriebene Raumdichte der gegebenen elektrischen Massen bezeichnet; im Unendlichen muß sie sich verhalten, wie E/r_0, worin E eine endliche Größe und r_0 die Entfernung vom Koordinatenanfang bezeichnet, und an der Oberfläche jedes homogenen Konduktors muß sie konstant werden. Für die mit der Erde verbundenen Konduktoren bestimmen sich aus den elektromotorischen Kräften $P_{hk} = P_h - P_k$ die Werte dieser Konstanten P_h selbst, für isolierte, aus heterogenen Teilen bestehende dagegen nur die Potentialdifferenzen zwischen den einzelnen Teilen. Für jeden der isolierten, gleichviel ob homogenen oder heterogenen Konduktoren ist noch vorgeschrieben die Größe der Gesamtladung

$$E_h = \int \sigma_h do_h = -\frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial n_a}\right)_h do_h, \tag{6'}$$

worin n_a die in Bezug auf den Konduktor äußere Normale bezeichnet.

Diese Bedingungen bestimmen φ vollständig. Denn gäbe es zwei Lösungen φ' und φ'', so würde die Differenz $\varphi' - \varphi'' = U$ außerhalb der Konduktoren überall der Gleichung

$$\triangle U = 0$$

genügen, an allen mit der Erde verbundenen Leitern den Wert Null haben und auf den isolierten Konduktoren, seien sie nun homogen oder heterogen, konstant sein müssen, dabei im Unendlichen wie φ verschwinden und an jedem isolierten Konduktor die Bedingung

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\overline{\partial U}}{\partial n_a} do$$

erfüllen. Nach den Betrachtungen auf S. 180 des I. Bandes muß dann U gleich Null sein; die aufgestellten Bedingungen lassen sich also nur durch eine Funktion φ befriedigen, womit indessen nicht bewiesen ist, daß sie überhaupt unter allen Umständen erfüllt werden können.

Gefundenes φ bestimmt für jedes Oberflächenelement eines Konduktors die Dichte σ gemäß der Formel

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial n_a} \tag{6''}$$

und vermittelt auch die Kenntnis des Potentiales, welches ein beliebiger Körper des Systems, gleichviel ob Konduktor oder influenzloser Isolator, durch die Gesamtwirkung des Systemes erfährt.

Denn man kann allgemein das auf den Körper (h) des Systemes ausgeübte Potential schreiben

$$\Phi_h = \int (\varphi)_h de_h, \tag{7}$$

wobei $(\varphi)_h$ den Wert der Potentialfunktion am Orte des Ladungselementes de_h bezeichnet, und die Integration über den Körper (h) zu erstrecken ist.

Wendet man die Formel (7) auf einen Isolator mit räumlicher Ladung an, so ist $de_h = \varrho_h dk_h$, und ϱ_h eine gegebene Funktion des Ortes; wendet man sie auf einen homogenen Leiter an, so ist $de_h = \sigma_h do_h$, zugleich aber $(\varphi)_h$ konstant gleich P_h, und somit hier nach (6')

$$\Phi_h = P_h \int \sigma_h do_h = P_h E_h. \tag{7'}$$

Wir haben uns bisher ausschließlich auf den Fall homogener oder aus homogenen Stücken zusammengesetzter Leiter beschränkt; unsere Betrachtungen lassen sich aber leicht auf stetig veränderliche übertragen, indem wir diese als den Grenzfall von jenen ansehen.

Hier sind dann an jeder Stelle des Leiters die Änderungen von φ nach allen Richtungen hin, d. h. seine Differentialquotienten nach den Koordinatenaxen, vorgeschrieben; damit ist dann, wenn das Problem überhaupt auf elektrisches Gleichgewicht führt, innerhalb des Leiters φ selbst bis auf eine additive Konstante bestimmt. Diese Konstante kann entweder direkt gegeben sein, indem eine Stelle des Leiters durch Verbindung mit der Erde auf ein bekanntes Potential, z. B. auf Null, gebracht ist, oder sie kann durch die vorgeschriebene Ladung des Leiters indirekt bestimmt sein. —

Weiterhin werden wir uns ausschließlich auf homogene Konduktoren beschränken, was umsomehr zulässig ist, als die Potentialdifferenzen zwischen den Teilen eines zusammengesetzten Leiters, wie schon oben bemerkt, meist neben denen, die sonst in der Elektrostatik auftreten, zu vernachlässigen sind. Nur der eine auf inhomogene Konduktoren bezügliche und sofort einleuchtende Satz, welcher weiteres Interesse besitzt, und auf den bereits S. 17 verwiesen worden ist, mag hier erwähnt werden.

Die Bedingungen, daß auf jedem homogenen Teil φ konstant ist und beim Übergang über die Grenze um eine der Kombination der daselbst zusammenhängenden Substanzen individuelle Konstante springt, sind auf einem aus mehr als zwei homogenen Teilen zusammengesetzten Konduktor nur dann erfüllbar, wenn bei allen geschlossenen Kurven, die man in dem Leiter ziehen kann, die darauf liegenden Potentialsprünge sich zu Null ergänzen, d. h., wenn bei im Sinne des Umlaufs gerechneten Indices

$$7'')\qquad \mathop{S}_{hk} P_{hk} = 0$$

ist. Dies giebt in dem speziellen Falle dreier homogener Teile, von denen jeder mit den beiden anderen zusammenhängt, die Gleichung

$$7''')\qquad P_{12} + P_{23} + P_{31} = 0 \quad \text{oder} \quad P_{12} + P_{23} = P_{13}.$$

Diese Gleichung, welche den Namen des Volta'schen Spannungsgesetzes[6]) trägt, ist die Vorbedingung für die Möglichkeit des elektrischen Gleichgewichtes auf einem inhomogenen Leiter. Sie ist keineswegs bei allen Kombinationen beliebiger Substanzen erfüllt, doch giebt es eine Klasse von Leitern, die ihr bei konstanter Temperatur des ganzen Systemes in allen Kombinationen genügt. Diese

Leiter heißen Leiter erster Klasse; es gehören zu ihnen die Metalle und außerdem die Kohle. Bei stetig veränderlichen Leitern nimmt die Bedingung für die Möglichkeit des elektrischen Gleichgewichtes die Form an, daß das Linienintegral der vorgeschriebenen stetigen Potentialänderungen für jede geschlossene Kurve innerhalb des Leiters gleich Null, φ also einwertig sein muß.

Leitersysteme, welche diesen Bedingungen für die Möglichkeit des Gleichgewichtes nicht genügen, werden uns im folgenden Kapitel ausführlich beschäftigen. —

Die Gleichung

$$\triangle \varphi = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = -4\pi\varrho \tag{8}$$

für die Potentialfunktion räumlicher und die entsprechende

$$\overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1} + \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2} = -(N_1 + N_2) = -4\pi\sigma \tag{8'}$$

für diejenige flächenhafter elektrischer Ladungen bilden die Grundlage gewisser sehr allgemeiner Sätze über elektrische Verteilung, die wir im folgenden ableiten wollen.

In Bezug hierauf sei beiläufig bemerkt, daß, weil in den Gleichungen (8) und (8′) gemäß den Formeln (79′) in Bd. I, S. 300 die Kraftkomponenten X, Y, Z und N sich als Komponenten der stationären Strömung einer imponderabeln Flüssigkeit deuten lassen, die durch räumliche Quellen von der Ergiebigkeit $\mathfrak{r} = 4\pi\varrho$ und flächenhafte von der Ergiebigkeit $\mathfrak{f} = 4\pi\sigma$ bewirkt wird, manche der folgenden Sätze anschaulich in hydrodynamischer Form, nämlich für den stattfindenden elektrischen Kraftfluß, ausgesprochen werden können; doch bietet diese Ausdrucksweise nicht überall Vorteile.

Integriert man $\overline{(\partial\varphi/\partial n)}\,do$ über eine beliebige geschlossene Fläche o, die räumliche und flächenhafte Ladungen umschließt, und versteht unter n die innere Normale, so erhält man unter Benutzung von (8) und (8′)

$$\int \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}\, do = 4\pi(E_i), \tag{8''}$$

wo (E_i) die Summe aller innerhalb o liegenden elektrischen Ladungen bezeichnet. Umschließt o keine Ladungen, so wird hieraus

$$\int \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}\, do = 0. \tag{8'''}$$

Aus dieser Formel kann man ähnlich, wie aus der Gauss'schen Gleichung des arithmetischen Mittels (s. Bd I, S. 188), schließen, daß außerhalb der elektrischen Ladungen die Potentialfunktion weder ein Maximum, noch ein Minimum besitzen kann. Ist also nur ein isolierter Konduktor vorhanden, so muß φ von ihm nach außen hin durchaus abnehmen oder durchaus zunehmen; der Konduktor kann daher nur eine Art von Elektricität enthalten.

Ist speziell φ an der ganzen Begrenzung o eines Raumes k, zu der auch die unendlich große Kugelfläche gehören kann, konstant, etwa gleich Null, und erfüllt es innerhalb k die Gleichung $\triangle \varphi = 0$, so folgt, daß es innerhalb k überall konstant, resp. gleich Null ist.

Wendet man die Formel (8‴) auf eine sogenannte Kraftröhre an, d. h. auf einen unendlich engen Kanal, dessen Wand ausschließlich aus Kraftlinien (s. S. 7) gebildet ist, und der durch zwei beliebig gelegene und gegen die Axe der Röhre beliebig geneigte Schnitte (α) und (β) begrenzt wird, so giebt die Wandfläche keinen Anteil zu dem Integral, und man erhält daher

$$9)\qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} do\right)_\alpha + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} do\right)_\beta = 0\,,$$

worin die Indices α und β sich auf die Endflächen der Kraftröhre beziehen.

Diese Formel sagt aus, daß für beliebige Schnitte durch dieselbe Kraftröhre das Produkt aus der Normalkomponente der Kraft in die Größe des Schnittes stets denselben Wert hat.

Sind diese Schnitte Teile von zwei beliebigen Niveauflächen, so fallen die Normalen n mit der Axe s der Röhre zusammen, und wir können die letzte Formel schreiben, indem wir s nach einer beliebigen Richtung hin positiv rechnen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} do\right)_\alpha = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} do\right)_\beta .$$

Hieraus folgt, daß längs derselben Kraftlinie, so lange sie Ladungen nicht berührt, φ entweder immer zunehmen oder immer abnehmen muß, wodurch dem obigen Satz über die Maxima und Minima der Potentialfunktion eine für manche Anwendungen noch bequemere Fassung gegeben ist.

Sind die beiden Niveauflächen, zwischen denen die Kraftröhre verläuft, speziell die Oberflächen zweier Konduktoren (1) und (2), so erhält man unter Rücksicht auf (6″)

$$9')\qquad \sigma_1 do_1 + \sigma_2 do_2 = 0\,,$$

woraus folgt, daß die durch dieselbe Kraftröhre aus den Oberflächen zweier Konduktoren ausgeschnittenen Flächenelemente entgegengesetzt gleiche Ladungen haben müssen. Der Satz gestattet unmittelbar die Erweiterung auf Kraftröhren von endlichem Querschnitt und giebt dann unter anderen die nachstehenden Folgerungen.

Wird ein System abgeleiteter Konduktoren, auf denen das Potential gleich Null gesetzt werden kann, durch einen isolierten und irgendwie geladenen Konduktor influenziert, so entsteht auf ersteren nur die entgegengesetzte Elektricität, wie auf letzterem, und zwar ist die Gesamtladung des influenzierten Systemes stets kleiner, als die des influenzierenden Leiters, ausgenommen den Fall, daß die influenzierten Konduktoren den influenzierenden mit einer Schale umgeben, und daher alle von dem letzteren ausgehenden Kraftlinien auf den ersteren endigen und keine ins Unendliche verlaufen; in diesem Falle sind dann beide Ladungen gleich.

Sind die influenzierten Konduktoren isoliert und mit der Ladung Null versehen, so muß an einem jeden $\overline{\partial \varphi / \partial n_a}$ zum Teil positiv, zum Teil negativ sein, es muß also für einen jeden der Wert von $\bar{\varphi}$ zwischen dem auf dem influenzierenden Konduktor geltenden und Null liegen. Es entsteht auf einem jeden ferner der influenzierenden entgegengesetzte Elektricität, soweit ihn Kraftlinien von dem influenzierenden Konduktor treffen, gleichnamige, soweit aus dem Unendlichen kommende Kraftlinien auf ihm endigen. Die gleichnamige, wie die ungleichnamige Ladung für sich betrachtet, muß also im allgemeinen wieder geringer sein, wie die sie influenzierende. —

Ist ein homogener Leiter gegeben, welcher einen Hohlraum, und innerhalb desselben beliebige elektrisierte, gegen den Leiter isolierte Körper enthält, so giebt die Formel (8″), auf eine den Hohlraum umschließende, innerhalb des Leiters verlaufende Fläche angewandt, wegen des im Leiter konstanten φ,

$$(E_i) = 0$$

oder, wenn man mit E_i die Ladung der im Hohlraum befindlichen Körper, mit $\mathfrak{E}_i$ die auf der inneren Wand o_i influenzierte Ladung bezeichnet

$$E_i + \mathfrak{E}_i = 0\,. \tag{9″}$$

In dem speziellen Fall, daß die Körper im Hohlraume Leiter sind, folgt dieses Resultat auch aus dem vorhergehenden Satz über die Kraftröhren.

War die leitende, aber isolierte Schale vor Einbringung der Körper unelektrisch, so müssen die Körper eine Belegung der äußeren Fläche o_a influenzieren, deren Gesamtladung $\mathfrak{E}_a$ nach dem auf S. 14 gegebenen ersten Prinzip die Gleichung

$$\mathfrak{E}_i + \mathfrak{E}_a = 0 \tag{9‴}$$

erfüllt; es ist somit auch

9''') $$E_i = \mathfrak{E}_a,$$

also die auf der Oberfläche o_a erscheinende Ladung gleich derjenigen des inneren Systemes.

Diese Ladung verteilt sich auf o_a ganz so, als wenn das innere System, oder überhaupt der Hohlraum, gar nicht vorhanden wäre, wie denn die in letzterem gegebenen und influenzierten Massen in den Außenraum keinerlei Wirkung üben. In der That ist ja die Potentialfunktion im äußeren Raum, außer durch die übrigen, auf den Hohlkörper gar nicht bezüglichen Bedingungen, dadurch vollständig bestimmt, daß sie an der Oberfläche o_a konstant sein und die Formel

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} d o_a = -4\pi \mathfrak{E}_a = -4\pi E_i$$

erfüllen muß.

Sonach tritt bei Umschließung des Systemes mit dem Hohlkörper bezüglich der Wirkung auf äußere Punkte die äußere Ladung $\mathfrak{E}_a$ vollständig an Stelle der im Hohlraum gegebenen E_i, und die Potentialfunktionen der Ladungen E_i und $\mathfrak{E}_i$ müssen sich im äußeren Raum zerstören.

Denkt man den oben betrachteten Hohlkörper zur Erde abgeleitet und dadurch das Potential Null auf ihm hergestellt, so ist nach S. 22 im ganzen äußeren Raume, wenn dort keine elektrischen Massen vorhanden sind, die Potentialfunktion φ gleich Null.

In diesem Falle — aber nur in diesem — übt also der Hohlkörper für äußere Punkte die Schirmwirkung gegen innere Massen, die er für innere Punkte gegen äußere Massen unter allen Umständen übt. —

Aus der bewiesenen entgegengesetzten Gleichheit der Potentialfunktionen der Ladungen E_i und $\mathfrak{E}_i$ im äußeren Raum folgt nun weiter, daß, wenn man um das innere System eine Fläche o konstruiert, die ebenso verläuft, wie die Wand o_i des Hohlraumes, und diese mit der entgegengesetzten der zuvor dort influenzierten Dichte belegt, diese Ladung, die wir kurz mit $-\mathfrak{E}_i$ bezeichnen wollen, im äußeren Raum die gleiche Potentialfunktion giebt, wie zuvor die innere Masse E_i und die letztere daher für äußere Punkte völlig ersetzt.

Ist die Fläche leitend, so ist die so erhaltene Belegung im allgemeinen nach Beseitigung der Massen E_i nicht im Gleichgewicht; sie ist dies nur dann, wenn die Fläche o eine Niveaufläche für die inneren Ladungen E_i bildet. Denn da außerhalb und an der Fläche o die Potentialfunktion von E_i und die von $-\mathfrak{E}_i$ einander gleich sind, so ist in diesem Falle jene Fläche auch für die Ladung $\mathfrak{E}_i$ eine Potentialfläche. —

Die vorstehenden Resultate lassen sich in leicht ersichtlicher Weise nahezu ungeändert auf den allgemeineren Fall übertragen, daß auch außerhalb des Hohlkörpers beliebige elektrisierte Körper vorhanden sind; ihre Gesamtladung werde mit E_a bezeichnet.

Auch hier ist E_i durch $\mathfrak{E}_i$ für den Außenraum völlig kompensiert, und man kann demnach das innere System durch die auf einer dasselbe umschließenden Oberfläche o geeignet ausgebreitete Ladung $-\mathfrak{E}_i$ in seiner Wirkung auf Punkte außerhalb o vollkommen ersetzen. Damit diese Ladung im Gleichgewicht sei, ist aber jetzt erforderlich, daß längs o die Potentialfunktion der beiden Systeme E_i und E_a konstant sei.

Denn im äußeren Raume ist die Potentialfunktion der Verteilungen $E_i + E_a$ gleich derjenigen von $-\mathfrak{E}_i + E_a$, und da letztere an der leitenden Fläche im Falle des Gleichgewichtes konstant sein muß, so gilt dasselbe für erstere.

In dem von der Fläche o umschlossenen Raume ist die Potentialfunktion φ_i der Verteilung $-\mathfrak{E}_i + E_a$ konstant, da gleiches auf der Oberfläche stattfindet, und außerdem im Innern die Gleichung

$$\triangle \varphi_i = 0$$

gilt. Es ist dort also auch die Potentialfunktion von $+\mathfrak{E}_i$ nur um eine Konstante von derjenigen von E_a verschieden; $+\mathfrak{E}_i$, d. h. die durch das innere System E_i influenzierte Verteilung, vermag also die Wirkung von E_a auf die inneren Punkte zu ersetzen. —

Die oben gefundenen Resultate über die Influenzierung eines Hohlkörpers durch ein im Hohlraume befindliches elektrisiertes System können u. a. dazu dienen, das erste der S. 14 angegebenen Prinzipe mannigfaltiger experimenteller Prüfung zu unterwerfen. Denn umschließt man ein beliebiges System von elektrisierten Leitern und Nichtleitern durch eine leitende isolierte Oberfläche — die etwa aus zwei Teilen zusammengesetzt ist — und bringt man Vorkehrungen an, um das System zu verändern, seine Teile zur Berührung zu bringen, zu trennen, gegeneinander zu reiben, so muß hierbei die äußere Ladung der leitenden Oberfläche, und demgemäß ihre Wirkung auf einen Meßkörper, ganz ungeändert bleiben.

Ferner können sie benutzt werden, um die Gesamtladung eines körperlichen Systemes, dessen Konfiguration eine theoretische Berechnung der auf ihm stattfindenden Verteilung unmöglich macht, experimentell zu bestimmen. Hierzu braucht man nur das System durch eine homogene, leitende und isolierte Oberfläche zu umschließen, deren Gestalt so, z. B. kugelförmig, gewählt ist, daß das Gesetz der Dichtigkeit der Ladung auf ihr theoretisch ableitbar ist; dann kann man durch die Beobachtung der Wirkung auf den Meßkörper die Ladung der Oberfläche und somit auch die Ladung des gegebenen Systemes bestimmen. —

§ 4. Influenzierung eines Konduktors durch ein System von geladenen Isolatoren; gegenseitige Influenzierung zweier Konduktoren.

Die oben abgeleiteten allgemeinen Sätze über die Ersetzbarkeit eines elektrischen Systemes durch eine geladene, dasselbe umschließende Oberfläche geben eine wichtige Methode an die Hand, um lösbare Fälle der Influenzierung eines isolierten oder abgeleiteten Leiters durch geladene Isolatoren zu konstruieren [6]).

Sei ein beliebiges System von geladenen Isolatoren gegeben und die ihm entsprechende Potentialfunktion φ, sowie das System der ihr entsprechenden Niveauflächen bestimmt. Ersetzt man nun eine beliebige dieser Niveauflächen durch eine leitende, isolierte Oberfläche o, beseitigt die von ihr umschlossenen elektrischen Ladungen und bringt auf ihr eine Dichte

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n_a}$$

an, so ist diese Ladung im Gleichgewicht und stellt die auf o durch die äußeren Massen bei einer Anfangsladung

$$E = \int \sigma\, d o$$

influenzierte Verteilung dar.

Zugleich ergiebt die entgegengesetzte Dichte $-\sigma$ diejenige Verteilung, welche auf der Begrenzung eines Hohlraumes in einem homogenen Leiter von der Gestalt jener Oberfläche o durch die innerhalb derselben liegenden Massen influenziert werden würde.

Entspricht die Niveaufläche speziell dem Werte $\varphi = 0$, so giebt das Verfahren die vollständige Bestimmung der Influenzierung der zur Erde abgeleiteten Oberfläche o durch das äußere System.

Reduziert sich hierbei das influenzierende System auf einen Punkt mit der Ladung Eins, so verwandelt sich φ nach S. 185 des I. Bandes in die erste abgeleitete Green'sche Funktion für den Raum zwischen der unendlich großen Kugel und der leitenden Oberfläche, resp. für den von der leitenden Oberfläche umschlossenen Raum; die auseinandergesetzte Methode führt also speziell auch zu der Konstruktion von Fällen, für welche die abgeleitete erste GREEN'sche Funktion, die weiter mit Γ, statt wie früher mit Γ_1, bezeichnet werden soll, angebbar ist.

Die Kenntnis von Γ ermöglicht dann auch sogleich die Lösung des Problemes der Influenzierung jener bestimmten leitenden Oberfläche o durch beliebige geladene Isolatoren bei Zulassung einer beliebigen anfänglichen Ladung.

Die Lösung wird gegeben durch die allgemeine Formel (183') auf S. 185 des I. Bandes, welche unter Rücksicht auf das auf S. 187 Gesagte lautet

$$V_{abc} = \frac{1}{4\pi}\int \overline{V}\,\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n}\,do - \frac{1}{4\pi}\int \Gamma \triangle V dk \qquad 10)$$

und den Wert einer regulären Funktion V an einer beliebigen Stelle a, b, c eines vollständig begrenzten Raumes k ausdrückt durch die Werte von V an der Oberfläche und die von $\triangle V$ im Innern von k. Γ ist definiert durch sein reguläres Verhalten innerhalb k mit Ausnahme der Stelle a, b, c, wo es sich wie die reciproke Entfernung verhält, durch Erfüllung der Formel $\triangle \Gamma = 0$, durch die Oberflächenwerte $\overline{\Gamma} = 0$ an Begrenzungsflächen, die im Endlichen liegen, und $\partial \overline{\Gamma} / \partial n = -1/r_0^2$ an der unendlichen Kugel vom Radius r_0. n bezeichnet die innere Normale auf der Begrenzung in Bezug auf das Integrationsgebiet k, also die äußere in Bezug auf die durch die Oberfläche o ausgeschlossenen Räume.

Wenden wir diese Formel auf unseren Fall an, identifizieren wir also V mit der elektrischen Potentialfunktion φ, so ist $\overline{\varphi}$ an dem — ganz im Endlichen gedachten — Konduktor konstant gleich P, an der unendlichen Kugel unendlich klein wie $1/r_0$; außerdem gilt innerhalb k die Gleichung $\triangle \varphi = -4\pi\varrho$, worin ϱ sich auf die Ladung der Isolatoren bezieht.

Wir erhalten demnach, wenn wir noch den Punkt a, b, c weiter x, y, z nennen und die Koordinaten des Raum- und des Oberflächenelementes mit x_1, y_1, z_1 und $\overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1}$ bezeichnen,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} P \int \left(\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n}\right)_1 d o_1 + \int \varrho_1 \Gamma_1 \, d k_1. \qquad 10')$$

Sind keine geladenen Isolatoren vorhanden, steht also der Konduktor nur unter der Wirkung der Selbstinfluenz, so ist $\varrho = 0$ zu setzen.

Die Gleichung (10') giebt in dem Falle, daß der Potentialwert P auf dem Konduktor vorgeschrieben ist, unmittelbar die vollständige Lösung des Problems; ist dagegen die Gesamtladung E

des Konduktors gegeben, so hat man den Wert (10′) für φ in die Formel (6′) einzusetzen und mit Hilfe des Resultates P durch E auszudrücken.

Das Resultat besitzt die Form

$$E = PC + C_0, \tag{10''}$$

worin C und C_0 Konstanten sind, von denen C nur von der Gestalt und Größe des Konduktors, C_0 außerdem von der Konfiguration und der Ladung der Isolatoren abhängt.

C hat dabei speziell die Bedeutung der Elektricitätsmenge, welche man der Ladung zufügen muß, um den Potentialwert P um die Einheit zu steigern, dividiert durch die Einheit der Potentialfunktion. Diese Menge ist nach dem Gesagten unabhängig von den etwa auf Isolatoren vorhandenen Ladungen und wird die Kapacität des Konduktors genannt[7]; ihre Dimensionalgleichung lautet nach (5′) und (5″″).

$$[C] = [e/\varphi] = l. \tag{10'''}$$

Auf einer Kugel, die im leeren Raume allein vorhanden ist, verteilt sich die Ladung E nach Symmetrie gleichförmig; die Potentialfunktion dieser Verteilung ist für äußere Punkte nach S. 161, Bd. I $\varphi = E/r$, worin r die Entfernung vom Mittelpunkt bezeichnet; auf der Oberfläche wird

$$\overline{\varphi} = P = E/R,$$

es ist also $C = R$, die Kapacität einer Kugel daher gleich ihrem Radius. —

Ein einfaches Beispiel für das Vorstehende wird durch zwei Massenpunkte mit den Ladungen $+e_1$ und $-e_2$ im gegenseitigen Abstand A geboten. Die Oberfläche $\varphi = 0$ ist hier eine Kugel, welche die größere Ladung so umschließt, daß der Radius R die mittlere Proportionale zwischen den Abständen beider Massenpunkte vom Kugelcentrum ist; zugleich wird, falls $-e_2 > +e_1$ ist,

$$-e_2 : e_1 = A : R.$$

Die Influenzierung einer abgeleiteten Kugel durch einen äußeren oder einen inneren Punkt, und damit zugleich die entsprechende erste Green'sche Funktion, ist hiernach also durch eine Art von Spiegelpunkt mit gegebener Masse bestimmt[8]).

Wenn die Kugel isoliert ist und eine beliebige Anfangsladung E besitzt, so kann man den oben angegebenen allgemeinen Weg einschlagen; man gelangt aber noch einfacher zum Ziele, wenn man zu der auf der abgeleiteten Kugel influenzierten, mit dem Ort variierenden Verteilung von dem Betrage $-e_2$ noch eine konstante von der Gesamtgröße $(E + e_2)$ hinzufügt. Diese ist für sich allein im Gleichgewicht; sie ergänzt also die frühere in einer Weise, welche alle Bedingungen erfüllt bleiben läßt. —

Da die zur Konstruktion der Lösung angenommenen inneren Ladungen für alle Punkte außerhalb der sie umschließenden Oberfläche der eingeführten Oberflächenbelegung vollständig äquivalent sind, so kann man auch die Kraft, welche die äußeren Massen seitens der geladenen und materiell gedachten Oberfläche erfahren, berechnen, indem man an Stelle der letzteren die Körper, welche die inneren Ladungen tragen, wirksam denkt.

Dies Verfahren liefert in dem obigen speziellen Problem, wo diese Körper sich auf einen einzigen Massenpunkt reduzieren, den höchst einfachen Wert

$$K = \frac{e_1 e_2}{A^2}. -$$

Die im Vorstehenden auseinandergesetzte Methode zur Ableitung der Influenzierung eines Konduktors durch ein System elektrisierter Isolatoren bildet die Grundlage eines wichtigen Verfahrens zur Bestimmung der gegenseitigen Influenzierung zweier Konduktoren (1) und (2) durch successive Annäherung.

Dasselbe setzt voraus, daß nach früheren Methoden für jeden der beiden Konduktoren gelöst sei erstens das Problem des Gleichgewichts der Elektricität, wenn er für sich allein vorhanden und isoliert ist, sowie zweitens dasjenige der Influenzierung durch einen elektrischen Punkt, wenn der Konduktor zur Erde abgeleitet ist; diese Forderungen erfüllt gedacht, führt der folgende Weg zur Lösung der vorliegenden allgemeineren Aufgabe[9]).

Sei (1) zunächst allein vorhanden und auf das Potential Eins geladen, so entsteht auf ihm eine gewisse Verteilung, die man nach dem Gesagten berechnen kann, und die einer Ladung e_1 entsprechen möge.

Wird nun diese Verteilung fest gehalten gedacht, der Konduktor (2) an seine Stelle gebracht und zur Erde abgeleitet, so wird auf ihm eine Ladung $-e_{2'}$ influenziert, die gleichfalls angebbar ist.

Ferner werde $-e_{2'}$ festgehalten und seine Influenz auf den abgeleiteten Konduktor (1) untersucht, welche dort die Ladung e_1' bewirken mag, und es werde so wechselsweise weiter verfahren, wodurch Ladungen $e_1'', e_1''', \ldots$ auf (1), Ladungen $-e_{2'}'', -e_{2'}''', \ldots$ auf (2) entstehen.

Superponiert man alle diese Verteilungen und bildet die Summe φ_1

aller ihrer Potentialfunktionen, so entsteht auf (1) eine Gesamtladung

11) $$C_{11} = e_1 + e_1' + e_1'' + \dots$$

und ein Potential Eins, auf (2) eine Gesamtladung

11') $$C_{21} = -(e_{2'}' + e_{2'}'' + e_{2'}''' + \dots)$$

und ein Potentialwert Null.

Analog, wie oben mit (1), kann man mit dem Konduktor (2) beginnen und erhält dadurch eine zweite Reihe von Verteilungen auf beiden Konduktoren; superponiert man auch diese und bildet die Summe φ_2 aller ihrer Potentialfunktionen, so erhält man auf (1) die Gesamtladung

11'') $$C_{12} = -(e_{1'}' + e_{1'}'' + e_{1'}''' + \dots)$$

und den Potentialwert Null, auf (2) die Gesamtladung

11''') $$C_{22} = e_2 + e_2' + e_2'' + \dots$$

und den Potentialwert Eins.

In dem Falle, daß die Potentialfunktion auf (1) den Wert P_1, auf (2) den Wert P_2 besitzt, nimmt die Potentialfunktion aller Verteilungen die Form

12) $$\varphi = P_1 \varphi_1 + P_2 \varphi_2$$

an, und die Gesamtladungen von (1) und (2) werden

12') $$\begin{cases} E_1 = C_{11} P_1 + C_{12} P_2, \\ E_2 = C_{21} P_1 + C_{22} P_2. \end{cases}$$

Die Konstanten C_{hk}, welche ersichtlich nur von der Gestalt und der gegenseitigen Orientierung der beiden Leiter (1) und (2) abhängen, heißen wegen der formalen Verwandtschaft dieser Beziehungen mit (10'') die Kapacitätskoefficienten des Systemes; in der That geht C_{11} in das frühere C über, wenn man den Leiter (2) unendlich klein gegen seine Entfernung werden läßt, sodaß er als Massenpunkt betrachtet werden kann. C_{hk} hat die Bedeutung des Zuwachses, welchen man der Ladung des Konduktors (h) geben muß, um bei konstantem P_h den Potentialwert P_k um die Einheit zu vergrößern, und ist, wie später zu zeigen, gleich C_{kh}.

Aus den Formeln (12') kann man umgekehrt, wenn nicht die Potentialwerte, sondern die Ladungen gegeben sind, erstere berechnen; man erhält

12'') $$P_1 = \frac{E_2 C_{12} - E_1 C_{22}}{C_{12} C_{21} - C_{11} C_{22}}, \qquad P_2 = \frac{E_1 C_{21} - E_2 C_{11}}{C_{12} C_{21} - C_{11} C_{22}};$$

ebenso dienen sie, wenn eine Ladung und ein Potentialwert vorgeschrieben ist, dazu, die beiden anderen Größen zu finden.

Das obige Verfahren verliert offenbar die Anwendbarkeit, wenn die Summen (11) bis (11'''), welche die Kapacitätskoefficienten C_{hk} definieren, unbestimmt werden; dies geschieht z. B., wenn der eine der beiden Konduktoren den anderen vollständig umschließt, weil hier alle e_1 resp. e_2 unter sich gleich werden.

Es bietet dagegen keine Schwierigkeit, nach der vorstehenden Methode die gegenseitige Influenzierung zweier leitender Kugeln zu berechnen[10]; ist ihr Abstand einigermaßen beträchtlich neben ihren Durchmessern, so konvergiert die für das Resultat erhaltene Reihe ziemlich stark und ist für die numerische Rechnung wohl geeignet.

Dies Problem hat eine große praktische Bedeutung, weil eines der wichtigsten elektrostatischen Meßinstrumente, die Coulomb'sche Drehwage, an die Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten isolierten Kugeln anknüpft. Die Anordnung dieses Instrumentes ist bekanntlich die, daß eine isolierte leitende Kugel (die Standkugel), mit der zu bestimmenden Ladung versehen, derart fest aufgestellt wird, daß sie ihre Wirkung auf eine andere, an einem leicht drehbaren Hebel befestigte und mit bekannter Ladung, z. B. mit der Ladung Null versehene, ausüben kann. Man beobachtet dabei meistens das Moment, welches erforderlich ist, um den Hebelarm in derjenigen Lage festzuhalten, die er einnimmt, wenn beide Kugeln unelektrisch sind; in anderen Fällen auch den Winkel, um welchen der Hebel durch die gleichzeitige Wirkung des Drehungsmomentes der elektrischen Kraft und der Aufhängung aus seiner Ruhelage abgelenkt wird.

Über die allgemeine Methode zur Berechnung der Wechselwirkungen zwischen Konduktoren aus ihrem Potential ist im ersten Paragraphen gesprochen worden; hier genügt es, darauf hinzuweisen, daß nach den Entwickelungen auf S. 29 alle die in den Formeln (11) bis (11''') aufgeführten Partialladungen e beider Kugeln für äußere Punkte mit je einem im Innern der betreffenden Kugel liegenden Punkt von gleicher Ladung äquivalent sind. Die ganze Wechselwirkung zwischen den beiden Kugeln wird also durch die Summe der parallelen Kräfte erhalten, welche alle, jene Ladungen tragenden Punkte innerhalb der einen Kugel von allen denjenigen innerhalb der anderen erleiden.

Beiläufig sei übrigens bemerkt, daß die Theorie der Drehwage sich in Wirklichkeit erheblich komplizierter gestaltet, als aus dem Vorstehenden hervorzugehen scheint, weil faktisch nicht nur die beiden Kugeln, sondern durch deren Influenz alle Teile des Instrumentes, seien sie nun Leiter oder Diëlektrica, influenziert werden und demgemäß rückwirkend elektrische Kräfte ausüben.

Ferner ist zu erwähnen, daß nur in seltenen Fällen eine zu untersuchende Elektricitätsmenge sich vollständig auf die Standkugel der Drehwage übertragen läßt; die Versuchsanordnung ist demgemäß meist die, daß man von dem untersuchten Konduktor einen Teil der Ladung, entweder durch direkte Berührung mit der Standkugel, oder aber durch Verbindung mittels eines langen, dünnen Drahtes entnimmt; in beiden Fällen ist, um die Beobachtung verwerten zu können, die vorherige Lösung des theoretischen Problems der Verteilung auf dem aus Kugel, Konduktor und event. Verbindungsdraht bestehenden System erforderlich.

Ist die Entfernung der Kugel von dem untersuchten Konduktor so groß, daß die wechselseitige Influenz vernachlässigt werden kann, so hat die Aufgabe die denkbar einfachste Gestalt, da die Einwirkung des Verbindungsdrahtes bei hinreichender — übrigens nicht leicht praktisch erreichbarer — Kleinheit des Querschnittes vernachlässigt werden kann.

Dies erhellt aus dem S. 157 Bd. I abgeleiteten und oben S. 11 wiederholten Resultat, daß die Newton'sche Potentialfunktion einer Kurvenbelegung von endlicher linearer Dichte τ in der Kurve selbst logarithmisch unendlich wird. Denn wenn der Draht mit dem Konduktor leitend verbunden ist, so nimmt er dessen endliches Potential an; er kann somit auch nur unendlich wenig Ladung auf sich festhalten und giebt demnach in alle endlichen Entfernungen nur einen unendlich kleinen Anteil zur Potentialfunktion.

Hieraus folgt, daß das Gesetz der elektrischen Verteilung auf dem Konduktor und auf der Kugel dasselbe ist, als wäre jeder dieser Körper bei ungeänderten sonstigen Umständen für sich allein vorhanden; nur der absolute Wert der Dichte wird durch die Verbindung beeinflußt werden, und zwar gilt, wenn P den konstanten Potentialwert und C' die Kapacität des Konduktors, C'' diejenige der Kugel bezeichnet — beide im weiteren Sinne des Wortes, unter Berücksichtigung des Einflusses der benachbarten, am einfachsten sämtlich zur Erde abgeleiteten Körper verstanden —, und E' resp. E'' die auf beiden Körpern befindlichen Anteile der Gesamtladung E bedeuten,

$$E' = PC', \quad E'' = PC'';$$

hieraus folgt das Gesetz der Verteilung

$$E' : E'' : E = C' : C'' : (C' + C''),$$

während die Änderung des ursprünglichen Potentialwertes P_0 des mit E geladenen Konduktors durch Anschluß der Standkugel gegeben wird durch die Beziehung

$$\frac{E'}{P} = \frac{E}{P_0} \quad \text{oder} \quad \frac{C'}{P} = \frac{C' + C''}{P_0}.$$

Ist also die Kapacität der Standkugel klein neben derjenigen des Konduktors, so wird der Potentialwert durch ihren Anschluß nicht merklich herabgedrückt.

Wir haben die vorstehenden Entwickelungen an eine spezielle, theoretisch relativ einfache Gestalt des Elektrometers angeknüpft; sie lassen sich leicht auf jede andere Konstruktion übertragen, bei welcher ein irgendwie gestalteter Leiter mit dem zu untersuchenden System verbunden und der Einwirkung eines mit gegebener Ladung versehenen zweiten Leiters ausgesetzt wird. Bei manchen Einrichtungen verzichtet man der Schwierigkeit wegen auf die theoretische Bestimmung des Gesetzes, nach welchem die Einwirkung des festen auf den beweglichen Teil des Elektrometers von der Gestalt und der gegenseitigen Lage beider Körper abhängt; es ist dann erforderlich, das Instrument zu graduieren, was dadurch geschieht, daß man bekannte Potentialdifferenzen zur Wirkung gelangen läßt und die ihnen entsprechenden Gleichgewichtslagen des beweglichen Teiles beobachtet. Hier finden jene, am Ende von § 2 beschriebenen Ketten erfolgreiche Anwendung. —

§ 5. Das allgemeine Problem des elektrischen Gleichgewichtes für Leiter. Kondensatoren.

Für die Lösung des allgemeinen Problems des elektrischen Gleichgewichtes auf einem System von p beliebigen Konduktoren bei Anwesenheit beliebiger geladener Isolatoren ist natürlich die Anwendung der ersten abgeleiteten Green'schen Funktion Γ und der Formel (10) ebenso zulässig, wie für die Behandlung der einfacheren Aufgabe auf S. 27, obgleich in Praxis dieser Weg kaum eingeschlagen werden wird. Man erhält das Resultat in der Form

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \sum P_h \int \left(\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n}\right)_h d o_h + \int \varrho_1 \Gamma_1' \, d k_1, \tag{13}$$

worin die Oberflächenintegrale über alle Konduktoren, die sämtlich im Endlichen liegend gedacht werden mögen, das Volumenintegral über den ganzen, zwischen den Konduktoren und der unendlich großen Kugel liegenden Raum zu erstrecken sind. Schreiben wir die letzte Formel kurz

13′) $$\varphi = \sum P_h V_h + V_0,$$

so giebt V_0 den Wert, welchen φ annimmt, wenn bei ungeänderter Konfiguration alle Konduktoren zur Erde abgeleitet sind; es genügt der Gleichung $\triangle V_0 = -4\pi\varrho$ und verschwindet an allen Konduktoren. V_h stellt den Wert von V dar, welcher entsteht, wenn alle Isolatoren beseitigt und alle Konduktoren (1), (2),.. $(h-1)$, $(h+1)$,..p abgeleitet sind, (h) aber auf das Potential Eins geladen ist; es genügt der Hauptgleichung $\triangle V_h = 0$, ist am Konduktor (h) gleich Eins und verschwindet an allen übrigen.

Bildet man gemäß der Formel (6′) aus (13′) den Ausdruck für die Ladung E_k des Konduktors (k), so erhält man einen Ausdruck von der Form[11])

14) $$E_k = \sum_h P_h C_{kh} + C_{k0}, \quad \text{für } h \text{ und } k = 1, 2, \dots p,$$

worin

14′) $$C_{kh} = -\frac{1}{4\pi}\int \overline{\left(\frac{\partial V_h}{\partial n}\right)}_k d o_k$$

die spezielle Ladung bezeichnet, welche der Konduktor (k) erhält, falls nach Beseitigung der geladenen Isolatoren der Konduktor (h) auf das Potential Eins, alle übrigen auf das Potential Null gebracht sind,

14″) $$C_{k0} = -\frac{1}{4\pi}\int \overline{\left(\frac{\partial V_0}{\partial n}\right)}_k d o_k$$

dagegen diejenige, welche durch die geladenen Isolatoren auf dem Konduktor (k) influenziert wird, wenn sowohl dieser, als alle anderen Konduktoren abgeleitet sind.

Die Faktoren C_{kh} und C_{k0} stellen die allgemeinen **Kapacitätskoefficienten** des Systems dar; die S. 28 eingeführte Kapacität C bildet einen speziellen Wert eines solchen, und die Dimensionalgleichung der C_{hk} lautet demgemäß

14‴) $$[C_{hk}] = l.$$

Ist für eine Anzahl von j Konduktoren der in Formel (13) auftretende Potentialwert P_h nicht direkt vorgeschrieben, sondern die Ladung E_h, so können die j Formeln (14) für diese Ladungen benutzt werden, um die bezüglichen P_h durch sie und durch die übrigen Potentialwerte auszudrücken. Es läßt sich daher, wie auch immer das Problem formuliert sei, jederzeit für jeden Konduktor eine Gleichung von der Form (14) aufstellen. —

Wir wollen weiterhin von der Anwesenheit geladener Isolatoren absehen, also statt (14) die vereinfachte Formel

$$E_k = \sum_h P_h C_{kh}, \text{ für } h \text{ und } k = 1, 2, \ldots p \tag{15}$$

voraussetzen.

Wendet man die Gleichung (181') von S. 179 des I. Bandes, d. h. die Beziehung

$$\int (U \triangle V - V \triangle U)\, dk = -\int \left(\overline{U}\frac{\partial \overline{V}}{\partial n} - \overline{V}\frac{\partial \overline{U}}{\partial n}\right) do$$

auf zwei der Glieder V_h an, so liefert sie

$$\int \overline{V}_h \frac{\partial \overline{V}_k}{\partial n}\, do = \int \overline{V}_k \frac{\partial \overline{V}_h}{\partial n}\, do,$$

die Integrale über die Oberflächen aller Konduktoren ausgedehnt; nach den Werten, welche $\overline{V}_h$ und $\overline{V}_k$ daselbst besitzen, folgt daraus sogleich

$$\int \left(\frac{\partial V_k}{\partial n}\right)_h do_h = \int \left(\frac{\partial V_h}{\partial n}\right)_k do_k, \text{ d. h. } C_{hk} = C_{kh}. \tag{15'}$$

Ist nun einmal nur P_h, das andere Mal nur P_k von Null verschieden, so erhält man resp.

$$E_k = C_{kh} P_h \quad \text{und} \quad E_h = C_{hk} P_k, \tag{15''}$$

also für den Fall $P_h = P_k$ auch $E_k = E_h$, und damit einen leicht in Worte zu fassenden Reciprocitätssatz.

Löst man die Gleichungen (15) nach den P_h auf, so gewinnt man das System[11])

$$P_k = \sum_h V_{hk} E_h, \quad \text{für } h \text{ und } k = 1, 2 \ldots p, \tag{16}$$

dessen Koefficienten V_{hk} die Potentialkoefficienten des Systemes von Konduktoren heißen. Da zwischen den Koeffizienten C_{hk} des primären Systemes die Beziehungen $C_{hk} = C_{kh}$ bestehen, so gilt auch für die Potentialkoeffizienten

$$V_{hk} = V_{kh}. \tag{16'}$$

Ist einmal nur E_h, das andere Mal nur E_k von Null verschieden, so erhält man resp.

$$P_k = V_{hk} E_h, \quad P_h = V_{kh} E_k, \tag{16''}$$

und damit einen zweiten leicht zu formulierenden Reciprocitätssatz. —

Bezüglich der Werte der Koefficienten C_{hk} und V_{hk} kann man mit Hilfe der allgemeinen Sätze auf S. 23 leicht einige Aufschlüsse erhalten.

C_{kh} ist die Ladung des Konduktors (k), wenn auf (h) der Potentialwert Eins, auf allen übrigen Null stattfindet. Demgemäß ist

17) $$C_{hh} > 0, \quad C_{kh} < 0 \text{ für } h \gtreqless k,$$

und zugleich muß

17') $$C_{hh} \geqq - \sum_{k(h)} C_{kh}$$

sein, wobei der Index $k(h)$ wie früher bezeichnet, daß für k alle Werte von 1 bis p mit Ausnahme von h genommen werden sollen.

V_{hk} ist der Potentialwert auf dem Konduktor (k), wenn (h) mit der Ladung Eins versehen ist, und alle übrigen eine Ladung nicht besitzen. Demgemäß ist

18) $$V_{hh} > 0, \quad \text{und auch} \quad V_{hk} > 0;$$

außerdem gilt

18') $$V_{hh} > V_{hk}.$$

Wendet man die allgemeinen Formeln (13), (15) und (16) auf den speziellen Fall nur zweier Konduktoren an, so gelangt man zu den Gleichungen (12) bis (12'') zurück; die Werte, welche dabei die Koefficienten C_{hk} und V_{hk} gemäß den Formeln (11) bis (11''') besitzen, gestatten leicht, die soeben ausgesprochenen Sätze zu verifizieren. Außerdem geben sie noch zu einer weiteren Bemerkung Veranlassung.

Nach den Überlegungen, durch welche die Größen $e_1, e_1', \ldots$ $e_2, e_2', \ldots$ u. s. w. eingeführt sind, ist e_1 die Kapacität C_1 des Konduktors (1), wenn er im leeren Raum allein vorhanden ist. Da

$$C_{11} = e_1 + e_1' + e_1'' + \ldots$$

ist, und in dieser Summe sämtliche Glieder positiv sind, so ist C_{11}, die Kapacität von (1) in Gegenwart des zur Erde abgeleiteten Konduktors (2), stets größer, als C_1, und zwar umsomehr, je stärker die influenzierende Wechselwirkung zwischen (1) und (2) ist. Daß dieses Verhältnis auch bestehen bleibt, wenn der auf S. 29 eingeschlagene Weg zur Bestimmung von φ nicht gangbar ist, läßt sich durch eine einfache geometrische Betrachtung erweisen.

Denken wir uns z. B. einen Konduktor auf ein vorgeschriebenes Potential geladen und durch eine leitende und zur Erde abgeleitete Schale umschlossen, so werden die Potentialwerte von der Oberfläche des Konduktors um so schneller nach Null abfallen müssen, je dichter die Schale ihn umschließt; da aber nach (6″) die Flächendichte σ der Ladung mit $\partial\varphi / \partial n_a$ proportional ist, so entspricht dem schnelleren Abfall eine stärkere Ladung, und somit eine größere Kapacität.

Bei gleicher Ladung kann also der Potentialwert auf einem isolierten Konduktor dadurch verkleinert werden, daß man in seiner Umgebung andere, zur Erde abgeleitete Konduktoren aufstellt.

Da nun die Elektricitätsverluste infolge von unvollständiger Isolation auf einem geladenen Konduktor um so größer sind, auf je höherem Potential — absolut gesprochen — seine Ladung sich befindet, so eignet sich ein isolierter, von abgeleiteten dicht umgebener Konduktor hervorragend zum Ansammeln und Aufbewahren von elektrischen Ladungen. Solche Leitersysteme nennt man Kondensatoren; ihre Theorie ist ein spezieller Fall des oben behandelten allgemeinen Problemes. Ist (1) der zur Aufnahme der Ladung bestimmte Konduktor, so stellt C_{11} die Kapacität des Kondensators dar.

Auch durch Annäherung weiterer isolierter, ungeladener Konduktoren wird die Kapacität eines isolierten Leiters vergrößert.

Indessen ist die Steigerung eine wesentlich geringere, als in dem Falle, daß der Konduktor (2) zur Erde abgeleitet war; hier galt

$$E_1 = P_1 C_{11},$$

während aus den Formeln (12′) in dem Falle, daß E_2 verschwindet, sich

$$E_1 = P_1 \left(C_{11} - \frac{C_{12} C_{21}}{C_{22}} \right)$$

ergiebt; wegen $C_{12} = C_{21}$ und $C_{22} > 0$ ist aber das zweite Glied in der Klammer stets positiv. —

Einige der praktisch wichtigsten Kondensatoren — Franklin'sche Tafel, Leydener Flasche — haben die einfache Form zweier paralleler leitender Flächen (0) und (1), deren Abstand gegen ihre seitlichen Dimensionen als verschwindend betrachtet werden kann. In diesem Falle, wie in allen, wo die Hauptgleichung der Potentialfunktion $\triangle \varphi = 0$ sich auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduziert, bedarf es zur Lösung des elektrostatischen Problemes nicht der Anwendung der auf S. 33 u. f. auseinandergesetzten allgemeinen Methode.

Wir bezeichnen mit n den normalen Abstand eines Punktes zwischen beiden Platten von der Platte (0), mit a den Abstand beider Platten; dann ist jedenfalls

$$\varphi_1 = \varphi_0 + a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_0 + \tfrac{1}{2} a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right)_0 + \cdots \tag{19}$$

Ferner konstruieren wir von einem Punkt p_0 der Platte (0) aus außer der Normalen n noch die zwei Krümmungslinien s_1 und s_2, bezeichnen ihre Linienelemente mit ds_1 und ds_2, ihre Krümmungsradien im Punkte p_0 mit R_1 und R_2 und betrachten die Richtungen der Normalen n, sowie der Tangenten t_1 und t_2 an den Krümmungslinien im Punkte p_0 als Koordinatenaxen.

Entspricht dem Fortschreiten um ds_h längs s_h eine Bewegung um dn_h parallel n, so ist

19′) $$(ds_h)^2 = 2 R_h dn_h,$$

wobei die Richtung von R_h parallel mit n, d. h. positiv nach der Platte (1) hin, gerechnet ist.

Für einen Nachbarpunkt von p_0 auf der Platte (0) hat φ den Wert φ_0', gegeben durch

$$\varphi_0' = \varphi_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 dn + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)_0 dt_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right)_0 dt_2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\right)_0 (dn)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2}\right)_0 (dt_1)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2}\right)(dt_2)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \, \partial t_1}\right) dn\, dt_1 + \ldots,$$

wobei nun gilt

$$\varphi_0' = \varphi_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right)_0 = 0,$$

da die Fläche (0) Niveaufläche ist, und dt_1, dt_2 in erster Näherung mit ds_1, ds_2 zusammenfallen. Die höchsten übrig bleibenden Glieder lauten bei Rücksicht auf die Beziehung $dn = dn_1 + dn_2$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 (dn_1 + dn_2) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2}\right)_0 (dt_1)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2}\right)_0 (dt_2)^2;$$

sie müssen für sich verschwinden und liefern wegen der Willkürlichkeit von dt_1 und dt_2 unter Rücksicht auf (19′)

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_h^2}\right)_0 = -\frac{1}{R_h}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0.$$

Da nun

$$\triangle \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} = 0$$

ist, so erhält man hieraus

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\right)_0 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 = 0,$$

und bei Kombination mit (19) auch

19″) $$\varphi_1 - \varphi_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 \left(a + \tfrac{1}{2} a^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right).$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 = -4\pi\sigma_0,$$

unter σ_0 die Flächendichte auf der Platte (0) verstanden; zugleich gilt $\varphi_0 = P_0$, $\varphi_1 = P_1$, und es wird also

$$P_1 - P_0 = -4\pi\sigma_0 a\left(1 + \tfrac{1}{2} a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right) \tag{20)}$$

und bei Beschränkung auf die erste Ordnung des Verhältnisses a/R_h

$$\sigma_0 = -\frac{P_1 - P_0}{4\pi a}\left(1 - \tfrac{1}{2} a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right). \tag{20')}$$

Bezeichnet man die Größe der Fläche (0) mit F, so ergiebt sich für die ganze Ladung[12])

$$E_0 = -\frac{P_1 - P_0}{4\pi a}\left(F - \tfrac{1}{2} a\int\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)dF\right) \tag{20'')}$$

und für die Kapacität der Fläche (0)

$$C = \frac{1}{4\pi a}\left(F - \tfrac{1}{2} a\int\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)dF\right); \tag{20''')}$$

für den Fall zweier paralleler Ebenen verschwindet das zweite Glied in der Klammer, für den zweier koncentrischer Kugelflächen wird das Integral gleich $\pm 8\pi R$, worin R den Radius der Kugel (0) bezeichnet, und das positive Vorzeichen gilt, wenn sie die abgeleitete Kugelfläche umschließt, das negative, wenn sie von ihr umschlossen wird.

Übrigens läßt sich der Fall zweier koncentrischer leitender Kugelflächen ohne Schwierigkeit bei beliebigem Radienverhältnis auch streng erledigen.

§ 6. Das Potential eines Systemes von Konduktoren auf sich selbst und die bei Lagenänderungen innerhalb desselben geleistete Arbeit. Die elektrostatische Energie.

Das Potential eines beliebigen elektrisierten Systemes auf sich selbst ist im leeren Raume nach der Grunddefinition

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int de\int\frac{de_1}{r}, \tag{21)}$$

worin sowohl die Integration nach de, wie die nach de_1 über alle Ladungen des Systemes zu erstrecken ist. Hierfür kann man nach Formel (3'') unter Berücksichtigung des hierzu Gesagten schreiben

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int\varphi\, de, \tag{21')}$$

worin der Wert von φ an der Stelle des Elementes de der Ladung zu nehmen, und das Integral nach de, über alle Ladungen zu erstrecken ist.

Enthält das System ausschließlich Konduktoren, so ist das letzte Integral in Teile, die sich auf je einen Konduktor (k) beziehen, zu zerlegen; für jeden Teil ist dann φ konstant gleich P_k und $\int d e_k = E_k$, d. i. gleich der Ladung des Konduktors. Man erhält demgemäß[13])

21″) $$\Phi = \tfrac{1}{2} \sum E_k P_k,$$

und unter Berücksichtigung von (15) und (16) auch

21‴) $$\Phi = \tfrac{1}{2} \sum_h \sum_k E_h E_k V_{hk} = \tfrac{1}{2} \sum_m \sum_n P_m P_n C_{mn};$$

aus (21″) folgt beiläufig

21⁗) $$\frac{\partial \Phi}{\partial E_k} = P_k, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial P_h} = E_h. -$$

Von der Summe in Gleichung (21″) hat auch jedes einzelne Glied $P_k E_k$ eine einfache Bedeutung, die man erkennt, wenn man das Potential Φ des ganzen Systemes auf sich selbst durch die Potentiale Φ_{kk} der einzelnen Konduktoren auf sich selbst und durch die Potentiale Φ_{hk} der Wechselwirkungen zwischen zwei Konduktoren (h) und (k) ausdrückt. Es gilt dann nämlich

22) $$\Phi = \sum \Phi_{kk} + \sum{}' \Phi_{hk},$$

wobei die zweite Summe über alle Kombinationen verschiedener h und k zu erstrecken ist; und zwar bedeutet

22′) $$\Phi_{kk} = \tfrac{1}{2} \int d e_k \int \frac{d e_k}{r},$$

22″) $$\Phi_{hk} = \int d e_k \int \frac{d e_h}{r} = \int d e_h \int \frac{d e_k}{r}.$$

Hieraus folgt dann sofort, daß

22‴) $$2\,\Phi_{kk} + \sum_{h(k)} \Phi_{hk} = \int d e_k \left[\int \frac{d e_k}{r} + \sum_{h(k)} \int \frac{d e_h}{r} \right] = \int \varphi \, d e_k = P_k E_k$$

ist, wodurch die erwähnte Deutung geliefert ist.

Bei einer unendlich kleinen Änderung der Konfiguration des Leitersystemes erleidet Φ eine Änderung, die wir durch $d\Phi$ bezeichnen wollen. $d\Phi$ besteht aus zwei Teilen, deren einer $d_e\Phi$ von der veränderten Anordnung der Konduktoren bei ungeänderter Ladung, deren anderer $d_a\Phi$ von der infolge der Lagenänderung veränderten Ladung der Konduktoren herrührt.

Der letztere Teil, den man beliebig auch zuerst bewirkt denken kann, ist ersichtlich gleich Null; denn da die neue Verteilung wiederum dem elektrischen Gleichgewicht entspricht, befinden sich bei ihr auch wieder alle Ladungen auf den Oberflächen der Konduktoren, die Änderungen können also durch Verschiebungen auf diesen, d. h. auf Flächen konstanten Wertes φ, bewirkt werden, und solche Verschiebungen lassen ersichtlich Φ ungeändert.

Dasselbe, wie diese einfache Überlegung, giebt auch die Berechnung der Änderung von Φ, welche durch bloße Ladungsänderung bewirkt wird[14]). Sei dieselbe zunächst nur auf (k) stattfindend angenommen, was durch die Bezeichnung $\delta_a^{(k)}$ angedeutet werden mag, so erhält man nach (22′) und (22″)

$$\delta_a^{(k)}\Phi_{kk} = \tfrac{1}{2}\int\delta(d\,e_k)\int\frac{d\,e_k}{r} + \tfrac{1}{2}\int d\,e_k\int\frac{\delta(d\,e_k)}{r} = \int\delta(d\,e_k)\int\frac{d\,e_k}{r},$$

$$\delta_a^{(k)}\Phi_{hk} = \int\delta(d\,e_k)\int\frac{d\,e_h}{r}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\delta_a^{(k)}\Phi_{kk} + \sum_h \delta_a^{(k)}\Phi_{hk} = \int\varphi\,d(\delta\,e_k) = P_k\,\delta\,E_k, \tag{23)}$$

wofür man unter Rücksicht auf (22) auch schreiben kann:

$$\delta_a^{(k)}\Phi = P_k\,\delta\,E_k. \tag{23′)}$$

Diese allgemeine Formel spezialisiert sich, wenn die Ladungsänderungen, wie oben angenommen, nicht willkürliche sind, sondern die infolge einer Dislokation in dem Leitersystem von selbst eintretenden, in welchem Falle wir das Variationszeichen δ mit dem Differentialzeichen d vertauschen wollen. Ist der Konduktor (k) zur Erde abgeleitet, so ist nämlich $P_k = 0$, ist er isoliert, so ist nach dem ersten Prinzip auf S. 14 $d\,E_k = 0$, in beiden Fällen gilt somit

$$d_a^{(k)}\Phi = 0,$$

und bei Summation über (k) auch

$$d_a\Phi = \sum d^{(k)}\Phi = 0. \tag{23″)}$$

Damit ist auch rechnerisch erwiesen, daß eine Ladungsänderung der vorausgesetzten Art das innere Potential Φ nicht ändert, und wir können das Resultat dieser Untersuchung in die Formel

$$d\,\Phi = d_e\,\Phi \tag{23‴)}$$

zusammenfassen, in welcher d_e, wie S. 6, eine Änderung bei konstanter Ladung jedes Volumen- oder Flächenelementes bezeichnet. Diese Formel ist offenbar auch für den Fall gültig, daß das betrachtete elektrische System neben Konduktoren auch influenzlose Isolatoren enthält, da bei diesen eine Änderung der Ladung infolge von Dislokationen innerhalb des Systemes von vornherein ausgeschlossen ist.

Aus diesen Resultaten ist nun zu schließen, daß $d\,\Phi$ aus dem ersten Werte (21‴) des Potentiales folgendermaßen zu erhalten ist

24) $$d\,\Phi = \tfrac{1}{2}\sum_h\sum_k E_h\,E_k\,d\,V_{hk};$$

denn aus konstanten e folgt die Konstanz der Gesamtladungen E_h, und es ist somit auch

24′) $$d\,\Phi = d_E\,\Phi.$$

Man kann aber auch aus (21″) folgern

24″) $$d\,\Phi = \tfrac{1}{2}\sum_k E_k\,d\,P_k.$$

Kombiniert man hiermit die Gleichung (15)

$$E_k = \sum_h C_{kh}\,P_h$$

und die hieraus unter Rücksicht auf $d_e E_k = 0$ folgende Beziehung

$$\sum_h C_{kh}\,d\,P_h = -\sum_h P_h\,d\,C_{kh},$$

so erhält man auch

24‴) $$d\,\Phi = +\tfrac{1}{2}\sum_h\sum_k C_{hk}\,P_h\,d\,P_k = -\tfrac{1}{2}\sum_h\sum_k P_h\,P_k\,d\,C_{hk}.$$

Dieser Wert, verglichen mit dem in (21‴) gegebenen zweiten Ausdruck für Φ, zeigt, daß man auch schreiben kann

24⁗) $$d\,\Phi = -\,d_P\,\Phi,$$

wo der Index P andeutet, daß bei der Variation die Potentialwerte auf den einzelnen Konduktoren konstant zu halten sind. —

Verbinden wir mit der Gleichung (23″) den Wert (22) des inneren Potentiales und beachten, daß bei einer Dislokation der starren Teile des elektrisierten Systemes, welche die Ladungen an ihren Massen beläßt, die Potentiale Φ_{kk} der einzelnen Konduktoren auf sich selbst sich nicht ändern, so erhält man

25) $$d\,\Phi = d_e\,\Phi = d_e\sum{}'\,\Phi_{hk}.$$

Nun ist aber die Variation d_e äquivalent mit δ_e aus dem ersten Paragraphen, und daher ergiebt die Kombination dieser Formel mit (2‴) sogleich

25′) $$d\,\Phi = d_e\,\Phi = -\,d'A_i,$$

worin $d'A_i$ die Arbeit der Wechselwirkungen zwischen den Konduktoren bei der vorausgesetzten Dislokation bezeichnet.

Denkt man sich diese Wechselwirkungen durch äußere, an den Konduktoren angreifende Kräfte derartig kompensiert, daß dieselben bei der Verschiebung dauernd im Gleichgewicht sind, so ist deren Arbeit $d'A_a = - d'A_i$ und demgemäß

$$d\Phi = d'A_a. \qquad 25'')$$

Zieht man die allgemeine Definition (48) der Energie von S. 40 des I. Bandes heran, so ergiebt sich, daß, falls bei den betrachteten Vorgängen, wie es scheint, anderweit ein Arbeitsverbrauch nicht stattfindet, z. B. eine Wärmeentwickelung ausgeschlossen ist, das innere Potential Φ eines Systemes von Konduktoren bis auf eine additive Konstante die elektrostatische Energie des Systemes darstellt. Dieser Zusammenhang bleibt nach dem zu Formel (23''') Gesagten auch bestehen, wenn das System außer den Konduktoren geladene absolute Isolatoren enthält.

Es ist indessen wohl zu beachten, daß von der durch Φ dargestellten elektrischen Energie sich jederzeit nur ein Teil direkt als Arbeit aus dem System gewinnen läßt.

Besteht z. B. das System aus zwei gleichnamig geladenen Konduktoren (1) und (2), so enthält die Energie in der Ausgangsposition die drei Teile Φ_{11}^0, Φ_{22}^0 und Φ_{12}^0, von denen der erste und zweite das Selbstpotential je eines der beiden Leiter, der letzte das Potential ihrer Wechselwirkung darstellt. Entfernt man die beiden Leiter voneinander, so gewinnt man dauernd Arbeit, bis ihre Entfernung unendlich geworden ist; hier ist indessen die Energie noch nicht erschöpft, sondern besteht noch aus der Summe der Selbstpotentiale Φ_{11} und Φ_{22} der beiden Leiter, wie dieselben sich gestalten, wenn jeder von ihnen mit der ursprünglichen Ladung für sich allein vorhanden ist. Die gewonnene Arbeit ist somit

$$A = (\Phi_{11}^0 + \Phi_{22}^0 + \Phi_{12}^0) - (\Phi_{11} + \Phi_{22});$$

weitere wäre nur zu entnehmen, wenn man die Konduktoren sich gegen äußeren Druck unbegrenzt ausdehnen lassen könnte.

Man kann indessen einem geladenen Konduktor seine elektrische Energie völlig entziehen, indem man ihn zur Erde ableitet; es bleibt die Frage zu beantworten, in welcher Gestalt sie dann fortexistiert.

Ähnliche Überlegungen lassen sich an ein System aus zwei verschiedenartig geladenen Konduktoren anknüpfen. Hier wird Arbeit gewonnen, wenn dieselben einander genähert werden, und der maximale Betrag ist entzogen, wenn eine solche gegenseitige Position erreicht ist, in der, ohne daß die Konduktoren einander berühren oder eine Entladung zwischen ihnen einsetzt, Φ seinen kleinsten

Wert besitzt. In diesem Falle ist also Φ_{12} in der zweiten Position nicht gleich Null, und die ganze gewonnene Arbeit lautet

$$A = (\Phi_{11}^0 + \Phi_{22}^0 + \Phi_{12}^0) - (\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{12}).$$

Eine weitere Reduktion erfährt der Betrag der Energie, wenn man die beiden Leiter zur Berührung bringt und damit zu einem Leiter vereinigt; hierbei ändert sich nach dem ersten Prinzip auf S. 14 die Gesamtladung nicht, aber da sich jetzt nach S. 22 nur eine Elektricität auf dem Leiter befindet, ist die Dichte allenthalben geringer und das Potential auf sich selbst kleiner als zuvor. Auch hier ist der Verbleib der verlorenen Energie nachzuweisen.

Die Beobachtung weist darauf hin, daß sie im allgemeinen vollständig in Wärme umgesetzt wird, die zum Teil in den Leitern selbst, zum Teil aber auch in dem Nichtleiter zwischen den Konduktoren auftritt, in welchem bereits vor der Berührung die Ausgleichung der Ladungen anhebt und sich durch einen sogenannten elektrischen Funken — die Wirkung der frei werdenden Wärme — ankündigt.

Das Zustandekommen dieser Entladungen durch das Diëlektricum hindurch ist noch nicht ganz aufgeklärt; auf die Wärmeentwickelung in den Leitern kommen wir weiter unten zurück. —

Die Beziehung (25″) zwischen der äußeren Arbeit und dem Selbstpotential eines Systemes gestattet eine Verwertung noch in einer anderen Richtung.

Verschiebt man einen geladenen Isolator in Gegenwart eines isolierten oder abgeleiteten Konduktors, so ist dazu, wie gesagt, eine gewisse Arbeit erforderlich; da nun gleichzeitig auf dem Konduktor eine Ladungsänderung entsteht, so kann man dieselbe als eine Wirkung der aufgewandten Arbeit betrachten und erhält dann durch die Formel (25″) die Größe der Influenzierungsarbeit dargestellt. Dieses Resultat gestattet, mancherlei Folgerungen abzuleiten.

Ist z. B. ein isolierter, ursprünglich unelektrischer Konduktor gegeben, und wird ein geladener Isolator aus dem Unendlichen bis in seine Nähe geführt, so ist die hierzu aufgewandte Gesamtarbeit

$$A_1 = \Phi_1,$$

wobei Φ_1 den Wert der Summe aus dem Potential der Wechselwirkung zwischen Konduktor und Isolator und dem Selbstpotential des Konduktors in der Endposition (1) bezeichnet; das Selbstpotential des Isolators kann als konstant ganz außer Betracht bleiben, da es sich hier nur um Differenzen der Werte von Φ in verschiedenen Zuständen handelt.

Leitet man nunmehr den Konduktor durch einen dünnen Draht zur Erde ab, so wird der Potentialwert Φ von Φ_1 auf Φ_2 sinken, ohne daß dabei eine äußere Arbeit gewonnen ist. Wird nunmehr der Konduktor wieder isoliert und sodann der Isolator ins Unendliche zurückgeführt, so steigt dabei Φ von Φ_2 auf einen Endwert Φ_3, welcher das Potential des allein im Raum vorhandenen Konduktors auf sich selbst im Zustand einer zurückgebliebenen Ladung darstellt; hierbei ist die Arbeit

$$A_2 = \Phi_3 - \Phi_2$$

aufzuwenden, so daß die Hervorbringung des Endzustandes auf dem Konduktor die gesamte Arbeit

$$A = \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3$$

erfordert.

Indessen ist die Energie des geladenen Konduktors schließlich nicht gleich A, sondern nur gleich Φ_3; der Anteil $\Phi_1 - \Phi_2$ ist nach dem oben Gesagten in Wärme umgesetzt worden und für die Elektrisierung verloren gegangen.

Ein Prozeß, welcher mit dem eben beschriebenen große Ähnlichkeit besitzt, findet in den zur Erzeugung großer Elektricitätsmengen aus Arbeit konstruierten Influenzelektrisiermaschinen andauernd statt. Das oben Gesagte giebt eine Vorstellung davon, nach welchen Gesetzen die Umsetzung erfolgt, zeigt insbesondere auch, daß nicht die ganze aufgewandte Arbeit in Gestalt von elektrischer Energie zurückgewonnen wird. —

Wie man aus dem Potential Φ_{hk} der Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten Körpern (h) und (k) die auf jeden von ihnen ausgeübten Kräfte und Momente berechnet, ist bereits in § 1 erörtert worden. Im Falle eines Systemes von beliebig vielen Körpern tritt das Selbstpotential Φ an Stelle von Φ_{hk}, und es gilt ohne weiteres für die ganze auf den Körper (k) ausgeübte Wirkung statt (2')

$$\left.\begin{aligned} \Xi_k &= -\frac{\partial_e \Phi}{\partial u_k}, \quad H_k = -\frac{\partial_e \Phi}{\partial v_k}, \quad Z_k = -\frac{\partial_e \Phi}{\partial w_k}, \\ \Lambda_k &= -\frac{\partial_e \Phi}{\partial l_k}, \quad M_k = -\frac{\partial_e \Phi}{\partial m_k}, \quad N_k = -\frac{\partial_e \Phi}{\partial n_k}. \end{aligned}\right\} \qquad 25''')$$

Den Beweis liefert die Formel (22) für Φ; denn da die Verschiebungen und Drehungen von (k) bei konstant erhaltenen elektrischen Verteilungen vorzunehmen sind, ändern sich die Selbstpotentiale Φ_{kk} bei ihnen überhaupt nicht, von den Wechselpotentialen nur die zwischen dem Körper (k) und einem der anderen; daher ist in dem obigen System Φ durchaus gleichwertig mit $\Sigma_{h(k)} \Phi_{hk}$. —

Wenn man die Gesamtkomponenten und Momente, die ein Konduktor von anderen Konduktoren und auch von geladenen Nichtleitern erfährt, durch die Wirkungen ausdrücken will, welche die einzelnen Flächenelemente erleiden, so ist eine gewisse Vorsicht nötig.

Bezeichnet man nämlich mit X, Y, Z die auf die Einheit der Ladung an dem Punkte x, y, z ausgeübten Kraftkomponenten, setzt also

$$
26)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Xi_k = \int X\, d e_k, \quad H_k = \int Y\, d e_k, \quad Z_k = \int Z\, d e_k, \\ \Lambda_k = \int (y Z - z Y)\, d e_k, \quad M_k = \int (z X - x Z)\, d e_k, \\ \qquad N_k = \int (x Y - y X)\, d e_k, \end{array}\right.
$$

so sind hierin keineswegs ohne weiteres die Werte (3''') für X, Y, Z zu benutzen, denn die ersten Differentialquotienten von φ sind in eben der Fläche, auf die sich die Integration bezieht, unstetig, und es ist von vornherein keineswegs klar, welcher Wert zwischen den Grenzen Null, die innerhalb des Konduktors, und $\overline{\partial \varphi / \partial n_a}$, die außerhalb in unmittelbarer Nähe der Oberfläche gilt, für $\partial \varphi / \partial n$ einzusetzen ist.

Die Schwierigkeit läßt sich erledigen, indem man die Oberflächenbelegung in einer Weise, die bereits auf S. 11 angedeutet ist, als den Grenzfall einer räumlichen Verteilung von stetig mit dem Ort wechselnder Dichte ansieht, die auf der Oberfläche des Konduktors liegt.

Wir schreiben demgemäß zunächst

$$
26')\qquad \left\{\begin{array}{l} \Xi = \int d o \int \varrho X d n; \ldots \\ \Lambda = \int d o \int \varrho (y Z - z Y) dn, \ldots \end{array}\right.
$$

wobei wir die unendlich dünne Schicht durch Flächen o, längs deren ebenso, wie auf der Oberfläche des Konduktors, φ konstant ist, in Elementarschichten von der Dicke dn zerlegt denken. Da aber hier, bei gegenüber der mittleren Krümmung der Oberfläche geringer Dicke der Schicht nach S. 38

$$
-4 \pi \varrho = \triangle \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}
$$

gesetzt werden darf, außerdem

$$
X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos (n, x), \ldots
$$

ist, und x, y, z wie $\cos (n, x) \ldots$ in der sehr dünnen Schicht als konstant angesehen werden können, so giebt (26') bei Einführung von $\partial \varphi / \partial n = 0$ für die untere, von $\partial \varphi / \partial n = \partial \varphi / \partial n_a$ für die obere Integrationsgrenze

$$\left.\begin{aligned}\Xi &= \frac{1}{4\pi}\int \cos(n,x)\,d\,o\int \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\,n = \frac{1}{8\pi}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}\right)^2\cos(n,x)\,d\,o\\ &= -\tfrac{1}{2}\int\sigma\,\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}\cos(n,x)\,d\,o = -\tfrac{1}{2}\int\sigma\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}\right)_a d\,o\end{aligned}\right\}\quad 26'')$$

und ebenso

$$\Lambda = -\tfrac{1}{2}\int\sigma\left(\bar{y}\,\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right)_a - \bar{z}\,\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}\right)_a\right)d\,o.$$

Hiernach kann man für die Berechnung der gegen eine geladene Fläche wirkenden Kraft in der Grenzfläche selbst die auf die Masseneinheit wirkenden Komponenten

$$X = -\tfrac{1}{2}\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}\right)_a,\quad Y = -\tfrac{1}{2}\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}\right)_a,\quad Z = -\tfrac{1}{2}\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right)_a, \qquad 26''')$$

d. h. gleich dem arithmetischen Mittel aus den diesseits und jenseits stattfindenden Werten setzen.

Dieses Resultat hat ein wesentliches Interesse, wenn es sich um die Bestimmung der Deformation eines nichtstarren elektrisierten Leiters infolge der elektrischen Kräfte handelt. Es sind dann in den allgemeinen Formeln (14''') auf S. 225 des I. Bandes für die Komponenten X_{hk}, Y_{hk}, Z_{hk} des in der Grenze zweier Körper — von denen hier der eine meist der leere Raum sein wird — wirkenden Grenzdruckes die Komponenten $\overline{X}_e$, $\overline{Y}_e$, $\overline{Z}_e$ der auf die Fläche Eins bezogenen elektrischen Kräfte zu setzen, welche definiert sind durch

$$\overline{X}_e = \sigma X,\quad \overline{Y}_e = \sigma Y,\quad \overline{Z}_e = \sigma Z$$

und mit Hilfe der oben erhaltenen Resultate leicht zu bilden sind.

Der resultierende elektrische Oberflächendruck D_e steht jederzeit normal zu der Oberfläche des Leiters, da dieselbe eine Niveaufläche ist, und hat den Wert[15])

$$D_e = -\tfrac{1}{2}\sigma\,\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}} = +\frac{1}{8\pi}\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}}\right)^2; \qquad 26'''')$$

er hat die Tendenz, das Oberflächenelement in der Richtung aus dem Konduktor hinaus zu treiben.

Ein besonders einfacher Fall ist der einer elektrisierten Seifenblase; hier summiert sich der elektrische Druck einfach zu dem hydrostatischen Druck der eingeschlossenen Luft und dehnt die Seifenblase so lange aus, bis die Verminderung des inneren Luftdruckes die gleichzeitig abnehmende elektrische Wirkung kompensiert.

Auf kompliziertere Fälle, bei denen insbesondere Dielektrica eine Rolle spielen, werden wir weiter unten eingehen.

§ 7. Konduktoren innerhalb einer unendlichen dielektrischen Flüssigkeit. Die Potentialfunktion eines influenzierten Dielektricums. Allgemeine Formeln für isotrope Dielektrica.

In § 1 dieses Teiles ist das Resultat der Beobachtung erwähnt, daß die Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten Körpern in Entfernungen, die groß sind gegen ihre Dimensionen, wenn dieselbe statt innerhalb des leeren Raumes innerhalb einer unendlichen, homogenen, dielektrischen Flüssigkeit gemessen wird, sich um einen, diesem Dielektricum individuellen Faktor geändert findet[16]. Diese Thatsache wollen wir jetzt theoretisch verfolgen.

Während auf S. 16 aus dem allgemeinen Ansatz (1) resp. (1') für die Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten Massenpunkten im leeren Raum durch Verfügung über die Maßeinheit der Elektrisierung die speziellen Formeln (5) gebildet waren, werden wir jetzt, unter Beibehaltung jener Einheit, für die Wechselwirkung und das Elementarpotential derselben Ladungen innerhalb einer isolierenden Flüssigkeit die allgemeinen Formeln

$$K_{12}' = -f\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}, \quad \Phi_{12}' = f\frac{e_1 e_2}{r_{12}}$$

beibehalten müssen, wo f der Flüssigkeit individuell ist. Da erfahrungsgemäß die Wechselwirkung gleicher Ladungen im leeren Raum am stärksten ist, wird $f < 1$ sein; wir setzen

27) $$f = \frac{1}{\mathfrak{d}},$$

wo $\mathfrak{d} > 1$ ist und die Dielektricitätskonstante[17] der Flüssigkeit heißt, und haben dabei, da $\mathfrak{d}$ ersichtlich eine reine Zahl ist,

27') $$[\mathfrak{d}] = 1.$$

Für die Entwickelung der Theorie, soweit sie das Verhalten der Konduktoren angeht, spielt der Zahlenwert des Faktors, mit welchem jetzt das Elementarpotential

27'') $$\Phi_{12}' = \frac{1}{\mathfrak{d}}\frac{e_1 e_2}{r_{12}}$$

multipliziert erscheint, nicht die geringste Rolle.

Wir können daher, genau wie in § 1, auch hier aus dem Elementarpotential Φ_{12}' das Potential Φ_{12} der Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten endlichen und in endlicher Entfernung befindlichen Körpern ableiten und schreiben

27''') $$\Phi_{12} = \frac{1}{\mathfrak{d}}\iint\frac{de_1\, de_2}{r_{12}},$$

auch die Komponenten und Momente der Wechselwirkungen nach den früher hierzu aufgestellten Formeln (2′) berechnen.

Ferner können wir statt der früheren Potentialfunktion

$$\varphi = \int \frac{d e_1}{r}$$

eine neue

$$\varphi' = \frac{1}{\mathfrak{d}} \int \frac{d e_1}{r} \tag{28}$$

einführen und sie in derselben Weise zum Aufbau der Theorie der elektrischen Verteilung auf Konduktoren, die innerhalb einer unendlichen, homogenen, dielektrischen Flüssigkeit liegen, benutzen, wie φ im Falle des leeren Raumes. Sie bestimmt uns durch die Formeln

$$X = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \varphi'}{\partial z}, \tag{28'}$$

worin die Ladungen $d e_1$ nach S. 10 bei der Variation ungeändert bleiben, die auf einen innerhalb der Flüssigkeit gelegenen Einheitspol, — d. h. auf einen Massenpunkt, der sich im leeren Raum als mit der Einheit der Ladung behaftet erweist, — wirkende Kraft genau ebenso, wie φ die im leeren Raum ausgeübte ergab.

Die im Vorstehenden eingeführte Bezeichnung ist nicht völlig konsequent, insofern nur φ' von dem früheren φ durch den Index unterschieden ist. Dies hat seinen äußerlichen Grund darin, daß Φ und die Komponenten X, Y, Z weiterhin nur in der neuen Bedeutung — die sich überdies, wie später zu zeigen, von der alten nicht wesentlich unterscheidet — geführt werden sollen, während φ und φ' mehrfach nebeneinander erscheinen werden. —

Die Einführung der neuen Potentialfunktion φ' statt φ läßt sich dahin deuten, daß durch die Wirkung des umgebenden Dielektricums alle Ladungen e scheinbar in dem Verhältnis $1/\mathfrak{d}$ geschwächt, also in Ladungen $e' = e/\mathfrak{d}$ verwandelt werden. Demgemäß treten auch an die Stelle der räumlichen und flächenhaften Dichten ϱ und σ, wie sie sich im leeren Raume wirksam erweisen, im Dielektricum die anderen

$$\varrho' = \frac{\varrho}{\mathfrak{d}}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\mathfrak{d}}. \tag{28''}$$

Man erklärt dies dadurch, daß durch Influenz im Dielektricum selbst eine scheinbare Ladung entsteht, welche sich in ihrer Wirkung über die ursprünglichen Ladungen superponiert und diese zum Teil neutralisiert. In der That läßt sich die Differenz

$$\varphi' - \varphi = \frac{1-\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}} \int \frac{d e_1}{r} = \varphi'' \tag{29}$$

als die Potentialfunktion einer Ladung auffassen, die, zu der direkt gegebenen gefügt, die in (28) eingeführte ergiebt.

Um dies in der Bezeichnung auszudrücken, nennt man[18]) die Ladungen e resp. die Dichten ϱ und σ, auf welche man aus den im leeren Raum stattfindenden Wirkungen schließt, die wahren, die Ladungen e' resp. die Dichten ϱ' und σ', welche die Wirkungen innerhalb des Dielektricums bestimmen, die freien, ihre Differenzen

29') $$e'' = e' - e\,, \quad \varrho'' = \varrho' - \varrho\,, \quad \sigma'' = \sigma' - \sigma$$

die in dem Dielektricum influenzierten oder gebundenen. —

Durch die vorstehende Behandlungsweise ist eine eigentümlich unsymmetrische Auffassung des Elementarpotentiales

29'') $$\Phi'_{12} = \frac{e_1 e'_2}{r_{12}} = \frac{e'_1 e_2}{r_{12}}$$

gegeben, auf welche bereits hier aufmerksam gemacht werden soll. Die Wechselwirkung findet nach derselben nämlich nicht zwischen zwei gleichartigen Ladungen statt, sondern zwischen einer wahren und einer freien. Diese Unsymmetrie bleibt auch noch bestehen, wenn man Φ'_{12} in der äußerlich symmetrischen Form

29''') $$\Phi'_{12} = \frac{1}{2}\,\frac{e_1 e'_2 + e'_1 e_2}{r_{12}}$$

schreibt, die wir unten benutzen werden.

Naturgemäß fließen aus einer solchen Verfügung mancherlei Übelstände; sie werden indessen durch die gleichzeitigen Vorteile soweit überwogen, daß die obige Methode sich vor der naheliegenden, zwei freie Ladungen von den Größen $e_1/\sqrt{\mathfrak{d}}$, $e_2/\sqrt{\mathfrak{d}}$ einzuführen, weitaus empfiehlt. Wir kommen auf diesen Punkt noch zurück.

Beiläufig sei darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn man Φ'_{12} schreibt

29'''') $$\Phi'_{12} = \frac{1}{\mathfrak{d}}\,\frac{e_1 e_2}{r_{12}} = \mathfrak{d}\,\frac{e'_1 e'_2}{r_{12}}\,,$$

der letzte Teil dieser Formel einen Satz ausspricht, der sich dem Ausgangspunkt unserer Überlegungen symmetrisch zuordnet. Wie wir nämlich die Wechselwirkung zwischen denselben wahren Ladungen in verschiedenen Flüssigkeiten den resp. Dielektricitätskonstanten indirekt proportional setzten, so ergiebt sich hier unter den gleichen Umständen die Wechselwirkung zwischen denselben freien Ladungen den resp. Dielektricitätskonstanten direkt proportional. —

Mit Hilfe der Potentialfunktion φ' läßt sich nun das Problem der elektrischen Verteilung auf einem System von p Konduktoren, die sich neben beliebigen geladenen influenzlosen Isolatoren innerhalb einer unendlichen, dielektrischen Flüssigkeit befinden, ganz ebenso, wie im Falle des leeren Raumes lösen.

Es handelt sich hier um die Auffindung einer in dem von den Konduktoren begrenzten Raume regulären Funktion, die ebenda die Gleichung

$$\triangle \varphi' = -\frac{4\pi\varrho}{\mathfrak{d}} \tag{30}$$

erfüllt, an jedem Konduktor (h) einen konstanten Wert

$$\overline{\varphi'} = P_h' \tag{30'}$$

annimmt und sich im Unendlichen verhält, wie die Potentialfunktion einer im Endlichen gelegenen Masse.

Versteht man unter Γ wieder die abgeleitete erste GREEN'sche Funktion, deren charakteristische Eigenschaften auf S. 27 zusammengestellt sind, so erhält man statt der Formel (13) jetzt

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\sum P_h' \int \left(\frac{\overline{\partial \Gamma}}{d n}\right)_h d o_h + \frac{1}{\mathfrak{d}} \int \varrho_1 \Gamma_1 \, d k_1, \tag{30''}$$

oder unter Anwendung der Abkürzungen von S. 34 statt (13')

$$\varphi' = \sum P_h' V_h + \frac{1}{\mathfrak{d}} V_0; \tag{30'''}$$

das letzte Glied verschwindet, wenn innerhalb des Dielektricums geladene absolute Isolatoren nicht vorhanden sind.

Nun ist aber an der Oberfläche der Leiter

$$\overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_a}} = -\frac{4\pi\sigma}{\mathfrak{d}}, \tag{31}$$

demgemäß nehmen die Gleichungen (14) für die wahren Ladungen E_k nunmehr die Gestalt an

$$E_k = \mathfrak{d}\sum_h P_h' C_{kh} + C_{k0} \quad \text{für } h \text{ und } k = 1, 2, \ldots p, \tag{31'}$$

denen bei fehlender Ladung des Dielektricums, wo $C_{k0} = 0$ ist, die reciproken Formeln

$$\mathfrak{d} P_k' = \sum_h V_{hk} E_h \tag{31''}$$

entsprechen.

Da die Koefficienten C_{kh} und V_{hk} nur von der geometrischen Konfiguration des Systems der Konduktoren abhängen, so zeigen die Formeln (31'), daß, um die Konduktoren auf dieselben Potentiale zu laden, in einer dielektrischen Flüssigkeit die $\mathfrak{d}$-fachen Ladungen nötig sind, wie im leeren Raum; die Formeln (31'') ergeben, daß bei gleicher Ladung die Potentialwerte im Dielektricum nur die $\mathfrak{d}$ten Teile der im leeren Raum eintretenden betragen.

Hierauf beruht die wichtigste Methode zur experimentellen Bestimmung der Dielektricitätskonstante einer Flüssigkeit.

Mißt man nämlich in der auf S. 31 erörterten Weise die Potentialfunktion auf dem isolierten Teile eines Kondensators, während derselbe mit ungeänderter Ladung einmal vom Vakuum, einmal von einer unendlichen dielektrischen Flüssigkeit umgeben ist, so ist das Verhältnis der beiden Werte P und P'

$$P / P' = \mathfrak{d},$$

d. h. gleich der gesuchten Dielektricitätskonstante.

Die Voraussetzung, daß das Dielektricum unbegrenzt ist, läßt sich natürlich in der Praxis nicht streng verwirklichen; wir werden jedoch Mittel gewinnen, den Einfluß einer im Endlichen liegenden Begrenzung in Rechnung zu ziehen. —

Nachdem durch das Vorstehende das Problem der elektrischen Verteilung auf einem System von Konduktoren (k), das sich innerhalb einer unendlichen dielektrischen Flüssigkeit befindet, vollständig erledigt ist, gehen wir zu der Darlegung der Erweiterungen über, welche notwendig werden, wenn mehrere verschiedene Dielektrica vorhanden sind. Da wir nach S. 9 vollständige Isolatoren als ideale Grenzfälle von Dielektrica betrachten dürfen, so können wir weiterhin zunächst von dergleichen absehen; ferner wollen wir als mit wahren Ladungen versehen nur Konduktoren einführen und diese als sämtlich im Endlichen liegend annehmen.

Wir gehen aus von der durch Formel (29) eingeführten Differenz φ'' der Potentialfunktionen der freien und der wahren Ladungen $\varphi' - \varphi$, die sich in unserem Falle schreiben läßt

32) $$\varphi'' = \sum \int \frac{\sigma_k'' \, d o_k}{\bar{r}} = \frac{1 - \mathfrak{d}}{\mathfrak{d}} \sum \int \frac{\sigma_k \, d o_k}{\bar{r}};$$

sie stellt, wie schon gesagt, den Anteil dar, den das Dielektricum zu der durch φ' bestimmten Gesamtwirkung liefert, und kann aufgefaßt werden als die Potentialfunktion einer scheinbaren, innerhalb des Dielektricums an den Grenzflächen nach den Konduktoren hin befindlichen Ladung von der Flächendichte

32′) $$\sigma'' = \frac{1 - \mathfrak{d}}{\mathfrak{d}} \sigma = \frac{\mathfrak{d} - 1}{4\pi} \overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_a}}.$$

Diese Betrachtungsweise gewinnt dadurch an Bedeutung, daß thatsächlich die Ladung eines Konduktors durch Einsenken in verschiedene Dielektrica nicht geändert wird und nach Entfernung aus denselben sich immer wieder nachweisen läßt, während im Dielektricum, wenn es wirklich, wie vorausgesetzt, die Elektricität nicht leitet, nach Beseitigung des Konduktors irgend eine Ladung nicht zurückbleibt.

Zur Ausgestaltung dieser Vorstellung benutzen wir noch folgendes. Auf S. 13 ist begründet, daß auf einem Konduktor Elektricität nur als Oberflächenbelegung im Gleichgewicht verharren kann; jene Schlußreihe gestattet aber keine Anwendung auf Dielektrica, und somit kann man sich vorstellen, daß der Anteil φ'', welchen das Dielektricum an der Potentialfunktion φ' der freien Ladungen liefert, nur scheinbar allein von seiner Oberfläche, in Wirklichkeit aber von allen seinen Raumelementen ausgeht. Man darf daher erwarten, einen den wirklichen Verhältnissen vollkommener entsprechenden und daher allgemeineren Ausdruck zu gewinnen, wenn man φ'' in ein Raumintegral über das ganze Dielektricum verwandelt.

Dies bewirkt man, indem man einmal in den Ausdruck für φ'' den Wert von σ'' aus (32′) einsetzt und sodann dem Resultat gewisse Glieder hinzufügt, welche zwar verschwinden, aber mit φ'' zusammen ein Raumintegral ausmachen.

Wir setzen demgemäß

$$\varphi'' = \frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi}\left[\sum\int\overline{\frac{\partial\varphi'}{\partial n_a}}\frac{d o_k}{\bar r} + \int\overline{\frac{\partial\varphi'}{\partial\nu_a}}\frac{d\omega}{\bar r} + \int\overline{\frac{\partial\varphi'}{\partial N_a}}\frac{dO}{\bar r} + \int\triangle\,\varphi'\,\frac{d k_1}{r}\right], \qquad 32'')$$

worin das erste Glied sich wie (32) auf die Oberflächen aller Konduktoren bezieht, das zweite auf eine unendlich kleine, den Einheitspol x, y, z ausschließende Oberfläche, das dritte auf die unendlich große Kugel, welche das Dielektricum nach außen begrenzt, das vierte auf den vom Dielektricum erfüllten Raum zwischen diesen Oberflächen. Daß die letzten drei Integrale nach den gemachten Annahmen verschwinden, ist leicht erkennbar.

Wir erhalten nun aus (32″) durch eine einfache Umformung

$$\varphi'' = -\frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi'}{\partial z_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) d k_1\,, \qquad 32''')$$

wobei die Integration ohne Änderung des Wertes auch über den von der Hilfsfläche ω umschlossenen Raum und somit über das ganze Dielektricum ausgedehnt werden kann.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi} = \mathfrak{e} \qquad 33)$$

und

33′) $$-\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial x}=\alpha,\quad -\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial y}=\beta,\quad -\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}=\gamma,$$

so erhält man schließlich [19])

33″) $$\varphi''=\int\left(\alpha_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}+\gamma_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)d k_1.$$

Nach den Definitionsformeln (33′) sind die Größen α, β, γ Vektorkomponenten; wir nennen sie die auf die Volumeneinheit bezogenen oder spezifischen elektrischen Momente nach den Koordinatenaxen und bezeichnen den resultierenden Vektor

$$\mu=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

als das spezifische elektrische Gesamtmoment, dessen Richtung als die der lokalen elektrischen Axe und charakterisieren letztere weiterhin durch den Buchstaben λ; alle diese Größen beziehen sich nach ihrer Definition auf die bestimmte Stelle des Dielektricums, wo sich das Volumenelement dk befindet.

Die Konstante $\mathfrak{e}$ ist nach (27′) und (33) ersichtlich eine reine Zahl; es gilt also

33‴) $$[\mathfrak{e}]=1,$$

und man kann $\mathfrak{e}$ als die Elektrisierungszahl des Dielektricums bezeichnen, weil sie die Größe der Potentialfunktion φ'' und damit die Stärke der elektrischen Erregung des Dielektricums bestimmt. Für die elektrischen Momente ergiebt sich aus (5⁗) die Dimensionalformel

33⁗) $$[\mu]=m^{1/2}l^{-1/2}t^{-1}.$$

Wir haben im Vorstehenden φ'' und α, β, γ als Funktionen von φ', d. h. der aktuellen Potentialfunktion dargestellt, weil dies der auf S. 49 auseinandergesetzten Auffassung am besten entspricht; selbstverständlich kann man durch die Beziehung $\varphi'=\varphi/\mathfrak{d}$ auch die Potentialfunktion φ der wahren Ladungen einführen.

Vergleicht man die Formel (33″) mit der Bd. I, S. 168 gegebenen Formel (173), so findet man vollständige Übereinstimmung. Man kann also die Betrachtungen, welche zu der letzteren führten, anwenden, um sich den Vorgang der Influenzierung eines Dielektricums zu veranschaulichen. —

Wir wollen nun, gemäß den der Umformung von φ'' vorausgeschickten Überlegungen, die Formel (33″) als den eigentlichen und allgemeingiltigen Wert der Potentialfunktion des erregten Dielektricums betrachten und ihn demgemäß hypothetisch sogleich auf ein beliebig begrenztes und beliebig erregtes flüssiges

Dielektricum übertragen; den Ausgangswert (32) dagegen als einen bis zu einem gewissen Grade zufälligen und speziellen ansehen, der nur in gewissen Fällen, wie z. B. in dem oben betrachteten, mit jenem allgemeinen übereinstimmt.

Welcher Ausdruck mit (33'') allgemein äquivalent ist, lehrt die schon auf S. 170 des I. Bandes unter Voraussetzung stetiger α, β, γ ausgeführte Umformung durch teilweise Integration, welche liefert

$$\varphi'' = \int \frac{\sigma_1'' \, d o_1}{\bar{r}} + \int \frac{\varrho_1'' \, d k_1}{r}; \tag{34}$$

hierbei ist

$$\left.\begin{aligned} \varrho'' &= -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) \\ \sigma'' &= -\left(\bar{\alpha} \cos(n_i, x) + \bar{\beta} \cos(n_i, y) + \bar{\gamma} \cos(n_i, z)\right) \end{aligned}\right\} \tag{34'}$$

und n_i bezeichnet die innere Normale relativ zu dem vom Dielektricum erfüllten Raum, stimmt also an den Konduktoren mit dem früher eingeführten n_a überein. Da $\int \sigma'' do + \int \varrho'' dk$ verschwindet, so ist die influenzierte Gesamtladung eines Dielektricums stets gleich Null.

Gegebene, durch vorgeschriebene Werte von α, β, γ charakterisierte Erregungen lassen sich in der S. 194, Bd. I erörterten Weise durch Zerlegung anschaulich deuten. Es ist dort gezeigt, daß die allgemeinste Erregung sich als die Superposition einer lamellaren und einer solenoidalen auffassen läßt, deren erste durch die Ausdrücke

$$\alpha' = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \quad \beta' = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}, \quad \gamma' = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \tag{34''}$$

deren letzte durch die Werte

$$\alpha'' = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}, \quad \beta'' = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}, \quad \gamma'' = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} \tag{34'''}$$

gegeben war; $\mathfrak{F}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ bezeichneten dabei vollkommen bestimmte Funktionen der Koordinaten.

In dem Fall, von dem wir ausgingen, ist nach (33') die Erregung in der speziellen Weise lamellar, daß die äquivalente räumliche Dichte ϱ'' verschwindet. —

Während σ'' und ϱ'' durch α, β, γ eindeutig bestimmt sind, gilt nicht Gleiches umgekehrt; vielmehr lassen sich zu gegebenen σ'' und ϱ'' unendlich viele äquivalente Momente angeben, welche sich voneinander um Beträge $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ unterscheiden, die den Formeln

$$0 = \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} + \frac{\partial \beta_0}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_0}{\partial z},$$

$$0 = \bar{\alpha}_0 \cos(n, x) + \bar{\beta}_0 \cos(n, y) + \bar{\gamma}_0 \cos(n, z)$$

genügen. Diese $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ lassen sich nach S. 194, Bd. I in der

Form (34‴) darstellen und entsprechen somit solenoidalen Erregungen mit Solenoiden, deren Axen an der Oberfläche tangential verlaufen und daher in einem endlichen Körper notwendig geschlossene Kurven bilden müssen.

Indessen geben derartige Erregungen keine elektrostatische Potentialfunktion und können daher bei unseren jetzigen Betrachtungen außer Betracht bleiben. —

Unsere Entwickelungen haben sich bisher ausschließlich auf homogene flüssige Dielektrica bezogen; aber wir dürfen die erhaltenen Endresultate mit großer Wahrscheinlichkeit auf beliebige isotrope, feste oder flüssige, homogene oder inhomogene Dielektrica übertragen.

Diese Übertragung ist, wenn es sich um ein einziges homogenes festes Dielektricum handelt, nur deshalb hypothetisch, weil das Grundphänomen, von welchem wir ausgegangen sind, die Modifikation der Wechselwirkung zwischen zwei geladenen, in dem unendlichen Dielektricum eingebetteten Konduktoren, sich in diesem Falle der Beobachtung entzieht. Die Prüfung der Berechtigung muß hier demgemäß an Folgerungen aus der Grundhypothese anknüpfen, und es kommt dabei vor allem die Veränderung der Kapacität eines Kondensators in Betracht, welche eintritt, wenn man seine Teile — z. B. die Scheiben eines Plattenkondensators — durch ein festes Dielektricum trennt.

Nachdem aber die in der angedeuteten Weise ausgeführten Beobachtungen die Berechtigung der Anwendung der Formeln (33′) und (33″) auf ein homogenes isotropes festes Dielektricum erwiesen haben, ist dann die Übertragung auf nicht homogene feste oder flüssige eine einfache Konsequenz der vorausgeschickten Auffassung, daß das Raumintegral (33″) der wahre Ausdruck für die Wirkung des homogenen Dielektricums sei. Denn der Anteil, den jedes Volumenelement desselben liefert, ist nur von dessen Zustand und nicht von dem irgend welcher anderer Volumina abhängig, bleibt also derselbe, wenn das Element nicht einem homogenen, sondern einem inhomogenen Körper angehört. —

Wir wollen nunmehr die Eigenschaften der Potentialfunktion φ' der freien Ladungen in dem allgemeineren Falle eines Systemes von beliebigen, im Endlichen liegenden und mit endlichen Ladungen versehenen Konduktoren und von beliebigen inhomogenen, aber isotropen, mit räumlichen oder flächenhaften Ladungen behafteten Dielektrica entwickeln, und machen dabei nur die eine nicht wesentlich beschränkende Annahme, daß das Dielektricum im Unendlichen homogen sei. Dann läßt sich nämlich zeigen, daß φ' im Unendlichen verschwindet, wie die Potentialfunktion endlicher, im Endlichen liegender Massen. Denn man kann in unserem Falle alle wahren Ladungen durch eine endliche, ganz in einem homogenen Dielektricum verlaufende Fläche O einschließen und die innerhalb befindliche freie elektrische Verteilung für alle äußeren Punkte nach S. 24 durch eine endliche Belegung der Oberfläche O ersetzen. Eine solche influenziert aber nach dem im Anfang dieses Paragraphen Gesagten innerhalb des äußeren homogenen Dielektricums keine Elektricität, sondern nur an der Begrenzung O selbst, und zwar, wenn dort eine Flächendichte σ_O vorhanden ist, eine scheinbare Dichte $\sigma_O(1-\mathfrak{d})/\mathfrak{d}$. Im Raume außerhalb O ist somit die ganze elektrische Verteilung durch eine Ladung der Fläche O mit der Dichte $\sigma_O/\mathfrak{d}$ zu ersetzen, wodurch die obige Behauptung erwiesen ist.

Um nun die φ' charakterisierenden Eigenschaften abzuleiten, haben wir auszugehen von dem Ansatz

$$\left.\begin{aligned}\varphi' = \sum\int\frac{\sigma_k\, d\, o_k}{\bar{r}} + \sum{}'\int\frac{\sigma_{hi}\, d\, o_{hi}}{\bar{r}} + \int\frac{\varrho_1\, d\, k_1}{r}\\ - \int \mathfrak{e}_1\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi'}{\partial z_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) d\, k_1;\end{aligned}\right\} \qquad 35)$$

hierin stellen die drei ersten Integrale die Potentialfunktion φ der wahren Ladungen dar, die auf den Oberflächen der Konduktoren (k) die Dichte σ_k, auf einzelnen Flächen innerhalb des Dielektricums, z. B. auf der etwa durch Reibung erregten Grenze zwischen zwei homogenen Dielektrica (h) und (i), die Dichte σ_{hi} und innerhalb des Dielektricums die Raumdichte ϱ besitzen; das letzte Integral giebt die Potentialfunktion φ'' der im Dielektricum influenzierten Momente.

Durch teilweise Integration des letzten Gliedes, wobei das Integral über die das Dielektricum nach außen begrenzende, unendlich große Kugel verschwindet, erhält man bei geänderter Ordnung der Glieder

$$\left.\begin{aligned}\varphi' = \sum\int\left(\sigma_k + \bar{\mathfrak{e}}_k\overline{\frac{\partial\varphi'}{\partial n_k}}\right)\frac{d\, o_k}{\bar{r}} + \sum{}'\int\left(\sigma_{hi} + \bar{\mathfrak{e}}_h\overline{\frac{\partial\varphi'}{\partial n_h}} + \bar{\mathfrak{e}}_i\overline{\frac{\partial\varphi'}{\partial n_i}}\right)\frac{d\, o_{hi}}{\bar{r}}\\ + \int\left(\varrho_1 + \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathfrak{e}_1\frac{\partial\varphi'}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\mathfrak{e}_1\frac{\partial\varphi'}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\mathfrak{e}_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z_1}\right)\right]\right)\frac{d\, k_1}{r};\end{aligned}\right\} 35')$$

darin bezeichnet n_k die innere Normale auf $d\, o_k$ bezüglich des Dielektricums, n_h, n_i die nach den Medien (h) und (i) hin gelegenen

Normalen auf der Unstetigkeitsfläche o_{hi}, endlich $\mathfrak{e}_h$ und $\mathfrak{e}_i$ die Werte von $\mathfrak{e}$ in den ihr beiderseitig anlagernden Volumenelementen.

Demgemäß besitzt die freie Ladung der Konduktoren die Flächendichte

$$36) \qquad \sigma'_k = \sigma_k + \overline{\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial n_k}},$$

die der Unstetigkeitsflächen analog

$$36') \qquad \sigma'_{hi} = \sigma_{hi} + \overline{\mathfrak{e}_h \frac{\partial \varphi'}{\partial n_h}} + \overline{\mathfrak{e}_i \frac{\partial \varphi'}{\partial n_i}},$$

die im Inneren der Dielektrica liegende die Raumdichte

$$36'') \qquad \varrho' = \varrho + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right).$$

Nimmt man hinzu, daß nach der Definition von φ' auch gelten muß

$$36''') \quad -4\pi\sigma' = \overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_k}}, \quad -4\pi\sigma'_{hi} = \overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_h}} + \overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_i}}, \quad -4\pi\varrho' = \triangle \varphi',$$

so erhält man für die Dichten der wahren Ladungen bei Berücksichtigung von

$$\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{d} - 1}{4\pi}$$

$$37) \qquad -4\pi\sigma_k = \overline{\mathfrak{d}\frac{\partial \varphi'}{\partial n_k}}, \quad -4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{d}_h \frac{\partial \varphi'}{\partial n_h}} + \overline{\mathfrak{d}_i \frac{\partial \varphi'}{\partial n_i}}$$

$$37') \qquad -4\pi\varrho = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{d}\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{d}\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{d}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right).$$

Berücksichtigt man weiter, daß längs der Konduktoren (k)

$$37'') \qquad \overline{\varphi}'_k = P'_k,$$

d. h. konstant sein muß, daß an Unstetigkeitsgrenzen innerhalb des Dielektricums, wenn zum Zwecke größter Allgemeinheit elektromotorische Kräfte zugelassen werden, nach Analogie mit dem über Leiter S. 15 Gesagten

$$37''') \qquad \overline{\varphi}'_h - \overline{\varphi}'_i = P_{hi}$$

gesetzt werden kann, wo P_{hi} der Kombination der Substanzen (h) und (i) individuell ist, und daß schließlich im Unendlichen φ' wie die Potentialfunktion endlicher und im Endlichen befindlicher Massen unendlich klein wird, so ist durch diese Bedingungen φ' im ganzen Raum eindeutig bestimmt. Auf den Beweis dieser Behauptung kommen wir weiter unten zurück. —

§ 8. Elektrische Kräfte und Polarisationen innerhalb eines Dielektricums. Die Potentialfunktion krystallinischer Dielektrica.

Während die im Vorstehenden ausgeführte Umwandlung des Wertes (32) für die Potentialfunktion φ'' des influenzierten Dielektricums aus einem Oberflächenintegral über seine durch die Konduktoren gelieferte Begrenzung in das Raumintegral (33″) über das vom Dielektricum erfüllte Volumen und auch der analoge Übergang zu dem Ausdruck (34) vollständig glatt ausführbar war, bietet die Frage eine gewisse Schwierigkeit, ob auch die Differentialquotienten von φ' bei Anwendung der ersteren Form sich denen gleich ergeben, die aus der letzteren Form folgen.

Es läßt sich ja allerdings in der Bd. I, S. 170 gezeigten Weise nachweisen, daß in dem Ausdruck (32) resp. (34) für φ'' ebenso, wie in dem (33″), ein unendlich kleiner, um den Einheitspol konstruierter Bereich $\varkappa$ auch nur einen unendlich kleinen Anteil zu φ'' liefert. Zerlegt man demgemäß φ'' in φ_i'' und φ_a'', wo φ_i'' von dem kleinen Bereich, φ_a'' von dem übrigen Dielektricum herrührt, so ist φ_i'' unendlich kein, also $\varphi'' = \varphi_a''$. Zu den Differentialquotienten von φ'' hingegen liefert φ_i'' in der Gestalt (32) resp. (34) zwar auch einen unendlich kleinen, dagegen in der Gestalt (33″) im allgemeinen einen endlichen Anteil, der von der Gestalt des ausgeschlossenen Bereiches $\varkappa$ abhängt, und hieraus folgt, daß man je nach dessen Wahl durch Grenzübergang unendlich viele Werte für die Differentialquotienten von φ'' erhalten kann.

Es läßt sich aber eine Form des Bereiches $\varkappa$ angeben, für welche, so wie φ_i'', auch seine ersten Differentialquotienten nach den Koordinaten verschwinden; es ist die Gestalt eines gegen seine Länge unendlich dünnen Cylinders mit einer der lokalen elektrischen Axe λ parallelen Längsaxe. Ist auch seine Länge unendlich klein, so kann in ihm das Moment μ, stetige Änderung desselben vorausgesetzt, nach Größe und Axenrichtung als konstant angesehen werden; φ_i'' ist daher, wie Bd. I, S. 171 ausgeführt, mit der Potentialfunktion einer Belegung μq seiner Endflächen q äquivalent, die unter den gemachten Voraussetzungen verschwindende Differentialquotienten liefert.

Führt man den Grenzübergang mit Hilfe dieses speziellen Bereiches $\varkappa$ aus, so wird $\partial \varphi_a'' / \partial x = \partial \varphi'' / \partial x$ u. s. f., und es ist somit einerseits der Wert der Differentialquotienten von φ'' bei Benutzung der Definition (33″) eindeutig bestimmt, andererseits auch übereinstimmend mit dem aus (32) resp. (34) jederzeit folgenden.

Nun ergeben aber nach S. 10 die ersten Differentialquotienten der Potentialfunktion nach den Koordinaten, so, wie oben, bei konstanten Ladungen genommen, die negativen Kraftkomponenten, welche die betreffenden Ladungen auf einen wahren Einheitspol ausüben; daher zeigt das eben Auseinandergesetzte, daß $-\partial\varphi''/\partial x$, u. s. f. bei der getroffenen Festsetzung die Komponenten darstellen, die ein wahrer Einheitspol innerhalb eines unendlich kleinen cylindrischen Hohlraumes von den Größen- und Lagenverhältnissen des Bereiches $\varkappa$ bei festgehaltenen Ladungen seitens des elektrisierten Dielektricums erfahren würde. Da aber nach (29) die aktuelle Potentialfunktion φ' die Summe der Potentialfunktionen φ aller wahren Ladungen und φ'' aller in den Dielektrica influenzierten ist, und da $-\partial\varphi/\partial x$ u. s. f. außer in dem S. 47 erledigten Falle jederzeit die von den wahren Ladungen ausgehenden Komponenten darstellen, so geben die Formeln

38) $$X = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial\varphi'}{\partial z}$$

die vollständigen, von allen Ladungen herrührenden Kräfte, wenn man sie auf einen wahren Einheitspol innerhalb eines geeignet gelegten und gestalteten Hohlraums bezieht. Die Resultante

38′) $$K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

stellt daher nach S. 10 auch die Stärke des elektrischen Feldes in dem Dielektricum dar.

Führt man außer X, Y, Z noch die Komponente N normal zu einem Flächenelement do durch die Beziehung

38″) $$N = -\frac{\partial\varphi'}{\partial n} = X\cos(n, x) + Y\cos(n, y) + Z\cos(n, z)$$

ein, so erhält man aus den Formeln (36‴), (37) und (37′) folgende für die Kräfte charakteristischen Beziehungen.

Überall innerhalb des Dielektricums ist die wahre und die freie räumliche Dichte gegeben[20]) durch

39) $$4\pi\varrho = \frac{\partial\mathfrak{d}X}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{d}Y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{d}Z}{\partial z}, \quad 4\pi\varrho' = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

an Konduktoren die wahre und die freie Flächendichte durch

39′) $$4\pi\sigma_k = \overline{\mathfrak{d}}\,\overline{N}_k, \quad 4\pi\sigma_k' = \overline{N}_k,$$

an Unstetigkeitsflächen o_{hi} analog durch

39″) $$4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{d}}_h\overline{N}_h + \overline{\mathfrak{d}}_i\overline{N}_i, \qquad 4\pi\sigma_{hi}' = \overline{N}_h + \overline{N}_i.$$

Die letzten Formeln zeigen, daß die Normalkomponente N nur dann stetig durch o_{hi} geht, wenn σ_{hi}' verschwindet, resp. $\overline{\mathfrak{d}}_h = \overline{\mathfrak{d}}_i$ und $\sigma_{hi} = 0$ ist. Die Tangentialkomponente $S = -\partial\varphi'/\partial s$, worin s

eine beliebige zu o_{hi} tangentiale Richtung bezeichnet, befolgt nach (37‴) die Gleichung

$$\overline{S}_i - \overline{S}_h = \frac{\partial P_{hi}}{\partial s}, \qquad 39''')$$

sie ist also stetig nur in Grenzen zwischen zwei homogenen Dielektrica.

Bezeichnen wir nunmehr, wie früher, als Kraftlinie eine Kurve, deren Tangente an jeder Stelle mit der Richtung der dort wirkenden Kraft zusammenfällt, so ergiebt diese Überlegung, daß die Kraftlinien in Zwischengrenzen im allgemeinen einen Knick besitzen.

Trägt die Grenze keine wahre Ladung, und scheidet sie zwei homogene Dielektrica, so nimmt die erste Gleichung (39″) die Form an

$$0 = \overline{\mathfrak{d}}_h \overline{N}_h + \overline{\mathfrak{d}}_i \overline{N}_i, \qquad 40)$$

während für die Komponenten S_h, S_i die Beziehung

$$\overline{S}_h = \overline{S}_i \qquad 40')$$

gilt. Hieraus folgt leicht das Brechungsgesetz der Kraftlinien, welches dahin lautet, daß die in einem Punkte der Grenzfläche eintretende und die austretende Kraftlinie mit ihren letzten Elementen in einer Ebene liegen, welche das Lot auf der Grenze enthält, und daß die trigonometrischen Tangenten der Winkel ν, welche diese Elemente mit der Normalen einschließen, sich verhalten wie die Dielektricitätskonstanten der Medien, in denen sie liegen. Wir schreiben das Gesetz demgemäß:

$$\operatorname{tg} \nu_h : \operatorname{tg} \nu_i = \mathfrak{d}_h : \mathfrak{d}_i. \qquad 40'')$$

Aus dieser Formel folgt, daß zu jedem Einfallswinkel ein reeller Brechungswinkel gehört, daß also etwas der totalen Reflexion analoges in diesem Gebiet nicht stattfindet.

Bei Einführung der tangentialen Gesamtkomponente T erhält man aus (38′) zunächst

$$K_h^2 = N_h^2 + T_h^2 = T_h^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \nu_h}\right) = \frac{T_h^2}{\sin^2 \nu_h},$$

und da nach (40′) $\overline{T}_h = \overline{T}_i$ ist, auch

$$\overline{K}_h : \overline{K}_i = \sin \nu_i : \sin \nu_h. \qquad 40''')$$

Die beiden elektrischen Gesamtkräfte K_h und K_i sind sonach in der Grenze den Sinus der Neigungswinkel der Kraftlinien indirekt proportional. Hieraus folgt, daß die Kraftlinien auf die äußere Begrenzung eines Raumes, innerhalb dessen die Kraft verschwindet, normal auftreffen müssen.

Man kann sich nach diesen Resultaten leicht eine Vorstellung von der Wirkung bilden, die ein homogenes isotropes Dielektricum (1), welches in einem anderen (2) eingelagert ist, auf die Kraftlinien ausübt.

Besitzt (1) dieselbe Dielektricitätskonstante $\mathfrak{d}$, wie (2), so gehen die Kraftlinien ungebrochen durch die Oberfläche; hat es eine kleinere, so werden sie nach dem Einfallslot hin, hat es eine größere, so vom Einfallslot hinweg gebrochen. Ist $\mathfrak{d}_1$ unendlich groß, so treten sie bei schiefem Auftreffen tangential ein, verlaufen also der Grenze entlang; bei normalem wird ihre Eintrittsrichtung unbestimmt, woraus folgt, daß die Kraft K in einem Dielektricum von unendlich großer Konstante $\mathfrak{d}$, wie innerhalb eines Leiters, verschwinden muß.

In einem gleichförmigen elektrischen Felde, wo die Kraftlinien parallele Gerade sind, lenkt ein eingeführtes fremdes Dielektricum die Kraftlinien auf sich hin, wenn es eine größere, von sich hinweg, wenn es eine kleinere Dielektricitätskonstante besitzt, als die Umgebung. —

Wir wollen nunmehr einen neuen Vektor $\mathfrak{K}$ mit den Komponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ resp. $\mathfrak{N}$ einführen durch die Beziehungen

$$41)\qquad \mathfrak{d}X = \mathfrak{X},\quad \mathfrak{d}Y = \mathfrak{Y},\quad \mathfrak{d}Z = \mathfrak{Z},\quad \mathfrak{d}N = \mathfrak{N};$$

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{N}$ mögen die elektrischen Polarisationen[21]) nach den Richtungen X, Y, Z, N, und

$$41')\qquad \mathfrak{K} = \sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}$$

mag die resultierende oder die Gesamtpolarisation heißen.

Für diese Größen gelten dann an Stelle der ersten Formeln (39) bis (39'') die folgenden

$$41'')\qquad 4\pi\varrho = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z},$$

$$41''')\qquad 4\pi\sigma_k = \overline{\mathfrak{N}_k},\quad 4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{N}_h} + \overline{\mathfrak{N}_i};$$

die Polarisationen verhalten sich also ähnlich, wie Kraftkomponenten im leeren Raum. Ihre Normalkomponenten werden durch Unstetigkeiten im dielektrischen Verhalten nicht berührt und werden unstetig nur an Flächen, welche wahre Ladungen tragen; ihre Tangentialkomponenten dagegen springen an Unstetigkeitsflächen.

Vergleicht man die Formeln (41) bis (41''') mit den auf S. 300 des I. Bandes aufgestellten für die stationäre Strömung einer imponderabeln Flüssigkeit innerhalb eines isotropen Körpers, der nur durch die Oberflächen der Konduktoren und eventuell durch die unendliche Kugelfläche begrenzt ist, so erhält man eine vollständige Übereinstimmung, wenn man $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{N}$ als die Strömungskomponenten nach den Richtungen X, Y, Z und N auffaßt, die Oberflächen der Konduktoren als Eintrittsstellen von der Ergiebigkeit $4\pi\sigma$ pro Flächeneinheit für das Fluidum ansieht, an den geladenen Flächen innerhalb oder in Zwischengrenzen der Dielektrica Quellen von der Ergiebigkeit $4\pi\sigma_{hi}$ pro Flächeneinheit und außerdem innerhalb der Dielektrica räumliche Quellen von der Ergiebigkeit $4\pi\varrho$ pro Raumeinheit annimmt. Die Dielektricitätskonstante $\mathfrak{d}$ vertritt die Stelle der Leitungsfähigkeit und kann daher auch als dielektrische Leitungsfähigkeit oder, um Verwechselungen mit der später zu betrachtenden elektrischen Leitfähigkeit zu vermeiden, auch als dielektrische Permeabilität[22]) bezeichnet werden. —

Die gewonnene mechanische Analogie ist von Wichtigkeit für die Erweiterung unserer Ansätze auf krystallinische Dielektrica. Zwar kann sie hier, wie in ähnlichen, uns später begegnenden Fällen, die allgemeinere Form nur wahrscheinlich machen, nicht als richtig erweisen, aber immerhin ist dadurch überall, wo man ohne spezielle Hypothesen über den Mechanismus eines Vorganges vorschreiten will, schon Erhebliches gewonnen.

Wir wollen daher jene allgemeinen Ansätze, die wir auf S. 290 des I. Bandes für die Strömungskomponenten eines imponderabeln Fluidums innerhalb eines krystallinischen Körpers erhalten haben, auf unseren Fall übertragen und setzen[23])

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \mathfrak{d}_{11} X + \mathfrak{d}_{12} Y + \mathfrak{d}_{13} Z, \\ \mathfrak{Y} &= \mathfrak{d}_{21} X + \mathfrak{d}_{22} Y + \mathfrak{d}_{23} Z, \\ \mathfrak{Z} &= \mathfrak{d}_{31} X + \mathfrak{d}_{32} Y + \mathfrak{d}_{33} Z, \\ \mathfrak{R}^2 &= \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

worin wir die $\mathfrak{d}_{hk}$, welche an Stelle der Leitfähigkeitskonstanten des früheren Ansatzes stehen, als die allgemeinen Dielektricitätskonstanten oder als die Konstanten der dielektrischen Permeabilität des krystallinischen Mediums bezeichnen. Die $\mathfrak{d}_{hk}$ sind innerhalb eines homogenen Mediums konstant, aber abhängig von dessen Orientierung gegen das Koordinatensystem; demgemäß spezialisiert sich der Ansatz (42) für die verschiedenen Krystallgruppen nach dem Schema II Bd. I, S. 137. Auf eine ganz allgemein geltende Beziehung zwischen den verschiedenen $\mathfrak{d}_{hk}$ gehen wir später ein.

Verbinden wir hiermit die früheren Beziehungen

$$4\pi\varrho = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z},$$

$$4\pi\sigma_k = \overline{\mathfrak{N}}_k, \quad 4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{N}}_h + \overline{\mathfrak{N}}_i, \tag{42'}$$

worin

42'') $$\mathfrak{N} = \mathfrak{X} \cos(n, x) + \mathfrak{Y} \cos(n, y) + \mathfrak{Z} \cos(n, z)$$

die Komponente des Vektors $\mathfrak{K}$ nach der Richtung von n bezeichnet, sowie die Grenzbedingungen

42''') $$\varphi'_k = P'_k, \quad \varphi'_h - \varphi'_i = P_{hi},$$

worin P_{hi}, wie S. 58, die elektromotorische Kraft bedeutet, so ist ein System von Bedingungen für φ' gewonnen, welches, wie gemäß S. 301, Bd. I, nachzuweisen, diese Funktion vollständig bestimmt, falls

42'''') $$\left\{ \begin{aligned} 8\pi\mathfrak{f} = \mathfrak{d}_{11} X^2 + \mathfrak{d}_{22} Y^2 + \mathfrak{d}_{33} Z^2 + (\mathfrak{d}_{23} + \mathfrak{d}_{32}) YZ \\ + (\mathfrak{d}_{31} + \mathfrak{d}_{13}) ZX + (\mathfrak{d}_{12} + \mathfrak{d}_{21}) XY \end{aligned} \right.$$

eine wesentlich positive quadratische Form ist, was wir so lange, als keine Beobachtung das Gegenteil erweist, annehmen dürfen.

Die Zulässigkeit der im Vorstehenden ausgeführten Erweiterung hat, wie schon angedeutet, die Beobachtung zu beweisen; die Erfahrung hat diese Bestätigung in ausgedehntem Maße geliefert. —

Es ist nützlich, darauf aufmerksam zu machen, wie durch die vorstehenden Bedingungen die gegenseitige Abhängigkeit der verschiedenen, bei dem Problem der Influenzierung eines dielektrischen Systemes auftretenden Größen formuliert ist.

Der einfachste Fall ist der, daß Konduktoren überhaupt nicht vorhanden sind, die wahren Ladungen also an Dielectrica haften, und daß somit die σ_{hi} und ϱ vollständig vorgeschrieben sind. Die letzteren Größen bestimmen φ' vollständig, und damit auch X, Y, Z, aus denen dann gemäß den Formeln (39) und (39'') die freien Dichten sich berechnen lassen.

Sind homogene Konduktoren innerhalb des Systemes vorhanden, so sind nicht direkt die Dichten σ_k an ihren Grenzen vorgeschrieben, sondern entweder die konstanten Potentialwerte P'_k oder die Gesamtladungen $E_k = \int \sigma\, d o_k$ auf denselben. Hier werden dann zur Bestimmung von φ' Umwege nötig, den auf S. 34 erörterten analog.

Wesentlich ist aber, daß überall die freien Dichten als Folgerungen aus der Theorie, nicht als gegebene Größen auftreten. —

Verglichen mit den dielektrischen Polarisationen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ besitzen die auf S. 54 eingeführten dielektrischen Momente α, β, γ für die nächsten Untersuchungen nur eine sekundäre Bedeutung; doch gestatten sie, die allgemeinen Resultate in einem anderen Sinne zu veranschaulichen, als jene, und mögen daher hier nochmals in Betracht gezogen werden.

Durch Einführung der Komponenten X, Y, Z erhält man aus (33) und (33') für isotrope Medien die Beziehungen

$$\alpha = \frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi} X = \mathfrak{e} X, \quad \beta = \frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi} Y = \mathfrak{e} Y, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi} Z = \mathfrak{e} Z. \tag{43}$$

Auch sie erfahren beim Übergang zu krystallinischen Dielektrica eine Erweiterung, die man sehr einfach gewinnt, wenn man die influenzierten Dichten der Ladungen im Dielektricum einmal durch α, β, γ, einmal durch φ' ausdrückt. Die Kombination der Formeln (34') mit (29) und (39) bis (39'') führt auf die Beziehungen

$$-\sigma_k'' = \bar{\alpha}\cos(n, x) + \bar{\beta}\cos(n, y) + \bar{\gamma}\cos(n, z) = \frac{1}{4\pi}(\bar{\mathfrak{N}}_k - \bar{N}_k),$$

$$-\sigma_{hi}'' = (\bar{\alpha}\cos(n,x)+\ldots)_h + (\bar{\alpha}\cos(n,x)+\ldots)_i = \frac{1}{4\pi}[(\bar{\mathfrak{N}}-\bar{N})_h + (\bar{\mathfrak{N}}-\bar{N})_i],$$

$$-\varrho'' = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial(\mathfrak{X}-X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathfrak{Y}-Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathfrak{Z}-Z)}{\partial z}\right),$$

woraus man erhält

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\alpha &= \mathfrak{X} - X = (\mathfrak{d}_{11}-1)X + \mathfrak{d}_{12}Y + \mathfrak{d}_{13}Z,\\ 4\pi\beta &= \mathfrak{Y} - Y = \mathfrak{d}_{21}X + (\mathfrak{d}_{22}-1)Y + \mathfrak{d}_{23}Z,\\ 4\pi\gamma &= \mathfrak{Z} - Z = \mathfrak{d}_{31}X + \mathfrak{d}_{32}Y + (\mathfrak{d}_{33}-1)Z. \end{aligned}\right\} \tag{43'}$$

Für manche Zwecke ist es bequem, diesen Formeln die folgende, mit (43) analoge Gestalt zu geben

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{e}_{11}X + \mathfrak{e}_{12}Y + \mathfrak{e}_{13}Z,\\ \beta &= \mathfrak{e}_{21}X + \mathfrak{e}_{22}Y + \mathfrak{e}_{23}Z,\\ \gamma &= \mathfrak{e}_{31}X + \mathfrak{e}_{32}Y + \mathfrak{e}_{33}Z, \end{aligned}\right\} \tag{43''}$$

worin also gesetzt ist

$$\frac{\mathfrak{d}_{hh}-1}{4\pi} = \mathfrak{e}_{hh}, \quad \frac{\mathfrak{d}_{hk}}{4\pi} = \mathfrak{e}_{hk}, \tag{43'''}$$

und die $\mathfrak{e}_{hk}$ die allgemeinen Elektrisierungszahlen des Krystalles darstellen, die ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die Dielektricitätskonstanten $\mathfrak{d}_{hk}$. —

Hiermit ist die Aufstellung der allgemeinsten Gesetze für die Influenzierung der Dielektrica erledigt, und es mögen an den Schluß dieser Entwickelung nur noch einige auf ihre Anwendungen bezüglichen Bemerkungen gestellt werden.

Bei manchen allgemeinen elektrostatischen Untersuchungen ist es lästig, die Konduktoren neben den Dielektrica als andersartige Körper zu führen. Man vermeidet dies, indem man sie für den vorliegenden speziellen Zweck als Dielektrica mit unendlich großen Konstanten $\mathfrak{d}_{hk}$ betrachtet. Da nämlich die Normalkomponenten der Polarisationen stetig durch die Grenzen zwischen verschiedenen Dielektrica gehen und in den wirklichen Dielektrica — extreme Fälle ausgeschlossen — endlich sind, so müssen sie auch innerhalb Medien mit unendlich großen Dielektricitätskonstanten endlich sein, d. h., es müssen dort die Komponenten X, Y, Z verschwinden, oder es muß die Potentialfunktion φ' konstant sein, wie dies innerhalb der Konduktoren in der That stattfindet.

Ob die Leiter wirklich dielektrische Qualitäten besitzen, ist auf Grund elektrostatischer Erscheinungen nicht zu entscheiden. Denn da im Gleichgewichtszustande die Kräfte X, Y, Z in ihrem Innern verschwinden, können daselbst nach (42) Polarisationen in keinem Falle entstehen. Dagegen führt die Untersuchung veränderlicher Zustände dazu, auch den Leitern Dielektricitätskonstanten zuzusprechen, und liefert die Mittel zu ihrer experimentellen Bestimmung. Es sei schon hier bemerkt, daß ihre Werte sich endlich ergeben, daß also der obige Kunstgriff eine physikalische Bedeutung nicht besitzt.

Auch die geladenen influenzlosen Isolatoren lassen sich als Grenzfälle von Dielektrica auffassen. Wenn man nämlich in einem isotropen Körper $\mathfrak{d} = 1$ annimmt, so wird derselbe durch elektrische Kräfte nicht influenziert; legt man ihm außerdem noch eine wahre elektrische Dichte ϱ bei, so besitzt er alle Eigenschaften, die wir bei absoluten Isolatoren früher vorausgesetzt haben.

Ferner wirkte es schon bei der Bildung der Potentialfunktion φ' komplizierend, daß bisher drei Arten von wahren Ladungen unterschieden werden mußten: räumliche von der Dichte ϱ im Innern des Dielektricums, flächenhafte von der Dichte σ_k an der Grenze nach Konduktoren hin, flächenhafte von der Dichte σ_{hi} an Unstetigkeitsflächen innerhalb des Dielektricums. Man kann viele Entwickelungen vereinfachen, wenn man die letzten beiden Ladungen als Grenzfälle der ersteren ansieht, nämlich alle sprungweisen Änderungen im elektrischen Verhalten durch stetige Übergänge ersetzt, die innerhalb sehr dünner Schichten stattfinden. Dabei ist es zunächst gleichgültig, ob man damit — wie zumeist geschieht — eine Hypothese über das wirkliche Verhalten der Körper in Zwischengrenzen, oder nur eine zulässige Vereinfachung der Rechnungen eingeführt denken will.

Will man die Endresultate einer in der angedeuteten Weise vereinfachten Entwickelung dem Falle anpassen, daß Unstetigkeitsflächen vorhanden sind, so hat man nur die Schichten, innerhalb deren das dielektrische Verhalten sich um einen endlichen Betrag ändert, unendlich dünn werden zu lassen — ein Grenzübergang, der Schwierigkeiten im allgemeinen nicht bietet.

§ 9. Das Potential eines influenzierten Dielektricums auf andere Körper. Das innere Potential eines allgemeinen elektrischen Systemes und die innere Arbeit bei stattfindenden Dislokationen seiner Teile. Die Arbeit der Elektrisierung.

Da durch die Entwickelungen des § 7 sich der Ausdruck

$$\varphi'' = \int \left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) dk_1$$
$$= \int \frac{\sigma_1'' do_1}{r} + \int \frac{\varrho_1'' dk_1}{r}$$

als die Potentialfunktion des influenzierten Dielektricums ergeben hat, so ist sein Potential auf eine beliebige, auf einem Leiter oder einem Nichtleiter gelegene wahre Verteilung e_2 sogleich angebbar; man findet nämlich auf Grund des S. 49 erörterten Zusammenhanges der Potentialfunktion mit dem Einheitspotential sogleich

$$\Phi_{12}'' = \int \varphi'' de_2, \tag{44}$$

wo der Wert von φ'' am Orte des Ladungselementes de_2 zu nehmen ist, oder auch

$$\Phi_{12}'' = \int de_2 \left[\int \frac{\sigma_1'' do_1}{r} + \int \frac{\varrho_1'' dk_1}{r} \right].$$

Betrachten wir den Fall, daß das Dielektricum (1) ganz im Endlichen liegt und rings durch den leeren Raum von der Ladung (2) getrennt ist, so haben wir die einfache Anordnung wieder, von der wir in § 1 ausgingen: Φ_{12}'' ist das Potential zwischen zwei gegebenen Ladungen (1) und (2), aus welchem die Arbeiten der Wechselwirkungen, sowie die Werte der von ihnen ausgeübten Komponenten und Momente durch geeignete Variation resp. Differentiation bei konstant gehaltenen elektrischen Dichten folgen. Es sei besonders bemerkt, daß in diesem Falle die influenzierten Dichten σ_1'' und ϱ_1'' ganz die Rolle wahrer Ladungen spielen.

Wir können deshalb auch für die Ladung (2) die in einem Dielektricum influenzierte wählen und erhalten so für das Potential der Wechselwirkung zwischen zwei influenzierten Ladungen

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{12}'' = \int \sigma_2'' do_2 \left(\int \frac{\sigma_1'' do_1}{r} + \int \frac{\varrho_1'' dk_1}{r} \right) \\ + \int \varrho_2'' dk_2 \left(\int \frac{\sigma_1'' do_1}{r} + \int \frac{\varrho_1'' dk_1}{r} \right), \end{aligned}\right\} \tag{44'}$$

oder nach einer einfachen Umformung wegen (34') auch

$$44'')\quad \left\{\begin{aligned} \Phi''_{12} = \iint\Bigg[&\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) \\ &+ \beta_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) \\ &+ \gamma_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)\Bigg] dk_1\, dk_2, \end{aligned}\right.$$

das die analoge Verwertung gestattet, wie das frühere Φ_{12}.

Haben die beiden Dielektrica neben den influenzierten auch noch wahre Ladungen, so superponieren sich deren Potentiale über die der influenzierten Ladungen; das Resultat ist die Formel (44′), statt für die influenzierten, für die freien Ladungen gebildet. Wir schreiben zu künftiger Verwendung sogleich den Ausdruck für das Potential Φ' der Wechselwirkung zwischen beliebig vielen durch den leeren Raum getrennten Körpern, indem wir zur Vereinfachung der Formel in der oben besprochenen Weise die flächenhaften Dichten als die Grenzfälle räumlicher ansehen,

$$44''')\qquad \Phi' = \Sigma' \Phi'_{hi} = \Sigma' \iint \varrho'_h \varrho'_i \frac{dk_h\, dk_i}{r};$$

dazu fügen wir die seine Eigenschaft charakterisierende Gleichung

$$44'''')\qquad \delta A_i = -\,\delta_{\varrho'} \Phi',$$

in welcher der Index ϱ' andeutet, daß die Variation nur die Anordnung des Systemes betreffen, also die freie Ladung jedem Massenelement ungeändert erhalten bleiben soll. —

Die Verhältnisse komplizieren sich erheblich, wenn es sich um Systeme von Dielektrica handelt, die nicht durch den leeren Raum voneinander getrennt sind, sondern ineinander übergehen, demgemäß also, um Lagenänderungen zu gestatten, wenigstens teilweise nicht starr sein dürfen. Hier wird im allgemeinen bei jeder Verschiebung das ganze System mechanisch und demgemäß elektrisch in Mitleidenschaft gezogen; wir dürfen somit für seine Untersuchung nicht das Potential der Wechselwirkung zwischen einzelnen Teilen zu Grunde legen, sondern müssen das Potential Φ des ganzen Systemes auf sich selbst als Ausgangspunkt wählen.

Wir gelangen dazu, indem wir von dem Elementarpotential (29‴)

$$\Phi'_{12} = \tfrac{1}{2}\,\frac{e_1 e'_2 + e_2 e'_1}{r_{12}}$$

ausgehen und dieses über alle möglichen Kombinationen wahrer und freier Ladungen summieren.

Das Resultat lautet:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\iint \frac{de\,de'}{r}, \tag{45}$$

wo beide Integrale über den ganzen Raum zu erstrecken sind, da offenbar das System im allgemeinen nach außen unbegrenzt ist. Der Vereinfachung halber mag indessen, wie auf S. 56, angenommen werden, daß das Dielektricum im Unendlichen homogen und isotrop ist, auch die wahren Ladungen nur im Endlichen liegen und einen endlichen Gesamtbetrag ergeben.

Die letzte Formel läßt sich bei Einführung der räumlichen und der flächenhaften Dichten ϱ und σ der wahren Ladungen schreiben

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int \sigma\varphi' do + \tfrac{1}{2}\int \varrho\varphi' dk. \tag{45'}$$

Beide Ausdrücke für Φ zeigen jene Unsymmetrie, auf welche schon im Eingang von § 7 aufmerksam gemacht worden ist, die sich eben jetzt aber als sehr vorteilhaft erweist.

Es ist bereits auf S. 59 darauf hingewiesen, daß die Differentialquotienten der Potentialfunktion φ'' eines erregten Dielektricums in dessen Innern vieldeutig sind; aus demselben Grunde wird der Wert (44″) des Potentiales der Wechselwirkung zwischen zwei erregten Dielektrica (1) und (2) unbestimmt, wenn die Integrationsgebiete k_1 und k_2 teilweise oder ganz zusammenfallen. Es wäre deshalb nicht möglich, aus dem Ausdruck (44″) einen eindeutigen Wert für das Potential eines Dielektricums auf sich selber abzuleiten; dagegen bietet die Anwendung der Formel (45) eine derartige Schwierigkeit nicht. —

Wir können unsere Ausgangsformel (45′) in einer bemerkenswerten Weise umformen, indem wir die Werte von ϱ und σ aus (42′) einsetzen und das Resultat durch Teile integrieren, wobei das auf die unendlich große Kugel bezügliche Oberflächenintegral verschwindet, und sich ergiebt

$$\Phi = \frac{1}{8\pi}\int\Big(X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{Z}\Big)\,dk. \tag{45''}$$

Durch Einsetzen der Werte (42) für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ erhält man hieraus

$$\left.\begin{aligned}\Phi = \frac{1}{8\pi}\int\Big(&\mathfrak{d}_{11}X^2 + \mathfrak{d}_{22}Y^2 + \mathfrak{d}_{33}Z^2 \\ &+ (\mathfrak{d}_{23} + \mathfrak{d}_{32})YZ + (\mathfrak{d}_{31} + \mathfrak{d}_{13})ZX + (\mathfrak{d}_{12} + \mathfrak{d}_{21})XY\Big)\,dk,\end{aligned}\right\} \tag{45'''}$$