

Vermessungskunde

I

Stückvermessung und Nivellieren

von

Walter Großmann

15., erweiterte Auflage

mit 156 Figuren



1976

Walter de Gruyter · Berlin · New York

Dr.-Ing., Dr. E. h. *Walter Großmann*
em. Professor an der Technischen Universität Hannover

Die Gesamtdarstellung umfaßt noch folgende Bände:

Band II (Sammlung Göschchen, Bd. 7469) Inhalt: Winkel- und Streckenmeßgeräte und -Verfahren, Punktbestimmung durch Polygonierung, Triangulation, Trilateration und kombinierte Verfahren, Grundlagen der Landesvermessung; 12. Auflage 1975.

Band III (Sammlung Göschchen, Bd. 6062). Inhalt: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie, Abstecken von Geraden und Kurven, Ingenieurgeodäsie; 10. Auflage 1973.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Großmann, Walter

Vermessungskunde.

1. Stückvermessung und Nivellieren.

(Sammlung Göschchen; Bd. 2160)

ISBN 3-11-006602-5

© Copyright 1975 by Walter de Gruyter & Co., vormalig G. J. Göschchen'sche Verlagshandlung, J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung, Georg Reimer, Karl J. Trübner, Veit & Comp., 1 Berlin 30 – Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden – Printed in Germany – Satz und Druck: Walter de Gruyter, 1 Berlin 30 – Bindearbeiten: Lüderitz & Bauer, Buchgewerbe-GmbH, 1 Berlin 61

Inhaltsverzeichnis

Stückvermessung

1 Grundlagen	Seite
11 Einleitung	7
12 Bezugsflächen	8
13 Maßsysteme und Maßeinheiten	9
13.1 Vom Archivmeter zum Einheitensystem	9
13.2 Grundlegende Vorschriften des Einheitengesetzes	11
13.3 Die alten und die neuen Maßeinheiten in der Vermessungstechnik	12
13.4 Seltener gebrauchte SI-Einheiten	17
14 Fehlerrechnung und Bilden von Mittelwerten	18
14.1 Die Aufgabe der Fehlerrechnung	18
14.2 Fehlerarten	18
14.3 Mittelwerte und Streuungsmaße	20
14.4 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz	21
14.5 Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleicher Genauigkeit	23
14.6 Ausgleichung direkter Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit	25
14.7 Ausgleichung von direkten Beobachtungen mit einer Summenbedingung	27
14.8 Berechnung mittl. Fehler aus Doppelmessungen	28
14.9 Fehlergrenzen und Vertrauensbereich	29
2 Abstecken und Messen gerader Linien	
21 Bezeichnungen von Punkten und Geraden	31
21.1 Bezeichnung von Punkten im Gelände	31
21.2 Ausfluchten von Geraden	32
21.3 Überwinden von Geländehindernissen	33
22 Absetzen von festen Winkeln	34
22.1 Die Kreuzscheibe	34
22.2 Der Winkelspiegel	35
22.3 Die Winkelprismen	36
22.31 Das Bauernfeindsche Winkelprisma	36
22.32 Das Fünfseitprisma	38
22.33 Das Wollastonprisma	39
22.4 Prismenkreuze	40
23 Längenmessung mit starren Maßstäben	41
23.1 Hölzerne Meßblatten	41
23.2 Stahlmaßstäbe	44
24 Längenmessung mit freihängenden Stahlmeßbändern	45
24.1 Physikalische Grundlagen	45
24.2 Landmeßbänder	49

	Seite
24.3 Rollbandmaße	50
24.4 Die Abgleichung von Stahlmeßbändern	52
25 Genauigkeit der Längenmessung	53
25.1 Das Fehlergesetz der Längenmessung	53
25.2 Fehlergrenzen (größte zulässige Abweichungen)	54
3 Aufnehmen und Auftragen kleiner Lagepläne	
31 Flächenaufnahme mit Längenmeß- und Rechtwinkelgeräten	55
31.1 Aufnahmeverfahren	55
31.11 Rechtwinkelverfahren	55
31.12 Einbindeverfahren	55
31.2 Aufnahmegegenstände	58
31.3 Handrißführung	53
32 Einfache Koordinatenrechnungen	59
32.1 Das geodätische Koordinaten-System	59
32.2 Berechnung von Höhe und Höhenfußpunkt	60
32.3 Berechnung von Kleinpunkten	60
32.4 Berechnung seitwärts liegender Punkte	62
32.5 Schnitt zweier Geraden	64
32.6 Prüfung des Liniennetzes	65
33 Auftragen eines Lageplanes	66
33.1 Maßstab und Zeichenträger	66
33.2 Die Reinzeichnung	67
33.3 Koordinatographen	68
34 Vervielfältigung und Maßstabsänderung	69
34.1 Vervielfältigung von Plänen	69
34.2 Maßstabsänderung	70
4 Flächenberechnung	
41 Flächenberechnung aus Maßzahlen	72
41.1 Die Flächenberechnung aus Feldmaßen	72
41.2 Die Flächenberechnung aus Koordinaten	73
42 Halbgraphische Flächenermittlung	76
43 Graphische Flächenbestimmung mit einfachen Hilfsmitteln	76
43.1 Figuren mit glatten Grenzen	77
43.2 Unregelmäßig gestaltete Figuren	77
43.3 Langgestreckte Figuren	78
44 Mechanisch-graphische Flächenbestimmung mit dem Polarplanimeter	78
44.1 Beschreibung und Wirkungsweise	78
44.2 Bestimmung der Fahrarmlänge	81
44.3 Regeln für den Gebrauch des Polarplanimeters	82
44.4 Besondere Planimeterformen	84
45 Genauigkeit der Flächenbestimmung	85
45.1 Verprobung der Flächenbestimmungen	85
45.2 Gegenüberstellung der Flächenbestimmungsverfahren	85
45.3 Fehlergrenzen	86

Nivellieren

5 Bestandteile geodätischer Meßinstrumente	Seite
51 Die Libellen	87
51.1 Die Dosenlibelle	88
51.2 Die Röhrenlibelle	88
51.3 Justierung und Gebrauch der Röhrenlibellen	89
51.31 Die Setzlibelle	89
51.32 Die Vertikalachsenlibelle	91
51.4 Das Bestimmen der Libellenangabe	92
51.41 Fernrohrlibellen	92
51.42 Ungefaßte Libellen	92
51.5 Besonderheiten der Röhrenlibellen	94
51.6 Libellen und Kompensatoren	95
52 Die Abbildung durch Linsen	96
52.1 Geometrisch-optische Grundbegriffe	96
52.11 Die Abbildung durch konvexe Linsen	97
52.12 Die Abbildung durch konkave Linsen	99
52.2 Abbildungsfehler	100
53 Die Meßfernrohre	101
53.1 Der Aufbau eines Meßfernrohres	101
53.11 Das Faden- oder Strichkreuz	102
53.12 Okularauszug und Zwischenlinse	102
53.13 Objektiv und Okular	104
53.14 Die Blenden	105
53.2 Vergrößerung, Gesichtsfeld, Helligkeit und Auflösungsvermögen	106
53.21 Die Fernrohrvergrößerung	106
53.22 Das Gesichtsfeld	107
53.23 Die Fernrohrhelligkeit	107
53.24 Das Auflösungsvermögen	107
53.3 Der Gebrauch des Fernrohres	108
54 Unterbauten und Stative	109
54.1 Unterbauten	109
54.2 Stative und Stativverbindungen	109
54.3 Horizontierstative	110
6 Instrumente und Geräte zum Nivellieren	
61 Einfache Nivelliergeräte	112
61.1 Die Kanalwaage	112
61.2 Die Schlauchwaage	112
61.3 Die Setzlatte	113
62 Nivelliere mit Libellenhorizontierung	113
62.1 Mechanischer Aufbau der Libellennivelliere	113
62.2 Justieren mit Feldmeßverfahren	115
62.3 Justieren nach Kukkamäkki	119
62.4 Justieren mit Kollimator	121
62.5 Bau-, Ingenieur- und Feinnivelliere	122
62.6 Nivellertachymeter	125
Tafel I Libellennivelliere	126

	Seite
63 Nivellierkompensatoren	127
63.1 Optisch-mechanische Grundlagen	128
63.2 Kompensatoren mit überwiegend optischer Winkelvergrößerung	131
63.3 Kompensatoren mit überwiegend mechanischer Winkelvergrößerung	136
64 Automatische Nivelliere	139
64.1 Bau-, Ingenieur- und Feinnivelliere	139
64.2 Regeln für den Gebrauch automatischer Nivelliere	143
64.3 Automatische und Libellennivelliere	146
Tafel II Automatische Nivelliere	147
65 Nivellierlatten	148
65.1 Einfache Nivellierlatten	148
65.2 Nivellierlatten mit Sonderteilungen	148
65.3 Firmeneigene Nivellierlatten	150
65.4 Lattenzubehör	151
65.5 Maßvergleichung bei Nivellierlatten	152
7 Nivellierverfahren	
71 Höhenausgangsfläche und Höhenfestpunkte	152
71.1 Aufbau des Nivellementpunktfeldes	152
71.2 Festlegung der Nivellementspunkte	155
71.3 Bezeichnung der Nivellementspunkte	156
71.4 Nachweis der Nivellementspunkte	157
72 Festpunktnivellements	157
72.1 Allgemeine Nivellementsregeln	157
72.2 Einfache Nivellements	158
72.3 Ingenieurnivellements	160
72.4 Feinnivellements	164
73 Längs- und Querprofile	166
73.1 Längsprofile	166
73.2 Querprofile	167
73.3 Auftragen der Längs- und Querprofile	170
74 Flächennivellements	172
74.1 Die Lagemessung	172
74.2 Die Höhenaufnahme	173
74.3 Das Ausarbeiten der Höhenpläne	174
75 Nivellierverfahren in Sonderfällen	176
75.1 Nivellitische Fluß- und Talübergänge	176
75.2 Motorisiertes Präzisionsnivellement	181
75.3 Flächennivellement mit Laserstrahlen	184
76 Die Genauigkeit des Nivellements	187
76.1 Das Fehlergesetz des Nivellierens	187
76.2 Die Berechnung des mittleren Kilometerfehlers	188
76.3 Die Fehlergrenzen für Festpunktnivellements	191
76.4 Die Genauigkeit von Flächennivellements	192
Neuere Lehr- und Handbücher	193
Sachverzeichnis	194

1 Grundlagen

11 Einleitung

Die Vermessungskunde befaßt sich mit der Vermessung und Berechnung größerer oder kleinerer Teile der Erdoberfläche und ihrer Darstellung in Karten und Plänen. Man unterteilt die Vermessungskunde in die Erdmessung, die Landesvermessung und die Land- oder Feldmessung. Die beiden erstgenannten Gebiete, bei denen die Krümmung der Erdoberfläche und die Verteilung der Schwerebeschleunigung auf ihr berücksichtigt werden müssen, werden auch als Geodäsie bezeichnet, während die Land- und Feldmessung (englisch surveying) auch praktische Geometrie genannt wird. Ganz allgemein gliedern die vermessungstechnischen Arbeiten sich in Horizontal- oder Lagemessungen und Vertikal- oder Höhenmessungen. Dabei versteht man unter „Messung“ einen einzelnen Messungsgang und unter „Vermessung“ die Summe aller für die Erfassung eines Objekts notwendigen Messungen.

Die wichtigste Aufgabe der Vermessungstechnik ist die Herstellung von Landesvermessungs- und Kartenwerken. Dazu gehören in erster Linie die vorwiegend in den Maßstäben 1:500, 1:1000 und 1:2000 gezeichneten Katasterkarten, die insbesondere die Lage, die rechtmäßigen Grenzen und die Bebauung der Grundstücke nachweisen, und die in den Maßstäben von 1:5000 bis etwa 1:250 000 stehenden topographischen Karten, die vor allem eine Geländedarstellung enthalten. Daneben gibt es Spezialkartenwerke für Siedlungsräume, Verkehrsanlagen, Wasserbauten und zahlreiche andere Zwecke; überhaupt bilden Vermessung und Karte die Grundlage allen Planens und Bauens.

Als Unterlage für Ingenieurbauten werden in Kulturländern bei der Vorplanung die Kartenwerke der Landesvermessung verwendet. Für die spezielle Bauplanung, für die Absteckung der Bauelemente, für die Baukontrolle und für die Schlußabnahme sind besondere Baumessungen notwendig. Diese werden generell nicht anders angelegt als die Vermessungen für die Landeskartenwerke. Die Krümmung der Erdoberfläche

braucht aber bei ihnen nur selten berücksichtigt zu werden. Dafür wird im einzelnen oftmals eine sehr hohe Genauigkeit und außerordentliche Wendigkeit des Vermessungsingenieurs verlangt.

In Neuländern muß der Ingenieur in der Lage sein, die etwa vorhandenen Vermessungsunterlagen von den Lage- und Höhenfestpunkten an bis zu den Kartenwerken zu beurteilen und sie erforderlichenfalls selbst herzustellen.

12 Bezugsflächen

Um die zu vermessenden Gegenstände nach Lage und Höhe festlegen zu können, bedarf es einer Ausgangs- oder Bezugsfläche. Hierfür empfiehlt sich, da man die Vertikalachsen der Vermessungsinstrumente mit Hilfe von Wasserwaagen oder Libellen in die Richtung der Schwerkraft zu bringen pflegt, eine Niveaufläche, d. h. eine Fläche, die in jedem ihrer Punkte normal zu der jeweiligen Richtung der Schwerkraft verläuft. Eine Fläche dieser Art ist auf der Erde durch die Oberfläche des Weltmeeres gegeben, das man sich hierzu in einer von Gezeiten, Strömungen usw. freien mittleren Lage ruhend vorzustellen und mittels kommunizierender Röhren unter den Kontinenten fortgesetzt zu denken hat. Diese auf der ganzen Erde eindeutig definierbare Fläche wird in Anlehnung an das griechische Wort für Erde als *Geoid* bezeichnet und als die mathematische Figur der Erde betrachtet.

Die Meeresoberfläche stellt sich nach Maßgabe der Schwerkraft ein. Da diese aber infolge der Massenverteilung im Erdinnern gewisse Unregelmäßigkeiten aufweist, ist auch das Geoid keine regelmäßige Fläche. Es gleicht jedoch mit Abweichungen, die 80 m kaum überschreiten, einem Umdrehungsellipsoid, dessen Äquatorhalbmesser im Jahre 1967 durch internationale Vereinbarung zu 6378160 m festgelegt ist. Als Maß für die Abplattung — das ist die relative Verkürzung der Drehachse gegenüber der Äquatorachse — ist 1 : 298,25 angenommen worden*. Die Drehachse ist also nur rund $3\frac{0}{100}$ kürzer als die Äquatorachse.

Soll nun ein Ausschnitt aus der sichtbaren Erdoberfläche vermessen werden, so denke man sich alle Oberflächenpunkte

* Vgl. Moritz, H., Über das Geodätische Bezugssystem 1967. Zeitschr. f. Verm.wesen 1968, S. 81 und 1969 S. 429.

in der jeweiligen Lotrichtung auf das Geoid projiziert. Als Fläche gilt dann die Projektion des Ausschnitts auf das Geoid. Die horizontale Entfernung zweier Punkte ist die auf dem Geoid zu messende kürzeste Entfernung der Lotfußpunkte; die Höhe (= Meereshöhe) eines Punktes ist sein in der Lotlinie gemessener Abstand vom Geoid, und der Höhenunterschied zweier Punkte ist die Differenz ihrer Meereshöhen.

Angesichts der geringen Unterschiede von Geoid und Umdrehungsellipsoid kann man, sofern man sich auf Länder von mittlerer Größe beschränkt, für Lagemessungen ein Umdrehungsellipsoid als Bezugsfläche nehmen und hat dann den Vorteil, auf einer mathematisch beherrschbaren Fläche rechnen zu können. Für kleinere Länder wählt man eine sich der Erdkrümmung im Vermessungsgebiet möglichst eng anschmiegende Kugel, und wenn das Vermessungsgebiet 10 km im Quadrat nicht überschreitet, genügt die Ebene als Bezugsfläche.

Bei den Höhenmessungen sind diese Vereinfachungen nicht erlaubt. Einerseits ist nämlich die Krümmung der Erdoberfläche so bedeutend, daß eine Tangentialebene, die man in irgendeinem Punkt an die als Ellipsoid oder Kugel betrachtete Erde legt, in 35 km Entfernung vom Berührungspunkt bereits rund 100 m von der Erde absteht. Zum anderen machen die Unterschiede zwischen Ellipsoid und Geoid sich bei der Höhenmessung durchaus bemerkbar. Höhenmessungen werden daher stets auf das Geoid — oder wie man in der Praxis zu sagen pflegt — auf den mittleren Meereshorizont bezogen.

Die Vermessungskunde wird in diesem Bändchen nur insoweit behandelt, als die Bezugsfläche für Lagemessungen als Ebene angesehen werden kann. Von den Höhenmessungen wird lediglich das Verfahren des Nivellements besprochen, bei dem es dem Praktiker gar nicht zum Bewußtsein kommt, daß er auf einer gekrümmten Bezugsfläche arbeitet.

13 Maßsysteme und Maßeinheiten

13.1 Vom Archivmeter zum Einheitensystem SI. Auf Vorschlag der Pariser Akademie der Wissenschaften beschloß im Jahre 1791 die damalige französische Nationalversammlung, ein einheitliches Längenmaß einzuführen, das dem zehnmillionsten Teil eines Erdmeridians

gleichen und „Meter“ heißen sollte. Die Größe des Meters wurde in den nächsten Jahren aus mehreren Gradmessungen abgeleitet. Damit es aber jederzeit zu reproduzieren war, wurde ein Prototyp aus Platin hergestellt und im französischen Staatsarchiv niedergelegt. Dieses „Archivmeter“ ist die Grundlage des Metersystems, auf das außer dem Längenmaß auch die Einheiten des Flächenmaßes, des Raummaßes und des Gewichts bezogen wurden.

Das Metersystem wurde in den nächsten Jahrzehnten von mehreren Staaten übernommen. In Deutschland wurde es durch die Maß- und Gewichtsordnung für den Norddeutschen Bund vom 17. 8. 1868 eingeführt, die mit ihrem Inkrafttreten am 1. 1. 1872 für das ganze damalige Deutsche Reich verbindlich wurde.

Um die internationale Anerkennung des Metersystems weiter zu betreiben, schlossen im Jahre 1875 die damaligen Teilnehmerstaaten die „Internationale Meter-Konvention“ ab und luden alle Staaten der Erde zum Beitritt ein. Die Staaten einigten sich ferner auf die Einrichtung eines Internationalen Büros für Maß und Gewicht in Breteuil bei Paris; doch sollte die Entscheidungsbefugnis über neue Vorlagen den Zusammenkünften der Delegierten der Teilnehmerstaaten verbleiben, die fortan als „Generalkonferenzen für Maß und Gewicht“ bezeichnet wurden.

Als erste größere Aufgabe erarbeitete das Büro in 10-jährigen Versuchen einen neuen Meterprototyp mit X-förmigen Querschnitt aus Platin-Iridium, der das Meter noch genauer festlegen sollte als das Archivmeter. Diesen Stab erklärte die 1. Generalkonferenz (1889) zum neuen internationalen Meterprototyp und definierte das Meter als den Abstand zweier auf dem Prototyp von Breteuil angebrachten Strichmarken bei 0°C. Von diesem Prototyp erhielten alle der Konvention beigetretenen Staaten eine Kopie. Angesichts der fortschreitenden Vertiefung der physikalischen Grundlagen und der steigenden Genauigkeitsansprüche hat auch diese Definition sich auf die Dauer als nicht ausreichend erwiesen. Sie wurde daher, ohne daß die Länge des Meters geändert wurde, abgelöst durch den Beschluß der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht vom 14. Oktober 1960. Danach ist das Meter das 1650763,73fache der Wellenlänge der von den Atomen des Nuklids ^{86}Kr , eines Isotops des Edelgases Krypton mit der Masse 86, beim Übergang vom Zustand $5d$ zum Zustand $2p_{10}$ ausgesandten Strahlung. Diese Strahlung läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen mit der sogenannten *Engelhard-Lampe* realisieren, die sich dabei in einem Kältebad von 63 Kelvin befindet.

In den Jahrzehnten nach 1875 wurden unabhängig von der Meterkonvention, in deren Zuständigkeit lediglich die Einheiten Meter, Quadratmeter, Kubikmeter und Kilogramm fielen, die elektromagnetischen Einheiten Volt, Ampere, Ohm und Watt eingeführt. 1901 erkannte der italienische Physiker Giovanni Giorgi, daß man aus diesen Einheiten und den mechanischen Einheiten Meter, Kilogramm und Sekunde ein kohärentes (= eng zusammenhängendes) Einheitensystem mit nur vier

Grund- oder Basiseinheiten bilden könne, wenn man nur die Definitionen der elektromagnetischen Einheiten etwas anders formulierte. Später wurden noch rund 15 weitere Einheiten darunter das Kelvin für die thermodynamische Temperatur und die Candela für die Lichtstärke festgelegt. Alle diese Einheiten aber ließen sich nach dem Vorgang von Giorgi auf (z. Zt.) 7 Basiseinheiten reduzieren.

Diesem großartigen System erteilte im Jahre 1954 die 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht ihre Zustimmung. Die 11. Generalkonferenz (1960) gab ihm den Namen „Système International d'Unités“, abgekürzt SI. In der Bundesrepublik Deutschland wurde das System durch das Gesetz über die Einheiten im Meßwesen vom 2. 7. 1969 und die Ausführungsverordnung zu diesem Gesetz vom 26. 6. 1970 eingeführt*.

In den nun folgenden Abschnitten sind die Regelungen zusammengestellt, die das Vermessungswesen an irgend einer Stelle berühren.

13.2 Grundlegende Vorschriften des Einheitengesetzes. Das SI kennt nach §§ 2 und 3 des Gesetzes, die folgenden 7 Basiseinheiten und Einheitenzeichen

für die Länge	das Meter	= m
für die Masse	das Kilogramm	= kg
für die Zeit	die Sekunde	= s
für die elektrische Stromstärke	das Ampère	= A
für die thermodynamische Temperatur	das Kelvin	= K
für die Lichtstärke	die Candela	= cd
für die Stoffmenge	das Moll	= mol

Nach § 5 des Gesetzes und dem 2. Abschnitt der Ausführungsverordnung können aus den 7 Basiseinheiten durch Multiplikation mit 1 oder mit einem von 1 verschiedenen Faktor neue Einheiten abgeleitet werden. Durch Multiplikation mit dem Faktor 1 entstehen die kohärenten Einheiten des SI z. B.

für die Fläche	1 m ²
für die Geschwindigkeit	1 m s ⁻¹
für die Beschleunigung	1 m s ⁻²
für die Kraft	1 m kg s ⁻² , genannt 1 Newton (N)
für den Druck	1 m ⁻¹ kg s ⁻² = 1 N/m ² .

* Ledersteger, K.; Das internationale Meter und seine Festlegung. Zeitschr. für Vermessungswesen (ZfV) 1956 S. 33. — Straßer, G.; Die Toise, der Yard und das Meter. Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN) 1974 S. 2. — Haeder, G. u. Gärtner, E.; Die gesetzlichen Einheiten in der Technik. Beuth-Vertrieb 3. Aufl. Berlin 1972. — Rotter, F.; SI Gestern, heute und morgen; in „Jubiläumsveranstaltung 100 Jahre metrisches Maßsystem in Österreich“, Wien 1973. — (Vgl. das Referat in ZfV 1974, S. 83/84).

Nichtkohärente Einheiten können mit einer ganzzahligen Potenz von 10 oder mit einer anderen Zahl zusammengesetzt werden, z. B.

$$\begin{aligned} \text{die Fläche } 10^2 \text{ m}^2 &= 1 \text{ a} \\ \text{die Beschleunigung } 10^{-2} \text{ m s}^{-2} &= 1 \text{ Gal} \\ \text{die Kraft } 10^{-5} \text{ m kg s}^{-2} &= 10^{-5} \text{ N} = 1 \text{ dyn} \\ \text{der Druck } 10^5 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2} &= 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ bar} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{die Kraft } 9,806 \text{ 65 m kg s}^{-2} &= 9,806 \text{ 65 N} = 1 \text{ kp} \\ \text{der Druck } 101 \text{ 325 m}^{-1} \text{ kg s}^{-2} &= 101 \text{ 325 N/m}^2 = 1 \text{ atm.} \end{aligned}$$

Nach § 6 des Gesetzes lassen sich aus den vorgenannten Einheiten durch Vorsätze dezimale Vielfache und Teile bilden und durch Vorsatzzeichen folgendermaßen kennzeichnen:

	Vorsatz	Vorsatz- zeichen		Vorsatz	Vorsatz- zeichen
10^1	Deka	da	10^{-1}	Dezi	d
10^2	Hekto	h	10^{-2}	Zenti	c
10^3	Kilo	k	10^{-3}	Milli	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	Piko	p

13.3 Die alten und die neuen Maßeinheiten in der Vermessungstechnik*.

13,31 Die Einheiten des Längen-, Flächen- und Volumenmaßes sind in ihrer 1875 von der Meterkonvention erarbeiteten Form durch das Einheitengesetz bestätigt. Lediglich die Einheiten des Längenmaßes sind um einige Zehnerpotenzen nach oben und unten erweitert worden. Nach dem Einheitengesetz und der Ausführungsverordnung gilt nunmehr folgendes:

a) Die SI-Einheit des Längenmaßes ist die Basiseinheit Meter (m). Aus ihr folgen mit dem Vorsatzzeichen unter 13.2

1 Dekameter = $10^1 \text{ m} = 1 \text{ dam}$	1 Dezimeter = $10^{-1} \text{ m} = 1 \text{ dm}$
1 Hektometer = $10^2 \text{ m} = 1 \text{ hm}$	1 Zentimeter = $10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$
1 Kilometer = $10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$	1 Millimeter = $10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$
1 Megameter = $10^6 \text{ m} = 1 \text{ Mm}$	1 Mikrometer = $10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}$
1 Gigameter = $10^9 \text{ m} = 1 \text{ Gm}$	1 Nanometer = $10^{-9} \text{ m} = 1 \text{ nm}$
1 Terameter = $10^{12} \text{ m} = 1 \text{ Tm}$	1 Pikometer = $10^{-12} \text{ m} = 1 \text{ pm}$

* Vgl. Simmerding, F.; Zur gesetzlichen Neuordnung des Eich- und Meßwesens mit einer geschichtlichen Betrachtung über die Definition der Längeneinheit. Zeitschr. f. Verm.wesen 1970, S. 141 und 361.

b) Die SI-Einheit des Flächenmaßes ist die abgeleitete Einheit Quadratmeter (m^2). Aus ihr folgt mit den obigen Vorsatzzeichen

1 Ar	= $10^2 m^2 = 1 a$	1 Quadratdezimeter	= $10^{-2} m^2 = 1 dm^2$
1 Hektar	= $10^4 m^2 = 1 ha$	1 Quadratzentimeter	= $10^{-4} m^2 = 1 cm^2$
1 Quadratkilometer usw.	= $10^6 m^2 = 1 km^2$	1 Quadratmillimeter usw.	= $10^{-6} m^2 = 1 mm^2$

c) Die SI-Einheit des Volumenmaßes ist die abgeleitete Einheit Kubikmeter (m^3). Daraus sind mit dem Vorsätzen in 13.2 das dm^3 , das cm^3 und das mm^3 usw. abgeleitet worden. Zu Fläche und Volumen bestimmt die Ausführungsverordnung:

Die Flächenmaße Ar (a) und Hektar (= Hektar: ha) werden als abgeleitete Maßeinheiten für Grundstücksflächen beibehalten (§ 48). Die amtliche Begründung hierzu bezieht sich ausdrücklich auf den Ausweis der Grundstücksflächen in den Grundbüchern.

Die Abkürzungen qm für m^2 , qkm für km^3 usw. sowie cbm für m^3 , odm für dm^3 usw. dürfen nach Ablauf des Jahres 1974 nicht mehr verwendet werden (§ 54). Für Datenverarbeitungsanlagen mit einem beschränkten Zeichenvorrat ist eine Sonderregelung in Aussicht gestellt.

Das Liter ist als besondere Bezeichnung für das Kubikdezimeter definiert (§ 4 Abs. 3). Die frühere Verbindung des Liters mit der Einheit der Masse (1 l = Volumen von 1 kg reinem Wasser bei der größten Dichte unter dem Druck 1 at) ist aufgegeben worden.

13.32 Die SI-Einheiten des ebenen Winkelmaßes weichen von den üblichen Maßeinheiten in unterschiedlicher Weise ab. Daher müssen — schon im Hinblick auf die vorhandene Literatur — der bisherige und der neue Zustand einander gegenübergestellt werden. Bislang wurden benutzt: die Sexagesimalteilung, die Zentesimalteilung und das Arcus- oder Bogenmaß. Im einzelnen sind die beiden ersten Systeme folgendermaßen aufgebaut:

die Sexagesimalteilung:	1 Vollkreis = 360° (Grad);
$1^\circ = 60'$ (Minuten)	$1' = 60''$ (Sekunden)
die Zentesimalteilung:	1 Vollkreis = 400° Neugrad oder Gon
$1^\circ = 100^c$ (Neuminuten)	$1^c = 100^{cc}$ (Neusekunden)

wobei das hochgestellte c als Abkürzung für „centi“ stand.

Die Sexagesimalteilung ist wegen ihrer engen Beziehungen zur Astronomie und zum Gradnetz der Erdoberfläche mit ihren bisherigen Einheiten Grad, Minute und Sekunde und deren Zeichen in das SI unverändert übernommen worden. Die früher gerne benutzten Bezeichnungen Altgrad, Altminute und Altsekunde sind fortgefallen,

Die Zentesimalteilung kennt als SI-Einheit nur noch das Gon (Einheitenzeichen *gon*); die Bezeichnungen Neugrad, Neuminute und Neusekunde sind ebenfalls fortgefallen. Die Bruchteile des Gon sind im SI im Prinzip als Dezimale des Gon darzustellen; doch ist es mit den in 13.2 angegebenen Vorsätzen erlaubt, das Zentigon (Einheitenzeichen *cgon*) und das Milligon (Einheitenzeichen *mgon*) zu bilden. Ein Einheitenzeichen für die ehemalige Neusekunde ($^{\text{cc}}$) gibt es nicht. Vielmehr ist künftig

$$1^{\text{cc}} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ gon} = 0,1 \text{ mgon}.$$

Für den rechten Winkel oder den „Rechten“ ist das Einheitenzeichen 1^{r} geschaffen worden.

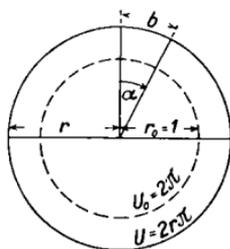


Bild 13.1
Definition des Bogenmaßes

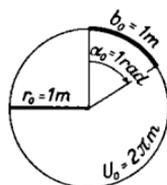


Bild 13.2
Das Bogenmaß im Einheitskreis

Das Bogenmaß eines Winkels, die dritte der überkommenen Winkleinheiten, ist das Verhältnis des Bogens b , den die Schenkel eines Winkels α aus einem um seinen Scheitelpunkt geschlagenen Kreis ausschneiden, zu dem Kreishalbmesser r (Bild 13.1). Die Einheit des Bogenmaßes ist der Winkel, für den dieses Verhältnis gleich 1 ist, d. h. für den $b = r$ ist. Dieser Winkel wird als „Radiant“ bezeichnet, weil er entsteht, wenn der Halbmesser eines Kreises auf seinem Umfang abgewickelt wird. Das Bogenmaß des vollen Winkels ist daher 2π , das des Rechten $\pi/2$.

Das Bogenmaß ist also der Quotient zweier Längen, und wohl deshalb ist der Radiant (Einheitenzeichen *rad*) im SI, das die Anzahl der Basiseinheiten möglichst klein halten möchte, zur (abgeleiteten) SI-Einheit des ebenen Winkels erklärt. Etwas spezieller als im vorigen Absatz heißt es im § 5 der Ausführungsverordnung: „1 Radiant ist gleich dem ebenen Winkel, der als Zentriwinkel eines Kreises vom Halbmesser 1 m aus dem Kreis einen Bogen der Länge 1 m ausschneidet“. Zur Veranschaulichung dieses Satzes sind im Bild 13.2 (Einheitskreis) der Zentriwinkel α , der zugehörige Bogen b und der Halbmesser r mit dem Index Null ($_0$) versehen worden.

Um aber dem Bedürfnis der Praxis nach den Einheiten der Sexagesimal- und Zentesimalteilung gerecht zu werden, sind — ebenfalls

im § 5 a. a. O. — aus dem Radianten noch folgende Einheiten abgeleitet, bei deren Erläuterung für das Wort Einheitenzeichen hier die Abkürzung Ez benutzt ist.

(1) 1 Vollwinkel (kein Ez.)	$= 2\pi$ rad	$= 360^\circ = 400$ gon
1 Rechter (Ez.: \perp)	$= \pi/2$ rad	$= 90^\circ = 100$ gon
1 Grad (Ez.: $^\circ$)	$= \frac{\pi}{180}$ rad	$= 90$ ster Teil des Rechten
1 Minute (Ez.: $'$)	$= \frac{\pi}{180 \cdot 60}$ rad	$= 60$ ster Teil des Grades
1 Sekunde (Ez.: $''$)	$= \frac{\pi}{180 \cdot 60^2}$ rad	$= 60$ ster Teil der Minute
1 Gon (Ez.: gon)	$= \frac{\pi}{200}$ rad	$= 100$ ster Teil des Rechten
1 Zentigon (Ez.: cgon)	$= \frac{\pi}{200 \cdot 10^2}$	$= 100$ ster Teil eines Gon
1 Milligon (Ez.: mgon)	$= \frac{\pi}{200 \cdot 10^3}$	$= 1000$ ster Teil eines Gon

13.33 *Vermessungstechnische Sonderzeichen.* Die Reziproken der in (1) auftretenden Quotienten $\pi/180^\circ$ und $\pi/200$ gon — allgemein $\pi/2^L$ — werden in der Geodäsie so häufig benutzt, daß dafür das Symbol ϱ eingeführt ist, und zwar ist

$$180/\pi = \varrho^{(\circ)} \text{ (lies } \varrho \text{ in Grad)} \quad || \quad 200/\pi = \varrho^{(\text{gon})} \text{ (lies } \varrho \text{ in Gon)} \quad (2)$$

Zu einer ersten Anwendung entnehme man dem Bild 13.1 den Ansatz

$$\alpha : b = 4^L : 2\pi.$$

Im Einheitskreis (Bild 13.2) folgt daraus wegen $b_0 = r_0 = 1$ für einen Winkel $\alpha_0 = 1$ rad, wenn die jeweiligen Winkeleinheiten eingesetzt werden,

$$\alpha = \frac{2^L}{\pi} \varrho; \quad \alpha^{(\circ)} = \frac{180^\circ}{\pi} \varrho^\circ; \quad \alpha^{(\text{gon})} = \frac{200 \text{ gon}}{\pi} \varrho^{(\text{gon})}$$

Die Winkelwerte der ϱ im Sexagesimal- und Zentesimalsystem sind demnach gleich denen des Radianten in den entsprechenden Maßsystemen. Zahlenmäßig sind diese Werte

$$\begin{aligned} \varrho^{(\circ)} &= 57,295779 \dots & \varrho^{(\text{gon})} &= 63,661977 \dots \\ \varrho^{(')} &= 3437,7467 \dots & \varrho^{(\text{cgon})} &= 6366,1977 \dots \\ \varrho^{(')} &= 206264,8 \dots & \varrho^{(\text{mgon})} &= 63661,973 \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Für eine zweite Anwendung ergibt sich aus Bild 13.1

$$b : 2r\pi = \alpha : 4^\circ$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit 2π , so erhält man mit (2) die in der Vermessungstechnik viel benutzte Formel

$$b : r = \alpha : \rho, \quad (4)$$

in die b und r bzw. α und ρ jeweils mit den einander entsprechenden Einheiten einzusetzen sind.

Zahlenbeispiel: Eine 150 m lange Achse soll um 12 *cgon* verschwenkt werden. Um welchen linearen Betrag b wird dadurch das freie Ende der Achse seitwärts verlegt? Die Gleichung (4) gibt mit dem $\rho(\text{gon})$ aus (3)

$$b(\text{m}) = r(\text{m}) \frac{\alpha(\text{gon})}{\rho(\text{gon})} = \frac{150 \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{63,66} = 0,283 \text{ m}$$

Eine dritte Sonderanwendung ist der Übergang auf andere Winkleinheiten. Die Umwandlung von Grad oder Gon in die Einheit Radiant und umgekehrt ist in der Vermessungstechnik kaum erforderlich. Auch der Übergang von der Sexagesimalteilung in die Zentesimalteilung und umgekehrt verliert an Bedeutung, weil das Sexagesimalsystem in der Vermessungspraxis nur noch selten gebraucht wird. Zum Übergang vom Sexagesimal- in das Zentesimalsystem gibt es zahlreiche Tafeln. Bequemer ist heute das Umrechnen mit einem elektronischen Taschenrechner unter Verwertung nachstehender Identitäten:

$$\begin{array}{ll} 1^\circ = 10/9 \text{ gon} = 1,111 \dots \text{ gon} & 1 \text{ gon} = 0,9^\circ \\ 1' = 1,85185185 \dots \text{ cgon} & 1 \text{ cgon} = 0,54' \\ 1'' = 0,308641975308 \dots \text{ mgon} & 1 \text{ mgon} = 3,24'' \end{array}$$

Auch hierfür wird man zweckmäßig zuvor die Sexagesimalminuten und -Sekunden in Dezimale des Grades verwandeln.

Für Überschlagrechnungen merke man:

$$1' \approx 2 \text{ cgon}; \quad 1'' \approx 0,3 \text{ mgon} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ gon}$$

In der Bautechnik werden die Höhenunterschiede meistens in Prozenten des Längenunterschiedes oder durch das Steigungsmaß 1 : n seltener durch den Neigungswinkel α ausgedrückt. In runden Werten bestehen folgende Zusammenhänge:

%	1	2	3	5	10	25	50	100
$\alpha(\text{gon})$	0,6	1,3	1,9	3,2	6,3	16,1	29,5	50
1 : n	1:100	1:50	1:33 $\frac{1}{3}$	1:20	1:10	1:4	1:2	1:1

Man beachte ferner bei Benutzung fremdsprachlicher Literatur:

im Englischen ist Grad \rightarrow degree, gon \rightarrow grade

im Französischen Grad \rightarrow degré, gon \rightarrow grade.

13.4 Seltener gebrauchte SI-Einheiten

13.41 Die (abgeleitete) SI-Einheit des räumlichen Winkels ist nach § 6 der Ausführungsverordnung der Steradian (Einheitenz. sr). 1 Steradian ist gleich dem räumlichen Winkel, der als gerader Kreiskegel mit der Spitze im Mittelpunkt einer Kugel vom Halbmesser 1 m aus der Kugeloberfläche eine Kalotte der Fläche 1 m^2 ausschneidet.

13.42 Die (abgeleitete) SI-Einheit des Drucks oder der mechanischen Spannung, die in der Vermessungstechnik vor allem für die barometrische Höhenmessung gebraucht wird, ist nach § 20 a. a. O. das Pascal (Einheitenz.: Pa). 1 Pascal ist gleich dem auf eine Fläche gleichmäßig wirkenden Druck, bei dem senkrecht auf die Fläche 1 m^2 die Kraft $1 \text{ N} = 1 \text{ Newton}$ ausgeübt wird. 10^5 Pa sind gemäß 13.2 1 Bar (bar), 10^3 Pa 1 Millibar (mbar).

Die Einheiten technische Atmosphäre (at), physikalische Atmosphäre (atm), Torr (torr), Meter-Wassersäule (mWs), Millimeter-Quecksilbersäule (mm Hg) sind nur noch bis Ende 1977 zugelassen.

13.43 Die Basiseinheit der (thermodynamischen) Temperatur (T), auch Kelvintemperatur genannt, ist nach § 3 des Einheitengesetzes das Kelvin (Einheitenzeichen K). Dieses ist definiert als der $273,16^{\text{te}}$ Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

Hierzu vermerkt das Normblatt DIN 1301 S. 11: Die Einheit, das Kelvin, gilt auch für die Angabe von Temperaturdifferenzen. — Als Celsius-Temperatur (t) wird die besondere Differenz einer beliebigen thermodynamischen Temperatur T gegenüber der Temperatur $T_0 = 273,15 \text{ K}$ bezeichnet. Es ist also

$$t = T - T_0 = T - 273,15 \text{ K.}$$

Bei der Angabe von Celsius-Temperaturen sind der Einheitenname Grad Celsius und das Einheitenzeichen $^{\circ}\text{C}$ anzuwenden. Die Differenz Δt zweier Celsius-Temperaturen z. B. der Celsius-Temperaturen $t_1 = T_1 - T_0$ und $t_2 = T_2 - T_0$ ist

$$\Delta t = t_1 - t_2 = T_1 - T_2 = \Delta T.$$

Eine derartige Temperaturdifferenz ist nicht mehr auf die dynamische Temperatur T_0 bezogen, somit keine Celsius-Temperatur im Sinne der Definition nach der ersten der beiden obigen Gleichungen.

13.44 Die (gesetzliche) SI-Einheit der Zeit ist gem. 13.2 die Sekunde (Einheitenzeichen s); von dieser werden folgende Vielfache abgeleitet:

1 Minute (min) = 60 s, 1 Stunde (h) = 60 min = 3600 s,

1 Tag (d) = 24 h = 86400 s; h von lat. hora, d von lat. dies.

Die Vorsatzzeichen in 13.2 sind auf dezimale Vielfache oder Teile der Zeiteinheiten nicht anzuwenden.

13.45 Die (abgeleitete) SI-Einheit der Frequenz ist nach § 12 der Ausführungsverordnung das Hertz (Einheitenzeichen Hz). 1 Hertz ist gleich der Frequenz eines Schwingungsvorgangs der Periodendauer 1 s. Zur Kennzeichnung von Vielfachen und Teilen dienen die Vorsatzzeichen in 13.2.

In der Vermessungskunde werden die Einheiten der Zeit und der Frequenz außer in der astronomischen Geodäsie insbesondere zur Beschreibung der Wirkungsweise der Vermessungskreisel (Band II Ziff. 18) und der elektronischen Distanzmesser (Band II Ziff. 25—28) gebraucht.

13.5 Auszug aus den Übergangsbestimmungen:

Bis Ende 1977 sind nach § 51 Abs. 2 und § 52 Abs. 2 der Ausführungsverordnung noch zugelassen: das Angström, das Dyn, das Pond, das Erg, die Kalorie, die Pferdestärke, der typographische Punkt, das Gal; siehe ferner 13.42 am Schluß.

14 Fehlerrechnung und Bilden von Mittelwerten

14.1 Die Aufgabe der Fehlerrechnung. Die geodätischen Messungen müssen im Hinblick auf ihren jeweiligen Zweck mit einer bestimmten Genauigkeit ausgeführt und gegen Irrtümer gesichert sein. Völlig fehlerfreie Messungen sind infolge der Mängel der Meßgeräte und der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne nicht möglich. Die Messungen werden daher in der Regel mehrere Male wiederholt und möglichst noch durch zusätzliche Messungen gestützt, indem man z. B. außer den Katheten noch die Hypotenuse mißt, oder neben zwei Dreieckswinkeln, die man braucht, auch den dritten beobachtet.

Bei der Auswertung der Messungen entsteht die Aufgabe,

1. aus den Beobachtungen den günstigsten Mittelwert der gesuchten Größe abzuleiten,
2. eine Maßzahl für die Genauigkeit einer einzelnen Messung oder ihre „Streuung“ anzugeben,
3. die Genauigkeit oder die Streuung des Mittelwertes und seinen „Vertrauensbereich“ abzuschätzen.

14.2 Fehlerarten. Die Messungsfehler unterteilt man nach Art ihrer Entstehung in grobe, systematische und zufällige Fehler.

Grobe Fehler sind grob fehlerhafte Ablesungen an den Meßinstrumenten, Zielverwechslungen und dergleichen. Sie werden durch Kontrollmessungen entdeckt und ausgeschieden.

Systematische Fehler verfälschen das Meßergebnis stets in demselben Sinne. Sie werden hervorgerufen durch unzureichende Eichung und einseitige Handhabung der Meßinstrumente sowie durch einsinnig wirkende Einflüsse von Temperatur, Luftdruck usw. auf das Meßinstrument oder den zu messenden Gegenstand. Diese Fehler lassen sich

in allen Regelfällen durch Eichung der Meßinstrumente, Wahl geeigneter Meßverfahren und rechnerisches Berücksichtigen der einseitigen Einflüsse zum größten Teil eliminieren.

Als *zufälligen Fehler* einer Messung betrachtet man die Summe der nach dem Ausscheiden der groben und der systematischen Fehler übrigbleibenden unbekanntes „Elementarfehler“, die auf die begrenzte Schärfe der menschlichen Sinne, Unvollkommenheiten der Meßinstrumente, unkontrollierbare Veränderungen der äußeren Umstände und gelegentlich auch des Gegenstandes der Messung zurückzuführen sind. Die zufälligen Fehler werden ebenso oft positives wie negatives Vorzeichen annehmen und sind im Sinne der mathematischen Statistik *stochastisch unabhängige Veränderliche*. Trotz ihrer scheinbaren Regelmäßigkeit unterliegen sie indessen den Gesetzen des Zufalls.

Bild 14.1 läßt die Verteilung der wahren Fehler ε_i [14.32] erkennen, die bei 160 Beobachtungen desselben Winkels gemacht wurden. Die ε_i sind dazu ihrer Größe nach in die auf der Abszissenachse angedeuteten Gruppen von je 1^c Breite eingeordnet, und über den Abszissenab-

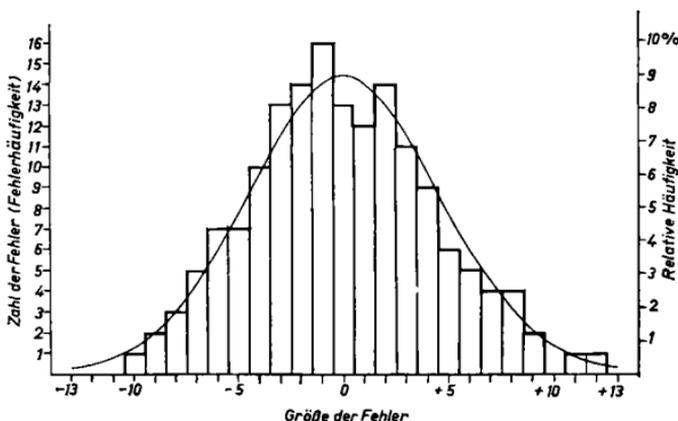


Bild 14.1

schnitten sind Rechtecke eingezeichnet, deren Höhe der Anzahl der in die betreffende Gruppe fallenden Fehler proportional ist. Wie die so entstandene Treppenkurve (= Histogramm) zeigt, ist die Häufigkeit, mit der ein Fehler ε auftritt, eine Funktion seiner Größe. Diese Erscheinung ist von C. F. Gauß in das nach ihm benannte Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad (1)$$

gebracht worden, in dem $\varphi(\varepsilon)$ die relative — d. h. prozentuale — Häufigkeit des Auftretens, e die Basis der natürlichen Logarithmen und h eine Konstante ist, die die Messungsgenauigkeit charakterisiert. Die danach

zu erwartende theoretische Fehlerverteilungskurve ist in Bild 14.1 als durchlaufende Kurve eingezeichnet; sie stimmt mit der aus den Messungen gewonnenen Treppenkurve gut überein. Das gilt für alle größeren Messungsreihen, die überwiegend zufällige Fehler aufweisen. Solche Messungsreihen besitzen in der Sprache der Statistik eine *Normalverteilung*. Die überwiegend durch zufällige Fehler verursachten Messungswidersprüche aber lassen sich nach der auf C. F. Gauß zurückgehenden *Methode der kleinsten Quadrate* willkürfrei ausgleichen.

14.3 Mittelwerte und Streuungsmaße

14.31 *Mittelwerte*. Die Einzelergebnisse l_i , die sich ergeben würden, wenn man eine Größe beliebig oft ($n \rightarrow \infty$) durch gleichgenaue, unabhängige und nur mit zufälligen Fehlern behaftete Messungen bestimmte, werden um einen gewissen Mittelwert ξ schwanken, den man den *Erwartungswert* oder auch den *wahren Wert* der Größe nennt. Da jedoch in allen Regelfällen nur eine begrenzte Anzahl von Messungen (eine Stichprobe vom Umfang n) vorliegt, benutzt man als Näherungswert für den wahren Wert das *arithmetische Mittel*

$$x = \frac{1}{n} (l_1 + l_2 + \dots + l_n) = \frac{1}{n} [l]^* \quad (2)$$

Für die nach dem Bilden des arithmetischen Mittels *übrigbleibenden Fehler* oder *Verbesserungen*

$$v_1 = x - l_1; v_2 = x - l_2; v_n = x - l_n$$

gilt, daß deren Quadratsumme $[vv]$ ein Minimum wird, also

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = \text{Min.} \quad (3)$$

Das ist gleichzeitig die Grundforderung der Methode der kleinsten Quadrate, aus der das arithmetische Mittel sich als Sonderfall herleiten läßt.

14.32 *Streuungsmaße*. Um gemäß 14.1 Ziff. 2 ein Maß für die Streuung einer einzelnen Messung l_i zu bekommen, betrachtet man — zunächst für $n \rightarrow \infty$ — die Abweichungen der Beobachtungen l_i von dem wahren Wert ξ , die sogenannten *wahren Fehler*

$$\varepsilon_1 = \xi - l_1; \varepsilon_2 = \xi - l_2; \varepsilon_n = \xi - l_n$$

und definiert als Genauigkeitsmaß für eine einzelne Messung l_i den „*theoretischen Wert des mittleren Fehlers*“

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}; n \rightarrow \infty \quad (4)$$

* In der Fehlerrechnung verwendet man nach dem Vorbild von C. F. Gauß gern eckige Klammern als Summenzeichen,