

Einführung in die theoretische Physik

In drei Bänden

Von

Dr. Clemens Schaefer

o. ö. Professor der Physik an der Universität Köln

DRITTER BAND

ERSTER TEIL

Elektrodynamik und Optik

Mit 235 Figuren im Text

Zweite durchgesehene Auflage



Berlin 1950

WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Veit & Comp.

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung, vorbehalten.

Copyright 1950 by WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
Berlin W 35, Genthiner Straße 13.

Vorwort zur ersten Auflage.

Meine Absicht, der 1920 erschienenen ersten Auflage des zweiten Bandes möglichst rasch den dritten folgen zu lassen, konnte ich nicht verwirklichen: Zweimaliger Wechsel meines Wirkungskreises und andere dringende wissenschaftliche, literarische und amtliche Verpflichtungen hinderten mich daran. Erst heute kann ich den Fachgenossen den ersten Teil des dritten Bandes vorlegen, der mit Elektrodynamik und Optik die Darstellung der klassischen Physik zum Abschluß bringt.

In den ersten sechs Kapiteln kommt die phänomenologische Maxwell'sche Theorie zur Darstellung; die am Schlusse des VI. Kapitels gewonnene Erkenntnis, daß die Lichtwellen elektromagnetischer Natur sind, bildet die Überleitung zur Optik. Die Kapitel VII bis XI umfassen die Optik durchsichtiger Medien, Metalloptik, Kristalloptik, die Erscheinungen der Interferenz und Beugung, also etwa das, was man mit dem Schlagwort „Optik einer Wellenlänge“ bezeichnen könnte. Im XII. Kapitel werden die Gleichungen der Lorentz'schen Elektronentheorie entwickelt und auf die Erscheinung der Dispersion angewendet. Das XIII. Kapitel schildert in der „Wärmestrahlung“ das Eingreifen der Thermodynamik und der Quantentheorie in die Optik, und das XIV. Kapitel endlich enthält — als Abschluß und Krönung der klassischen Physik — die Theorie der Relativität.

Atom- und Quantenphysik bleiben für den zweiten Halbband vorbehalten.

Darstellung und Stoffauswahl sind durch dieselben Grundsätze bestimmt wie in den beiden ersten Bänden. Bezüglich der letzteren darf ich daran erinnern, daß ich weder ein Lehrbuch der Elektrizitätslehre noch der Optik schreiben wollte, sondern eine Einführung in die theoretische Physik; daher fehlt hier manches, was in solchen Lehrbüchern mit Recht vermißt werden würde. Dafür enthält meine Darstellung andere Dinge, die selbst in neueren Lehrbüchern der Optik nicht zu finden sind. Im Besonderen habe ich in der „Optik“ stets das Gesamtgebiet der elektromagnetischen Wellen von der Röntgenstrahlung bis zu den elektrischen Wellen im engeren Sinne vor Augen gehabt und ihren gemeinsamen Charakter und ihre Zusammengehörigkeit so stark als möglich betont, was der Leser an vielen Stellen bestätigt finden wird. Natürlich kann man über die Zweckmäßigkeit meiner Auswahl im Einzelnen verschiedener Meinung sein; ich hoffe jedoch, im allgemeinen den richtigen Mittelweg eingeschlagen zu haben.

Zahlreichen Fachgenossen bin ich zu lebhaftem Danke für ihre Unterstützung und Kritik verpflichtet: Auf die ganze Gestaltung dieses Bandes hat der wissenschaftliche Verkehr mit meinem Freunde Professor Dr. E. Lohr in Brünn, dessen ich mich seit Jahren erfreue, einen starken Einfluß ausgeübt. Ferner haben meine hiesigen Kollegen, Professor Dr. F. Reiche und Professor Dr. H. Senftleben beide die Freundlichkeit gehabt, das ganze Manuskript zu lesen und mir zahlreiche Verbesserungsvorschläge in sachlicher und didaktischer Hinsicht zu machen. Ebenso habe ich meinem Assistenten Dr. J. Jaumann zu danken, mit dem ich viele fördernde Diskussionen hatte. Die Figuren haben die Herren Studienrat Dr. P. Hahn und Dr. J. Jaumann in verständnisvoller Weise angefertigt; von dem letzteren rührt unter anderem der Entwurf der neuen und, wie mir scheint, sehr instruktiven Figuren 121, 123, 128 zur Kristalloptik her. Im Lesen der Korrekturen hat mich Herr Privatdozent Dr. L. Bergmann unterstützt. Allen treuen Helfern sage ich hier nochmals meinen besten Dank.

Und nun wünsche ich dem dritten Bande dieselbe freundliche Aufnahme, die die beiden ersten Bände gefunden haben.

Breslau, im August 1932.

Clemens Schaefer.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die erste Auflage dieses Bandes ist seit April 1943 erschöpft. Die Zeitverhältnisse gestatteten keine gründliche Durcharbeitung für die zweite Auflage, so daß der Verlag und ich uns genötigt sahen, einen anastatischen Neudruck herstellen zu lassen und die Korrekturen auf das unumgänglich Notwendige zu beschränken. Die Herstellung der Filme zog sich bis in den März 1945 hin: kurz vor dem Zusammenbruch hätte der Druck beginnen können: die darauf folgenden Wirren verhinderten dies. Glücklicherweise wurden die Filme gerettet, aber erst jetzt konnte der Druck vollendet werden, da Papiermangel und andere Schwierigkeiten der Nachkriegszeit, darunter auch meine Ausweisung aus Schlesien und der dadurch erzwungene Wechsel meines Wirkungskreises von Breslau nach Köln, eine frühere Fertigstellung verhinderten.

Dem Verlage W. de Gruyter & Co. habe ich für seine steten Bemühungen aufrichtig zu danken.

Köln, im April 1949.

Clemens Schaefer.

Inhalt.

Sechstes Buch.

Elektrodynamik und Optik.

Erstes Kapitel.

Elektrostatik.

	Seite
1. Grundtatsachen, Definitionen, vorläufige Bezeichnungen	1
2. Das Coulombsche Gesetz	5
3. Faradays Idee der Feldwirkung	10
4. Feldlinien, Kraftlinien; Begriff des Kraftflusses; Quellenfeld	14
5. Die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes; das Potential	20
6. Spezielle Potentiale und ihre Eigenschaften (punktförmige Ladungen, räumlich und flächenhaft verteilte Ladungen, Doppelschichten, zweidimensionale Probleme)	29
7. Allgemeine Folgerungen; das elektrostatische Problem; Eindeutigkeit der Lösungen	40
8. Influenzelektrizität; Kapazitätskoeffizienten	49
9. Spezielle elektrostatische Probleme (Platten- und Kugelkondensator, Ellipsoid, Kreisscheibe, dünner Draht)	55
10. Spezielle elektrostatische Probleme: Leitende Kugel im homogenen Felde	62
11. Das elektrostatische Feld in einem beliebigen homogenen Isolator; Anwendungen (Plattenkondensator)	70
12. Das elektrostatische Feld im inhomogenen Isolator; Anwendungen: Messung von \mathcal{E} und \mathcal{D} in festen Isolatoren; Brechung der Kraftlinien; Plattenkondensator	76
13. Dielektrische Kugel im homogenen Felde	84
14. Die Polarisation der Dielektrika	88
15. Die Energie des elektrischen Feldes	94
16. Die ponderomotorischen Kräfte; die Maxwellschen Spannungen	98
17. Das Auftreten von Kontaktspannungen	106

Zweites Kapitel.

Magnetostatik.

18. Grundtatsachen; Analogien und Differenzen zur Elektrostatik	117
19. Begriff und Messung der magnetischen Feldstärke und des magnetischen Momentes	120
20. Das magnetostatische Feld im Vakuum	126
21. Die Gausssche Methode zur Bestimmung von Feldstärke und magnetischem Moment	134
22. Das magnetostatische Feld in homogenen und inhomogenen para- und diamagnetischen Medien	138
23. Das Verhalten der ferromagnetischen Substanzen	142
24. Die Energie und die ponderomotorischen Kräfte des magnetischen Feldes	149

Drittes Kapitel.

Der stationäre elektrische Strom und seine Felder.

	Seite
25. Der Begriff des elektrischen Stromes; Definition der Stromstärke	151
26. Das Ohmsche Gesetz	157
27. Energieumsetzungen im Stromkreise (Joulesche und Peltiersche Wärme, chemische Veränderungen)	163
28. Die Thermoelektrizität	172
29. Das elektrische Feld stationärer Ströme	175
30. Das Magnetfeld stationärer Ströme	184
31. Das Vektorpotential	193
32. Das Magnetfeld eines linearen Stromleiters	194
33. Das Biot-Savartsche Gesetz	202
34. Anwendungen des Biot-Savartschen Gesetzes (Kreisstrom, Solenoid)	205
35. Die magnetische Energie von Systemen von Strömen und Magneten	209
36. Die ponderomotorischen Kräfte	218
37. Das elektromagnetische und das elektrodynamische Potential	222
38. Das elektrostatische und das elektromagnetische Maßsystem	229

Viertes Kapitel.

Die allgemeinen Gesetze der nichtstationären Vorgänge.

39. Der Verschiebungsstrom; die erste Maxwellsche Gleichung für einen Halbleiter	233
40. Die Grundtatsachen der Induktion	238
41. Das Induktionsgesetz; zweite Maxwellsche Hauptgleichung	242
42. Die allgemeinen Gleichungen und Grenzbedingungen der Elektrodynamik ruhender Körper	245
43. Das Energieprinzip in der Elektrodynamik; der Poyntingsche Satz	248
44. Die Energieströmung bei stationären Strömen	251
45. Die allgemeinen ponderomotorischen Kräfte nach der Maxwellschen Theorie	259
46. Systematische Übersicht über den Aufbau der Elektrodynamik	264

Fünftes Kapitel.

Elektrodynamik quasistationärer Ströme.

47. Genauere Untersuchung der Gleichungen für quasistationäre Vorgänge	268
48. Quasistationäre Vorgänge in einem System geschlossener linearer Ströme	272
49. Das Energieprinzip bei quasistationären Vorgängen	274
50. Ein Stromkreis mit Selbstinduktion	276
51. Ein Stromkreis mit Kapazität	281
52. Ein Stromkreis mit Selbstinduktion und Kapazität	285
53. Zwei gekoppelte Schwingungskreise	291
54. Transformation der Maxwellschen Gleichungen auf Zylinderkoordinaten	294
55. Wechselströme in einem unendlich langen Zylinder; der Skineffekt	298

Sechstes Kapitel.

Elektromagnetische Wellen in Isolatoren und Leitern.

56. Die Maxwellschen Gleichungen für einen Isolator	313
57. Integrale der Wellengleichung	317
58. Die experimentelle Herstellung und Untersuchung elektrischer Wellen	324
59. Die Schwingungen des Hertzschen Linearoszillators	331
60. Elektrische Wellen in Leitern; Telegraphengleichung	345
61. Fortpflanzung von Wellen an Drähten; Lechersystem	354
62. Die elektromagnetische Theorie des Lichtes	363

Siebentes Kapitel.

Optik vollkommen durchsichtiger Medien: Reflexion, Brechung, Polarisation.

	Seite
63. Vorläufige Orientierung über die Natur des Lichtes	369
64. Die Messung der Intensität	381
65. Das Reflexions- und Brechungsgesetz	386
66. Die Fresnelschen Reflexionsformeln	395
67. Herstellung linearpolarisierter Strahlung durch Reflexion an durchsichtigen Medien	402
68. Die Totalreflexion	406
69. Der Strahlungsdruck	420

Achstes Kapitel.

Optik undurchsichtiger (leitender) Medien: Metalloptik.

70. Die Grundlagen der Metalloptik	426
71. Das Reflexions- und Brechungsgesetz	428
72. Die Bestimmung der optischen Konstanten durch Reflexionsmessungen	436
73. Vergleich der elektromagnetischen Theorie mit der Erfahrung	441
74. Oberflächenwellen an der Grenzfläche von Isolatoren und Leitern; Skineffekt	445

Neuntes Kapitel.

Kristalloptik.

75. Die Grundlagen der Kristalloptik; Erweiterung der Maxwellschen Gleichungen	453
76. Ebene Wellen in Kristallen	456
77. Das Fresnelsche Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen	461
78. Das Cauchysche Verschiebungsellipsoid	465
79. Das inverse Ellipsoid	476
80. Die Strahlenfläche (Wellenfläche)	481
81. Reflexion und Brechung	489
82. Senkrechter Durchgang durch eine planparallele Kristallplatte; konische Refraktion	496
83. Reguläre Kristalle mit zirkularer Doppelbrechung	503

Zehntes Kapitel.

Interferenz.

84. Allgemeines über Interferenz, Kohärenz und Inkohärenz	515
85. Superposition von homogenen Wellen	517
86. Interferenz von Wellen, die sich unter kleinem Winkel durchkreuzen; Fresnelscher Spiegelversuch und ähnliche Anordnungen	527
87. Stehende Wellen; die Versuche von Wiener	533
88. Interferenzen an planparallelen Platten	539
89. Interferenzen an keilförmigen Platten	552
90. Lichtschwebungen	556
91. Interferenzen mit nichtmonochromatischer Strahlung; Interferenzspektroskopie	558
92. Natürliche Strahlung; Inkohärenz	565

Elftes Kapitel.

Geometrische Optik und Beugung.

93. Die Grundlagen der geometrischen Optik; der Fermatsche Satz und das Eikonale	572
94. Die geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik	579
95. Zusammenhang der geometrischen Optik mit der Punktmechanik	582
96. Das Huyghens-Fresnelsche Prinzip; die Zonenkonstruktion	585
97. Strenge Formulierung des Huyghensschen Prinzips durch Kirchhoff	594

	Seite
98. Fraunhofersche Beugung an einer (rechteckigen oder kreisförmigen) Öffnung	600
99. Das Auflösungsvermögen von Fernrohr, Auge und Prisma	610
100. Das Theorem von Babinet; Beugung durch zahlreiche unregelmäßig verteilte Öffnungen	616
101. Beugungsgitter, Stufengitter	619
102. Fresnelsche Beugungserscheinungen; die Fresnelschen Integrale, die Cornusche Spirale	627
103. Fresnelsche Beugungserscheinungen: Beugung an einer scharfen Kante	631
104. Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Zylinder	635
105. Beugung der Röntgenstrahlen durch das Raumgitter der Kristalle.	654

Zwölftes Kapitel.

Elektronentheorie und Dispersion.

106. Die Schwächen der Maxwell'schen Theorie; die experimentellen Grundlagen der Atomistik	666
107. Die Gleichungen der Lorentz'schen Elektronentheorie	670
108. Die Prüfung des Kraftansatzes der Elektronentheorie. Zusammenhang mit den Maxwell'schen Spannungen; das Energieprinzip	674
109. Die Gleichungen der Mittelwerte für einen Halbleiter	679
110. Allgemeine Theorie der Dispersion und Absorption in Nichtleitern	685
111. Selektive Absorption, normale und anomale Dispersion	693
112. Vergleich der Theorie mit der Erfahrung	702
113. Die Bestimmung der Eigenschwingungen	712
114. Erweiterungen und Verbesserungen der Dispersionstheorie	717
115. Modellversuche zur Dispersionstheorie	726
116. Die Theorie des inversen Zeemanphänomens; magnetische Drehung der Polarisations ebene und magnetische Doppelbrechung	728
117. Anwendung auf lange elektrische Wellen in der Erdatmosphäre	739
118. Metalloptik	740
119. Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit, Frontgeschwindigkeit	745

Dreizehntes Kapitel.

Theorie der Strahlung.

120. Allgemeine Charakterisierung eines beliebigen Strahlungsfeldes.	753
121. Thermodynamisches Gleichgewicht; das Kirchhoffsche Gesetz	762
122. Der Strahlungsdruck; das Stefan-Boltzmannsche Gesetz für die schwarze Gesamtstrahlung.	773
123. Das Wiensche Verschiebungsgesetz	779
124. Elektromagnetisches Modell der Hohlraumstrahlung	790
125. Das Gesetz der schwarzen Strahlung	793
126. Temperaturstrahlung nichtschwarzer Körper	799
127. Entropiestrahlung; Entropie und Kohärenz	804

Vierzehntes Kapitel.

Theorie der Relativität.

128. Die Problemstellung	809
129. Die Lorentz-Transformation	818
130. Die Invarianz der Gleichungen der Elektronentheorie	831
131. Der Fizeausche Mitführungsversuch, die Aberration und das Dopplersche Prinzip	838
132. Physikalische Interpretation der Lorentz-Transformation	843
133. Die relativistische Mechanik	850
134. Trägheit und Impuls der Energie	860
135. Minkowskis vierdimensionale geometrische Interpretation der Relativitätstheorie	865
136. Allgemeine Relativität; das Äquivalenzprinzip von Einstein; Theorie der Gravitation	878
Register	897

Sechstes Buch.

Elektrodynamik und Optik.

Erstes Kapitel.

Elektrostatik.

1. Grundtatsachen, Definitionen, vorläufige Bezeichnungen.

Werden zwei verschiedene nichtmetallische¹⁾ Körper — über das Verhalten der Metalle werden wir besonders sprechen — aneinander gerieben oder sonstwie in innigen Kontakt gebracht und dann getrennt, so beobachtet man, daß jeder von ihnen zum Sitz von Kräften geworden ist, die viel stärker sind als die — für gewöhnlich ganz un wahrnehmbaren — Gravitationswirkungen, von welch' letzteren wir im folgenden ganz absehen werden. Um ein konkretes Beispiel zu haben, wollen wir etwa Glas oder Porzellan mit einem seidenen Lappen reiben; nach Trennung kann man konstatieren, daß leichte Körperchen (Papierschnitzel, Korkfeile u. dergl.) Bewegungsantriebe erfahren: Es gehen, wie schon oben gesagt, Kräfte von den geriebenen Stoffen aus. Es muß also eine wesentliche Änderung in ihrem Zustande oder in dem ihrer Umgebung eingetreten sein. Schon Thales von Milet soll die erste derartige Beobachtung an geriebenem Bernstein gemacht haben, dessen griechischer Name *ἤλεκτρον* dann dem ganzen Gebiet den Namen gegeben hat. Wir wollen demgemäß sagen: Die geriebenen Körper seien „elektrisiert“ worden, oder sie seien im „elektrischen Zustande“, womit zunächst nichts weiter ausgedrückt sein soll, als daß dieser vom normalen abweichende Zustand für die Kraftwirkung verantwortlich gemacht, d. h. als deren Ursache angesehen wird.

Wir haben oben die Metalle¹⁾ von diesem Versuche ausgeschlossen, und in der Tat: Wenn man in der geschilderten primitiven Weise ein Metall mit einem Seidenlappen oder zwei verschiedene Metalle aneinander reiben wollte, so würde man nach Trennung derselben keinerlei Kraftwirkungen wahrnehmen und müßte daraus schließen, daß diese sich jedenfalls nicht im elektrischen Zustande befinden. Eine andere

¹⁾ Außer den Metallen müssen noch andere Substanzen ausgeschlossen werden; vgl. hierzu weiter unten.

Frage ist aber die, ob dies grundsätzlich nicht möglich oder ob das Ausbleiben des Erfolges nur der vielleicht zu einfachen Versuchsanordnung zuzuschreiben ist. Und ferner ist zu fragen, worin die (scheinbare oder wirkliche) Ausnahmestellung der Metalle begründet ist.

Einen Hinweis in dieser Richtung gibt der folgende Versuch: Ein auf einem Glasstativ aufgestellter ungeriebener Metallkörper, von dem also keinerlei Kraftwirkungen ausgehen, da er nicht elektrisiert ist, werde durch einen Metalldraht etwa mit einer elektrisierten Glasstange verbunden. Dann zeigt auch der Metallkörper Elektrisierung und zwar in seiner ganzen Ausdehnung, d. h. es gehen Kraftwirkungen von allen Stellen seiner Oberfläche aus. Dieser Versuch legt die Auffassung nahe, daß der vorher auf der Glasstange lokalisierte elektrische Zustand durch den Metalldraht zu dem Metallkörper „hingeleitet“ worden sei. Dieser Gedankengang läßt sich in der Tat durchführen, und dementsprechend nennt man die Metalle und sich analog wie Metalle verhaltende Körper „Leiter“ des elektrischen Zustandes oder auch „Leiter der Elektrizität“ und im Gegensatz dazu die Körper, die durch Reiben ohne weiteres elektrisch werden, „Nichtleiter“ oder „Isolatoren“ der Elektrizität. Zu den Leitern gehört u. a. auch der menschliche Körper; auch die Erdoberfläche zeigt sich als Leiter des elektrischen Zustandes.

Die hier dargelegte Auffassung, daß die Metalle und der menschliche Körper „Leiter des elektrischen Zustandes“ sind, erklärt in der Tat, daß Metalle keinerlei elektrischen Zustand zeigen, wenn sie ohne weitere Vorsichtsmaßnahmen in die Hände genommen und gerieben werden: Denn der menschliche Körper leitet einfach den elektrischen Zustand zur Erde ab. Ein Experimentum crucis für diese Auffassung läßt sich in der Weise durchführen, daß man ein Metall nicht direkt mit den Händen berührt, sondern durch Zwischenschaltung eines „Isolators“ von diesen und der Erde trennt, oder wie man kurz sagt „isoliert“. Dann muß ein geriebenes isoliertes Metallstück den elektrischen Zustand annehmen, wenn die ganze hier dargelegte Vorstellung richtig ist. Dies ist auch wirklich der Fall, so daß man sagen muß, daß der Zustand der Elektrisierung von allen materiellen Körpern angenommen werden kann, wenn die geeigneten Versuchsbedingungen inne gehalten werden.

Wir haben oben den elektrischen Zustand geriebener Körper nachgewiesen durch die Beobachtung der Kraftwirkungen auf leichte Papierschnitzelchen u. dgl. Wir wollen nun die Beobachtungsart etwas abändern, indem wir die Kraftwirkungen zwischen den geriebenen Körpern selbst feststellen. Dabei finden wir folgendes: Es werde ein Körper A mit einem Körper B gerieben, und zwar wollen wir diesen Versuch mit mehreren Exemplaren von A und B durchführen, so daß wir eine Anzahl völlig gleichartig behandelter Körper A und B haben. Dann stellt man fest, daß jeder elektrisierte Körper A jeden elektrisierten Körper B anzieht, daß dagegen zwischen allen Körpern A abstoßende Kräfte auftreten, und das gleiche gilt zwischen den Körpern B . Anders aus-

gedrückt: Wir können feststellen, daß gleichartige und gleichartig behandelte elektrisierte Körper sich abstoßen, ungleichartige sich dagegen anziehen. Dies führt unmittelbar zu der weiteren Auffassung, daß es zwei verschiedene einander entgegengesetzte elektrische Zustände gibt, von denen je einer den aneinander geriebenen Körpern zukommt; durch Reiben aneinander werden also zwei Körper „entgegengesetzt elektrisch“. Über diese qualitative Aussage hinaus kann man noch folgendes feststellen: Zwei aneinander geriebene Körper A und B üben auf einen dritten elektrisierten Körper der eine Anziehung, der andere eine Abstoßung von gleicher Stärke aus, so daß, wenn man A und B dicht zusammen bringt, die von beiden gleichzeitig ausgehende gesamte Kraftwirkung gleich Null ist. Dieser Versuch ist zwar in der geschilderten Weise keiner großen Genauigkeit fähig, aber der Experimentalphysiker besitzt Methoden, die das erhaltene Resultat mit größter Sicherheit bestätigt haben. Wir können also weiter sagen: Durch Reiben aneinander werden zwei verschiedene Körper A und B zwar gleich stark, aber in entgegengesetzter Weise elektrisch. Wegen des polar entgegengesetzten Verhaltens der elektrischen Zustände hat man den einen passend als den positiven, den anderen als den negativen elektrischen Zustand bezeichnet. Durch Übereinkunft ist festgelegt, daß der elektrische Zustand von Glas, das mit einem Seidenlappen gerieben ist, der „positive“ heißen soll; dann wird also dem Seidenlappen der „negative“ elektrische Zustand zuzuschreiben sein, und man kann dann durch Beobachtung der Kraftwirkungen feststellen, daß z. B. Harz und Hartgummi ebenfalls negativ elektrisch werden; daher hat man auch früher den positiven elektrischen Zustand als „glaselektrischen“, den negativen als „harzelektrischen“ bezeichnet. In dieser Ausdrucksweise kann man schließlich sagen: Werden zwei verschiedene Körper A und B aneinander gerieben, so wird der eine ebenso stark positiv, wie der andere negativ elektrisch.

Zu den geschilderten Erfahrungstatsachen treten noch zwei andere, die sich auf das Verhalten von Metallkörpern beziehen. Wir denken uns einen beliebig gestalteten isolierten, unelektrischen, metallischen Hohlkörper, in dem sich eine kleine Öffnung befindet, durch die man in das Innere hinein gelangen kann. Durch die Öffnung führen wir (an isolierendem Griff) eine kleine elektrisierte Metallkugel ein und berühren für einen Augenblick die Innenwand des Hohlkörpers mit derselben; nach erfolgter Berührung ziehen wir die Kugel wieder heraus. Es zeigt sich dann, daß diese ihren elektrischen Zustand völlig verloren hat, da keinerlei Kraftwirkungen mehr von ihr ausgehen. Dagegen gehen nunmehr von dem vorher unelektrischen Hohlkörper Kraftwirkungen aus: Der elektrische Zustand der eingeführten „Probekugel“ ist somit auf den Hohlkonduktor übergegangen. Dies Ergebnis ist mit den empfindlichsten Meßmethoden immer wieder geprüft worden und hat sich stets als genau zutreffend ergeben. Wenn man nun überlegt,

daß im Moment der Berührung Probekugel und Metallhohlkörper einen einzigen zusammenhängenden Leiter bilden, so kann man dies Ergebnis so interpretieren, daß der elektrische Zustand sich stets nur auf der äußeren Oberfläche von Leitern befinden kann.

Ferner gilt die folgende Erfahrungstatsache: Wenn man sich in das Innere eines elektrisierten hohlen Leiters begibt, so kann man im inneren Raume, wofern er vollständig von Leitern umschlossen ist, nicht die geringste Kraftwirkung der Elektrisierung wahrnehmen, mag diese auch noch so stark im Außenraume wirken. Dieses Ergebnis, das man natürlich nur für einen Hohlkörper prüfen kann, gilt aber auch noch, wenn wir den Hohlraum nachträglich mit leitendem Material ausfüllen: Denn dadurch werden ja keine elektrischen Kräfte erzeugt. Wir finden also das merkwürdige Ergebnis, daß im Innern von Leitern keine elektrischen Kräfte vorhanden sind.

In den früheren Zeiten der klassischen Physik hat man die im Vorstehenden besprochenen Erfahrungstatsachen durch folgende Hypothese zu deuten versucht: Man nahm an, daß es zwei unwägsame („imponderable“) Flüssigkeiten („Fluida“) gäbe, die auf allen unelektrisierten Körpern in gleich großer Quantität vorhanden wären. Die eine nannte man die positive, die andere die negative Flüssigkeit. Durch den Prozeß der Reibung sollte dann in den geriebenen Körpern das Verteilungsgleichgewicht dieser Flüssigkeiten gestört werden, so daß auf dem einen ein Überschuß von positiver, auf dem anderen der gleiche Überschuß von negativer Flüssigkeit vorhanden wäre. Diesen Flüssigkeiten schrieb man die Kraftwirkungen des elektrischen Zustandes zu, indem man annahm, daß gleiche Quantitäten der Flüssigkeiten, wie sie auf dem unelektrischen Körper vorhanden sein sollten, sich in ihrer Wirkung zerstören, so daß nur der jeweilige Überschuß an der einen oder anderen Flüssigkeit zur Wirkung kommen könne. Diese beiden Fluida nannte man die „Elektrizitäten“ und den eventuellen Überschuß der einen oder anderen die (positive oder negative) „elektrische Ladung“ des betreffenden Körpers oder die auf dem Körper befindliche (positive oder negative) „Elektrizitätsmenge“.

Ohne hier auf die Frage einzugehen, inwieweit diese Hypothese der Wirklichkeit entspricht, wollen wir uns der obigen Ausdrucksweise bedienen, da sie die Tatsachen kurz und bequem auszudrücken gestattet. Wir können so die folgenden Sätze aufstellen:

I. Werden zwei verschiedene Körper aneinander gerieben, so erhält der eine ebensoviel positive Elektrizität, wie der andere negative.

II. Auf den Isolatoren haftet die Ladung an den geriebenen Stellen (an den Volumelementen des Isolators); auf den Leitern verbreitet sie sich über die ganze Oberfläche: Die Elektrizitätsmenge ist auf den Leitern frei beweglich.

III. Gleichnamige elektrische Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

IV. Aus den Sätzen II. und III. folgt leicht, daß die elektrischen Ladungen auf den Leitern nur an der äußeren Oberfläche sitzen: infolge der freien Beweglichkeit der Elektrizität auf dem Leiter stoßen sich die gleichnamigen Ladungen so weit ab, als es möglich ist.

V. Die weitere Tatsache dagegen, daß im Innern von Metallen keine elektrischen Kräfte vorhanden sind, läßt sich aus den bisher erwähnten Tatsachen allein nicht verstehen. Eine Erklärung wird sich aber aus dem speziellen Gesetz ergeben, nach dem die elektrischen Ladungen aufeinander einwirken, welches wir in der folgenden Nummer besprechen werden.

2. Das Coulombsche Gesetz.

Der im vorhergehenden eingeführte Begriff der elektrischen Ladung eines Körpers oder der auf ihm befindlichen Elektrizitätsmenge ist natürlich bisher ein rein qualitativer. Soll er für die Physik wirklich fruchtbar werden, so muß versucht werden, ihn einer exakten Messung zugänglich zu machen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Kraftwirkungen untersuchen, die in einem besonders einfachen, geeignet gewählten Falle zwischen zwei elektrisierten Körpern auftreten. Wir denken uns zwei kleine Metallkugeln (1) und (2) auf irgendeine Weise elektrisiert, bringen sie in einen gegen ihre Dimensionen großen Abstand r und wollen nun festzustellen versuchen, wie die zwischen ihnen wirkenden Anziehungs- oder Abstoßungskräfte von der Art der Elektrisierung oder der Entfernung der beiden Kugeln abhängen. Es ist natürlich von vornherein die Möglichkeit nicht abzuweisen, daß auch die Natur des Zwischenraumes (verschiedene Gase oder Flüssigkeiten) von Einfluß auf die Kraftwirkung ist, und wir werden dies tatsächlich auch später finden. Vorläufig schalten wir diese Frage aus, indem wir uns die beiden elektrisierten Kugeln stets von Luft umgeben denken. Coulomb hat 1785 durch Versuche mit der Drehwaage zunächst festgestellt, daß die elektrischen Kräfte umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung abnehmen; nennen wir daher den Betrag der Kraft, die (1) auf (2) oder umgekehrt (2) auf (1) ausübt, K_{12} , die Entfernung der beiden Kugeln r , so können wir Coulombs Resultat folgendermaßen aussprechen:

$$(1) \quad K_{12} = \frac{a_{12}}{r^2},$$

wobei a_{12} einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, der vom elektrischen Zustande der beiden Kugeln in einer noch nicht näher bekannten Weise abhängt.

Halten wir die Ladung (1) fest, ersetzen aber die Ladung (2) durch eine andere elektrisierte Kugel (3), so werden wir analog zu schreiben haben:

$$(2) \quad K_{13} = \frac{a_{13}}{r^2},$$

wobei a_{13} nunmehr die Abhängigkeit vom elektrischen Zustande der Kugeln (1) und (3) angibt, und für das Verhältnis der beiden Kräfte (in der gleichen Entfernung) finden wir:

$$(3) \quad \frac{K_{12}}{K_{13}} = \frac{a_{12}}{a_{13}} ;$$

nach Ausweis der Gleichung (3) wird dies im allgemeinen vom elektrischen Zustand aller drei Ladungen (1), (2) und (3) abhängen müssen.

Nun machen wir denselben Versuch, indem wir die Kugel (1) der Reihe nach durch andere elektrisierte Kugeln (4), (5) (n) ersetzen und bilden wiederum die Verhältnisse der Kraftwirkung. Dann erhalten wir die Gleichungen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{42} = \frac{a_{42}}{r^2}, \quad K_{43} = \frac{a_{43}}{r^2}; \quad \frac{K_{42}}{K_{43}} = \frac{a_{42}}{a_{43}}; \\ K_{52} = \frac{a_{52}}{r^2}, \quad K_{53} = \frac{a_{53}}{r^2}; \quad \frac{K_{52}}{K_{53}} = \frac{a_{52}}{a_{53}}; \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Die in Gleichung (4) gebildeten Verhältnisse $\frac{K_{42}}{K_{43}}, \frac{K_{52}}{K_{53}}, \dots$ hängen im allgemeinen vom elektrischen Zustand der drei Körper ab, deren Indizes in den Brüchen auftreten.

Aber das Experiment zeigt in Wirklichkeit ein einfacheres Verhalten, indem die Messung dieser Kraftverhältnisse ihre vollständige Gleichheit ergibt:

$$(5) \quad \frac{K_{12}}{K_{13}} = \frac{K_{42}}{K_{43}} = \frac{K_{52}}{K_{53}} = \dots = \frac{K_{n2}}{K_{n3}} = f(2, 3),$$

d. h. diese Verhältnisse können nur mehr von dem elektrischen Zustande der Körper 2 und 3 abhängig sein; der jeweilige Einfluß des dritten Körpers (1, 4, 5, . . . n) muß sich herausgehoben haben. Nehmen wir z. B. den Quotienten $\frac{K_{12}}{K_{13}}$. Zähler und Nenner für sich genommen hängen jeder stark von dem elektrischen Zustand der Kugel 1 ab; wenn der Quotient dies nicht mehr tut, sondern nur noch Funktion des Zustandes der Ladungen 2 und 3 ist, so muß im Zähler K_{12} und Nenner K_{13} der Einfluß der Ladung 1 multiplikativ enthalten sein. Genau die gleiche Überlegung läßt sich in dem Werte K_{12} aber auch für die Ladung 2 anstellen — schon aus Symmetriegründen folgt dies —, und daher können wir die Gleichungen (1), (2) und (4) allgemein schreiben:

$$(6) \quad K_{12} = f \frac{e_1 e_2}{r^2}, \quad K_{13} = f \frac{e_1 e_3}{r^2}, \quad K_{42} = f \frac{e_4 e_2}{r^2}, \dots,$$

wo f eine universelle unbestimmte Konstante, e_1, e_2, e_3, \dots dagegen Faktoren sind, die jeder nur von dem elektrischen Zustande eines Körpers abhängen, z. B. e_3 nur von dem elektrischen Zustande von 3. Man überzeugt sich leicht, daß unter den Bedingungen der Gleichung (6) tatsächlich die in Gleichung (5) stehenden Verhältnisse unabhängig von

dem elektrischen Zustande desjenigen Körpers werden, der in Zähler und Nenner gleichzeitig auftritt.

Die ponderomotorische Kraft zwischen zwei elektrisierten Körpern a und b können wir also allgemein schreiben:

$$(7) \quad K_{a,b} = f \frac{e_a e_b}{r^2} .$$

Die Kräfte sind sogenannte Zentralkräfte, d. h. sie sind parallel der Verbindungslinie gerichtet und sind anziehend oder abstoßend, je nachdem die beiden Ladungen gleichnamig oder ungleichnamig sind. Gleichung (7) spricht das sogenannte „Coulombsche Gesetz“ aus.

Wir können und wollen nun die Größen e_a und e_b , die den elektrischen Zustand der beiden Körper charakterisieren, direkt mit den bisher nur qualitativ eingeführten „elektrischen Ladungen“ identifizieren, indem wir so diesem Begriffe eine präzisere Bedeutung verleihen.

Es erhebt sich nun die Aufgabe, die durch Gleichung (7) definierten elektrischen Ladungen zu messen, d. h. die Definition nach der quantitativen Seite zu ergänzen. Den grundsätzlichen Weg dazu hat Gauss gewiesen. Die linke Seite der Gleichung (7) ist mechanisch vollkommen meßbar, da eine Kraft in der Mechanik bekanntlich in Dynen gemessen wird. Auf der rechten Seite von (7) ist zunächst nur der Nenner r^2 als das Quadrat einer Länge meßbar, während sowohl der Proportionalitätsfaktor f als auch die gleichartigen Größen e_a und e_b dies nicht sind. Wäre der Faktor f bestimmt, so hätte man nur das Produkt $e_a e_b$ als unbekannt in der Gleichung und umgekehrt: Wäre eine Maßeinheit für e_a und e_b bekannt, so könnte diejenige des Faktors f bestimmt werden. Aber es ist vollkommen unmöglich, ohne weitere Annahme beide Größen zu messen. Gauss hat nun den entscheidenden Schritt getan, indem er den Proportionalitätsfaktor f festsetzte und damit ein Maß für e_a und e_b gewann. Eine derartige Maßnahme ist selbstverständlich willkürlich, aber es bleibt keine andere Möglichkeit. Insbesondere nimmt Gauss die Größe f als dimensionslos an und setzt sie dem Betrage nach gleich 1. Damit wird das Coulombsche Gesetz (7) spezieller:

$$(8) \quad K_{a,b} = \frac{e_a e_b}{r^2} .$$

Betrachten wir nun den speziellen Fall, daß beide Ladungen e_a und e_b gleich groß ($= e$) seien — was natürlich durch Probieren festgestellt werden muß, etwa durch Vergleich der von beiden Ladungen ausgehenden Kraftwirkungen auf eine dritte Ladung — so geht (8) über in:

$$e^2 = K_{a,b} r^2 ,$$

oder:

$$(9) \quad e = r \sqrt{K_{a,b}} .$$

Damit ist die Messung der elektrischen Ladung e zurückgeführt auf die Messung einer Länge (r) und einer Kraft (Dyn), d. h. zurückgeführt auf

die sog. absoluten Maßeinheiten Masse M , Länge L , Zeit T bzw. g , cm und sec . Setzt man die Dimensionen ein, so hat man:

$$(10) \quad [e] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}] = [g^{1/2} cm^{3/2} sec^{-1}].$$

Als Einheit der elektrischen Ladung wäre also nach (9) diejenige zu bezeichnen, die auf eine gleich große im Abstände von 1 cm die Kraft von einer Dyne ausübt; diese Einheit wird als die „absolute elektrostatische Ladungseinheit“ bezeichnet. Von dieser Einheit kann man die Einheiten aller elektrischen Größen ableiten und man nennt daher das durch die Gleichung (9) festgelegte Maßsystem — charakterisiert durch die Gauss'sche Festsetzung: f dimensionslos und gleich 1 — das „elektrostatische Maßsystem“.

Die eben definierte absolute Ladungseinheit ist sehr klein, zu klein für die Bedürfnisse der praktischen Elektrotechnik; man ist daher übereingekommen, für die Praxis eine größere Einheit zu wählen, nämlich das $3 \cdot 10^9$ -fache der elektrostatischen Einheit; diese neue Einheit wird das „Coulomb“ genannt. Wir haben also

$$(11) \quad 1 \text{ Coulomb} = 3 \cdot 10^9 \text{ absolute elektrost. Ladungseinheiten.}$$

Es geht aus der obigen Darstellung schon klar hervor daß die Gauss'sche Festsetzung des elektrostatischen Maßsystems durchaus willkürlich ist und gar nicht anders sein kann. Selbstverständlich wäre auch eine jede andere Festsetzung brauchbar und von demselben Erfolg begleitet gewesen. Neben dem elektrostatischen Maßsystem kommt in der Tat — aus später hervortretenden Gründen — noch ein zweites in Betracht, das den Faktor f gleich c^2 setzt, wo c die Dimension einer Geschwindigkeit und den numerischen Wert $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec besitzt. Das auf diese Festsetzung begründete Maßsystem heißt das „elektromagnetische (oder magnetische) Maßsystem“; wir werden später in systematischer Weise darauf geführt werden. Hier mag dieser Hinweis genügen.

In der Dimension (10) der elektrostatisch gemessenen Elektrizitätsmenge treten uns zum ersten Male in der Physik gebrochene Exponenten der Grundeinheiten M , L , T entgegen. Auf den ersten Blick könnte das Verwunderung erregen, wenn man bedenkt, daß das Coulombsche Gesetz (7) ja mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz der Form nach völlig übereinstimmt, und daß dort keine gebrochenen Exponenten in der Dimension auftreten.¹⁾ Aber der fundamentale Unterschied ist folgender: Im Newtonschen Gravitationsgesetz kommen außer der Proportionalitätskonstante (Gravitationskonstante) nur bekannte Größen (Massen, Längen, Zeiten) vor; dort ist also die Gravitationskonstante in ihrer Dimension und ihrem numerischen Werte von vornherein fest bestimmt und kann nicht willkürlich dimensionslos und gleich 1 genommen

¹⁾ Vgl. Bd. I, pag. 303; es sei hier allgemein bemerkt, daß sich Zitate auf die 3. Auflage des I. Bandes und auf die 2. Auflage des II. Bandes beziehen.

werden, wenn man an den drei Grundeinheiten M , L , T festhalten will. Die Abweichung des Coulombschen Gesetzes von dem Newtonschen liegt also gerade in dem Umstande, daß im ersteren die Dimension und die Maßzahl des Faktors f willkürlich vorgeschrieben werden können.

Nachdem wir im Coulombschen Gesetze die besondere Form der elektrischen Kraftwirkung festgestellt haben, können wir auch die in Satz V in Nr. 1 formulierte Tatsache erklären, daß im Innern eines Leiters, auf dem die Elektrizität im Gleichgewicht ist, keine elektrischen Kräfte existieren können. Nehmen wir der Einfachheit halber den Leiter in Form einer Kugel an, die eine bestimmte elektrische Ladung trägt. Diese verteilt sich im Gleichgewichtszustande aus Symmetriegründen gleichmäßig über die ganze Oberfläche, so daß auf jeden Quadratcentimeter die gleiche Ladung η , also auf ein Flächenelement dS die Ladung ηdS entfällt (Fig. 1).

Versuchen wir nun die mechanische Kraft zu bestimmen, die auf eine elektrische Ladung wirkt, die in einem Punkte P im Innern der Kugel angebracht sei. Wir ziehen durch P , wie in Fig. 1 angedeutet, die Verbindungslinien zu der Begrenzung eines beliebig ausgewählten Flächenelementes dS_1 auf der Kugel und verlängern diese Geraden über P hinaus, so daß sie auf der gegenüberliegenden Seite das diametrale Flächenelement dS_2 aus der Kugel ausschneiden. Es entsteht auf diese Weise ein Doppelkegel, dessen Grundflächen dS_1 und dS_2 sind und deren gemeinsame Spitze in P ist; die

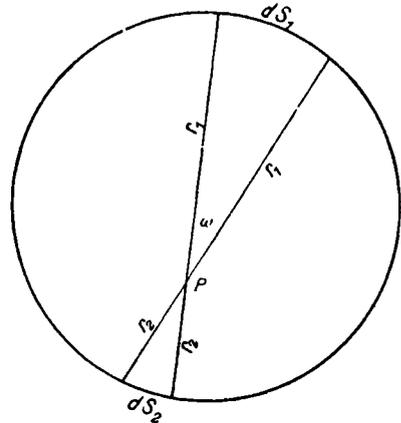


Fig. 1.

Abstände von dS_1 und dS_2 von P seien r_1 und r_2 ; der gemeinsame räumliche Winkel, unter dem die Grundflächen von P aus erscheinen, d. h. der beiden Kegeln gemeinsame Öffnungswinkel sei ω . Die mechanische Kraft, die von der auf dS_1 sitzenden Ladung auf die im Punkte P befindliche Ladung e wirkt, ist (absolut genommen) nach dem Coulombschen Gesetze $e \frac{\eta dS_1}{r_1^2}$, und ebenso ist die von dS_2 in P angreifende entsprechende (absolut genommene) Kraft $e \frac{\eta dS_2}{r_2^2}$; beide Kräfte sind aber einander entgegengesetzt gerichtet, so daß die Gesamtkraft, die von diesen beiden Flächenelementen ausgeht, gleich ist

$$e \eta \left(\frac{dS_1}{r_1^2} - \frac{dS_2}{r_2^2} \right).$$

Andererseits ist:

$$dS_1 = r_1^2 \omega; \quad dS_2 = r_2^2 \omega.$$

Einsetzen in die vorhergehende Gleichung liefert also:

$$e \eta \omega \left(\frac{r_1^2}{r_1^2} - \frac{r_2^2}{r_2^2} \right) = 0,$$

d. h. die Kraft, die von den beiden diametralen Flächenelementen in einem beliebigen Punkte P im Innern der Kugel ausgeübt wird, ist gleich Null. So kann man dies für jedes Flächenelementenpaar der Reihe nach ausführen und erhält das experimentell gefundene Ergebnis, daß die elektrische Kraft im Innern des Metalles gleich Null ist. Dies Resultat beruht wesentlich darauf, daß die Flächenelemente proportional r^2 , die Kräfte dagegen proportional $\frac{1}{r^2}$ sind. Umgekehrt liefert daher die Tatsache des Verschwindens der elektrischen Feldstärke im Innern von Metallen mit größter Schärfe das Coulombsche Entfernungsgesetz $\frac{1}{r^2}$. Historisch sei bemerkt, daß auch diese Erkenntnis auf Gauss zurückgeht.

3. Faradays Idee der Feldwirkung.

Die Form des Coulombschen Gesetzes (8) legt die Vorstellung nahe, die ursprünglich an das Newtonsche Gravitationsgesetz anknüpfte, als ob die Kräfte den zwischen den beiden Ladungen e_a und e_b befindlichen Raum zeitlos überspringen. Denn in diesem Gesetze treten die räumlich voneinander getrennten Orte der Ladungen in Beziehung, ohne daß von den dazwischenliegenden Stellen die Rede wäre. Newton selbst hat schon ausgesprochen, daß die Form seines Gesetzes die Anschauung nahe lege, als ob die Gravitationskräfte „in die Ferne wirkten“ d. h. ihren „Sitz“ in der einen Masse (Ladung) hätten, ihre „Wirkung“ aber am Orte der anderen Masse (Ladung) ausübten. Er selbst war freilich ein viel zu unbefangener Forscher, um darauf die Hypothese zu machen, daß in der Tat solche „Fernkräfte“ existierten; vielmehr lehnte er dies gerade in seinem berühmt gewordenen Ausspruch: „Hypothesen non fingo“ ausdrücklich ab.

Diese vorsichtige Zurückhaltung wurde von seinen Nachfolgern nicht beobachtet, und so war denn zur Zeit, als Coulomb sein Gesetz aufstellte, die Vorstellung von „Fernkräften“ etwas ganz Geläufiges geworden. Kein Wunder also, daß man auch die elektrischen Kräfte als solche Fernkräfte betrachtete. Ja, gerade die formale Übereinstimmung zwischen dem Newtonschen und dem Coulombschen Gesetze schien dieser Auffassung der Gravitations- und elektrischen Kräfte ein ganz besonderes Gewicht zu geben. In der Tat ist die Hypothese, daß die elektrischen (und magnetischen) Kräfte Fernkräfte seien, fast ein Jahrhundert lang die herrschende in der Elektrodynamik gewesen und hat sich auch in weiten Bezirken derselben, namentlich in den Händen von Gauss und Wilhelm Weber bewährt.

Das Entscheidende bei dieser Auffassung ist es, daß zwei getrennte Stellen des Raumes zueinander in Beziehung gesetzt werden; keineswegs spielt es eine Rolle, ob die Entfernung dieser Stellen groß oder klein ist; sie kann ebenso klein und millionenmal kleiner sein als z. B. die Entfernung der Moleküle voneinander.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß auch eine ganz andere Auffassung möglich ist, die hauptsächlich und zuerst von Michael Faraday vertreten und später von James Clerk Maxwell zum Siege geführt wurde. Faraday denkt sich den Raum zwischen den elektrischen Ladungen mit einem Medium besonderer Art angefüllt, das die Kraftwirkungen zwischen ihnen vermittelt. In Rücksicht auf die letzte Bemerkung muß dieses hypothetische Medium als Kontinuum im strengen Sinne des Wortes betrachtet werden. Man hat sich dann die Sache etwa folgendermaßen vorzustellen: Wenn gar keine elektrische Ladung vorhanden ist, so befindet sich dieses Medium in seinem Normalzustande, in dem seine Anwesenheit sich nicht bemerkbar macht. Bringen wir an irgendeine Stelle des Raumes (d. h. dieses Mediums) einen elektrisierten Körper, so erzeugt die elektrische Ladung in dem Medium einen vom normalen abweichenden Zustand, und dieser veränderte Zustand soll dann die Kraftwirkung auf den zweiten elektrisierten Körper ausüben. Diese Vorstellung scheint zwar auf den ersten Blick komplizierter zu sein als die der Fernwirkung — sie ist es in Wirklichkeit nicht, wie wir gleich sehen werden —, aber man kann sich jedenfalls denken, daß im Resultat die Kraftwirkung des Coulombschen Gesetzes richtig herauskommt, was natürlich der Fall sein muß, wenn die ganze Betrachtungsweise zulässig sein soll. Man kann sich etwa vorstellen, daß der vom normalen abweichende Zustand des Mediums eine Art von „Spannungszustand“ ist, wie wir ihn aus der Kontinuumstheorie der Elastizität kennen; in der Tat wird ja auch dort eine an einem Punkte wirkende Kraft durch die Deformation der elastischen Medien „vermittelt“. Man muß sich nur hüten, bei dem elektrischen Spannungszustande zu glauben, daß derselbe mechanisch vorstellbar und verständlich sei; nur unter dieser Voraussetzung sind die Analogien zur Elastizitätstheorie auch hier nützlich. Wenn wir also Faradays Idee von dem Zwangszustand in einem Medium annehmen, so müssen wir uns immer klar darüber sein, daß wir die Art desselben nicht kennen. Man nennt den Raum, innerhalb dessen sich die Faradayschen Spannungen bemerkbar machen, das „Feld“ derselben und spricht infolgedessen kurz vom „elektrischen (und magnetischen) Felde“; die so erzeugten Kraftwirkungen nennt man mit einem kurzen Schlagworte „Feldwirkungen“ (im Gegensatz zu Fernwirkungen).

Wir wollen uns nun weitere Unterschiede zwischen beiden Auffassungen klarzumachen suchen. Denken wir uns eine einzige elektrische Ladung gegeben. Nach der Fernwirkungstheorie kommt dieser keinerlei Bedeutung zu; sie wird erst von Interesse, wenn irgendwo eine zweite Ladung vorhanden ist, da erst dann eine Kraftwirkung auftritt.

Ganz anders ist die Auffassung bei der Feldtheorie. Hier erzeugt bereits eine Ladung ein „Feld“, d. h. ein System von Spannungen. Dieses übt keinerlei Kraftwirkungen auf die erzeugende Ladung aus, weil aus Symmetriegründen die resultierende Kraft Null sein muß. Wollen wir nun im Sinne Faradays die Spannungen oder kurz gesagt das „Feld“ nachweisen und messen, so bedürfen wir dazu freilich auch einer zweiten Ladung, die im Felde einen Kraftantrieb erfährt und so die Existenz desselben anzeigt. Dabei ist aber ein Punkt wohl zu beachten: Die zweite Ladung, die zum Nachweis des Feldes der ersten Ladung erforderlich ist, erzeugt um sich selbst herum auch ein Feld, das sich dem bereits vorhandenen superponiert. Wäre es allein vorhanden, so würde es auf die zweite Ladung, die es erzeugt, wieder keine Kraft ausüben, und wieder aus Symmetriegründen. In Wirklichkeit sind aber beide Felder vorhanden oder vielmehr die Resultierende beider Felder, und die Kraftwirkung, die nun auftritt, rührt gerade davon her, daß die ursprüngliche Symmetrie gestört ist. Die Kraftwirkung hängt also nicht nur von der Beschaffenheit des ersten Feldes allein, sondern auch von dem „Eigenfelde“ der zweiten Ladung ab. Man kann aber diese Komplikation praktisch unschädlich machen, indem man die elektrische Ladung und die Dimensionen des zweiten Körpers so klein wie möglich macht: Dann ist das zweite Feld so geringfügig, daß der Einfluß desselben unter jede Grenze herabgedrückt werden kann. Eine solche hinreichend klein gewählte Ladung, die zur Ausmessung elektrischer Felder dienen soll, wollen wir als „Probeladung“ bezeichnen. So gelangen wir zu der folgenden Definition einer für das primäre Feld charakteristischen Größe: Man bezeichnet als „Feldstärke“, „Feldintensität“ oder auch als „elektrische Kraft“ schlechthin diejenige Kraft, die das Feld auf eine sehr kleine Probeladung e ausübt, dividiert durch diese Ladung, d. h. die Kraft auf die positive Einheitsladung, vorausgesetzt nur, daß diese Einheit klein genug ist. Nennen wir die Feldstärke \mathfrak{E} — wir schreiben sie wie alle Vektoren mit fetten deutschen Buchstaben — so haben wir die Definitionsgleichung:

$$(12) \quad \mathfrak{E} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{K}}{e},$$

wenn \mathfrak{K} die auf die Probeladung e ausgeübte ponderomotorische Kraft bedeutet. Daraus ergibt sich sofort unter Benutzung von (10) die Dimension der elektrischen Feldstärke:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} [\mathfrak{E}] &= \frac{[\text{Kraft}]}{[\text{Elektr. Menge}]} = \left[\frac{M L T^{-2}}{M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}} \right] \\ &= [M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}] = [g^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ sec}^{-1}]. \end{aligned} \right.$$

Als Einheit der elektrischen Feldstärke \mathfrak{E} ist also diejenige zu bezeichnen, die auf eine absolute elektrostatische Ladungseinheit die Kraft von einer Dyne ausübt.

Wir werden uns im folgenden der Faraday-Maxwellschen Anschauung anschließen, ohne deshalb ängstlich Ausdrücke zu vermeiden, die dem Sprachgebrauche der Fernwirkungstheorie entnommen sind. Wir dürfen dies um so mehr, als jedenfalls im Gebiete der Elektrostatik ein Experimentum crucis zwischen beiden Auffassungen nicht besteht. Erst bei nichtstationären elektrischen Vorgängen werden die eigentlichen Vorzüge der Feldtheorie entscheidend in den Vordergrund treten.

Welches ist nun die der Feldtheorie entsprechende analytische Form der Gesetze? Nach dem oben Gesagten können in diesen Gleichungen jedenfalls nicht verschiedene Punkte des Raumes auftreten, wie benachbart sie auch sein mögen: Es bleibt demnach nur übrig, zu verlangen, daß in ihnen nur solche Größen auftreten, die sich sämtlich auf einen und denselben Raumpunkt beziehen. Oder physikalisch ausgesprochen: Das Prinzip von der Existenz der Feldwirkungen verlangt, daß der Wert irgendeiner physikalischen (hier also elektrischen) Zustandsgröße Z_1 an jedem Raumpunkt (x, y, z) nur abhängt von den Werten anderer Zustandsgrößen $Z_2, Z_3, \dots Z_n$ an derselben Stelle des Raumes. D. h. also:

$$Z_1(x, y, z) = f[Z_2(x, y, z), Z_3(x, y, z), \dots Z_n(x, y, z)],$$

oder

$$F(Z_1, Z_2, Z_3, \dots Z_n) = 0.$$

Derartige „Feldgleichungen“ werden im allgemeinen partielle Differentialgleichungen sein, da die Zustandsgrößen Z partielle Ableitungen von Ortsfunktionen sein können.

Diese Bestimmung verlangt noch eine nähere Ergänzung: Um partielle Ableitungen $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \chi}{\partial z}, \dots$ an einer Stelle (x, y, z) bestimmen zu können, muß man selbstverständlich die Funktionen $\psi, \dots \chi \dots$ auch in der „Umgebung“ des Punktes (x, y, z) kennen; aber diese „Umgebung“ kann beliebig klein sein, und die partiellen Ableitungen selbst beziehen sich tatsächlich nur auf den Punkt (x, y, z) . Man kann also sagen, daß das physikalische Geschehen in irgendeinem Raumpunkte (x, y, z) völlig determiniert ist, wenn man dasselbe in der „Umgebung“ von (x, y, z) vollständig kennt, die aber „beliebig klein“ sein kann. Diese Formulierung hat dazu geführt, die Feldwirkungen — im Gegensatz zu den Fernwirkungen — auch als „Nahwirkungen“ zu bezeichnen. Doch ist dieser Ausdruck insofern unzweckmäßig, als dadurch unwillkürlich die irrige Vorstellung erweckt wird, als seien Wirkungen zwischen nahe benachbarten, aber getrennten Kraftzentren Feldwirkungen, während solche in Wirklichkeit, wie schon mehrfach betont, Fernwirkungen sind; wir werden daher durchweg die einwandfreie Bezeichnung Feldwirkung benutzen. Im übrigen sieht man gerade aus der obigen Formulierung, worin physikalisch die Überlegenheit der Feldtheorie über die Fernwirkungstheorie im tiefsten

Grunde beruht. Nach der letzteren ist das physikalische Geschehen in einem Raumpunkte theoretisch erst dann bestimmt, wenn man weiß, was im ganzen Universum vor sich geht: Man müßte z. B. sämtlich elektrische Ladungen im ganzen Weltall berücksichtigen, wenn man die elektrische Kraft an einem Punkte kennenlernen will. Im Gegensatz dazu genügt vom Standpunkt der Feldtheorie die Kenntnis der physikalischen Vorgänge in einem beliebig kleinen, den Punkt (x, y, z) umgebenden Gebiete. Die Feldtheorie verlangt also weniger als die Fernwirkungstheorie und ist in diesem Sinne einfacher als jene.

Zum Schluß wollen wir noch eine Äußerlichkeit erwähnen: Das Medium, das der Träger der Feldwirkungen sein soll, nannten Faraday und Maxwell den „Äther“. Da es aber nicht notwendig und auch nicht zweckmäßig ist, mit diesem „Äther“ die Vorstellung eines gewöhnlichen stofflichen Mediums zu verbinden, und da andererseits die elektrischen Vorgänge auch in Räumen auftreten, aus denen alle Materie so sorgfältig wie möglich entfernt worden ist, wollen wir lieber statt des Wortes Äther das neutralere Wort „Vakuum“ gebrauchen.

4. Feldlinien, Kraftlinien; Begriff des Kraftflusses; Quellenfeld.

Ein irgendwie erzeugtes zeitlich unveränderliches elektrisches Feld ist bekannt, wenn der repräsentierende Vektor, die elektrische Kraft \mathfrak{E} , als Funktion des Ortes bestimmt ist; dies kann, wie vorhin auseinandergesetzt, durch Untersuchung des Feldes mit einer Probeladung geschehen. Dadurch ist jedem Punkte des Feldes eine bestimmte Richtung zugeordnet, eben diejenige des Vektors \mathfrak{E} . Dies kann man benutzen, um sich eine geometrische Vorstellung von der Verteilung von \mathfrak{E} zu machen, indem man Kurven konstruiert, deren Tangente an jedem Punkte mit der Richtung des Feldes \mathfrak{E} übereinstimmt. Diese Kurven nennt man „Kraftlinien“ oder „ \mathfrak{E} -Linien“, oder allgemeiner — da sich dieser Gebrauch auf jedes Vektorfeld übertragen läßt — „Feldlinien“. Sie liefern, ihrer Definition gemäß, an jedem Punkte die Richtung des Feldes; durch jeden Punkt des Feldes geht eine und nur eine Feldlinie in bestimmter Richtung hindurch, da die Richtung des Feldes eine ganz bestimmte ist. Deshalb können sich auch die elektrischen Feldlinien niemals schneiden, da im Schnittpunkt die Richtung der elektrischen Kraft zweideutig wäre.

Nach Definition der Kraftlinie erhält man für deren Gleichung:

$$(14) \quad dx : dy : dz = \mathfrak{E}_x : \mathfrak{E}_y : \mathfrak{E}_z,$$

wenn dx, dy, dz die Komponenten eines Längenelementes $d\mathfrak{s}$ der Kraftlinie bedeuten; das bedeutet eben, daß \mathfrak{E} und $d\mathfrak{s}$ die gleiche Richtung haben. Sie ist im allgemeinen eindeutig bestimmt; nur in dem singulären Falle, daß an gewissen Stellen des Raumes gleichzeitig sämtliche Komponenten $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$ verschwinden, ist die Richtung unbestimmt.

Dieser Fall tritt zuweilen ein; wir kommen noch darauf in Nr. 7 und Nr. 10 zurück.

Stellt man senkrecht zur Richtung der Feldlinien eine (sehr klein gedachte) Flächeneinheit, so treten natürlich unendlich viele Kraftlinien durch dieselbe hindurch, weil man eben durch jeden Punkt Feldlinien ziehen kann. Man kann aber nach Faraday die Zahl der Kraftlinien beschränken, indem man durch eine zur Feldrichtung senkrechte Einheitsfläche nur so viel Kraftlinien hindurchzieht, als der Betrag des elektrischen Vektors \mathfrak{E} an dieser Stelle Einheiten besitzt; durch ein beliebig gestelltes Flächenelement dS treten nach dieser Vorschrift also nur $\mathfrak{E}_n \cdot dS$ Kraftlinien hindurch, wenn \mathfrak{E}_n die zu dS normale Komponente des Feldes bedeutet. Verfährt man in dieser Weise, so gibt die Anzahl der eine Flächeneinheit senkrecht durchsetzenden Kraftlinien gleichzeitig den Betrag des elektrischen Feldes an dieser Stelle an. So liefern also die Kraftlinien sowohl qualitativ wie quantitativ ein anschauliches Bild von der Struktur des elektrischen Feldes. Das Produkt $\mathfrak{E}_n \cdot dS$ wird in leicht verständlicher Bezeichnungsweise der „Kraftfluß durch die Fläche dS “ genannt.

Die elektrischen Kraftlinien endigen in den elektrischen Ladungen, die das Feld erzeugen, wenn sie keine in sich zurücklaufenden geschlossenen Kurven bilden. Diesen letzteren Fall wollen wir vorläufig ausschließen, da wir uns in der nächsten Nummer überzeugen werden, daß im elektrostatischen Felde geschlossene Kraftlinien nicht vorkommen. Man kann nun jeder Kraftlinie einen bestimmten Richtungssinn zuordnen, in dem sie durchlaufen werden sollen. Der positive Richtungssinn ist zweckmäßig als derjenige zu definieren, der mit der Richtung des Vektors \mathfrak{E} übereinstimmt, in dem also die positive Probeladung durch das Feld längs der Kraftlinien verschoben wird, d. i. in der Richtung von den positiven Ladungen fort zu den negativen Ladungen hin. Man sagt daher: Die elektrischen Kraftlinien „entspringen“ in den positiven und „endigen“ in den negativen Ladungen des Feldes. Aus diesem Grunde nennt man die positiven Ladungen die „Quellen“, die negativen die „Senken“ des elektrischen Feldes oder Kraftflusses. Nimmt man das Wort „Quellen“ im algebraischen Sinne, so daß negative Quellen identisch mit den Senken sind, so kann man einfacher sagen: Die elektrischen Ladungen sind die Quellen des elektrostatischen Feldes. Dieses letztere wird daher auch ein „Quellenfeld“ genannt.

Es liegt nahe, den von einer oder mehreren Ladungen ausgehenden gesamten Kraftfluß zu untersuchen. Zu diesem Zwecke ziehen wir im Felde eine die betreffenden Ladungen umschließende geschlossene, im übrigen beliebige Fläche S , bilden für jedes Flächenelement dS den zugehörigen Kraftfluß $\mathfrak{E}_n \cdot dS$ und summieren schließlich alle Kraftflüsse zusammen. Das führt uns schließlich auf die Betrachtung des den gesamten Kraftfluß darstellenden Integrals $\int \mathfrak{E}_n \cdot dS$.

Bevor wir die Rechnung durchführen, machen wir noch eine Vorbemerkung. Im Coulombschen Gesetze hatten wir die Dimensionen der Ladungen so klein gegenüber ihrem gegenseitigen Abstand gewählt, daß wir sie als punktförmig betrachten konnten, Natürlich ist das nur eine zuweilen bequeme Fiktion. In Wirklichkeit sind die elektrischen Ladungen entweder mit bestimmter räumlicher Dichte (ρ) auf ein bestimmtes Volumen oder mit bestimmter Flächendichte (η) auf einer Fläche verteilt. Wir haben daher streng genommen immer:

$$(15) \quad e = \int \rho \, d\tau \quad \text{oder} \quad e = \int \eta \, dS .$$

Übrigens ist es immer möglich, die flächenhafte Verteilung als den Grenzfall einer räumlichen Ladung anzusehen, die in einer sehr dünnen Schale enthalten ist. Wir können uns also im folgenden manchmal damit begnügen, allein räumlich verteilte Ladungen zu betrachten. Das hat eine wichtige Konsequenz. So bequem es manchmal auch sein kann, das Feld punktförmiger Ladungen zu betrachten, so bringt es doch den Übelstand mit sich, daß ein solches Feld am Orte der punktförmigen Ladung selbst unendlich wird, was die wirklichen elektrischen Felder natürlich nie sind. Man muß daher den Ort der punktförmigen Ladungen selbst von der Betrachtung ausschließen, d. h. man kann den variablen Aufpunkt ($x \, y \, z$) nicht damit zusammenfallen lassen. Bei räumlich oder flächenhaft angeordneten Ladungen tritt aber kein Unendlichwerden der elektrischen Kraft ein. Denn z. B. die von einem Volumelemente $d\tau$ mit der Ladung $\rho \, d\tau$ im Abstände r erzeugte Feldstärke ist $\frac{\rho \, d\tau}{r^2}$. Führt man um den Aufpunkt als Zentrum räumliche Polarkoordinaten (r, ϑ, ψ) ein, so wird $d\tau = r^2 \, dr \, \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi$, also die Feldstärke

$$\frac{\rho \, d\tau}{r^2} = \rho \, dr \, \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi ,$$

und dieser Ausdruck bleibt endlich, ja er ist sogar unendlich klein, auch wenn $r = 0$ wird. Ganz analog ist es mit flächenhaft angeordneten Ladungen: Niemals wird die elektrische Kraft unendlich, sie bleibt beim Durchgange durch räumliche oder flächenhafte Ladungen immer endlich.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zur Untersuchung des Integrals $\int \mathcal{E}_n \, dS$ über.

Eine gegebene elektrische Ladung e fülle ein gewisses Raumgebiet aus. Von letzterem betrachten wir ein Volumelement an der Stelle (ξ, η, ζ) von der Größe $d\tau = d\xi \, d\eta \, d\zeta$, in dem die Dichte der elektrischen Ladung ρ sein möge; die unendlich kleine Ladung de des Volumelementes ist also $de = \rho \, d\tau$. Die Ladung e schließen wir durch eine beliebige Fläche S vollkommen ein und betrachten ein Flächenelement dS derselben, durch welches wir den Kraftfluß berechnen wollen. Da dieser eine skalare Größe ist, setzt er sich additiv aus den Einzelkraftflüssen zusammen, die jedes Ladungselement $de = \rho \, d\tau$ erzeugt. Wir können

uns also damit begnügen, die Rechnung nur für ein beliebiges Volumenelement, nämlich gerade $\rho d\tau$, durchzuführen. Das Flächenelement dS habe von $d\tau$ die Entfernung r ; die nach außen gerichtete Normale von dS sei n . Nun ist nach dem Coulombschen Gesetze und der Definition von \mathfrak{E} die elektrische Feldstärke $d\mathfrak{E}$ am Orte von dS , soweit sie von $de = \rho d\tau$ herrührt, gleich

$$d\mathfrak{E} = \frac{de}{r^2} = \frac{\rho d\tau}{r^2}.$$

Folglich wird die Normalkomponente $d\mathfrak{E}_n$ durch Multiplikation mit dem Kosinus des Winkels (r, n) erhalten:

$$d\mathfrak{E}_n = \frac{de}{r^2} \cos(r, n) = \frac{\rho d\tau}{r^2} \cos(r, n).$$

Der von de herrührende Kraftfluß durch dS ist also:

$$(16) \quad d\mathfrak{E}_n dS = \frac{de}{r^2} \cos(r, n) dS = \frac{\rho d\tau}{r^2} \cos(r, n) dS.$$

Wir ziehen nun in Fig. 2 von $d\tau$ zur Begrenzung von dS die Verbindungslinien, die einen Kegelmantel erfüllen, dessen Basis dS ist. Schlagen wir mit dem Abstände r eine Kugel um $d\tau$, so schneidet der erwähnte Kegel aus dieser Kugel ein Element dK aus, welches als die Projektion von dS aufgefaßt werden kann, so daß

$$(17) \quad dK = dS \cos(r, n)$$

ist. Einsetzen in (16) liefert für das Element des Kraftflusses:

$$d\mathfrak{E}_n dS = \frac{de}{r^2} \cos(r, n) \frac{dK}{\cos(r, n)} = \frac{de}{r^2} dK = \frac{\rho d\tau}{r^2} dK.$$

Nennen wir den unendlich kleinen räumlichen Winkel, unter dem dK von $d\tau$ aus erscheint, $d\psi$, so ist

$$dK = r^2 d\psi,$$

und folglich erhalten wir weiter für das Element des Kraftflusses:

$$(18) \quad d\mathfrak{E}_n dS = de d\psi = \rho d\tau d\psi.$$

Summieren wir nun zunächst die sämtlichen Teilkraftflüsse durch das Flächenelement dS , die von den einzelnen Ladungselementen de ausgehen, zusammen, so haben wir durch Ausführung einer Integration über $d\tau$:

$$\mathfrak{E}_n dS = dS \int d\mathfrak{E}_n = d\psi \int de = d\psi \int \rho d\tau.$$

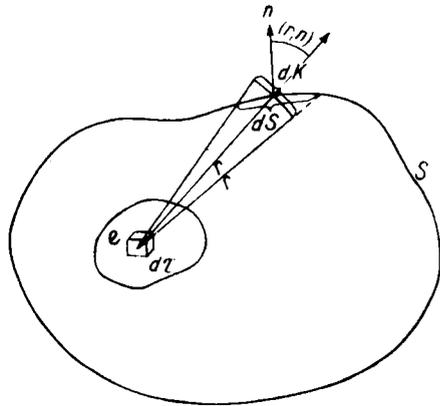


Fig. 2.

Und wenn wir schließlich zum Kraftfluß durch die ganze Fläche S übergehen wollen, finden wir durch eine weitere Integration über das Raumwinkelelement $d\psi$:

$$(19) \quad \int \mathfrak{E}_n dS = 4\pi \int de = 4\pi \int \rho d\tau,$$

da die Integration über den räumlichen Winkel $d\psi$ offenbar 4π ergibt. Wir finden also den folgenden Satz: Der gesamte Kraftfluß durch eine geschlossene Fläche ist gleich der 4π -fachen Gesamtsumme der von ihr umschlossenen Ladungen. In dem besonderen Falle, daß die Fläche keine Ladungen umschließt, ist der Kraftfluß durch dieselbe gleich Null.

Aus diesem Spezialfall folgt sofort, daß der Kraftfluß durch alle geschlossenen Flächen, die die nämlichen Ladungen umschließen, derselbe ist. Denn umschließen wir etwa die Fläche S durch eine zweite Fläche S_1 derartig, daß im Zwischenraum von S und S_1 keine Ladungen

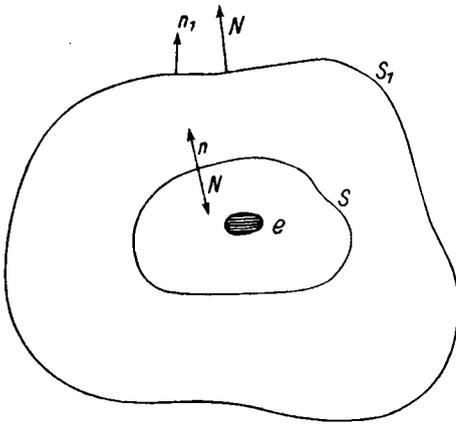


Fig. 2a.

vorhanden sind (Fig. 2a), so können wir S und S_1 als gemeinsame Oberfläche des von Ladungen freien Zwischenraumes betrachten und dürfen diesen Satz anwenden. Sei N die äußere Normale der Begrenzung dieses Raumteiles, so ist:

$$\int_{S+S_1} \mathfrak{E}_N dS = 0,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\int_S \mathfrak{E}_N dS + \int_{S_1} \mathfrak{E}_N dS_1 = 0.$$

Nun stimmt aber die Richtung von N mit der der Normalen

$$\int_S \mathfrak{E}_N dS = - \int_S \mathfrak{E}_n dS \quad \text{und} \quad \int_{S_1} \mathfrak{E}_N dS_1 = + \int_{S_1} \mathfrak{E}_{n_1} dS_1;$$

also ist schließlich:

$$\int_S \mathfrak{E}_n dS = \int_{S_1} \mathfrak{E}_{n_1} dS_1,$$

was zu beweisen war.

Die Gleichung (19) liefert uns weiter in Verbindung mit dem Gaußschen Satze¹⁾ eine erste „Feldgleichung“ für den elektrischen Vektor \mathfrak{E} .

¹⁾ Vgl. Bd. I, pag. 529, Gleichung (8). Daß in Gleichung (20) das Vorzeichen der linken Seite ein anderes ist, als im ersten Bande, liegt daran, daß wir hier die positive Richtung der Normale nach außen gewählt haben, während sie früher nach innen positiv gezählt wurde.

Die Gauss'sche Integraltransformation lautet allgemein für einen beliebigen Vektor \mathfrak{A} , der mit seinen ersten Ableitungen eine stetige Funktion der Koordinaten ist:

$$(20) \quad \int \mathfrak{A}_n dS = \int \operatorname{div} \mathfrak{A} d\tau .$$

Die Kombination von (20) mit (19) liefert also:

$$\int \mathfrak{E}_n dS = \int \operatorname{div} \mathfrak{E} d\tau = 4\pi \int \rho d\tau .$$

Aus der Gleichheit der zwei letzten Integrale folgt aber die Gleichheit der Integranden; folglich muß sein:

$$(21) \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \rho ,$$

d. h. die Divergenz des elektrischen Vektors ist gleich der 4π -fachen räumlichen Dichte der Ladung.

Die Differentialoperation „ $\operatorname{div} \mathfrak{E}$ “, d. h. in kartesischen Koordinaten das Aggregat $\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right)$ bezieht sich dabei auf denselben Raumpunkt, für den die Größe ρ , die natürlich im allgemeinen auch Funktion des Ortes ist, gemeint ist. Man sieht also in diesem speziellen Falle eine Bestätigung unserer allgemeinen Auseinandersetzung über die Form der „Feldgesetze“.

An allen den Stellen, an denen keine räumliche Ladung sich befindet, gilt die speziellere Gleichung:

$$(21a) \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 .$$

Für den häufig, ja praktisch ausschließlich vorliegenden Fall, daß die elektrischen Ladungen nicht räumlich verteilt sind, sondern auf gewissen Flächen, z. B. Metalloberflächen, mit einer Flächendichte η angeordnet sind, gelten analoge Gleichungen, die wir ebenfalls aus dem Gauss'schen Satze (19) leicht ableiten können.

In Fig. 3 sei eine Fläche S mit Flächenladung belegt, so daß auf dem Flächenelement dS die Ladung ηdS sitzt. Die eine Seite der Fläche bezeichnen wir willkürlich durch den Index 1, die andere durch den Index 2. Wir grenzen auf der Fläche S ein Flächenelement dS ab, und

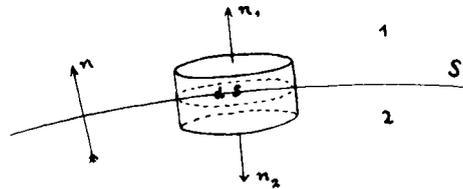


Fig. 3.

errichten zu beiden Seiten der Fläche über demselben einen Zylinder, dessen Grund- und Gegenflächen also auch von der Größe dS sind. Die gesamte Höhe des Zylinders nehmen wir noch unendlich klein an gegen dS , also unendlich klein von mindestens 3. Ordnung. Die nach außen weisen den Normalen auf Grund- und Gegenfläche des Zylinders seien n_1 und n_2 ;

die Flächennormale, deren positive Richtung wir von Seite 2 nach Seite 1 wählen, werde mit n bezeichnet. Auf die Zylinderoberfläche wenden wir den Gauss'schen Satz an. Das Integral $\int \mathfrak{E}_n dS$ ist zu erstrecken über Grund- und Gegenfläche von der gemeinsamen Größe dS , sowie über den Mantel des Zylinders. Aber die Werte des Kraftflusses, die sich für den Mantel ergeben, können wegen dessen verschwindender Höhe als unendlich klein gegen die übrigen Beiträge vernachlässigt werden. Daher bleibt übrig, wenn die Werte der Feldstärke zu beiden Seiten der Fläche S durch die oberen Indizes 1 und 2 unterschieden werden:

$$\int \mathfrak{E}_n dS = \{\mathfrak{E}_{n_1}^{(1)} + \mathfrak{E}_{n_1}^{(2)}\} dS = 4\pi\eta dS,$$

oder:

$$(22) \quad \mathfrak{E}_{n_1}^{(1)} + \mathfrak{E}_{n_1}^{(2)} = 4\pi\eta.$$

Nun ist die Zylindernormale n_1 mit der Flächennormale n gleichgerichtet. Dagegen hat n_2 die entgegengesetzte Richtung wie n ; folglich ist:

$$\mathfrak{E}_{n_1}^{(1)} = \mathfrak{E}_n^{(1)}; \quad \mathfrak{E}_{n_1}^{(2)} = -\mathfrak{E}_n^{(2)},$$

und damit wird die Gleichung (22):

$$(23) \quad \mathfrak{E}_n^{(1)} - \mathfrak{E}_n^{(2)} = 4\pi\eta,$$

d. h. die Differenz der Normalkomponenten der elektrischen Feldstärke zu beiden Seiten einer flächenhaften Ladung ist gleich dem 4π -fachen der Ladungsdichte. Anders ausgedrückt: Die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke geht unstetig durch eine mit Ladung belegte Fläche hindurch; die Größe des Sprunges wird durch die rechte Seite von (23) angegeben. Diese Differenz der Normalkomponenten $\mathfrak{E}_n^{(1)} - \mathfrak{E}_n^{(2)}$ ist offenbar der Degenerationsfall einer räumlichen Divergenz, d. h. von $\text{div } \mathfrak{E}$; man nennt die Differenz der Normalkomponenten daher auch die „Flächendivergenz“. Die Flächendivergenz der elektrischen Feldstärke ist also gleich der 4π -fachen Ladungsdichte.

Von dieser Gleichung ist ein besonders wichtiger, ja eigentlich der in der Praxis allein vorkommende Fall der, daß die elektrische Ladung auf einer Leiteroberfläche sitzt. Da im Innern von Leitern $\mathfrak{E} = 0$ ist, so ist also $\mathfrak{E}_n^{(2)}$ in diesem Falle gleich Null und (23) geht über in:

$$(23a) \quad \mathfrak{E}_n^{(1)} = 4\pi\eta \text{ an Leiteroberflächen.}$$

5. Die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes; das Potential.

Wir haben im Anfang der vorhergehenden Nummer auf die Möglichkeit kurz hingewiesen, daß die elektrischen Kraftlinien, statt in den positiven Ladungen zu beginnen und in den negativen zu endigen, auch

ringförmig in sich zurücklaufende Kurven sein könnten. Damals haben wir diese Möglichkeit aber nicht weiter erörtert. Jetzt wollen wir aber untersuchen, ob sie für das elektrostatische Feld gegeben ist oder nicht, was natürlich nur experimentell festgestellt werden kann.

Und zwar sehr einfach durch folgende Überlegung: Angenommen, es gebe geschlossene elektrische Kraftlinien, und die in Fig. 4 gezeichnete Kurve sei eine solche, in der der Pfeil die positive Richtung andeutet. Dann könnten wir eine positive Einheitsladung an einen beliebigen Punkt P der Kraftlinie bringen; sie würde dann, sich längs der Kraftlinie bewegend, stets den Kraftantrieb \mathcal{E} erfahren; das elektrische Feld

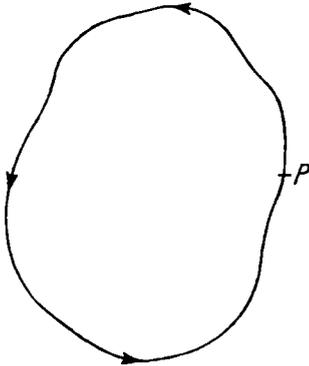


Fig. 4.

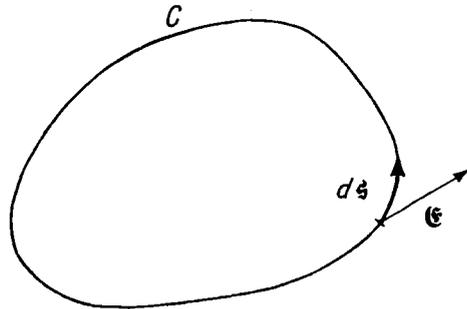


Fig. 5.

würde also durch Herumbewegung der Ladung bis zu ihrem Ausgangspunkte P zurück dauernd positive Arbeit leisten. Es könnte also dann durch Wiederholung dieses Prozesses aus dem elektrostatischen Felde eine beliebig große mechanische Arbeit entnommen werden. Nach Ausweis der Erfahrung ist dies jedoch nicht der Fall: Durch Herumführen elektrischer Ladungen längs beliebiger geschlossener Kurven im elektrostatischen Felde ist es niemals möglich, irgendwelche Arbeit zu gewinnen. Natürlich ist es möglich, daß längs eines Stückes einer solchen Kurve das Feld eine positive Arbeit leistet, aber dieser Betrag wird stets kompensiert durch die auf dem Reststück der geschlossenen Kurve aufzuwendende Arbeit. Daraus folgt eindeutig der Satz: Im elektrostatischen Felde gibt es keine geschlossenen Kraftlinien; sie beginnen und endigen stets in den elektrischen Ladungen.

Dieses Verhalten des elektrostatischen Feldes ist keineswegs allen elektrischen Feldern gemeinsam; wir kennen nichtstatische elektrische Felder, in denen dieser Satz nicht mehr gilt; von ihnen wird später die Rede sein. Daraus folgt, daß die obige Feststellung zu den charakteristischen Merkmalen des elektrostatischen Feldes gehört; wir

werden in der Tat sofort eine zweite Feldgleichung für den Vektor \mathfrak{E} der elektrischen Kraft daraus herleiten.

Es sei in Fig. 5 die Kurve C eine ganz beliebige geschlossene Kurve, die natürlich nicht an allen Stellen mit der Richtung der Feldstärke \mathfrak{E} zusammenfallen kann, da wir ja in diesem Falle eine geschlossene Kraftlinie vor uns hätten. An irgendeiner Stelle wird daher die Feldstärke \mathfrak{E} im allgemeinen einen Winkel mit der Kurve machen. Bezeichnen wir also das als Vektor aufgefaßte Kurvenelement durch $d\mathfrak{s}$, so haben wir für die Arbeit der Kraft \mathfrak{E} längs des Weges $d\mathfrak{s}$ das skalare Produkt $(\mathfrak{E}, d\mathfrak{s})$ zu bilden und diese Ausdrücke längs der ganzen Kurve zu summieren, d. h. das Integral längs dieser Kurve zu bilden. Das experimentelle Ergebnis, das wir oben besprochen haben, führt also zu der Gleichung:

$$(24) \quad \oint (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = 0,$$

in der, wie oben gesagt, eine neue Gesetzmäßigkeit des elektrostatischen Feldes formuliert ist. Nach der Definition des skalaren Produktes ist

$$(\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = |\mathfrak{E}| ds \cos(\mathfrak{E}, d\mathfrak{s});$$

Da $|\mathfrak{E}| \cos(\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = \mathfrak{E}_s$, der in die Richtung des Elementes $d\mathfrak{s}$ fallenden Komponente von \mathfrak{E} ist, kann das obige Integral auch geschrieben werden:

$$(24a) \quad \oint \mathfrak{E}_s ds = 0.$$

Ganz allgemein nennen wir das zwischen zwei Punkten 1 und 2 erstreckte Kurvenintegral $\int_1^2 \mathfrak{E}_s ds$ die „elektromotorische Kraft“ zwischen diesen Punkten, und können mit dieser Bezeichnung die Gleichungen (24) und (24a) auch so aussprechen, daß im elektrostatischen Felde die elektromotorische Kraft längs jeder geschlossenen Kurve verschwindet.

Natürlich ist zu beachten, daß dieses Integral (24) gar keine Kraft im dynamischen Sinne des Wortes ist, sondern eine Arbeit, nämlich eine Arbeit pro Einheitsladung, d. h. der Ausdruck (24) würde erst durch Multiplikation mit einer Ladung e die Dimension einer Arbeit annehmen. Sinngemäßer wäre daher die Bezeichnung „elektromotorische Arbeit“, die sich auch zuweilen in der Literatur vorfindet; doch hat sich der Ausdruck „elektromotorische Kraft“ (abgekürzt E.M.K.) allgemein eingebürgert.

Auf diese Gleichung können wir nun den Stokesschen Satz anwenden, den wir schon im I. Bande¹⁾ ausführlich besprochen haben. Der Sinn desselben ist kurz gesagt folgender: Wenn wir durch die geschlossene Kurve C der Fig. 5 irgendeine beliebige Fläche S hindurch legen (z. B. die ebene Fläche oder eine irgendwie stetig gekrümmte), so

¹⁾ Bd. I, pag. 817ff.

daß sie von der Kurve C berandet wird, so gilt für jeden stetigen Vektor \mathfrak{A} mit stetigen ersten Ableitungen die Gleichung:

$$(25) \quad \oint (\mathfrak{A}, d\mathfrak{s}) = \oint \mathfrak{A}_s ds = \int \text{rot}_n \mathfrak{A} dS.$$

Der Stokessche Satz transformiert also ein Integral über eine Fläche in ein Integral über die Randkurve derselben.

Wenden wir diesen Satz auf den Vektor \mathfrak{C} an, so liefert Gleichung (24) oder (24a):

$$(26) \quad \int (\mathfrak{C}, d\mathfrak{s}) = \int \text{rot}_n \mathfrak{C} dS = 0.$$

Da nun die Fläche S , sofern sie nur von der Kurve C berandet wird, ganz willkürlich, also die Richtung der Normalen n beliebig ist, kann diese Gleichung nur bestehen, wenn allgemein gilt:

$$(27) \quad \text{rot } \mathfrak{C} = 0.$$

Die Rotation ist ein Vektor, der in kartesischen Koordinaten bekanntlich die Komponenten hat:

$$\text{rot}_x \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}$$

usw., so daß man statt (27) auch das Tripel schreiben kann:

$$(27a) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

In (27) oder (27a) haben wir wieder eine partielle Differentialgleichung vor uns, der das elektrostatische Feld zu genügen hat. Sie ist der analytische Ausdruck dafür, daß es keine geschlossenen Kraftlinien gibt. In der Ausdrucksweise der Hydrodynamik können wir also sagen, daß es im elektrostatischen Felde keine „Wirbel“ der elektrischen Kraft gibt. Das Feld von \mathfrak{C} ist also „wirbellos“, und da wir es schon früher als ein Quellenfeld bezeichnet hatten, können wir jetzt genauer sagen: Das Feld des Vektors \mathfrak{C} , sofern er von im Gleichgewicht befindlichen elektrischen Ladungen erzeugt wird, ist ein wirbelfreies Quellenfeld.

Bevor wir an die Gleichung (24) weitere allgemeine Schlußfolgerungen anknüpfen, wollen wir sie zunächst auf einen speziellen Fall anwenden, der durch Fig. 6 erläutert wird. In derselben sei S eine mit elektrischer Flächenladung η belegte Fläche, deren beide Seiten wir durch die Bezeichnungen 1 und 2 unterscheiden, und wir wollen nun die Kurve C , längs deren wir das Linien-

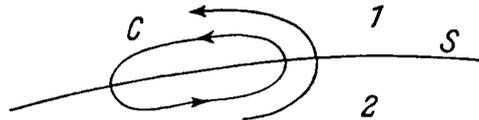


Fig. 6.

integral $\oint \mathfrak{E}_i ds$ erstrecken, so ziehen, daß ein Teil des Weges auf Seite 1 der Fläche S , der andere Teil auf Seite 2 derselben verläuft, wie es Fig. 6 andeutet. Wir können schließlich die Kurve C so deformieren, daß sie sich ganz dicht an die Fläche S zu beiden Seiten anschmiegt. Damit wir nun Gleichung (24) überhaupt anwenden können, müssen wir uns vorher vergewissern, daß beim Durchgang der Einheitsladung durch die Fläche S der Wert von \mathfrak{E} endlich bleibt. Das haben wir aber schon in Nummer 4 nachgewiesen, daß man mit dem Aufpunkt auch direkt in eine Flächenladung hineingehen kann, ohne daß man befürchten muß, daß ein Unendlichwerden auftritt. Wenn wir die Kurve C in der geschilderten Weise ganz dicht an die beiden Seiten der Fläche S anlegen, so besteht sie schließlich nur aus zwei Stücken von der gleichen Länge s ; gleichzeitig gehen die Werte \mathfrak{E}_i über in die tangentiellen Komponenten $\mathfrak{E}_i^{(1)}$ auf der einen und $\mathfrak{E}_i^{(2)}$ auf der anderen Seite der Fläche. Das Integral (24) zerfällt also in zwei Teile, die außerdem verschiedenes Vorzeichen haben, weil der Fortschreitungsinn auf der Kurve in beiden Fällen entgegengesetzt gerichtet ist. Wir haben also:

$$\oint \mathfrak{E}_i ds = \{\mathfrak{E}_i^{(1)} - \mathfrak{E}_i^{(2)}\} s = 0,$$

oder, da $s \neq 0$ ist:

$$(28) \quad \mathfrak{E}_i^{(1)} = \mathfrak{E}_i^{(2)}.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die tangentiellen Komponenten der elektrischen Kraft \mathfrak{E} eine geladene Fläche stetig durchsetzen. In dem besonderen Falle, daß S die Oberfläche eines Leiters ist, liegt etwa die Seite 2 ganz im Innern desselben; für sie ist also $\mathfrak{E}_i^{(2)} = 0$, daher geht Gleichung (28) über in die speziellere

$$(28a) \quad \mathfrak{E}_i = 0 \text{ an Leiteroberflächen.}$$

Diese Gleichung bedeutet, daß der Vektor \mathfrak{E} auf Leiteroberflächen im elektrischen Gleichgewicht stets senkrecht steht. Man kann dies auch unmittelbar der Anschauung entnehmen. Denn da die elektrischen Ladungen auf dem Leiter frei beweglich sind, würde eine tangentielle Komponente von \mathfrak{E} , wenn sie vorhanden wäre, eine Strömung der Elektrizität auf der Oberfläche veranlassen, was im Widerspruch mit der Voraussetzung des Gleichgewichtes stehen würde.

Das Verschwinden der Differenz $\{\mathfrak{E}_i^{(1)} - \mathfrak{E}_i^{(2)}\}$ ist der Degenerationsfall des Verschwindens des Wirbels oder der Rotation von \mathfrak{E} ; man nennt daher die genannte Differenz auch den „Flächenwirbel“ von \mathfrak{E} . In dieser Ausdrucksweise besagt also (28) bzw. (28a), daß auch der Flächenwirbel von \mathfrak{E} überall verschwindet.¹⁾

¹⁾ In der Hydrodynamik entspricht dem die Stetigkeit der tangentiellen Geschwindigkeitskomponenten, die an sich nicht vorhanden zu sein brauchte, da mit der Natur einer reibungslosen Flüssigkeit endliche Differenzen der tangentiellen Geschwindigkeitskomponenten verträglich sind, wie zuerst Helmholtz bemerkt hat. Vgl. Bd I, pag. 907 ff.

Die in der vorigen und dieser Nummer gewonnenen Feldgleichungen nebst ihren Ausartungen, nämlich die Gleichung (21) über die räumliche Divergenz, (23) bzw. (23a) über die Flächendivergenz, (27) über die Rotation oder den Wirbel, (28) bzw. (28a) über den Flächenwirbel der elektrischen Kraft \mathfrak{E} genügen, um das elektrostatische Feld vollkommen zu bestimmen. Das bedarf freilich eines exakten Nachweises, den wir aber noch etwas zurückstellen, bis wir uns mit dem Begriffe des Potentials vertraut gemacht haben. Mit diesem später zu beseitigenden Vorbehalte also brauchen wir nicht nach weiteren Feldgleichungen zu suchen, da diese nichts Neues liefern können.

Die Differentialgleichung (27), die das Verschwinden der Rotation von \mathfrak{E} ausspricht, oder die mit ihr gleichwertigen Integralformeln (24) bzw. (24a) führen zu einem äußerst wichtigen Begriffe hin. Wir knüpfen am bequemsten an die Gleichung (24a) an. In Fig. 7 ist eine geschlossene Kurve gezogen, die von dem Punkte 1 über A nach 2 und von da über B nach 1 zurückführt. Längs dieser Kurve ist also

$$\oint \mathfrak{E}_s ds = 0$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(A) \int_1^2 \mathfrak{E}_s ds + (B) \int_2^1 \mathfrak{E}_s ds = 0,$$

oder endlich, wenn wir im zweiten Teilintegrale die Grenzen vertauschen:

$$(29) \quad (A) \int_1^2 \mathfrak{E}_s ds = (B) \int_1^2 \mathfrak{E}_s ds,$$

d. h. das über eine nichtgeschlossene Kurve zwischen zwei Punkten 1 und 2 erstreckte Integral $\int_1^2 \mathfrak{E}_s ds$ ist im elektrostatischen Felde vom Wege unabhängig, also nur abhängig von den Grenzen des Integrals: Die elektromotorische Kraft zwischen zwei Punkten des elektrostatischen Feldes ist stets dieselbe, durch welchen Kurvenzug auch immer die beiden Punkte verbunden werden, d. h. auf welchem Wege auch immer man die Einheitsladung von dem einen Punkte zum andern führt. Halten wir etwa die untere Grenze 1, die durch die Koordinaten $(x_1 y_1 z_1)$ charakterisiert sein möge, fest, und erstrecken das Integral bis zu einer variabel gedachten oberen Grenze, deren Koordinaten $(x y z)$ sein sollen, so können wir also schreiben:

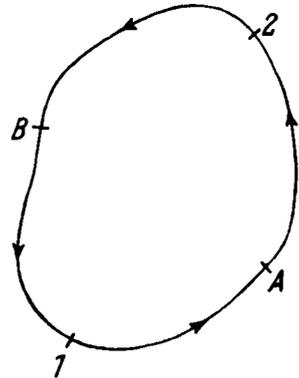


Fig. 7.

$$(30) \quad \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} \mathfrak{E}_s ds = -\Phi(x, y, z) + \Phi(x_1, y_1, z_1) = -\Phi(x, y, z) + \text{Const.}^1),$$

wo $-\Phi(x, y, z)$ eine eindeutige und stetige Ortsfunktion bedeutet, die natürlich in intimum Zusammenhang mit der elektrischen Feldstärke steht. Diesen Zusammenhang findet man am einfachsten so: Statt $\mathfrak{E}_s ds$ kann man den damit identischen Wert $(\mathfrak{E}_x dx + \mathfrak{E}_y dy + \mathfrak{E}_z dz)$ setzen, wo dx, dy, dz die Komponenten von ds sind; man hat also statt (30):

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} (\mathfrak{E}_x dx + \mathfrak{E}_y dy + \mathfrak{E}_z dz) = -\Phi(x, y, z) + \text{Const.}$$

Durch Differentiation nach der oberen Grenze des Integrals ergibt sich daraus:

$$\mathfrak{E}_x dx + \mathfrak{E}_y dy + \mathfrak{E}_z dz = -d\Phi(x, y, z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy - \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz.$$

Daraus aber folgt sofort, daß die Beziehungen bestehen müssen:

$$(31) \quad \mathfrak{E}_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

oder allgemein, da die Koordinatenrichtungen doch beliebige Richtungen sind:

$$(31a) \quad \mathfrak{E}_s = -\frac{\partial\Phi}{\partial s},$$

d. h. also, daß die in einer beliebigen Richtung s genommene Komponente der elektrischen Feldstärke gleich der negativen partiellen Ableitung einer skalaren Funktion $\Phi(x, y, z)$ nach dieser Richtung ist. In der Vektorsprache lassen sich diese Gleichungen (31) oder (31a) zusammenfassen in der einen Aussage, daß

$$(32) \quad \mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi,$$

d. h. daß der elektrostatische Kraftvektor \mathfrak{E} sich als der Gradient einer skalaren Funktion $-\Phi$ darstellen läßt.

Diese Funktion Φ ist zuerst von G. Green im Jahre 1828 in einer zunächst unbekannt gebliebenen Abhandlung „An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism“ und unabhängig davon von C. F. Gauss im Jahre 1840 in seiner Abhandlung: „Allgemeine Lehrsätze in bezug auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen wirkenden Anziehungs- oder Abstoßungskräfte“ eingeführt worden; beide Forscher gaben — obwohl völlig unabhängig voneinander — dieser Funktion merkwürdigerweise auch fast denselben Namen: Green nannte sie die

¹⁾ Daß wir hier das Minuszeichen zur Funktion Φ hinzugefügt haben, ist natürlich willkürlich, empfiehlt sich aber aus später hervortretenden Gründen; es ist in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Gebrauche.

Potentialfunktion, Gauss einfacher das Potential, ein interessanter Beweis für den divinatorischen wissenschaftlichen Takt beider Männer. —

Die Einführung des Potentials Φ hat folgenden Vorteil: Jede Vektorgleichung ist die Zusammenfassung dreier skalarer Gleichungen; an Stelle der zu bestimmenden drei Funktionen $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$ tritt also hier eine einzige Funktion Φ .

Man sieht zunächst aus der Definitionsgleichung (32) für Φ , die nur erste Ableitungen von Φ enthält, daß Φ nur bis auf eine Konstante bestimmt werden kann; eine beliebige Konstante kann also stets hinzugefügt werden, oder, was auf dasselbe herauskommt, der Wert des Potentials an einer beliebigen Stelle des Raumes kann willkürlich vorgeschrieben werden. Man pflegt Φ im Unendlichen gleich Null zu setzen; für praktische Zwecke wird das Potential der Erde als Nullpunkt angenommen.¹⁾ Hält man sich an diese Festsetzung, so ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen dem numerischen Werte des Potentials Φ an einer Stelle des Feldes und der Arbeit, die das elektrische Feld leistet, wenn es eine Einheitsladung von da bis in die Unendlichkeit verschiebt. Denn aus (30) folgt für diese Arbeit der Wert:

$$\int_{xyz}^{\infty} \mathfrak{E}_s ds = \Phi(xyz) - \Phi(\infty) = \Phi(xyz).$$

Der Wert des Potentials in einem Punkt (xyz) ist also auch gleich der Arbeit, die von außen gegen die Kräfte des Feldes geleistet werden muß, um die positive Einheitsladung aus dem Unendlichen (bzw. der Erde) bis zu dem Punkte (xyz) zu schaffen. Diese Arbeit ist positiv, wenn die Kräfte abstoßend sind; damit auch der Wert von Φ positiv ausfällt, haben wir bereits in Gleichung (30) rechts das bisher unmotiviert erscheinende Minuszeichen eingefügt.

Natürlich steht das Potential auch in engster Beziehung zu der zwischen zwei Punkten 1 und 2 des Feldes vorhandenen elektromotorischen Kraft. Denn es ist ja nach Definition des Potentials:

$$\int_1^2 \mathfrak{E}_s ds = \Phi_1 - \Phi_2,$$

d. h. die E.M.K. zwischen zwei Punkten ist dem absoluten Betrage nach gleich der Potentialdifferenz in diesen beiden Punkten. Da $\mathfrak{E}_s ds$ eine Arbeitsleistung pro Einheitsladung bedeutet, ist natürlich auch die Dimension des Potentials wie der E.M.K. bestimmt. Man findet dafür:

$$[\text{E.M.K.}] = [\Phi] = [M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}] = [g^{1/2} \text{cm}^{1/2} \text{sec}^{-1}].$$

¹⁾ Diese Festsetzung ist nur zulässig und möglich, wenn alle elektrischen Ladungen im Endlichen liegen, was bei allen wirklich vorkommenden Anordnungen stets der Fall ist. Gelegentlich betrachtet man aber theoretische Grenzfälle (z. B. den eines ∞ ausgedehnten homogenen Feldes), wo dies nicht mehr möglich ist. Auch wir werden solche idealisierten Fälle (z. B. in Nr. 10) ins Auge fassen.

Als Einheit der elektromotorischen Kraft zwischen zwei Punkten des Feldes ist also diejenige zu bezeichnen, die bei Verschiebung einer positiven Einheitsladung längs einer (beliebigen) diese Punkte verbindenden Kurve die Arbeit von 1 Erg leistet; das ist gleichzeitig die Einheit der Potentialdifferenz bzw. des Potentials selber, da wegen der Unbestimmtheit der Konstanten ja überhaupt nur Differenzen des Potentials bestimmt werden können. Nun haben wir schon in Nr. 2 darauf hingewiesen, daß man als praktische Einheit der Elektrizitätsmenge das $3 \cdot 10^9$ fache der absoluten Ladungseinheit, das Coulomb, eingeführt hat. Bei Verschiebung von 1 Coulomb zwischen zwei Punkten des Feldes würde von der absoluten Einheit der E.M.K. also eine Arbeit von $3 \cdot 10^9$ Erg = 300 Joule geleistet werden, ein Wert, der unpraktisch groß erschien. Daher hat man die vorhin definierte absolute Einheit des Potentials und der E.M.K. durch eine praktische Einheit ersetzt, die nur den 300. Teil dieser absoluten Einheit bildet; sie heißt das „Volt“:

$\frac{1}{300}$ absolute Einheit der E.M.K. und des Potentials = 1 Volt.

Um eine Vorstellung von der Größe dieser praktischen Einheit zu haben, mag der Leser daran denken, daß zwischen den Klemmen eines sog. Westonschen Normalelements eine E.M.K. oder Potentialdifferenz von rund 1,019 Volt besteht; um eine Ladung von 1 Coulomb von dem einen Pol desselben zum anderen zu transportieren, ist also eine Arbeit von rund 1 Joule erforderlich.

Wir können nun alle Gleichungen des elektrischen Feldes durch die Potentialfunktion Φ ausdrücken. Nach (21), (23), (23a), (27), (28) und (28a) haben wir:

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \equiv \Delta \Phi = -4\pi \rho,$$

mit dem Spezialfall für ladungsfreie Stellen:

$$(34) \quad \Delta \Phi = 0;$$

$$(35) \quad \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial n} = -4\pi \eta \text{ an flächenhaften Ladungen}$$

$$(36) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -4\pi \eta \text{ an Leiteroberflächen.}$$

Gleichung (27) ist durch die Einführung der Funktion Φ identisch erfüllt; aus (28) bzw. (28a) folgt, wenn dl ein Längenelement beliebiger Richtung einer in der geladenen Fläche liegenden Kurve bedeutet:

$$(37) \quad \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial l} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial l},$$

$$(38) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = 0 \text{ an Leiteroberflächen.}$$

Demnach liegt das mathematische Problem vor, die durch die Differentialgleichungen (33) bzw. (34) definierte Funktion Φ so zu bestimmen, daß

die „Grenzbedingungen“ (35) bis (38) erfüllt werden: Das ist die Aufgabe der Potentialtheorie.

Natürlich fragt es sich, ob das Problem überhaupt eine Lösung, und wenn ja, ob es unter den gegebenen Bedingungen nur eine Lösung hat. Den „Existenzbeweis“ für die Lösung werden wir unterdrücken, dagegen den „Eindeutigkeitsbeweis“ an späterer Stelle ausführlich nachholen. Zuvor wird es zweckmäßig sein, für spezielle Fälle das Potential wirklich aufzustellen und seine Eigenschaften zu studieren.

Historisch sei bemerkt, daß die Gleichung (33) als Poissonsche Differentialgleichung bezeichnet wird, während die Ausartung (34) dieser Gleichung für ladungsfreie Stellen des Raumes den Namen von Laplace führt.

6. Spezielle Potentiale und ihre Eigenschaften (punktförmige Ladungen, räumlich und flächenhaft verteilte Ladungen, Doppelschichten, zweidimensionale Probleme).

Wir wollen der Einfachheit halber zunächst voraussetzen, wir hätten eine punktförmige Ladung e_1 in einem Raumpunkte (x_1, y_1, z_1) angebracht. Wir fragen nach dem Potential Φ_1 derselben. In diesem Falle sieht man sofort, daß

$$(39) \quad \Phi_1 = \frac{e_1}{r_1},$$

wo

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

die gesuchte Funktion ist, wozu natürlich eine beliebige Konstante addiert werden kann. Denn das Potential ist ja dadurch allgemein definiert, daß seine negativen partiellen Ableitungen nach den Koordinaten die Kraftkomponenten liefern müssen. Da nun für diese punktförmige Ladung der Betrag des elektrischen Vektors \mathfrak{E}_1 gegeben ist durch $\frac{e_1}{r_1^2}$, so findet man für die Komponenten

$$(40) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_{1x} = \frac{e_1}{r_1^3} \cos(r_1 x) = \frac{e_1}{r_1^3} \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{e_1}{r_1^3} (x - x_1), \\ \mathfrak{E}_{1y} = & = \frac{e_1}{r_1^3} (y - y_1), \\ \mathfrak{E}_{1z} = & = \frac{e_1}{r_1^3} (z - z_1). \end{cases}$$

Andererseits ist aber nach (39)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e_1}{r_1} \right) = - \frac{e_1}{r_1^3} (x - x_1) = - \mathfrak{E}_{1x}, \text{ usw.}$$

Also ist in der Tat

$$\mathfrak{E}_{1,x} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_{1,y} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_{1,z} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Natürlich gilt diese Gleichung

um uns den wirklichen Verhältnissen anzupassen, entweder räumlich oder flächenhaft verteilte Ladungen ins Auge fassen und deren Potentiale untersuchen müssen.

Zunächst betrachten wir das Potential räumlich verteilter Ladungen. Ist die Dichtigkeit der Ladung ϱ , so befindet sich in einem Volumenelement $d\tau$ die Elektrizitätsmenge $de = \varrho d\tau$, deren Potential $\frac{de}{r} = \frac{\varrho d\tau}{r}$ ist. Also ist das Gesamtpotential gleich der algebraischen Summe dieser Ausdrücke:

$$(45) \quad \Phi = \int \frac{\varrho d\tau}{r},$$

wobei das Integral über alle Stellen des Raumes, an denen die Ladungen sitzen, oder auch über den unendlichen Raum auszudehnen ist, da die von Ladung freien Stellen wegen $\varrho = 0$ keinen Beitrag zu ihm liefern.

Es ist zunächst klar, daß außerhalb der Ladungen alles genau so ist, wie wenn diese in Punkten konzentriert wären. Hier aber können wir mit dem Aufpunkte ins Innere der geladenen Raumteile eindringen und haben uns zu fragen, wie es dort mit Φ und seinen Ableitungen steht. Nähern wir uns also mit dem Aufpunkt einem geladenen Volumenelemente $d\tau$ beliebig an, so wird allerdings der Abstand r zwischen ihm und dem Aufpunkte unendlich klein von erster Ordnung. Führt man aber Polarkoordinaten (r, ϑ, ψ) um den Aufpunkt als Zentrum ein, so ist $d\tau = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\psi$, und

$$\frac{\varrho d\tau}{r} = \varrho r dr \sin \vartheta d\vartheta d\psi$$

und dieser Ausdruck bleibt für $r = 0$ nicht nur endlich, sondern verschwindet sogar. Das Glied $\frac{\varrho d\tau}{r}$ ruft also, wenn der Aufpunkt in $d\tau$ hineinrückt, keine Unstetigkeit des Potentials hervor. Das Potential räumlich kontinuierlich verteilter Ladungen ist also in allen Punkten des Raumes eindeutig und stetig.

Wie steht es mit den ersten Ableitungen? Außerhalb der Ladungen ist wieder alles beim alten; rückt der Aufpunkt in die Ladungen selbst hinein, so können wir jedenfalls folgendes aussagen: Die Kraftkomponenten des elektrischen Feldes \mathfrak{E}_x , \mathfrak{E}_y , \mathfrak{E}_z bleiben, wie wir uns schon überzeugt haben, eindeutig und stetig; da nun ganz allgemein wegen der Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes die negativen Ableitungen des Potentials diesen Kraftkomponenten gleich sind, so gilt die nämliche Aussage auch für die ersten Ableitungen des Potentials. Die ersten Ableitungen des Potentials räumlich kontinuierlich verbreiteter Ladungen sind also gleichfalls ausnahmslos in allen Punkten des Raumes eindeutig und stetig.

Wir haben demnach folgende Eigenschaften für das Potential räumlich kontinuierlich verbreiteter Ladungen: Es gehorcht der Poisson'schen Gleichung (bzw. an den von Ladung freien Stellen der

Laplaceschen Gleichung) und ist nebst seinen ersten partiellen Ableitungen überall eindeutig und stetig.

Wir haben nun weiter flächenhaft verteilte Ladungen zu untersuchen. Das Potential für solche ist ganz analog zu bilden:

$$(46) \quad \Phi = \int \frac{\eta dS}{r}$$

und ist für alle Punkte des Raumes, auch die der Fläche S selbst, eindeutig und stetig; letzteres folgt durch ganz analoge Betrachtungen, wie wir soeben für räumliche Ladungen angestellt haben. Was die ersten Ableitungen von Φ angeht, so wissen wir bereits aus den Gleichungen (35) und (36), daß die Ableitungen nach der Normale an geladenen Flächen unstetig werden, während die tangentiellen Ableitungen nach (37) überall stetig verlaufen. Das Potential flächenhafter Ladungen gehorcht also an allen Stellen des Raumes der Laplaceschen Gleichung, ist ferner selbst überall eindeutig und stetig, desgleichen seine ersten Ableitungen, mit Ausnahme der Ableitungen nach der Normalen beim Durchgang durch geladene Flächen.

Als letzten Fall betrachten wir das Potential von sog. „Doppelschichten“, einem Begriffe, der zuerst von Helmholtz eingeführt wurde. Unter einer Doppelschicht versteht man folgendes: Es sei eine Fläche S gegeben, deren Element dS sei (Fig. 8); die Normale sei n .

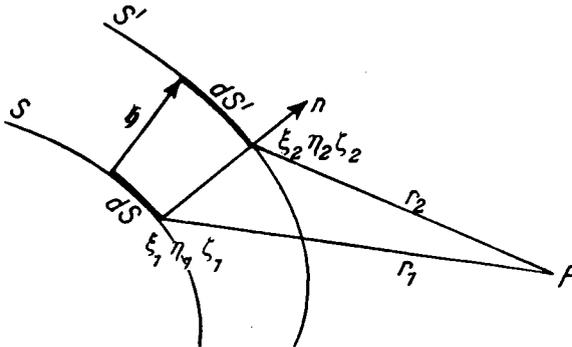


Fig. 8.

Gehen wir nun von der Fläche um ein Stückchen h in der positiven Normalenrichtung vorwärts, so bekommen wir eine zweite benachbarte Fläche S' , und wenn wir sämtliche Normalen durch die Begrenzung des ersten Flächenelementes dS ziehen, so schneiden wir aus dieser zweiten Fläche gleichfalls ein Flächenelement dS' heraus. Die ursprüngliche Fläche denken wir uns mit negativer Ladungsdichte $-\eta$ belegt, die dagegen in der positiven Richtung der Normale verschobene zweite Fläche mit positiver Flächendichte $+\eta'$, so daß absolut genommen

stets $\eta dS = \eta' dS'$ ist. Dieses Flächenpaar nennt man eine elektrische Doppelschicht. Läßt man bei festgehaltenem η die eine Fläche sich der anderen nähern, d. h. den Abstand h gegen Null gehen, so würde im Grenzfalle $h = 0$ eine ungeladene Fläche S resultieren. Wenn man aber dafür sorgt, daß gleichzeitig η so wächst, daß das Produkt $\eta \cdot h$ immer einen endlichen Wert behält, so kann man auch zur Grenze $h = 0$ übergehen, ohne daß die Doppelschicht verschwindet. In diesem Grenzfalle wird streng $\eta = \eta'$ und $dS = dS'$. Diesen Grenzübergang wollen wir nun vollziehen; man erkennt schon hier, daß es auf die Größe des Produktes (ηh) sehr wesentlich ankommt. Es ist zweckmäßig, die Größe h , die ja eine bestimmte Richtung, nämlich die der positiven Flächennormalen hat, als den Betrag eines Vektors \mathfrak{h} aufzufassen; dann ist entsprechend $m = \eta h$ der Betrag eines Vektors

$$(47) \quad \mathfrak{m} = \eta \mathfrak{h},$$

den man als das Moment (pro Flächeneinheit) der Doppelschicht bezeichnet. Dieser Vektor hat dieselbe Richtung wie \mathfrak{h} , er ist nur vom η -fachen Betrage wie dieser, d. h. er ist von der negativen Fläche (der Senke) zur positiven (zur Quelle) gerichtet.

Wir wollen nun das Potential einer Doppelschicht untersuchen, zunächst das eines Elementes dS derselben. Nach Fig. 8 ist dieses Potential im Aufpunkte P offenbar

$$(48) \quad \eta dS \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

wenn

$$r_1 = \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + (z - \zeta_1)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2 + (z - \zeta_2)^2}$$

die Entfernungen der beiden Flächenelemente von P bedeuten. Nun kann man nach dem Taylorsche Satz schreiben

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \xi} (\xi_2 - \xi_1) + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \eta} (\eta_2 - \eta_1) + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \zeta} (\zeta_2 - \zeta_1),$$

was in (48) eingesetzt liefert:

$$(49) \quad \eta dS \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} (\xi_2 - \xi_1) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} (\eta_2 - \eta_1) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} (\zeta_2 - \zeta_1) \right],$$

wobei wir jetzt an r den Index 1 einfach fortgelassen haben. $(\xi_2 - \xi_1)$, $(\eta_2 - \eta_1)$, $(\zeta_2 - \zeta_1)$ sind offenbar die Komponenten des Vektors \mathfrak{h} , dessen Betrag den Abstand der beiden Flächenelemente bestimmt, d. h. es ist

$$\xi_2 - \xi_1 = \mathfrak{h}_x, \quad \eta_2 - \eta_1 = \mathfrak{h}_y, \quad \zeta_2 - \zeta_1 = \mathfrak{h}_z;$$

also können wir (49) schreiben:

$$\eta dS \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \mathfrak{H}_x + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \mathfrak{H}_y + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \mathfrak{H}_z \right],$$

oder:

$$(50) \quad dS \left[\mathfrak{m}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist offenbar das skalare Produkt aus dem Vektormoment der Doppelschicht \mathfrak{m} und dem Gradienten von $\left(\frac{1}{r}\right)$, wobei aber zu beachten ist, daß bei der Gradientenbildung der Aufpunkt $(x \ y \ z)$ konstant bleibt und nur (ξ, η, ζ) , d. h. der Ort der Doppelschicht geändert wird. Denn in der Tat haben wir ja die Quellseite der Doppelschicht in Fig. 8 dadurch erhalten, daß wir vom Punkte $(\xi_1 \ \eta_1 \ \zeta_1)$ übergangen zu dem Punkte $\xi_2 = \xi_1 + d\xi$, $\eta_2 = \eta_1 + d\eta$, $\zeta_2 = \zeta_1 + d\zeta$. Um anzudeuten, daß bei der fraglichen Gradientenbildung die Quelle, nicht der Aufpunkt verschoben wird, pflegt man an das Zeichen „grad“ den Index q anzufügen.¹⁾ So wird aus Formel (50):

$$(51) \quad dS \left(\mathfrak{m}, \text{grad}_q \frac{1}{r} \right).$$

Da der Gradient von $\frac{1}{r}$ und der Vektor \mathfrak{m} die gleiche Richtung haben, ist das skalare Produkt hier einfach gleich dem gewöhnlichen Produkt der Beträge, also

$$(51a) \quad m dS \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}.$$

Für das Gesamtpotential der Doppelschicht erhalten wir also den Ausdruck:

$$(52) \quad \Phi = \int \left(\mathfrak{m}, \text{grad}_q \frac{1}{r} \right) dS = \int m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS.$$

Man sieht, daß rein formal das Auftreten des Ausdruckes

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \quad \text{bzw.} \quad \text{grad}_q \frac{1}{r}$$

für solche Potentiale charakteristisch ist. Wir wollen dafür noch einen etwas bequemeren Ausdruck ableiten, den man Gauss verdankt.

¹⁾ Natürlich ist, da $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$ ist, usw. stets:

$$\text{grad}_q \frac{1}{r} = -\text{grad}_a \frac{1}{r},$$

wobei der Index a eine Verschiebung des Aufpunktes bedeuten soll.

Es sei in Fig. 9 S eine (zunächst ungeschlossene) Fläche, auf der eine Doppelschicht ausgebreitet ist. Wir nennen allgemein diejenige Seite der Schicht, die die positive Ladung trägt, die positive Seite und entsprechend die andere die negative; die Normale weist wie immer von der negativen zur positiven Seite der Doppelschicht. dS sei ihr Flächenelement, P der Aufpunkt, für den das Potential berechnet werden soll. Es kommt nun darauf an, ob der Aufpunkt auf der positiven oder der negativen Seite der Schicht liegt; befindet er sich, wie in Fig. 9, auf der negativen Seite, so bildet der Fahrstrahl r vom Aufpunkte zum Flächenelemente dS mit der positiven Normalenrichtung n einen spitzen

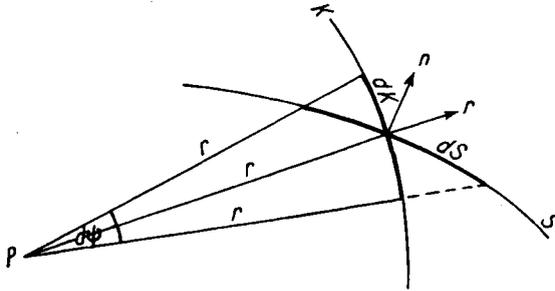


Fig. 9.

Winkel, so daß $\cos(r, n) > 0$ ist. Befindet sich dagegen der Aufpunkt auf der positiven Seite der Doppelschicht, so fällt der genannte Winkel stumpf, sein Kosinus negativ aus.

Wir ziehen nun von P zur Begrenzung des Flächenelementes dS lauter Fahrstrahlen, die somit einen Kegelmantel erfüllen, dessen Basis dS selbst ist. Schlagen wir nun um P eine Kugel mit dem Radius r , so schneidet der genannte Kegel aus der Kugeloberfläche ein Element dK aus, das wir als die Projektion von dS betrachten können. Es ist daher, wenn $d\psi$ den Kegelwinkel bedeutet:

$$dK = r^2 d\psi = \pm dS \cos(r, n).$$

Dabei gilt das obere Vorzeichen, wenn sich der Aufpunkt auf der negativen Schichtseite befindet, das untere Vorzeichen im anderen Fall. Denn dK und dS sind stets positiv, also ist im letzteren Falle wegen des negativen Wertes des Kosinus noch ein Minuszeichen hinzuzufügen. Setzt man den aus der obigen Gleichung folgenden Wert von dS in Gleichung (52) ein, so folgt der Reihe nach:

$$\Phi = - \int \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} dS = \mp \int \frac{m}{r^2} \cos(r, n) \frac{r^2 d\psi}{\cos(r, n)} = \mp \int m d\psi.$$

Ist insbesondere das Moment der Doppelschicht konstant, so haben wir

$$(53) \quad \Phi = \mp m \psi,$$

wo ψ der gesamte räumliche Winkel ist, unter dem die Doppelschicht

von P aus erscheint. Dies ist der von Gauss für das Potential einer Doppelschicht angegebene Ausdruck.

Ist S geschlossen und P ein innerer Punkt, so ist $\psi = 4\pi$; für innere Punkte ist also das Potential einer geschlossenen konstanten Doppelschicht:

$$(54) \quad \Phi_i = \mp 4\pi m .$$

Das Minuszeichen gilt, wenn die positive Seite der Doppelschicht nach außen gelegen ist, das Pluszeichen, wenn sie innen ist. Für äußere Punkte P dagegen ist $\psi = 0$, d. h. das Potential einer geschlossenen Doppelschicht von konstantem Moment ist im ganzen Außenraume gleich Null. In diesem letzteren Umstande liegt die Schwierigkeit begründet, experimentell das Vorhandensein solcher geschlossenen konstanten Doppelschichten nachzuweisen. Wir haben also:

$$(54a) \quad \Phi_a = 0 .$$

Das Ergebnis der Gleichung (54a) kann man sich übrigens leicht anschaulich mit Hilfe der Gleichung (53) erklären. Denn der von einem

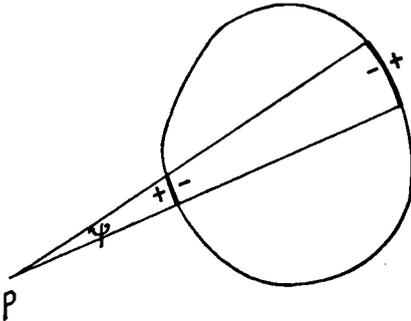


Fig. 10a.

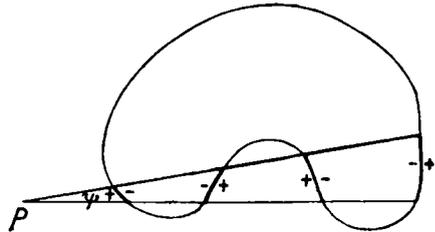


Fig. 10b.

äußeren Punkte P gezogene Fahrstrahl schneidet die geschlossene Fläche S mindestens an zwei, allgemein an einer geraden Zahl von Stellen (Figg. 10a und 10b).

Bleiben wir zunächst bei dem einfachen Fall der Fig. 10a, so erscheinen die beiden stark ausgezogenen Flächenstücke von P aus unter demselben Winkel ψ , aber das eine Flächenstück wendet dem Punkte P die positive, das zweite die negative Seite zu; daher sind die Beiträge, die sie zu dem Potential Φ liefern, nach (53) entgegengesetzt gleich und annullieren sich daher. Ganz analog ist es im Falle der Fig. 10b: Auch hier annullieren sich die Beiträge der vier Flächenstücke paarweise. Liegt der Punkt P dagegen innerhalb der Fläche, so gilt auch in den komplizierteren der Fig. 10b entsprechenden Fällen doch stets Gleichung (54). Denn hier schneidet der Fahrstrahl die Doppelfläche in einer ungeraden

Zahl von Punkten; je zwei Flächenstücke annullieren sich, so daß stets nur ein Flächenstück übrigbleibt; diese übrigbleibenden summieren sich zu dem durch (54) angegebenen Werte. Die Gleichungen (54) und (54a) gelten daher ganz allgemein.

Durch Beachtung von (54) und (54a) folgt also, daß das Potential einer Doppelschicht beim Hindurchtritt durch die Fläche selbst unstetig wird — im Gegensatz zu den bisher behandelten Potentialen; der Sprung des Doppelschichtpotentials ist gleich

$$\Phi_a - \Phi_i = \pm 4\pi m,$$

wobei das Pluszeichen gilt, wenn die positive Seite nach außen gekehrt ist.

Was die ersten Ableitungen des Potentials von Doppelschichten angeht, so sieht man leicht ein, daß die normalen Ableitungen stetig durch die Doppelschicht hindurchgehen müssen, also überall stetig sind. Denn beim Durchgang durch die positive Seite der Schicht würde $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ um den Betrag $-4\pi\eta$, beim Durchgang durch die negative um $+4\pi\eta$ springen, weil wir es ja mit Flächenladungen zu tun haben; da im Grenzfall die beiden Schichten unendlich nahe zusammenrücken, geht demnach im ganzen $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ stetig durch die Schicht hindurch.

Anders ist es im allgemeinen mit den tangentiellen Ableitungen $\frac{\partial\Phi}{\partial l}$. Wenn die Doppelschicht ein veränderliches Moment \mathbf{m} besitzt, so sind, wie die genauere Untersuchung zeigt, die tangentiellen Ableitungen zu beiden Seiten der Doppelschicht verschieden, $\frac{\partial\Phi}{\partial l}$ wird also unstetig an der Schicht selbst.

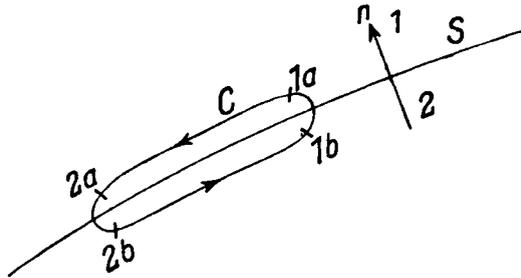


Fig. 11.

Man kann dies so zeigen: Es sei in Fig. 11 S die Doppelschicht, und wir ziehen eine geschlossene Kurve C in der aus der Figur ersichtlichen Weise, genau so und in derselben Absicht, wie es z. B. in Fig. 6 geschehen ist. Wegen der ausnahmslosen Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes muß also sein

$$\oint_C \frac{\partial\Phi}{\partial l} dl = 0,$$

wenn dl ein Längenelement der Kurve C bedeutet. Auf der Kurve C sind vier Punkte markiert 1_a und 1_b , 2_a und 2_b , je zwei unendlich dicht benachbart, aber auf verschiedenen Seiten der Doppelschicht. Die Kurve C durchstößt bei den Punkten 1 die Doppelschicht in der positiven Normalenrichtung, bei 2 in der umgekehrten. Das obige Integral kann somit ausführlich geschrieben werden:

$$\int_{1_a}^{2_a} \frac{\partial \Phi'}{\partial l} dl + \int_{2_a}^{2_b} \frac{\partial \Phi}{\partial l} dl + \int_{2_b}^{1_b} \frac{\partial \Phi''}{\partial l} dl + \int_{1_b}^{1_a} \frac{\partial \Phi}{\partial l} dl = 0.$$

Im ersten und dritten Integral haben wir an Φ obere Striche zugesetzt, weil in beiden Integralen der Integrationsweg ganz auf einer Seite der Doppelschicht verläuft; Φ' ist der Potentialwert auf der ersten, Φ'' auf der zweiten Seite der Doppelschicht. Das zweite und vierte Integral, die sich auf den Durchgang des Integrationsweges durch die Doppelschicht beziehen, würden natürlich fortfallen, wenn das Potential stetig wäre, da wegen der infinitesimalen Entfernung der Punkte 1_a und 1_b bzw. 2_a und 2_b voneinander beide Integrale unendlich kleine Werte annehmen müßten. Bisher hatten wir es nur mit stetigen Potentialen zu tun, und die obige Betrachtung lieferte daher auch stets das Resultat, daß die tangentiellen Ableitungen des Potentials selbst stetig

seien. Hier aber ist das Potential unstetig, und das Integral $\int_{2_a}^{2_b} \frac{\partial \Phi}{\partial l} dl$

ist offenbar gerade gleich dem Potentialsprung an der Stelle 2, d. h. gleich dem 4π fachen Moment der Doppelschicht an der Stelle 2, d. h. gleich

$4\pi m_2$. Ebenso ist das Integral $\int_{1_b}^{1_a} \frac{\partial \Phi}{\partial l} dl = -4\pi m_1$, wenn m_1 das Moment an der Stelle 1 ist. Demgemäß liefert die obige Gleichung:

$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial l} (\Phi' - \Phi'') dl = -4\pi (m_2 - m_1).$$

Nehmen wir die Entfernung der Punkte 1 und 2 auf der Kurve C selbst infinitesimal gleich dl an, so reduziert sich das Integral auf $\frac{\partial}{\partial l} (\Phi' - \Phi'') dl$; die Differenz $(m_2 - m_1)$ wird, da m_2 sich auf eine um dl von 1 entfernte Stelle bezieht, nach dem Taylorsche Satz gleich $\frac{\partial m}{\partial l} dl$. Mithin bekommen wir schließlich für die Unstetigkeit der tangentiellen Ableitungen des Doppelschichtpotentials die Beziehung:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial l} - \frac{\partial \Phi''}{\partial l} = -4\pi \frac{\partial m}{\partial l}.$$

Nur in dem wichtigsten Falle, der uns im folgenden allein beschäftigen wird, daß das Moment längs der ganzen Doppelschicht konstant ist, —

dann nennt man die Doppelschicht „homogen“ — bleibt also auch $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ stetig, da dann $\frac{\partial m}{\partial l} = 0$ wird.

Das Potential einer homogenen Doppelschicht hat also folgende Eigenschaften: Es gehorcht im ganzen Raume der Laplaceschen Gleichung, ist unstetig nur an der Fläche selbst, seine normalen und tangentiellen Ableitungen sind überall stetig.

Damit haben wir unseren kurzen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der Potentiale beendet und können nun überlegen, was für Schlüsse wir daraus ziehen können, wenn wir diese Eigenschaften mit den allgemeinen Gleichungen (33) bis (38) des elektrostatischen Potentials zusammenhalten.

Wenn wir im Felde Stellen finden, an denen $\Delta \Phi \neq 0$ ist, so haben wir es sicher mit räumlich verteilten Ladungen zu tun, ohne daß jedoch gewöhnliche Flächenladungen und Doppelschichten ausgeschlossen zu sein brauchen, da diese nichts zu $\Delta \Phi$ beitragen; ist dagegen überall $\Delta \Phi = 0$, so kommen nur Flächenladungen oder Doppelschichten oder beides zusammen in Frage. Ob gewöhnliche Flächenladung oder Doppelschichten vorhanden sind, würde sich ergeben durch eine Untersuchung, ob Φ überall stetig ist oder an bestimmten Stellen Sprünge macht; im ersteren Falle haben wir sicher nur Flächenladungen. Im zweiten Falle haben wir sicher eine Doppelschicht, ohne daß eine gleichzeitige einfache Ladung ausgeschlossen zu sein braucht. Stetigkeit der normalen Ableitung des Potentials schließt Flächenladung aus, da dies nur mit räumlicher Dichte oder Doppelschicht vereinbar ist. Stetigkeit der tangentiellen Ableitung von Φ dagegen kann sowohl durch Flächenladung als auch durch Doppelschichten konstanten Moments erzeugt werden; Unstetigkeit der tangentiellen Ableitung dagegen ist nur vereinbar mit Doppelschichten mit variablem Moment.

Nun sind im elektrostatischen Felde nach (35) die normalen Ableitungen unstetig, nach (37) die tangentiellen dagegen stetig. Daraus ergibt sich, daß diese beiden Gleichungen keine Entscheidung darüber gestatten, ob neben einer gewöhnlichen Flächenladung nicht auch eine Doppelschicht konstanten Moments auf der Fläche (z. B. einer Leiteroberfläche) sitzt. Entschieden könnte dies werden, wenn nachgewiesen werden könnte, ob das Potential selbst stetig oder unstetig ist, was im allgemeinen aber mit Schwierigkeiten verbunden ist, weil das Potential einer geschlossenen Doppelschicht im Außenraum gleich Null ist. Wir werden aber später sehen, daß an den Oberflächen in der Tat Doppelschichten konstanten Moments vorhanden sind.

Schließlich sei der Leser noch auf die sog. zweidimensionalen Probleme, d. h. die Lösungen der zweidimensionalen Laplaceschen Gleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ aufmerksam gemacht, die durch beliebige Funktionen einer komplexen Variablen $(x + iy)$ geliefert werden; diese sind im

I. Bande in Nr. 183 und nochmals im II. Bande in Nr. 8 so ausführlich erörtert worden, daß hier ein Hinweis auf sie genügen kann.

7. Allgemeine Folgerungen; das elektrostatische Problem; Eindeutigkeit der Lösungen.

Wir haben in Nr. 4 gezeigt, daß man durch Konstruktion der Feldlinien nach Faradays Vorschrift eine Einsicht in die Struktur des Feldes bekommt, indem die Kraftlinie selbst in jedem Punkte die Richtung des Feldes, die Kraftliniendichte dagegen den Betrag des Vektors \mathfrak{E} liefert. Etwas Analoges läßt sich durchführen, nachdem wir den Begriff des Potentials kennengelernt haben. Denn wir können im Felde Flächen konstruieren, auf denen das Potential je konstante Werte hat, sog. Äquipotential- oder Niveauflächen (Fig. 12).

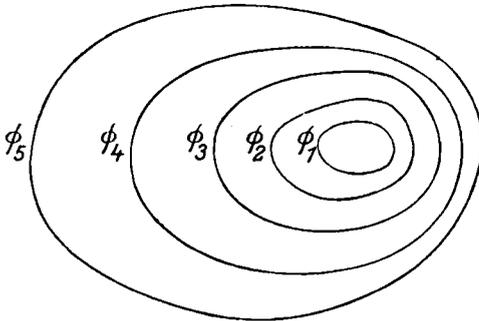


Fig. 12.

In Fig. 12 sind fünf solcher Flächen gezogen, die den Potentialwerten $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ entsprechen mögen. Zieht man die Flächen überdies so, daß von einer Niveaufläche zur anderen der Potentialwert sich um ein konstantes Stück $\delta\Phi$ ändert, so gestatten auch diese Flächen, Richtung und Betrag des Feldvektors \mathfrak{E} abzulesen.

Denn wenn wir eine Ladungseinheit längs einer Niveaufläche verschieben, so wird natürlich keine Arbeit geleistet, da das Potential konstant bleibt. Es ist also längs jeder Kurve s auf einer Niveaufläche:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0.$$

Andererseits ist aber auch

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \mathfrak{E}_s = |\mathfrak{E}| \cos(\mathfrak{E}, s).$$

Es verschwindet also der Ausdruck $|\mathfrak{E}| \cos(\mathfrak{E}, s)$, d. h.: Solange $|\mathfrak{E}| \neq 0$ ist, muß $\cos(\mathfrak{E}, s) = 0$ sein, d. h. $\mathfrak{E} \perp s$ stehen. Mit anderen Worten: Die elektrische Kraft \mathfrak{E} ist senkrecht zu den Niveauflächen und zwar stets von der Fläche höheren Potentials zu der benachbarten niederen Potentials gerichtet. Eine Ausnahme von dieser Gesetzmäßigkeit kann nur an gewissen singulären Stellen stattfinden, an denen die elektrische Kraft \mathfrak{E} verschwindet; dann läßt sich offenbar nichts über den Winkel (\mathfrak{E}, s) aus der obigen Gleichung schließen. Wir haben schon früher — im Anfang der Nr. 4 — darauf aufmerksam gemacht, daß in diesen nämlichen singulären Stellen

auch die Gleichung (14) der Kraftlinien ihren Sinn verliert. Wie im besonderen die Verhältnisse in solchen Fällen liegen, wollen wir weiter unten an einem einfachen Beispiel erläutern.

Wir kehren zu unserer allgemeinen Erörterung zurück: Geht man von einer Niveaulfläche zu der benachbarten über, so ändert sich das Potential nach unserer Voraussetzung um den konstanten Betrag $\delta\Phi$. Sei die normale Entfernung der Flächen voneinander an dieser Stelle etwa h , so ist der Gradient des Potentials an dieser Stelle gleich $\frac{\delta\Phi}{h}$, und das ist absolut genommen, gleich dem Betrage des Feldvektors \mathfrak{E} an dieser Stelle. Der Betrag der elektrischen Kraft ist also umgekehrt proportional dem Abstand der Niveaulflächen voneinander. Wo die Niveaulflächen sich zusammendrängen, haben wir große, wo sie weit voneinander entfernt sind, kleine Werte der elektrischen Kraft.

Wir können das Bild der Fig. 12 vervollständigen, indem wir noch die Kraftlinien einzeichnen (Fig. 12a). Da \mathfrak{E} senkrecht zu den Niveaulflächen steht, so gilt dasselbe von den Kraftlinien; sie sind, mathematisch gesprochen, die orthogonalen Trajektorien der Niveaulflächen (abgesehen von den oben erwähnten singulären Stellen).

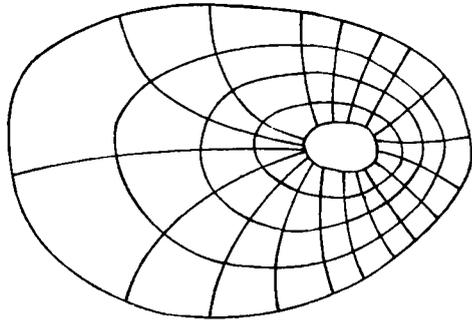


Fig. 12a.

Grenzen wir ferner auf einer Niveaulfläche ein beliebiges, hinreichend kleines Flächenstück ab und ziehen durch seinen Umfang die Kraftlinien, so entsteht ein röhrenförmiges Gebilde; man nennt dies eine „Kraftröhre“. Da die Seitenwände einer Kraftröhre aus Kraftlinien gebildet sind, so tritt durch diese Wände kein Kraftfluß ein oder aus, da für sie $\mathfrak{E}_n = 0$ ist. Kraftfluß kann nur ein- und austreten durch die Grund- bzw. Gegenfläche der Kraftröhre, und zwar ist der eintretende Kraftfluß offenbar gleich dem austretenden, da durch die Seitenwände nichts hinzukommt oder abgeht. In einer Kraftröhre ist also der Kraftfluß konstant. Indem man sich das Feld in dieser Weise durch Äquipotentialflächen und Kraftröhren in Zellen zerlegt, hat man einen vollständigen Einblick in seine Struktur gewonnen.

Eine weitere Folgerung aus den vorhergehenden Erörterungen ist die folgende: Da das elektrische Feld im Innern eines Leiters im Gleichgewicht stets gleich Null ist, so muß das Potential eines Leiters im Innern und auf seiner ganzen Oberfläche einen konstanten Wert haben. Es ist damit zwar nicht gesagt, daß diese Kon-

stante bei zusammengesetzten Leitern aus chemisch verschiedenem Material längs der ganzen Oberfläche denselben Wert haben müsse; es ist durchaus möglich und auch im allgemeinen der Fall, daß z. B. bei einem Leiter, der zum Teil aus Zink, zum Teil aus Kupfer besteht, das Potential auf der Zinkoberfläche den konstanten Wert Φ_1 und auf der Kupferoberfläche den davon verschiedenen konstanten Wert Φ_2 annimmt. Denn auch jetzt noch ist das Feld im Innern der Metalle gleich Null. Doch wollen wir vorläufig von diesem Falle, in dem eine Unstetigkeit des Potentialwertes auf der Leiteroberfläche eintritt, die also einer Doppelschicht an der Berührungsschicht der beiden verschiedenen Leiter entspricht, absehen, um später in Nr. 17 ausführlich darauf zurückzukommen. In dem von jetzt an vorausgesetzten einfachen Falle ist also

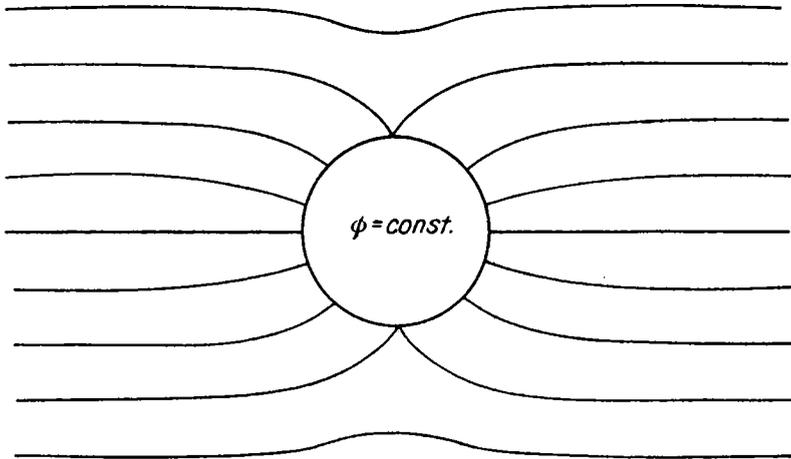


Fig. 13.

die Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche, was gleichbedeutend mit der Aussage ist, daß die elektrische Kraft, d. h. die Kraftlinien senkrecht auf ihr stehen, wie wir bereits früher hervorgehoben hatten. Das hat eine wichtige Konsequenz, wenn wir einen beliebigen Leiter in ein schon bestehendes Feld hineinbringen. Seine Anwesenheit stört natürlich das ursprünglich vorhandene Feld in mehr oder minder komplizierter Weise, die im allgemeinen schwierig zu berechnen ist; der oben ausgesprochene Satz jedoch, daß jede Leiteroberfläche Äquipotentialfläche sein muß, liefert in den meisten Fällen einen qualitativen Überblick, da man in jedem Falle weiß, daß die Kraftlinien senkrecht auf dem Leiter endigen müssen. Z. B. werde in ein homogenes Feld (d. h. ein solches mit parallelen äquidistanten Kraftlinien) eine leitende Kugel gebracht; das Kraftlinienbild muß dann ungefähr das Aussehen der Fig. 13 haben. Wir werden auf diese Verhältnisse, insbesondere auf den Fall der leitenden Kugel im homogenen Felde, der sich leicht streng behandeln

läßt, noch ausführlich nach verschiedenen Gesichtspunkten einzugehen haben.

Nunmehr kommen wir auf die bereits oben angeschnittene Frage zurück, wie sich Äquipotentialflächen und Kraftlinien in den sog. singulären Stellen verhalten, an denen $\mathcal{E} = 0$ ist. Wir wählen als Beispiel zur Erläuterung dieser Verhältnisse die folgende zweidimensionale Lösung der Laplaceschen Gleichung¹⁾:

$$\varphi + i\psi = (x + iy)^2,$$

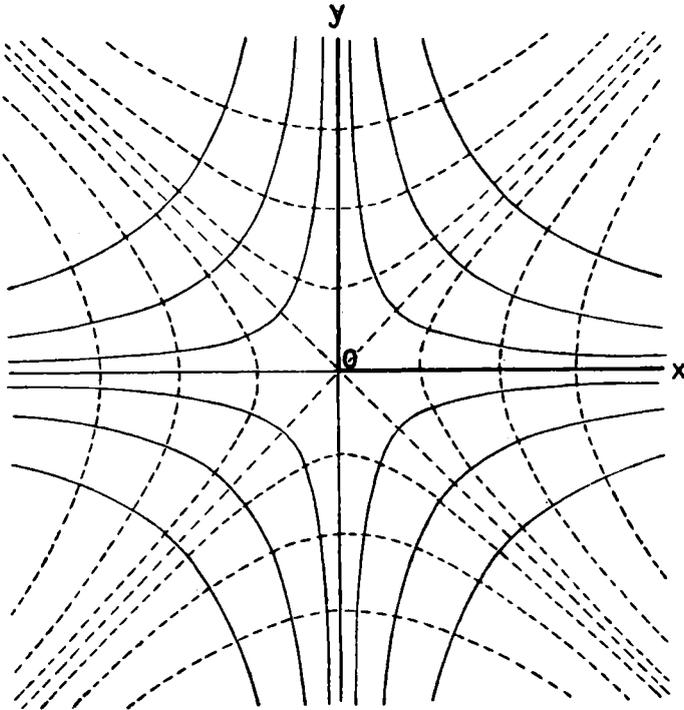


Fig. 14.

woraus sofort in bekannter Weise folgt

$$\begin{aligned}\varphi &= x^2 - y^2, \\ \psi &= 2xy.\end{aligned}$$

Darin sind, wie wir früher ausführlich auseinandergesetzt haben, die Kurven $\psi = \text{const}$ die Äquipotentiallinien, die Kurven $\varphi = \text{const}$ die Kraftlinien, oder umgekehrt. Beide Kurvenscharen sind hier Hyperbeln, die sich im allgemeinen rechtwinklig durchschneiden; die Kurven $\psi = \text{const}$ sind in der Fig. 14 stark ausgezogen, die Kraftlinien gestrichelt eingezeichnet.

¹⁾ Vgl. dazu Bd. I, pag. 835ff. oder Bd. II, pag. 32ff.

Die Koordinatenachsen sind die Asymptoten an die gleichseitigen Hyperbeln $xy = \text{const}$ und entsprechen dem Nullwert dieser Konstanten. Ebenso entsprechen die unter 45° dagegen geneigten Geraden durch den Anfangspunkt der Gleichung $x^2 - y^2 = 0$. Nun ist offenbar der Punkt $x = y = 0$ ein singulärer Punkt in dem von uns gemeinten Sinne; denn es sind dort die Kraftkomponenten

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

und man erkennt aus der Fig. 14 unmittelbar, daß an dieser Stelle die Kraftlinien und Äquipotentiallinien sich unter einem Winkel von $\pi/4$ durchschneiden, also nicht mehr orthogonal sind.

Etwas allgemeiner ist das Beispiel

$$\begin{aligned} \varphi + i \psi &= (x + i y)^n, \quad (n \text{ ganze Zahl}) \\ &= r^n e^{i n \vartheta}, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \varphi &= r^n \cos n \vartheta, \\ \psi &= r^n \sin n \vartheta. \end{aligned}$$

Nehmen wir wieder die Kurven $\psi = \text{const}$ als Äquipotentiallinien, so ist die Kurve $\psi = 0$ gegeben durch $\sin n \vartheta = 0$, d. h. durch die durch den Anfangspunkt gehenden Geraden

$$\vartheta = \frac{k}{n} \pi,$$

wo k eine ganze Zahl ist, die von 0 bis $(n - 1)$ läuft; für größere Werte von k wiederholt sich alles. Durch diese Geraden wird der gestreckte Winkel π in n Teile geteilt, so daß der Winkel zweier aufeinanderfolgender Geraden $\frac{\pi}{n}$ ist. Dieser Winkel wird nun gerade halbiert durch die Kraftliniengeraden $\cos n \vartheta = 0$, für die gilt:

$$\vartheta = \frac{k}{n} \pi + \frac{\pi}{2n}.$$

Hier schneiden sich im Nullpunkt, der in unserem Sinne singulär ist, die Geradenscharen $\psi = 0$ und $\varphi = 0$ gegenseitig unter Winkeln von $\frac{\pi}{2n}$; für $n = 2$ erhalten wir den vorhergehenden Fall.

Dieses zweidimensionale Beispiel möge genügen, um zu zeigen, daß in den singulären Punkten besondere Verhältnisse vorliegen; in dreidimensionalen Fällen liegt die Sache ähnlich, wenn auch komplizierter; doch lassen sie sich auf die zweidimensionalen Probleme zurückführen. Wir werden später in Nr. 10 einen dreidimensionalen Fall kennenlernen, bei dem solche singuläre Stellen im Felde auftreten.

Blicken wir nun einmal zurück auf die allgemeinen Ergebnisse, die wir für das Potential in den Gleichungen (33) bis (38) erhalten haben.

Es können drei Arten von Problemen auftreten, die wir der Reihe nach besprechen wollen.

Erstens kann uns das Potential Φ als Funktion des Ortes von vornherein gegeben sein; dann liegt die Aufgabe vor, die räumlich verteilten Ladungen ρ und die Flächenladungen η zu bestimmen. Diese Aufgabe ist immer lösbar; denn um die räumlichen Ladungen zu bestimmen, brauchen wir nach (39) nur den Ausdruck $-\frac{\Delta\Phi}{4\pi}$ zu bilden;

die Flächenladungen werden nach (35) durch den Wert von $-\frac{\frac{\partial\Phi'}{\partial n} - \frac{\partial\Phi''}{\partial n}}{4\pi}$

(bzw. durch $-\frac{\partial\Phi}{4\pi}$ nach (36) an Leiteroberflächen) gegeben. Es sind also nur Differentiationen, d. h. immer mögliche mathematische Operationen auszuführen. Es ist ferner klar, daß dies Problem auch nur eine Lösung haben kann. Aber der Fall, daß Φ gegeben ist, liegt naturgemäß nur in den seltensten Fällen vor.

Es können zweitens auch umgekehrt die Größen $\rho(xyz)$ und $\eta(xyz)$ als Funktionen des Ortes von vornherein gegeben sein. Dann ist das mathematische Problem zu lösen, die durch die Gleichungen (33) bis (38) definierte Funktion Φ , das Potential, zu bestimmen. Auch diese Aufgabe ist lösbar, und zwar nur auf eine einzige Weise. Denn nehmen wir einmal umgekehrt an, es seien zwei verschiedene Lösungen Φ_1 und Φ_2 gefunden, so müssen diese die folgenden Gleichungen identisch erfüllen:

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi_1 \equiv -4\pi\rho \\ \Delta\Phi_2 \equiv -4\pi\rho \end{array} \right\} \text{ nach Gleichung (33) ,}$$

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\Phi_1'}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_1''}{\partial n} \equiv -4\pi\eta \\ \frac{\partial\Phi_2'}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_2''}{\partial n} \equiv -4\pi\eta \end{array} \right\} \text{ nach Gleichung (35) ,}$$

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \equiv -4\pi\eta \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \equiv -4\pi\eta \end{array} \right\} \text{ nach Gleichung (36) an Leiteroberflächen.}$$

Ferner wären sowohl $\frac{\partial\Phi_1}{\partial l}$ als $\frac{\partial\Phi_2}{\partial l}$ überall stetig. Bilden wir nun die Differenz der beiden als verschieden vorausgesetzten Lösungen, und nennen sie

$$(58) \quad \psi = \Phi_1 - \Phi_2 ,$$

so müßte diese Funktion ψ folgenden Bedingungen genügen, wie sie sich durch Subtraktion der Einzelgleichungen (55) bzw. (56) bzw. (57) voneinander ergeben:

$$(59) \quad \Delta \psi \equiv 0 \text{ im ganzen Raume,}$$

$$(60) \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial n} \equiv 0 \text{ an geladenen Flächen,}$$

$$(61) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \equiv 0 \text{ an Leiteroberflächen,}$$

und endlich wäre $\frac{\partial \psi}{\partial l}$ überall stetig. D. h. ψ wäre eine Funktion, die im ganzen Raum der Laplaceschen Gleichung genügt und deren sämtliche (normale wie tangentielle) erste Ableitungen gleichfalls im ganzen Raume stetig sind. Von einer derartigen Funktion kann man aber mit Hilfe eines Greenschen Satzes zeigen, daß sie konstant bzw. gleich Null sein muß. Denn für zwei Funktionen u, v , die nebst ihren ersten Ableitungen überall stetig sind, gilt nach Green die Identität¹⁾:

$$(62) \quad \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\tau = - \int u \Delta v d\tau + \int u \frac{\partial v}{\partial n} dS.$$

Setzen wir nun $u = v = \psi$, so würde für unsere Funktion die Gleichung folgen:

$$(63) \quad \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = - \int \psi \Delta \psi d\tau + \int \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS.$$

Die Volumintegrale sind über den ganzen Raum, das Flächenintegral über sämtliche geladenen Flächen und die unendlich ferne Oberfläche zu erstrecken. Nach (59) ist aber überall $\Delta \psi \equiv 0$, d. h. das Raumintegral rechts fällt fort. Diejenigen der Flächenintegrale, die über die Leiteroberflächen zu erstrecken sind, fallen fort, weil nach (61) an den Leiteroberflächen $\frac{\partial \psi}{\partial n} \equiv 0$ ist; bei den übrigen geladenen Flächen ist zu bedenken, daß sie zwei Seiten haben, über die zu integrieren ist; aber wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ gemäß (60) heben sich die Integrale über die beiden Seiten einer solchen Fläche auf; auch ihr Gesamtbetrag ist daher Null. Ferner wird ψ als Potential im Unendlichen mindestens von der Größenordnung $\frac{1}{r}$, $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ also mindestens von der Größenordnung $\frac{1}{r^2}$ unendlich klein; $\psi \frac{\partial \psi}{\partial n}$ ist also unendlich klein wie $\frac{1}{r^3}$, während dS nur von der Ordnung r^2 unendlich groß wird. Mithin fällt auch dieses Oberflächenintegral fort. Es bleibt daher einfach:

$$(64) \quad \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0.$$

¹⁾ Vgl. z. B. Bd. 1, Nr. 117, pag. 530; daß hier das Vorzeichen im Oberflächenintegral auf der rechten Seite anders ist wie dort, erklärt sich durch die gegen dort umgekehrte Wahl der positiven Normalenrichtung.

Da der Integrand aus lauter positiven Größen besteht, so kann das Integral nur verschwinden, wenn der Integrand verschwindet, d. h. es ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \text{d. h. } \psi = \text{Const.}$$

Da wir aber den Wert des Potentials im Unendlichen gleich Null annehmen, muß auch diese Konstante gleich Null sein; also folgt in der Tat $\psi = 0$, d. h. $\Phi_1 = \Phi_2$. Unter den gegebenen Bedingungen ist also nur eine Lösung des Problems vorhanden, wie wir behauptet haben.

Indessen ist auch dieser zweite Fall (gegebene Ladung) von relativ geringer Bedeutung für die Elektrostatik. Denn die Flächenladungen könnten ja höchstens an nichtleitenden Flächen festsitzen, ein Fall, der im Vakuum gar nicht vorkommen kann; an den Leiteroberflächen sitzen sie nicht fest, sondern verteilen sich je nach dem äußeren Felde derartig, daß die elektrische Kraft senkrecht auf der Leiteroberfläche steht, d. h. daß der Leiter auf konstantes Potential kommt; räumliche Ladungen kommen aber im allgemeinen gar nicht im Vakuum vor. Wir haben also in Wirklichkeit folgendes dritte Problem vor uns: Gegeben eine Anzahl isolierter Leiter, auf denen die gegebenen Gesamtladungen $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ sitzen. Zu bestimmen ist eine Funktion Φ derartig, daß überall die Laplacesche Gleichung $\Delta \Phi = 0$ gilt, daß an den Leitern selbst Φ konstante (aber noch unbekannte, zu bestimmende) Werte Φ_i annimmt, und daß an diesen Leitern $\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} = -4\pi \eta_i$ wird, wo η_i gleichfalls unbekannt und zu bestimmen ist; von η_i ist nur bekannt, daß

$$e_i = \int \eta_i dS_i = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} dS_i$$

sein muß. Wir können danach das mathematische Problem in folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$(65) \quad \Delta \Phi = 0,$$

$$(66) \quad \Phi = \Phi_i = \text{Const. an den Leiteroberflächen, wobei}$$

$$(67) \quad e_i = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} dS_i \text{ fest gegeben ist.}$$

Daß dieses dritte Problem weit schwieriger ist als die beiden vorhergehenden, ist klar, da ja weder die konstanten Potentiale Φ_i der Leiteroberflächen, noch die Flächendichten η_i auf diesen gegeben sind, sondern nur deren Gesamtladungen e_i . Es ist in der Tat nur in wenigen Fällen wirklich gelöst, von denen einige besonders einfache in den nächsten Nummern besprochen werden sollen, in denen man — meist durch Symmetriebetrachtungen — die Werte η_i aus den e_i erraten kann. Das durch die Gleichungen (65) bis (67) formulierte Problem ist das eigentliche Problem der Elektrostatik. Wir wollen aber jedenfalls zeigen, daß es nur eine Lösung desselben gibt. Nehmen wir wieder an, es gäbe zwei verschiedene Lösungen Φ_1 und Φ_2 ,

deren Differenz wir wieder ψ nennen wollen. Für ψ würden dann die folgenden Gleichungen gelten, wie man aus (65) bis (67) folgert, die für Φ_1 und Φ_2 identisch erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} \Delta \psi &\equiv 0, \\ \psi = \psi_\lambda &\equiv 0 \quad \text{an Leiteroberflächen,} \\ \int \frac{\partial \psi}{\partial n_\lambda} dS_\lambda &\equiv 0 \quad \text{an Leiteroberflächen.} \end{aligned}$$

Auf die durch diese Gleichungen bestimmte Funktion wenden wir wieder die Greensche Gleichung (63) an. Die Raumintegrale beziehen sich hier auf den durch

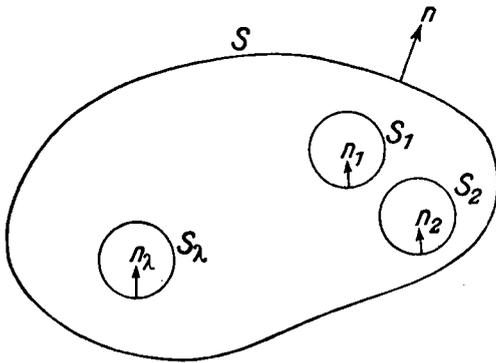


Fig. 15.

die unendlich ferne Oberfläche S und die sämtlichen Leiteroberflächen S_λ begrenzten Raum, das Oberflächenintegral erstreckt sich demnach einerseits auf die unendlich ferne Fläche S und die sämtlichen Leiteroberflächen S_λ (vgl. Fig. 15). Dabei sind die Normalen stets nach außen zu wählen, von dem Raume aus betrachtet; ihre positive Richtung fällt also auf den Leiter-

oberflächen S_λ mit deren innerer Normale zusammen. Die Gleichung (63) lautet also schließlich so:

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau &= - \int \psi \Delta \psi d\tau + \int \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \\ &+ \sum_\lambda \int \psi_\lambda \frac{\partial \psi}{\partial n_\lambda} dS_\lambda. \end{aligned} \right.$$

Wegen $\Delta \psi \equiv 0$ verschwindet das Raumintegral rechts; wegen $\psi_\lambda \equiv 0$ verschwinden sämtliche sich auf die Leiter beziehenden Oberflächenintegrale, die in (68) unter dem Summenzeichen zusammengefaßt sind; endlich verschwindet — genau wie im vorher behandelten Falle — das Integral über die unendlich ferne Fläche S , da der Integrand von mindestens dritter Ordnung unendlich klein wird. Also folgt wieder wie vorher:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0; \quad \psi = \text{const} = 0,$$

wenn man den Wert des Potentials im Unendlichen wieder zu Null annimmt. Es gibt also für das eigentliche Problem der Elektrostatik stets nur eine Lösung.

8. Influenzelektrizität; Kapazitätskoeffizienten.

Aus den Darlegungen der vorhergehenden Nummer geht zur Genüge hervor, daß die besondere Komplikation des eigentlichen elektrostatischen Problems eng damit zusammenhängt, daß es Leiter der Elektrizität gibt. Denn auf ihnen sitzt die Ladung nicht fest, sondern sie verteilt sich derartig, daß in jedem Falle die Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche wird; die dies bedingende Verteilung der elektrischen Ladungen ist jedoch nicht von vornherein bekannt, sondern ergibt sich erst nachträglich aus der Lösung des elektrostatischen Problems für den jeweils vorliegenden Fall. Nur wenige Fälle desselben sind streng lösbar; es ist indessen schon darauf hingewiesen worden, daß man durch die näherungsweise Konstruktion der Niveaulächen und Kraftlinien auch dann einen ungefähren Einblick in die jeweils vorliegenden Verhältnisse gewinnen kann, wenn die strenge Lösung noch nicht vorliegt.

Wir können in der Tat ohne jede Rechnung eine allgemeine Folgerung aus der Tatsache ziehen, daß Leiteroberflächen Niveaulächen sein müssen. Wir wollen uns also — indem wir uns auf einen Leiter beschränken, wobei alles Wesentliche schon erkennbar wird — etwa an einen der Fig. 18 analogen Fall anschließen, indem wir einen Leiter (dort war es eine Kugel, was aber unwesentlich ist) in ein schon bestehendes Feld hineinbringen. Wir können auch annehmen, daß der Leiter isoliert sei. Wäre er dies nämlich nicht, sondern durch einen Draht zur Erde abgeleitet, so würde das System (Leiter + Draht + Erde) wieder einen zusammenhängenden isolierten Leiter bilden. Die Beschränkung auf isolierte Leiter bringt die Vereinfachung mit sich, daß seine Gesamtladung unverändert bleiben muß; wir können sie sogar ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich Null annehmen.

Was können wir nun aus der Tatsache folgern, daß die Oberfläche dieses isolierten ungeladenen Leiters eine Niveauläche sein muß? Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß elektrische Kraftlinien von ihr ausgehen bzw. auf ihr endigen, und zwar endigen (wegen der Ladungsfreiheit) ebenso viele auf dem Leiter, als von ihm fortgehen. Da nun die Kraftlinien des elektrostatischen Feldes nur in den positiven Ladungen beginnen und in den negativen endigen, so heißt dies, daß auf einem isolierten ungeladenen Leiter im elektrischen Felde elektrische Ladungen von beiderlei Vorzeichen in gleicher Menge auftreten müssen, da sie insgesamt die Ladung Null ergeben müssen. Diese Ladungen nennt man „Influenzladungen“. Man erhält also etwa das Bild der Fig. 13a, das dem Fall der Fig. 18 entspricht und nur durch Einzeichnen der Niveaulächen und des Vorzeichens der influenzierten Ladungen ergänzt ist. In der Figur ist angenommen, daß die Kraftlinien von links nach rechts laufen; links haben wir also in großer Entfernung positive Ladung anzunehmen. Ein Teil dieser Kraftlinien endigt senkrecht auf der linken Kugelhälfte. Dort wird negative Influenzladung auftreten. Ebenso viele Kraftlinien

verlassen auf der rechten Kugelhälfte den Leiter, dort tritt also positive Flächenladung auf, vom gleichen absoluten Betrage. Zwei Stellen in Fig. 13a (die Punkte A' und A'') tragen keine Ladung, da hier gleichzeitig eine Kraftlinie endet und entspringt; das gilt für alle Stellen des Kugeläquators. So wie hier ist es auch in allgemeineren Fällen: Auf der einen Seite des Leiters tritt negative, auf der anderen Seite positive Influenzladung auf, die durch eine neutrale Zone geschieden werden.

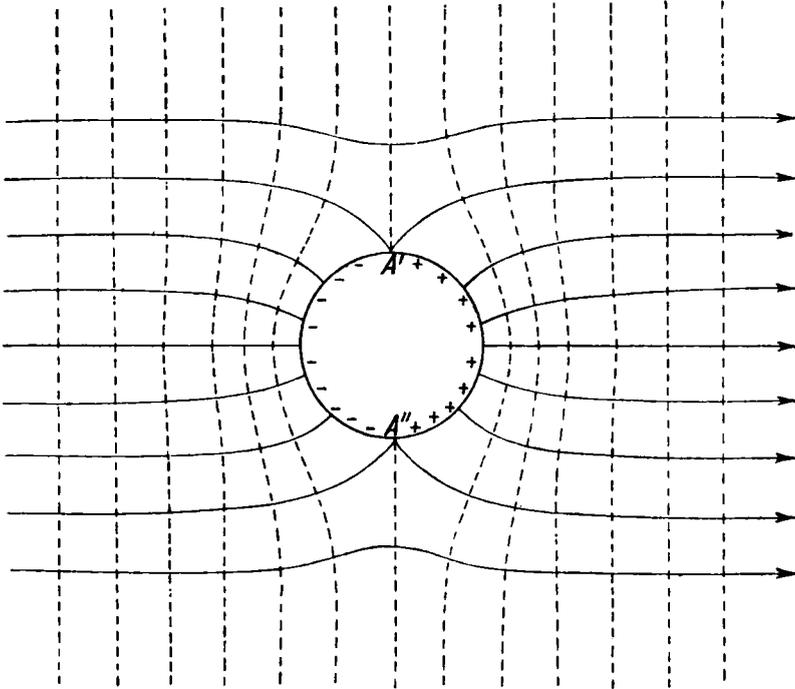


Fig. 13a.

Man kann sich diese Verhältnisse leicht anschaulich machen, wenn man sich der Sprache der Fluidumhypothese bedient. Nähert man einem isolierten Leiter eine positive Ladung, so wirkt diese anziehend auf die im Leiter enthaltene negative Elektrizitätsmenge, abstoßend auf die positive; da die elektrischen Fluida frei verschieblich sind, so sammelt sich die ungleichnamige Ladung auf dem Teile des Leiters, der der influenzierenden Ladung benachbart ist, während die gleichnamige Ladung sich auf dem entfernteren Teile des Leiters ansammelt. Verbindet man den Leiter mit der Erde, so geht die gleichnamige in diese, als den entfernteren Teil des Gesamtleiters über: „Die gleichnamige Ladung wird abgeleitet“, wie es in der elementaren Darstellung ausgedrückt wird. In diesem Falle erscheint der Leiter selbst (als Teil des Gesamtleiters, zu dem die Erde gehört) „ungleichnamig“ geladen; einer flüchtigen

Betrachtung könnte es scheinen, als ob die Gesamtladung verändert worden sei, aber es ist natürlich zu beachten, daß die kompensierende gleichnamige Ladung auf der Erde ist. In der nächsten Nummer werden wir übrigens den Fall der leitenden Kugel im homogenen Felde in aller Strenge durchführen.

Wir wollen nun die Erscheinung der Influenzladungen allgemein untersuchen, und dazu bedürfen wir eines allgemeinen Satzes der Potentialtheorie, den Gauss 1840 aufgestellt hat.

Wir denken uns zwei Systeme elektrischer Ladungen, die wir — aber nur der Einfachheit der Darstellung halber — als punktförmig betrachten wollen. Die Ladungen und Potentiale des ersten Systems kennzeichnen wir durch einen lateinischen, die des zweiten durch einen griechischen Index (l oder λ). Es sei nun das Potential des zweiten Systems am Orte der Ladung e_l des ersten Systems Φ_λ ; entsprechend sei das Potential des ersten Systems am Orte der Ladung e_λ des zweiten Systems Φ_l . Bildet man die über das erste bzw. zweite System zu erstreckenden Summen

$$\sum_l e_l \Phi_\lambda \quad \text{und} \quad \sum_\lambda e_\lambda \Phi_l,$$

so hat Gauss gezeigt, daß sie gleich sind, daß also

$$(69) \quad \sum_l e_l \Phi_\lambda = \sum_\lambda e_\lambda \Phi_l.$$

Das ist in der Tat leicht zu sehen. Denn nach Definition des Potentials ist

$$\Phi_\lambda = \sum_l \frac{e_l}{r_{l\lambda}},$$

wenn $r_{l\lambda}$ die Entfernung zwischen einer Ladung e_λ des zweiten und der Ladung e_l des ersten Systems ist. Aber ebenso gilt natürlich

$$\Phi_l = \sum_\lambda \frac{e_\lambda}{r_{l\lambda}}.$$

Ausführlich geschrieben lautet daher die zu beweisende Gleichung (69):

$$\sum_l e_l \sum_\lambda \frac{e_\lambda}{r_{l\lambda}} = \sum_\lambda e_\lambda \sum_l \frac{e_l}{r_{l\lambda}},$$

und diese Gleichheit besteht in der Tat zu Recht, da die linke Seite in die rechte übergeht, wenn man die Reihenfolge der Summationen vertauscht, was offenbar zulässig ist.

Der Satz (69) gilt auch dann noch, wenn die Ladungen e_λ des zweiten Systems räumlich mit den Ladungen e_l des ersten Systems zusammenfallen. Im Falle punktförmiger Ladungen würden freilich einzelne Glieder wegen des Verschwindens einzelner Abstände $r_{l\lambda}$ unendlich werden, im Falle räumlich oder flächenhaft verteilter Ladung dagegen nicht, wie wir bereits wissen. Wir wollen daher von jetzt ab unter e_λ und e_l Flächenladungen verstehen, die auf Leitern angebracht sind;

dann können wir den Gaußschen Satz (69) z. B. anwenden auf zwei verschiedene Zustände eines und desselben Systems.

Der eine Zustand sei charakterisiert durch die Ladungen e_λ und die Potentiale Φ_λ , der zweite dadurch, daß sämtliche Ladungen um de_λ und sämtliche Potentiale um $d\Phi_\lambda$ geändert werden. Dann ist nach dem obigen Satze (69):

$$\sum_{\lambda}^{1,n} (e_\lambda + de_\lambda) \Phi_\lambda = \sum_{\lambda}^{1,n} e_\lambda (\Phi_\lambda + d\Phi_\lambda),$$

und daraus folgt sofort:

$$(70) \quad \sum_{\lambda}^{1,n} e_\lambda d\Phi_\lambda = \sum_{\lambda}^{1,n} de_\lambda \Phi_\lambda.$$

Mit dieser Gleichung wollen wir uns jetzt näher beschäftigen. Es sei z. B. nur $d\Phi_1 \neq 0$, während alle übrigen $d\Phi_\lambda = 0$ sind. Dann liefert (70) die folgende Beziehung:

$$e_1 d\Phi_1 = de_1 \Phi_1 + de_2 \Phi_2 + de_3 \Phi_3 + \dots + de_n \Phi_n,$$

oder wenn wir bedenken, daß die Zuwächse de_λ bei konstanten Potentialen $\Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n$ gemeint sind:

$$(71) \quad e_1 = \frac{\partial e_1}{\partial \Phi_1} \Phi_1 + \frac{\partial e_2}{\partial \Phi_1} \Phi_2 + \frac{\partial e_3}{\partial \Phi_1} \Phi_3 + \dots + \frac{\partial e_n}{\partial \Phi_1} \Phi_n,$$

wobei die Größen $\frac{\partial e_\lambda}{\partial \Phi_1}$ die partiellen Ableitungen von e_λ nach Φ_1 sind.

Wird alsdann $d\Phi_2 \neq 0$ angenommen, während alle anderen $d\Phi_\lambda = 0$ werden, so hat man entsprechend:

$$(72) \quad e_2 = \frac{\partial e_1}{\partial \Phi_2} \Phi_1 + \frac{\partial e_2}{\partial \Phi_2} \Phi_2 + \dots + \frac{\partial e_n}{\partial \Phi_2} \Phi_n.$$

Und so geht es allgemein weiter. Setzt man zur Abkürzung

$$(73) \quad \frac{\partial e_i}{\partial \Phi_k} = c_{ik}{}^1),$$

so kann man das ganze System, von dem (71) und (72) die beiden ersten Glieder sind, so schreiben:

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 = c_{11} \Phi_1 + c_{12} \Phi_2 + c_{13} \Phi_3 + \dots + c_{1n} \Phi_n, \\ e_2 = c_{21} \Phi_1 + c_{22} \Phi_2 + \dots + c_{2n} \Phi_n, \\ \vdots \\ e_n = c_{n1} \Phi_1 + c_{n2} \Phi_2 + \dots + c_{nn} \Phi_n, \end{array} \right.$$

¹⁾ Es ist übrigens immer $c_{ik} = c_{ki}$, was wir aber hier nicht beweisen wollen; die Beispiele der folgenden Nummer zeigen die Richtigkeit dieser Gleichung in speziellen Fällen.

d. h. in jedem im elektrischen Gleichgewicht befindlichen System von Leitern sind die Ladungen derselben lineare homogene Funktionen der Leiterpotentiale. Die Größen c_{ik} hängen dabei nicht mehr vom elektrischen Zustande ab, sondern nur noch von der Konfiguration des Systems; solange diese konstant gehalten wird, sind auch die Größen c_{ik} selbst konstant. Nehmen wir im besonderen etwa an:

$$\Phi_1 \neq 0, \quad \Phi_2 = \Phi_3 = \dots = \Phi_n = 0,$$

d. h. nur der erste Leiter sei geladen, sämtliche übrigen zur Erde abgeleitet, so geht das System (74) über in das folgende:

$$(75) \quad \begin{cases} e_1 = c_{11} \Phi_1, \\ e_2 = c_{21} \Phi_1, \\ e_3 = c_{31} \Phi_1, \\ \vdots \\ e_n = c_{n1} \Phi_1. \end{cases}$$

Dabei ist der erste Leiter geladen, weil er auf einem bestimmten Potential gehalten wird; die übrigen zur Erde abgeleiteten tragen „Influenzladungen“. Ganz analog ist es, wenn irgendein anderer, z. B. der dritte Leiter zum Potential $\Phi_3 \neq 0$ geladen, alle übrigen zur Erde abgeleitet sind. Dann ist

$$(76) \quad \begin{cases} e_1 = c_{31} \Phi_3, \\ e_2 = c_{32} \Phi_3, \\ e_3 = c_{33} \Phi_3, \\ \vdots \\ e_n = c_{n3} \Phi_3. \end{cases}$$

Hier ist der dritte Leiter durch sein Potential geladen, alle übrigen durch Influenz.

Man nennt nun das Verhältnis

$$\frac{e_\lambda}{\Phi_\lambda} = c_{\lambda\lambda} = C$$

die Kapazität des λ^{ten} Leiters; die anderen Koeffizienten c_{ik} nennt man „Influenzierungskoeffizienten“ oder „Kapazitätskoeffizienten“. Demnach ist die Kapazität eines Leiters diejenige Elektrizitätsmenge, die ihn auf das Potential 1 bringt, während alle anderen Leiter geerdet sind.

Kennt man die Gesamtladungen e_λ der einzelnen Leiter — sie sind, wie in der vorhergehenden Nummer auseinandergesetzt, bei elektrostatischen Problemen meistens gegeben — und kennt man die Kapazitäts-

koeffizienten c_{ik} , so kennt man durch Auflösung von (74) die Potentiale Φ_λ , d. h. man hat das elektrostatische Problem gelöst. Man kann daher sagen, daß die Lösung des elektrostatischen Problems darauf hinauskomme, die Kapazitätskoeffizienten zu bestimmen.

Die Auflösung der Gleichung (74) ergibt das folgende Schema:

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = c_{11}' e_1 + c_{12}' e_2 + \dots c_{1n}' e_n, \\ \Phi_2 = c_{21}' e_1 + c_{22}' e_2 + \dots c_{2n}' e_n, \\ \vdots \\ \Phi_n = c_{n1}' e_1 + \dots c_{nn}' e_n. \end{array} \right.$$

Die dabei auftretenden Koeffizienten $c_{ik}' = c_{ki}'$, die sich in einfacher Weise aus den c_{ik} berechnen, heißen in leicht verständlicher Bezeichnung „Potentialkoeffizienten“.

In der folgenden Nummer wollen wir in einigen besonders einfachen Fällen die Kapazitäten bestimmter Leiter berechnen. Vorher jedoch können wir ganz allgemein die Dimension der Kapazitätskoeffizienten c_{ik} bestimmen. Aus der Gleichung (10) für die Dimension der elektrischen Ladung und der Gleichung (33) für die Dimension des Potentials finden wir:

$$(78) \quad [c_{ik}] = \frac{[e]}{[\Phi]} = \frac{[m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}]}{[m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}]} = [l] = [cm];$$

d. h. die Dimension sämtlicher Kapazitätskoeffizienten, insbesondere auch die der Kapazität selbst, ist eine Länge; ihre Einheit also das Zentimeter. Auf die physikalische Interpretation dieses Ergebnisses sowie auf die praktische Einheit der Kapazität gehen wir erst in der nächsten Nummer ein.

Die Gleichungen (74), die die Ladungen als lineare homogene Funktion der Potentiale darstellen, lehren insbesondere folgendes: Wenn alle Leiter, mit Ausnahme z. B. des ersten, geerdet sind, also die Potentiale $\Phi_\lambda = 0$ sind, und nur mehr $\Phi_1 \neq 0$ ist, so sind trotzdem, wie man sieht, die Ladungen e_2, e_3, \dots, e_n im allgemeinen von Null verschieden. Es kann also ein Leiter sehr wohl das Potential Null haben und dennoch geladen sein und umgekehrt: Wenn wir in den Gleichungen (77) allen Leitern, mit Ausnahme etwa des ersten, verschwindende Ladungen geben ($e_2 = e_3 = \dots = e_n = 0, e_1 \neq 0$), so haben diese ungeladenen Leiter doch im allgemeinen von Null verschiedenes Potential. Diese Verhältnisse bereiten dem Anfänger zuweilen Schwierigkeiten, weil er zu schließen geneigt ist, daß jede Ladung ein von Null verschiedenes Potential und jedes Potential eine von Null verschiedene Ladung voraussetze. Diese Betrachtungsweise ignoriert aber das Wesen der Influenzladung und ist durchaus irrig.

9. Spezielle elektrostatische Probleme (Platten- und Kugelkondensator, Ellipsoid, Kreisscheibe, dünner Draht).

In gewissen Fällen läßt sich das elektrostatische Problem einfach lösen, weil man von vornherein aus Symmetriebetrachtungen Schlüsse auf die Verteilung der elektrischen Ladungen, d. h. auf die Größe der Flächendichte η ziehen kann: Damit ist dann die eigentliche Schwierigkeit des Problems in diesen Fällen beseitigt. Der erste Fall dieser Art, den wir betrachten wollen, ist der des sog. Plattenkondensators. Darunter versteht man ein System von zwei großen Platten, die parallel zueinander in einem Abstände aufgestellt sind, der sehr klein gegen die Lineardimensionen der Platten selbst ist. Dann kann man annehmen, daß die Gesamtladung e , die sich auf einer der beiden Platten befindet, sich gleichmäßig über die Platte verteilt; hat sie den Flächeninhalt F , so wäre also die Dichte der Flächen-

ladung $\eta = \frac{e}{F}$ anzusetzen. Das kann freilich für endliche Platten in Strenge nicht gelten, und namentlich in den Randpartien der Platte müssen Abweichungen auftreten. Wir wollen jedoch davon absehen und nur bemerken, daß in der Tat die Berücksichtigung der Verteilung am Rande ein schwieriges Problem ist, das jedoch von Gustav Kirchhoff gelöst wurde.

Wir wollen (Fig. 16) die eine Platte des Kondensators mit der yz -Ebene zusammenfallen lassen und die zweite im Abstände $x = d$ ihr gegenüberstellen.

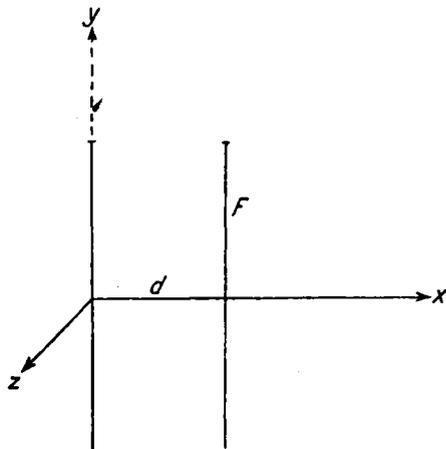


Fig. 16.

Die Laplacesche Gleichung $\Delta \Phi = 0$ geht hier über in die einfache eindimensionale:

$$(79) \quad \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = 0,$$

da Φ nur von x abhängen kann. Die Lösung von (79) ist:

$$(80) \quad \Phi = A x + B,$$

wonun die Konstanten so zu bestimmen sind, daß beide Platten auf konstantes Potential kommen und die erste Platte die konstante elektrische Flächendichte $\eta_1 = \frac{e_1}{F}$ erhält. Da allgemein $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -4\pi\eta$ und die Richtung von n auf der ersten Platte mit der von x übereinstimmt, ist hier:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x=0} = -4\pi\eta_1 = -\frac{4\pi e_1}{F},$$

und durch Differentiation von (80) und Vergleich mit der vorstehenden Gleichung folgt dann sofort:

$$(81) \quad A = -\frac{4\pi e_1}{F},$$

womit (80) übergeht in:

$$(82) \quad \Phi = -\frac{4\pi e_1}{F}x + B.$$

Setzen wir hier $x=0$, so folgt für das Potential Φ_1 der ersten Platte $\Phi_1 = B$; setzt man $x=d$, so folgt für das Potential der zweiten (influenzierten) Platte $\Phi_2 = -\frac{4\pi e_1}{F}d + B$; beide Werte sind konstant, wie es auf Leiteroberflächen sein muß. Das Problem ist damit gelöst, da es sämtlichen Bedingungen genügt und es nur eine Lösung geben kann. Der Wert der Konstanten B ist wie immer gleichgültig.

Das Feld $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_x = -\frac{d\Phi}{dx}$ ist

$$(83) \quad \mathfrak{E}_x = \frac{4\pi e_1}{F},$$

d. h. parallel der x -Achse gerichtet und räumlich konstant; d. h. der Plattenkondensator ist ein Mittel, um ein homogenes Feld zu erzeugen. Auf der Flächeneinheit der ersten Platte haben wir also $\frac{4\pi e_1}{F}$ Kraftlinien senkrecht entspringen zu lassen; sie endigen, ebenfalls senkrecht, auf der zweiten Platte. Daher ist e_2 gleich $-e_1$: auf der Innenseite der zweiten Platte sitzt dieselbe Ladung, nur mit umgekehrtem Vorzeichen, wie auf der ersten Platte.

Wir können nun natürlich auch die Kapazitätskoeffizienten c_{ik} bestimmen. Denn wir haben ja nach den allgemeinen Gleichungen (74) hier:

$$(84) \quad \begin{cases} e_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2, \\ e_2 = -e_1 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2. \end{cases}$$

Leiten wir die zweite Platte zur Erde ab ($\Phi_2 = 0$), d. h. machen wir $B = \frac{4\pi e_1}{F}d$, so wird

$$e_1 = c_{11}\Phi_1 = c_{11}\frac{4\pi e_1}{F}d,$$

$$e_2 = -e_1 = c_{21}\Phi_1 = c_{21}\frac{4\pi e_1}{F}d.$$

Daraus folgt:

$$(85) \quad c_{11} = \frac{F}{4\pi d}; \quad c_{21} = -\frac{F}{4\pi d} = -c_{11}.$$

Geben wir umgekehrt der ersten Platte das Potential $\Phi_1 = 0$, d. h. setzen wir $B = 0$, so haben wir:

$$e_1 = c_{12} \Phi_2 = - c_{12} \frac{4\pi e_1}{F} d ,$$

$$e_2 = - e_1 = c_{22} \Phi_2 = - c_{22} \frac{4\pi e_1}{F} d ;$$

d. h.

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{12} = - \frac{F}{4\pi d} = c_{21} = - c_{11} , \\ c_{22} = \frac{F}{4\pi d} = c_{11} . \end{array} \right.$$

Damit sind die vier auftretenden Kapazitätskoeffizienten bestimmt. Die allgemeinen Gleichungen (84) für unseren Fall werden also:

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 = c_{11} (\Phi_1 - \Phi_2) , \\ e_2 = c_{11} (\Phi_2 - \Phi_1) , \end{array} \right.$$

und als Kapazität C des Kondensators ergibt sich:

$$(88) \quad C = c_{11} = c_{22} = \frac{F}{4\pi d} ,$$

d. h. proportional der Fläche der Platte, umgekehrt proportional ihrem Abstände; durch Verkleinerung des letzteren können also große Kapazitäten erzeugt, d. h. große Ladungen bei kleinen Potentialen auf die Platte gebracht werden. Die Gleichungen (87) sprechen das aus den Elementen bekannte Ergebnis aus, daß die Kapazität eines Plattenkondensators gleich dem Verhältnis der auf den Platten sitzenden Elektrizitätsmenge zur Potentialdifferenz der beiden Platten ist.

Ein zweiter einfacher Fall ist der, daß eine mit der Elektrizitätsmenge e_1 geladene Kugel vom Radius R_1 konzentrisch umgeben ist von einer zweiten Kugelfläche vom Radius R_2 . Hier liegt es nahe, aus Symmetriegründen eine gleichmäßige Verteilung der Elektrizitätsmenge über die erste Kugelfläche anzunehmen, d. h. $\eta_1 = \frac{e_1}{4\pi R_1^2}$ zu setzen, womit wieder die prinzipielle Schwierigkeit des elektrostatischen Problems hier beseitigt ist. Der gesamte, von der inneren Kugel ausgehende Kraftfluß endigt an der Innenseite der äußeren Kugel; also ist wieder $e_2 = - e_1$ und $\eta_2 = - \frac{e_1}{4\pi R_2^2}$.

Wegen der Symmetrie kann das Potential Φ nur von dem Abstände r vom Kugelzentrum abhängen. Transformieren wir daher die Laplacesche Gleichung $\Delta \Phi = 0$ auf Polarkoordinaten (r, ϑ, ψ) , so kann Φ von ϑ und ψ nicht abhängen. In dem hier betrachteten einfachen Falle läßt sich die Transformation von $\Delta \Phi$ auf Polarkoordinaten rechnerisch einfach durchführen. Setzen wir

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 ,$$

so ist $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ usw. Dann haben wir z. B.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\Phi}{dr} \cdot \frac{x}{r},$$

und durch nochmalige Differentiation folgt

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{x^2}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2},$$

und analog:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{y^2}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{y^2}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2}.$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{z^2}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{z^2}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2}.$$

Durch Addition folgt

$$\Delta \Phi = \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr}.$$

Mithin lautet in unserem Falle die Laplacesche Gleichung:

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 0,$$

oder in einer für die Rechnung bequemeren Schreibweise:

$$(89) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0.$$

Da r niemals gleich Null werden kann, kann der Faktor $\frac{1}{r^2}$ fortgelassen werden und die zweimalige Integration liefert für das Potential Φ den einfachen Ausdruck:

$$(90) \quad \Phi = \frac{A}{r} + B.$$

Die Konstante A bestimmt sich aus der Bedingung, daß

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{r=R_1} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{R_1} = -4\pi \eta_1 = -\frac{e_1}{R_1^2}$$

sein muß. Das liefert:

$$(91) \quad A = e_1;$$

der Wert der Konstanten B ist gleichgültig, und so ist die endgültige Lösung, die gleichzeitig die einzige ist:

$$(92) \quad \Phi = \frac{e_1}{r} + B,$$

mit den konstanten Spezialwerten Φ_1 und Φ_2 auf den beiden Kugelflächen

$$(93) \quad \Phi_1 = \frac{e_1}{R_1} + B; \quad \Phi_2 = \frac{e_1}{R_2} + B.$$

Zur Bestimmung der Kapazitätskoeffizienten c_{ik} haben wir nach den Gleichungen (74):

$$(94) \quad \begin{cases} e_1 = c_{11} \Phi_1 + c_{12} \Phi_2, \\ e_2 = -e_1 = c_{21} \Phi_1 + c_{22} \Phi_2. \end{cases}$$

Setzen wir $\Phi_2 = 0$, d. h. nehmen wir $B = -\frac{e_1}{R_2}$ an, so wird

$$\Phi_1 = \frac{e_1}{R_1} - \frac{e_1}{R_2};$$

also wird

$$(95) \quad \begin{cases} e_1 = c_{11} \Phi_1 = c_{11} e_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = c_{11} e_1 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}, \\ e_2 = -e_1 = c_{21} \Phi_1 = c_{21} e_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = c_{21} e_1 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \end{cases}$$

Daraus folgen die Werte:

$$(96) \quad \begin{cases} c_{11} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \\ c_{21} = -c_{11} = -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \end{cases}$$

Setzen wir umgekehrt $\Phi_1 = 0$, d. h. wählen wir $B = -\frac{e_1}{R_1}$, so finden wir:

$$\begin{aligned} e_1 &= c_{12} \Phi_2 = c_{12} e_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = c_{12} e_1 \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}, \\ e_2 &= -e_1 = c_{22} \Phi_2 = c_{22} e_1 \frac{R_1 - R_2}{R_2 R_2}, \end{aligned}$$

woraus die Werte folgen:

$$(97) \quad \begin{cases} c_{12} = -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = -c_{11}, \\ c_{22} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = +c_{11}. \end{cases}$$

Damit geht die allgemeine Gleichung (94) über in:

$$\begin{aligned} e_1 &= c_{11} (\Phi_1 - \Phi_2), \\ e_2 &= c_{11} (\Phi_2 - \Phi_1), \end{aligned}$$

und für die Kapazität C des Kugelkondensators folgt der Wert

$$(98) \quad C = c_{11} = c_{22} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Auch hier kann durch Verkleinerung der Differenz $(R_2 - R_1)$ die Kapazität recht groß gemacht werden.

Betrachten wir nun den Spezialfall, daß die äußere Kugel einen unendlich großen Radius R_2 besitzt, dann finden wir für die Kapazität einer einzelnen Kugel vom Radius R_1

$$(99) \quad C = R_1,$$

d. h. die Kapazität einer Kugel ist gleich ihrem Radius.

Dieser Spezialfall liefert uns die physikalische Interpretation für die bereits festgestellte Tatsache, daß die Dimension der Kapazität eine Länge, ihre absolute Einheit also das Zentimeter ist: Eine Kugel von 1 cm Radius repräsentiert die absolute Einheit der Kapazität, d. h. mit einer absoluten Elektrizitätseinheit geladen, nimmt sie das absolute Potential 1 an.

Nun hatten wir aber statt der absoluten Einheit der Elektrizitätsmenge das Coulomb, statt der absoluten Potentialeinheit das Volt eingeführt. Als praktische Einheit der Kapazität würde dem eine Kugel entsprechen, die, mit 1 Coulomb geladen, das Potential von 1 Volt annimmt. Für ihren Radius R findet man:

$$R = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}} = \frac{3 \cdot 10^9}{1} \text{ abs. Einheit} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm} = 9 \cdot 10^6 \text{ km.}$$

Diese Einheit nennt man das „Farad“:

$$(100) \quad 1 \text{ Farad} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm} = 9 \cdot 10^6 \text{ km.}$$

Dem Farad entspricht also eine Kugel mit dem ungeheuren Radius von 9000000 km. Diese Einheit ist für die Praxis zu groß ausgefallen, so daß man sich entschlossen hat, den millionsten Teil eines Farads, das „Mikrofarad“, als praktische Einheit zu wählen:

$$(101) \quad 1 \text{ Mikrofarad} (= 1 \text{ M.F.}) = 9 \cdot 10^6 \text{ cm} = 9 \text{ km.}$$

Sowohl das Mikrofarad wie auch die absolute Einheit der Kapazität, das Zentimeter, werden in der Praxis nebeneinander benutzt, je nachdem die eine oder andere Einheit bequemer ist.

Die im vorhergehenden benutzte Methode war, die Laplacesche Gleichung durch Transformation auf geeignete Koordinaten so umzuformen, daß eine Integration möglich wurde. Im besonderen Falle der Kugel lieferte $r = R_1$, d. h. die Konstantsetzung einer der gewählten Koordinaten, die Oberfläche des Leiters, dessen Kapazität bestimmt werden sollte. Dieses Verfahren ist auch noch bei der Berechnung der Kapazität eines dreiachsigen Ellipsoides möglich, wenn man elliptische Koordinaten einführt; die Konstantsetzung einer passenden der drei Koordinaten liefert dann die Ellipsoidoberfläche. Wir wollen die etwas mühsame Rechnung nicht durchführen, sondern nur ihr Resultat angeben. Hat das Ellipsoid die Halbachsen $a > b > c$, und bedeutet ξ eine Integrationsvariable, so läßt sich zeigen, daß für die Kapazität C folgende Gleichung gilt:

$$(102) \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}},$$

die ein elliptisches Integral darstellt. Darin sind als Spezialfälle das Rotationsellipsoid ($a = b > c$, abgeplattet; $a > b = c$, verlängert), die

Kugel ($a = b = c = R$), die Kreisscheibe ($a = b$; $c = 0$), der kreiszylindrische dünne Draht ($b = c$ unendlich klein, $a =$ Länge des Drahtes) enthalten. Für die Kugel findet man leicht unseren alten Ausdruck (99) $C = R$ wieder. Für die Kreisscheibe mit dem Radius a ergibt sich aus (102):

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(a^2 + \xi) \sqrt{\xi}}.$$

Dieses Integral geht mit der Substitution $\sqrt{\xi} = \eta$ in das wohlbekanntere über:

$$\frac{1}{C} = \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{a^2 + \eta^2} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{\eta}{a}\right)}{1 + \left(\frac{\eta}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \frac{\overline{\arctg \frac{\eta}{a}}^{\infty}}{\overline{0}} = \frac{\pi}{2a}.$$

Demnach folgt für die Kapazität der Kreisscheibe vom Radius a der Wert:

$$(103) \quad C = \frac{2a}{\pi}.$$

Spezialisieren wir nun unsere Gleichung (102) für den anderen extremen Fall: sehr dünner Draht von der Länge a und dem sehr kleinen Radius $b = c$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 + \xi} (b^2 + \xi)}.$$

Durch die Substitution

$$\xi = (a^2 - b^2) \sigma^2 - a^2$$

kommt das Integral auf die Form:

$$\frac{1}{C} = - \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_{\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}}^{\infty} \frac{d\sigma}{1 - \sigma^2};$$

die Integration liefert:

$$\frac{1}{C} = - \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{\overline{\log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}}^{\infty}}{\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}.$$

Entwickelt man die Wurzeln nach dem binomischen Lehrsatz und bricht hinter dem Gliede $\frac{b^2}{a^2}$ ab, so folgt schließlich für die gesuchte Kapazität:

$$(104) \quad C = \frac{a}{\log \frac{2a}{b}},$$

ein Wert, der durch hinreichend kleine Wahl von b selbst klein gemacht werden kann. Z. B. hat ein Draht vom Radius 0,1 mm und einer Länge von 1 m eine Kapazität von rund 10 cm, ein solcher von 0,01 mm Radius eine Kapazität von rund 8 cm. Weil b unter dem Logarithmuszeichen steht, ist allerdings die Kapazität nur langsam mit b veränderlich, d. h. man muß extrem dünne Drähte nehmen, um sehr kleine Kapazitäten zu bekommen.

10. Spezielle elektrostatische Probleme: Leitende Kugel im homogenen Felde.

Ein Problem von etwas komplizierterer Art ist das schon mehrfach gestreifte folgende: In ein homogenes elektrisches Feld wird eine leitende isolierte, geladene oder ungeladene, Kugel eingebettet; gefragt wird nach dem resultierenden Felde, dem Verlauf der Äquipotentialflächen und Kraftlinien. Um diese Aufgabe zu lösen, ist es wieder zweckmäßig, Polarkoordinaten (r, ϑ, ψ) einzuführen und die Laplacesche Gleichung $\Delta \Phi = 0$ auf diese Koordinaten zu transformieren.

Die direkte Umformung wäre rechnerisch sehr umständlich; deshalb ist es zweckmäßig, den Gaussischen Satz (20)

$$\int \mathfrak{E}_n dS = \int \operatorname{div} \mathfrak{E} d\tau$$

zu benutzen. Drückt man hier \mathfrak{E} durch Φ aus, so hat man:

$$(105) \quad \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \int \Delta \Phi d\tau.$$

Wendet man ihn auf ein hinreichend kleines Volumengebiet an, so kann man schreiben:

$$(106) \quad \overline{\Delta \Phi} \int \Delta \tau = \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS,$$

wo $\overline{\Delta \Phi}$ einen Mittelwert von $\Delta \Phi$ im Volumen $\int \Delta \tau$ bedeutet; dieser Mittelwert nähert sich um so mehr dem wirklichen Werte von $\Delta \Phi$, je kleiner $\int \Delta \tau$ genommen wird. Daher kann die letzte Gleichung so gedeutet werden:

$$(107) \quad \Delta \Phi = \lim_{\int \Delta \tau = 0} \frac{\int \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS}{\int \Delta \tau}.$$

Sie kann geradezu als allgemeine Definition der Operation Δ aufgefaßt werden. Zur Berechnung von $\Delta \Phi$ haben wir also im wesentlichen nur die einfachen Ausdrücke $\frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$ für die Oberfläche eines geeignet gewählten Volumelementes in Polarkoordinaten zu bilden.

In Fig. 17 seien um 0 mit den Radien r und $(r + dr)$ zwei Kugelflächen geschlagen. Durch diese beiden Kugelflächen sowie die Kegelpaare $\vartheta = \text{const.}$ und $(\vartheta + d\vartheta) = \text{const.}$ einerseits, $\psi = \text{const.}$ und $(\psi + d\psi) = \text{const.}$ andererseits wird ein Volumelement $\Delta \tau$ gebildet, das bekanntlich die Größe hat

$$\Delta \tau = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\psi .$$

Die Größen und Normalenrichtungen der sechs begrenzenden Seitenflächen dS erhält man am einfachsten folgendermaßen: Nach den Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \psi , \\ y &= r \sin \vartheta \sin \psi , \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

erhält man durch Differentiation

$$\begin{aligned} dx &= \sin \vartheta \cos \psi dr + r \cos \vartheta \cos \psi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \psi d\psi , \\ dy &= \sin \vartheta \sin \psi dr + r \cos \vartheta \sin \psi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \psi d\psi , \\ dz &= \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta . \end{aligned}$$

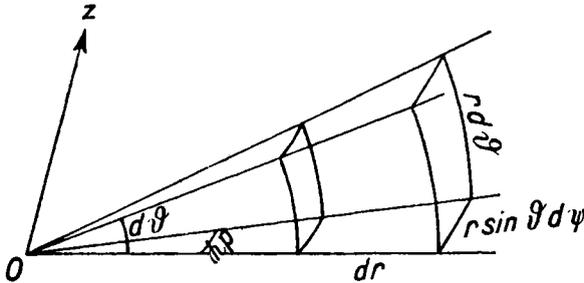


Fig. 17.

Durch Quadrieren und Addieren folgt für das Quadrat des Linien-elementes:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dr)^2 + (r d\vartheta)^2 + (r \sin \vartheta d\psi)^2 .$$

Den drei Längen dx , dy , dz entsprechen also die Längen dr , $r d\vartheta$, $r \sin \vartheta d\psi$; $r d\vartheta$ ist ein Element des Meridiankreises, $r \sin \vartheta d\psi$ desgleichen ein Element des Breitenkreises auf der Kugelfläche. Demnach haben wir folgende Flächenelementpaare und zugehörige Normalenrichtungen:

1. Normalenrichtung $\pm dr$:

$$dS = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\psi \text{ an den Stellen } r \text{ und } r + dr .$$

2. Normalenrichtung $\pm d\vartheta$:

$$dS = r \sin \vartheta dr d\psi \text{ an den Stellen } \vartheta \text{ und } \vartheta + d\vartheta ,$$

3. Normalenrichtung $\pm d\psi$:

$$dS = r dr d\vartheta \text{ an den Stellen } \psi \text{ und } \psi + d\psi .$$

Die Ausdrücke $\frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$ für diese sechs Flächenelemente werden also folgende:

$$\begin{aligned} 1. & - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} r^2 \sin \vartheta \right)_r d\vartheta d\psi \quad \text{und} \quad + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} r^2 \sin \vartheta \right)_{r+d_r} d\vartheta d\psi, \\ 2. & - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right)_\vartheta dr d\psi \quad \text{und} \quad + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right)_{\vartheta+d_\vartheta} dr d\psi, \\ 3. & - \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)_\psi dr d\vartheta \quad \text{und} \quad + \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)_{\psi+d_\psi} dr d\vartheta. \end{aligned}$$

Entwickelt man die an zweiter Stelle stehenden Ausdrücke nach Taylor bis zum zweiten Gliede einschließlich und addiert sie zu den an erster Stelle stehenden, so findet man schließlich

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = & \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right) \right] dr d\vartheta d\psi, \end{aligned}$$

folglich nach Gleichung (107):

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta \Phi = & \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Das ist die Definition der Laplaceschen Operation Δ in Polarkoordinaten. Die Laplacesche Gleichung $\Delta \Phi = 0$ lautet also in Polarkoordinaten, wenn die angedeuteten Differentiationen ausgeführt werden:

$$(109) \quad \left\{ \begin{aligned} r^2 \sin \vartheta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2r \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \sin \vartheta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} \\ + \cos \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Für unsere Zwecke können wir diese Gleichung etwas vereinfachen, wenn wir die Richtung des ursprünglich gegebenen homogenen elektrostatischen Feldes mit der z -Richtung zusammenfallen lassen, um die herum wir das Azimut ψ zählen. Um die z -Achse herum herrscht also bei dieser Anordnung Symmetrie, die durch das Einbringen der Kugel (etwa so, daß ihr Zentrum mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt) nicht gestört wird. Es muß also Φ von dem Azimut ψ unabhängig sein, so daß für unser Problem nur die folgende vereinfachte Laplacesche Gleichung zu integrieren ist:

$$(110) \quad r^2 \sin \vartheta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2r \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \sin \vartheta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \cos \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = 0.$$

Die nunmehr vorliegende Anordnung entspricht der Fig. 18.

Das ursprüngliche Feld sei also parallel der z -Achse gerichtet und habe die Intensität \mathfrak{E}_0 ; im positiv und negativ Unendlichen also werden

wir noch das ungestörte Feld \mathfrak{E}_0 zu erwarten haben, da die durch die Kugel hervorgebrachte Störung um so kleiner wird, je weiter wir uns vom Zentrum entfernen; das Potential Φ muß also im Unendlichen den Wert

$$(111) \quad \Phi_\infty = -\mathfrak{E}_0 z = -\mathfrak{E}_0 r \cos \vartheta^1) \quad (\text{eine besondere Konstante ist unterdrückt})$$

annehmen. An der Oberfläche der Kugel, d. h. für $r = R$, ist die Bedingung zu erfüllen, die die Konstanz der Ladung e ausspricht:

$$(112) \quad \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_R dS = -4\pi e;$$

das Potential selbst muß an der Kugelfläche erst bestimmt werden.

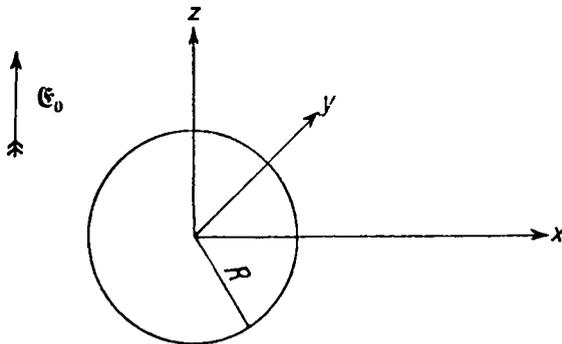


Fig. 18.

Die Lösung der Laplaceschen Gleichung (110) gewinnen wir folgendermaßen: Wir können von der Überlegung ausgehen, daß, wenn die geladene Kugel ohne äußeres Feld da wäre, wir eine völlig kugelsymmetrische Anordnung hätten, bei der Φ nur von r abhängen kann. Wäre umgekehrt das homogene Feld allein da, so ist eine Abhängigkeit von ϑ vorhanden, die durch (111) gegeben ist. Zwei mögliche elektrostatische Zustände superponiert ergeben aber immer einen neuen Gleichgewichtszustand. Und so wollen wir denn den Ansatz versuchen:

$$(113) \quad \Phi = R_1(r) + R_2(r) \cos \vartheta,$$

wobei $R_1(r)$ die kugelsymmetrische Lösung, $R_2(r) \cos \vartheta$ die Abhängigkeit von ϑ zum Ausdruck bringen soll; im Unendlichen muß jedenfalls $R_2(r)$ nach (111) in $-\mathfrak{E}_0 r$ übergehen und $R_1(r)$ verschwinden. Setzen wir den Ansatz (113) in (110) ein, so finden wir, wenn ein gemeinsamer Faktor $\sin \vartheta$ gestrichen wird:

$$r^2 R_1'' + r^2 R_2'' \cos \vartheta + 2r R_1' + 2r R_2' \cos \vartheta - 2R_2 \cos \vartheta = 0.^2)$$

¹⁾ Hier ist einer der Fälle, auf den in Anm. 1 der pag. 27 Bezug genommen wurde: hier wäre es offenbar unmöglich und widersinnig, wenn man das Potential im Unendlichen gleich Null setzen würde.

²⁾ Die Striche bedeuten Ableitungen nach dem Argument.

Die linke Seite kann nur dann für jeden Wert von ϑ verschwinden, wenn die von $\cos \vartheta$ freien Glieder und die mit $\cos \vartheta$ behafteten Glieder für sich verschwinden, wenn also

$$(114) \quad \begin{cases} r^2 R_1'' + 2r R_1' = 0, \\ r^2 R_2'' + 2r R_2' - 2R_2 = 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung (114) hat die allgemeine Lösung:

$$(115) \quad R_1 = \frac{A}{r} + B;$$

man überzeugt sich davon leicht, wenn man bedenkt, daß

$$r^2 R_1'' + 2r R_1' = \frac{d}{dr} (r^2 R_1')$$

ist; durch einfache Quadraturen folgt dann der obige Wert; die Konstante B ist natürlich willkürlich und kann $= 0$ genommen werden. Man sieht, daß (115) der kugelsymmetrische Teil der Lösung ist, der mit $B = 0$ im Unendlichen verschwindet, wie es sein muß. Die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung (114) ist:

$$(115a) \quad R_2 = \frac{C}{r^2} + D r,$$

wovon man sich am einfachsten durch Einsetzen überzeugt. Folglich gewinnen wir als allgemeinen Ansatz für das Potential:

$$(116) \quad \Phi = \frac{A}{r} + \left(\frac{C}{r^2} + D r \right) \cos \vartheta.$$

Dieser Ausdruck erfüllt in der Tat die Gleichung (111), wenn D geeignet bestimmt wird; denn für $r = \infty$ folgt

$$\Phi_\infty = D r \cos \vartheta = -\mathfrak{E}_0 r \cos \vartheta.$$

Man muß also setzen

$$D = -\mathfrak{E}_0.$$

Damit wird (116):

$$(117) \quad \Phi = \frac{A}{r} + \left(\frac{C}{r^2} - \mathfrak{E}_0 r \right) \cos \vartheta.$$

Für die Kugeloberfläche muß Φ konstant werden; also muß nach (117) sein:

$$\Phi_{r=R} = \text{const} = \frac{A}{R} + \left(\frac{C}{R^2} - \mathfrak{E}_0 R \right) \cos \vartheta.$$

Das kann nur erfüllt werden, wenn der Faktor von $\cos \vartheta$ sich annulliert:

$$\frac{C}{R^2} - \mathfrak{E}_0 R = 0,$$

was zur Bestimmung von C liefert:

$$C = \mathfrak{E}_0 R^3,$$

womit (117) weiter wird:

$$(118) \quad \Phi = \frac{A}{r} + \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \mathfrak{E}_0 \cos \vartheta .$$

Der konstante Potentialwert $\Phi_{r=R}$ ist uns nicht gegeben; wir haben zur Bestimmung die Gleichung (112). Mit (118) findet man:

$$\int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_R dS = - \int \frac{A}{R^2} R^2 d\omega = - 4\pi A = - 4\pi e ,$$

d. h. $A = e$. Damit endlich ist alles bestimmt und die vollständige Lösung lautet:

$$(119) \quad \Phi = \frac{e}{r} + \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \mathfrak{E}_0 \cos \vartheta .$$

Sämtliche Bedingungen des Problems werden durch (119) erfüllt: die Laplacesche Gleichung, ferner die Bedingung (111) im Unendlichen, die Bedingung (112) an der Kugeloberfläche und die Vorschrift, daß die Kugeloberfläche eine Äquipotentialfläche sein muß. Nach dem früheren Eindeutigkeitsbeweise ist also (119) die einzige Lösung unserer Aufgabe. In dem Spezialfalle, den wir vorläufig allein weiter behandeln wollen, daß die Kugel ungeladen ist ($e = 0$), geht (119) über in

$$(120) \quad \Phi = \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \mathfrak{E}_0 \cos \vartheta .$$

Wenn man nach dieser Gleichung die Äquipotentialflächen konstruieren will, so ist es am zweckmäßigsten, mit der Gleichung $\Phi = 0$ anzufangen, d. h. mit der Gleichung

$$\left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \cos \vartheta = 0 .$$

Diese wird einerseits durch $r = R$, d. h. durch die Kugeloberfläche erfüllt, der sonach das Potential Null zukommt; andererseits aber auch durch

$$\cos \vartheta = 0 , \quad \text{d. h.} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} ,$$

d. h. durch die Äquatorialebene $z = 0$. Beide Flächen zusammen bilden die Äquipotentialfläche $\Phi = 0$. Im Unendlichen sind die Flächen gleichen Potentials ebenfalls sehr einfach: Es sind einfach die Ebenen $z = \text{const.}$ Je näher man der Kugel kommt, um so mehr deformieren sie sich, um sich schließlich stetig von beiden Seiten an die vorhin geschilderte Äquipotentialfläche $\Phi = 0$ anzuschließen. So erhält man schließlich die ausgezogenen Kurven der Fig. 19, die den Schnitt der xz -Ebene mit diesen Niveauflächen darstellt.

Da das ursprüngliche Feld parallel der positiven z -Richtung verläuft, so haben wir für $z < 0$ positive, für $z > 0$ negative Potentialwerte; auf der unteren Seite der Kugel haben wir folglich negative, auf

der Oberseite positive Influenzladung (vgl. Fig. 19). Die Dichte η der Influenzladungen ergibt sich nach (120) zu

$$(121) \quad \eta = \frac{3}{4\pi} \mathfrak{E}_c \cos \vartheta .$$

In dem in Fig. 19 dargestellten Schnitt schneiden sich Kugel und Äquatorialebene in den Punkten A und A' ; natürlich gilt das Folgende

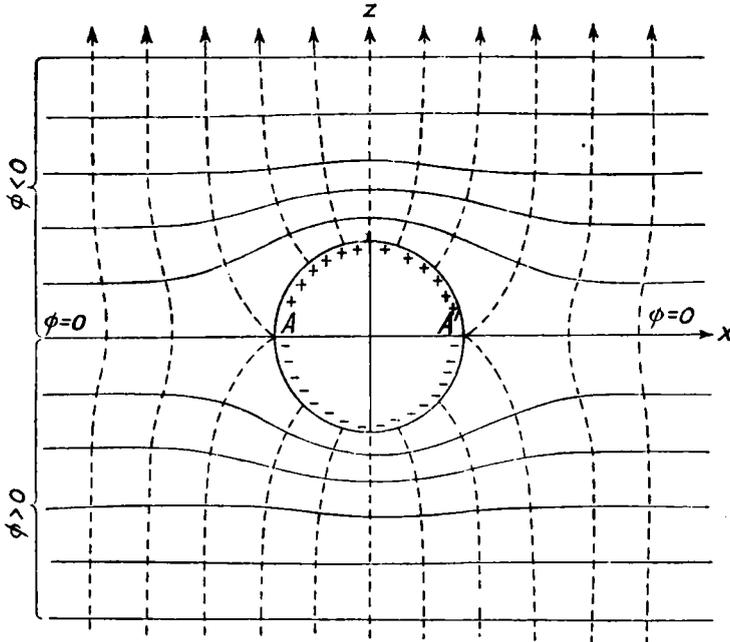


Fig. 19.

für alle Punkte des Kugeläquators. In diesen sämtlichen Punkten verschwindet nämlich die elektrische Feldstärke \mathfrak{E} . Denn aus (120) folgt durch partielle Differentiation, wenn man noch $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r \cos \vartheta = z$ setzt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mathfrak{E}_0 \frac{3R^3 x z}{r^5}, \\ \mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mathfrak{E}_0 \frac{3R^3 y z}{r^5}, \\ \mathfrak{E}_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \mathfrak{E}_0 \left\{ \frac{3R^3 z^2}{r^5} - \frac{R^3}{r^3} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Für die Kugeloberfläche werden diese Werte, wenn man wieder Polarkoordinaten einführt:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}_x} &= 3 \mathfrak{E}_0 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \psi, \\ \overline{\mathfrak{E}_y} &= 3 \mathfrak{E}_0 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \psi, \\ \overline{\mathfrak{E}_z} &= 3 \mathfrak{E}_0 \cos^2 \vartheta, \end{aligned}$$

und diese Ausdrücke verschwinden sämtlich für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. den Äquator. An diesen Stellen kompensiert das ursprüngliche homogene Feld gerade dasjenige der Influenzladung. Folglich müssen die Äquatorpunkte singuläre Stellen des Feldes insofern sein, als hier Kraftlinien und Niveaulinien sich im allgemeinen nicht mehr senkrecht durchschneiden werden. In der Tat findet man, daß die Kraftlinien an dieser Stelle genau unter 45° auf die Kugel auftreffen und sie verlassen. In Fig. 19 tritt dies an den Punkten A und A' ein; der rechte Winkel zwischen Kugel und Äquatorialebene wird gerade halbiert. So erhält

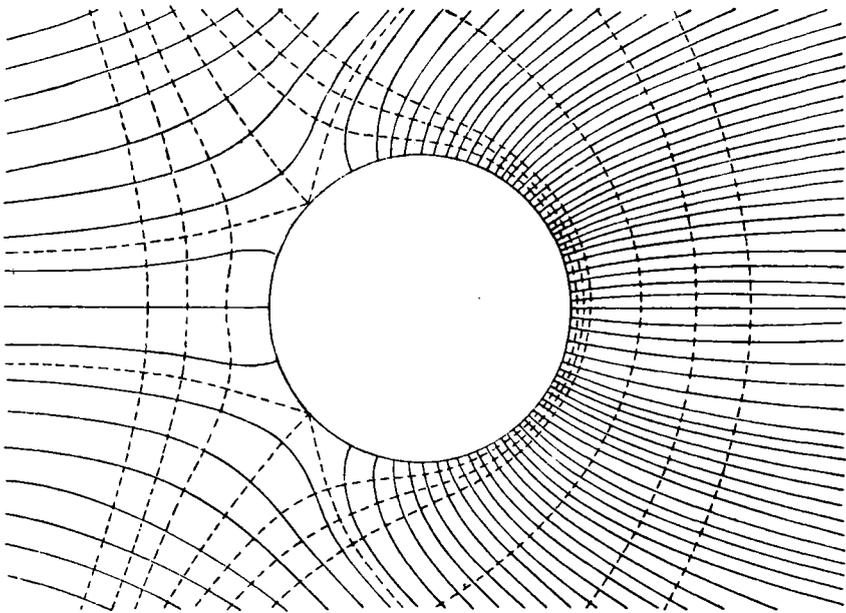


Fig. 20.

man zunächst die beiden Kraftlinien, die durch A und A' hindurchgehen; ferner ist die z -Achse selbst (aus Symmetriegründen) eine solche. In weiterem Abstände von der Kugel gehen die Kraftlinien allmählich in Geraden über: Der Störungseffekt der Kugel verschwindet. Die Kraftlinien sind als gestrichelte Kurven in die Fig. 19 eingetragen.

Man erkennt die vollkommene Symmetrie oberhalb und unterhalb der Äquatorialebene: Der geometrische Ausdruck dafür, daß auf die influenzierte Kugel vom äußeren Felde keine Kraft ausgeübt wird.

Anders liegt natürlich die Sache, wenn die Kugel, wie wir dies allgemeiner in Gleichung (119) angenommen hatten, die Ladung e trägt, die wir etwa als positiv annehmen wollen. Dann ist natürlich auch der ganze Potentialverlauf und Lage und Gestalt der Niveaulinien ein

anderer: Der Wert $\Phi = 0$ rückt von der Kugel fort in den Außenraum. Sie selbst hat offenbar den positiven Potentialwert $\frac{e}{R}$. Man kann in diesem Falle, in dem die analytische Bestimmung der Niveauflächen und Kraftlinien schon recht kompliziert ist, auf eine verhältnismäßig einfache Weise nach einer von Maxwell angegebenen Methode das System der Kraftlinien zeichnen: Man zeichnet zunächst das Bild der Kraftlinien der Fig. 19, zeichnet darüber das Kraftlinienbild, wie es die Ladung e für sich allein erzeugen würde, d. h. radial vom Kugelzentrum verlaufende Geraden. Diese bilden mit dem ersten Kraftliniensystem verzerrte kleine Parallelogramme. Da nun die Kräfte nach der Regel des Kräfteparallelogramms, d. h. vektoriell addiert werden, genügt es — unter Beachtung des Richtungssinnes der Kraftlinien — die Diagonalen dieser Parallelogramme zu ziehen: Diese bilden dann die neuen gesuchten Kraftlinien. So erhält man das Bild der Fig. 20, in dem die Symmetrie bezüglich der Äquatorialebene vollkommen verschwunden ist, ein Zeichen, daß auf die geladene Kugel im Felde \mathfrak{C}_0 eine Kraft wirkt, die leicht zu $e\mathfrak{C}_0$ gefunden wird.

Man bemerkt, daß auch hier singuläre Stellen des Feldes vorkommen, in denen Kraftlinien und Äquipotentialflächen sich nicht orthogonal durchschneiden; doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

Mit diesem Beispiele wollen wir die Elektrostatik im Vakuum abschließen; noch ausstehende Fragen, wie die nach der Energie, den ponderomotorischen Kräften usw. werden wir erst behandeln, wenn wir die notwendige Verallgemeinerung unserer bisherigen Resultate für beliebige Isolatoren erlangt haben werden.

11. Das elektrostatische Feld in einem beliebigen homogenen Isolator; Anwendungen (Plattenkondensator).

Vom Standpunkt der Feldwirkung liegt die Frage nahe, ob die physikalische Natur des die elektrischen Ladungen umgebenden Mediums einen Einfluß auf die Erscheinungen, z. B. die Kräfte, habe; es ist daher kein Zufall, sondern nur die konsequente Verfolgung des Gedankens der Feldtheorie, daß ihr Schöpfer Faraday systematische Versuche darüber angestellt hat.

Wir knüpfen am besten wieder an die Anordnung an, mit der wir in Nr. 2 das Coulombsche Gesetz fanden: Zwei kleine Metallkugeln in sehr großer Entfernung r sind mit den Ladungen e_1 bzw. e_2 versehen. Jede übt dann auf die andere im Vakuum eine Kraft aus vom Betrage

$$K = \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Ändert sich daran etwas, und was ändert sich, wenn wir die Kugeln unter Festhaltung ihrer Ladungen in einen gasförmigen oder flüssigen Isolator eintauchen?

Der Versuch zeigt, daß in der Tat eine Änderung eintritt, und zwar werden die Kräfte in einem bestimmten Verhältnis geschwächt, so daß man schreiben kann:

$$(122) \quad K = \frac{1}{\epsilon} \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

wo ϵ eine reine Zahl größer als 1 ist, die demgemäß den Einfluß des umgebenden Mediums charakterisiert. Die Faraday-Maxwellsche Theorie betrachtet diese Größe ϵ als eine Materialkonstante in demselben Sinne, wie die klassische Mechanik z. B. die Dichte als eine solche betrachtet: Das ist der Standpunkt der Kontinuumstheorie in beiden Fällen. Vom Standpunkt der Molekulartheorie ist die Dichte eines materiellen Mediums keine eigentliche Materialkonstante mehr, sondern ein Mittelwert. Die analoge Fragestellung taucht auch hier auf: Vom orthodoxen Standpunkt der Feldtheorie ist ϵ als eine charakteristische Konstante des Materials zu betrachten; was aber bedeutet sie vom Standpunkt der Molekulartheorie? Wir werfen diese Frage hier nur auf, schließen uns aber vorläufig der Kontinuumstheorie Maxwells an, ignorieren also vorläufig die molekulare und atomistische Konstitution der Materie. Dies kann kein endgültiger Standpunkt sein, und wir werden in der Tat im Kapitel XII genötigt sein, unsere Auffassung der Größe ϵ zu vertiefen. Rein qualitativ betrachtet, ist die bloße Existenz eines durch die Größe ϵ beschriebenen Einflusses auf die elektrischen Erscheinungen eine starke Stütze für die Feldtheorie; Faraday nannte in diesem Sinne die Isolatoren, in denen sich das elektrische Feld ausbildet, „Dielektrika“ und demgemäß die Größe ϵ die „Dielektrizitätskonstante“ (D.K.) des betreffenden Mediums.

Obwohl man den oben geschilderten Versuch nicht mit festen Dielektrics anstellen kann, nehmen wir auch für sie das Gesetz (122) als gültig an und werden uns später von seiner Richtigkeit überzeugen.

Die elektrische Feldstärke geht in einem Dielektrikum auf den ϵ^{ten} Teil zurück, wie sofort aus der Definitionsgleichung für die Feldstärke folgt:

$$\mathfrak{E} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{E}}{\epsilon}.$$

Anderseits bleibt die zweite Erfahrungstatsache erhalten, daß man durch Herumführen einer elektrischen Ladung auf beliebigen geschlossenen Kurven niemals Arbeit aus dem Felde entnehmen kann. Auch hier kann das Experiment sich nur auf nichtfeste Dielektrika erstrecken; wir nehmen die Tatsache aber als allgemein gültig an. Dann ist die elektrische Feldstärke also auch hier der Gradient eines eindeutigen skalaren Potentials Φ , das gleichfalls im Vergleich zum Vakuum unter sonst gleichen Umständen auf den ϵ^{ten} Teil reduziert wird.

Diese Tatsachen müssen genügen, die Feldgleichungen aufzustellen, die im homogenen Isolator gelten.

Zunächst liefert die zweite Tatsache, daß auch im homogenen Isolator die elektromotorische Kraft längs jeder geschlossenen Kurve verschwindet, die alte Gleichung (24) bzw. (24a):

$$\oint \mathfrak{E}_s ds = 0 ,$$

oder, mit Hilfe des Stokesschen Satzes, die äquivalente Differentialgleichung

$$(123) \quad \text{rot } \mathfrak{E} = 0 .$$

D. h. das elektrostatische Feld im homogenen Dielektrikum ist wirbelfrei. Natürlich verschwindet auch der Flächenwirbel, und wir erhalten für die tangentiellen Komponenten der elektrischen Kraft zu beiden Seiten einer Trennungsoberfläche:

$$(124) \quad \mathfrak{E}_t^{(1)} = \mathfrak{E}_t^{(2)}$$

genau wie früher, mit dem Spezialfall

$$(124a) \quad \mathfrak{E}_t = 0 \quad \text{an Leiteroberflächen.}$$

Bisher ist alles beim alten geblieben. Wie aber sind unsere bisherigen Sätze über den Kraftfluß abzuändern? Diese waren ja neben Gleichung (123) bisher unsere andere Quelle zur Gewinnung der Feldgleichungen. Es ist jedenfalls klar, daß die Gleichung

$$\int \mathfrak{E}_n dS = 4\pi \sum e$$

hier nicht mehr gelten kann. Denn bei der Ableitung dieses Satzes haben wir von dem unveränderten Coulombschen Gesetze Gebrauch gemacht, indem wir für die Feldstärke einer unendlich kleinen Ladung de den Wert $\frac{de}{r^2}$ einsetzten. Jetzt ist statt dieses Wertes $\frac{de}{\epsilon r^2}$ einzuführen, und so erhalten wir, durch im übrigen genau dieselben Schlüsse wie in Nr. 4, für den Kraftfluß den Wert

$$(125) \quad \int \mathfrak{E}_n dS = \frac{4\pi}{\epsilon} \sum e = \frac{4\pi}{\epsilon} \int \rho d\tau .$$

Wir können dies etwas anders, und zwar allgemeiner, ausdrücken. Multiplizieren wir mit ϵ herauf, so haben wir

$$(125a) \quad \int (\epsilon \mathfrak{E})_n dS = 4\pi \sum e = 4\pi \int \rho d\tau .$$

Wenn man nun rein formal einen neuen Vektor \mathfrak{D} einführt und diesen gleich $\epsilon \mathfrak{E}$ nimmt:

$$(126) \quad \mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E} ,$$

so kann man sagen, daß der obige Satz vom Kraftfluß nicht mehr für den Vektor \mathfrak{E} , sondern für \mathfrak{D} gilt:

$$(127) \quad \int \mathfrak{D}_n dS = 4\pi \sum e = 4\pi \int \rho d\tau .$$

Die beiden Aussagen (126) und (127) zusammen sind im homogenen Dielektrikum vollkommen wesensgleich mit (125), sind aber etwas allgemeiner formuliert, was uns nachher für das inhomogene Dielektrikum zustatten kommen wird. Wir können die Gleichung (127) auch so aussprechen: Die elektrischen Ladungen sind jetzt die Quellen des Vektors \mathfrak{D} . (Früher waren sie die Quellen von \mathfrak{E} .) Wendet man auf (127) die Gaußsche Integraltransformation an, so folgt

$$\int \mathfrak{D}_n dS = \int \operatorname{div} \mathfrak{D} d\tau = 4\pi \int \rho d\tau,$$

oder das (127) gleichwertige Differentialgesetz

$$(128) \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi \rho.$$

Dies spricht eben gerade aus, was wir oben behaupten, daß die Größen ρ die Quellen von \mathfrak{D} sind.

Maxwell hat diesen Vektor — wobei ihn eine Analogie zur Elastizitätstheorie leitete — den Vektor der dielektrischen Verschiebung oder kurz Verschiebungsvektor genannt: Er hat die gleiche Richtung wie \mathfrak{E} , ist aber vom ϵ -fachen Betrage. Man kann nun natürlich auch \mathfrak{D} -Linien, sog. „Verschiebungslinien“ im Felde ziehen; sie haben die gleiche Richtung wie die \mathfrak{E} -Linien (Kraftlinien), nur die ϵ -fache Dichte. Mit Gleichung (127) haben wir natürlich im Prinzip auch den Degenerationsfall erledigt, den wir in Nr. 4 in Gleichung (23) behandelt haben; er beantwortet die Frage, wie sich die Normalkomponenten von \mathfrak{D} beim Durchgang durch eine geladene Fläche verhalten. Was in (23) von \mathfrak{E}_n bewiesen wurde, gilt jetzt für \mathfrak{D}_n . Also:

$$(129) \quad \mathfrak{D}_n^{(1)} - \mathfrak{D}_n^{(2)} = 4\pi \eta,$$

mit dem Spezialfall

$$(129a) \quad \mathfrak{D}_n = 4\pi \eta \text{ an Leiteroberflächen.}$$

Wir stellen noch einmal die gewonnenen Ergebnisse zusammen: Das elektrische Feld leitet sich aus einem Potential Φ ab; infolgedessen verschwindet nach (123) sowohl der Wirbel, als auch nach (124) bzw. (124a) der Flächenwirbel der elektrischen Kraft, d. h. die tangentiellen Komponenten der Feldstärke sind stetig. Ferner sind die elektrischen Ladungen die Quellen des Vektors $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ nach (127) oder (128), und die Normalkomponenten von \mathfrak{D} haben beim Durchgang durch eine geladene Fläche eine durch (129) bzw. (129a) bestimmte Unstetigkeit. Dadurch ist das Feld vollkommen bestimmt, wie der Eindeutigkeitsbeweis ergibt, den wir unterdrücken können, da er genau so verläuft wie in Nr. 7.

Wir können nun die Feldgleichungen auch etwas anders ausdrücken. Denn wir können ja den Vektor \mathfrak{D} ganz eliminieren, indem wir ihn nach (126) durch $\epsilon \mathfrak{E}$ ausdrücken. Dann finden wir statt (128)

$$(130) \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{4\pi \rho}{\epsilon},$$

und statt der Ausartung dieser Gleichung nach (129) bzw. nach (129a)

$$(131) \quad \mathfrak{E}_n^{(1)} - \mathfrak{E}_n^{(2)} = \frac{4\pi\eta}{\epsilon},$$

$$(131a) \quad \mathfrak{E}_n = \frac{4\pi\eta}{\epsilon} \text{ an Leiteroberflächen.}$$

Wenn wir jetzt die Größen

$$(132) \quad \varrho' = \frac{\varrho}{\epsilon} \quad \text{und} \quad \eta' = \frac{\eta}{\epsilon}$$

als die sog. „freie Elektrizität“ im Gegensatz zur „wahren Elektrizität“ ϱ und η bezeichnen, so können wir auch sagen: Der einzige Unterschied gegen das Verhalten im Vakuum besteht darin, daß als die Quellen des Vektors \mathfrak{E} nicht mehr die wahren Ladungen ϱ und η , sondern die freien Ladungen $\varrho' = \frac{\varrho}{\epsilon}$ und $\eta' = \frac{\eta}{\epsilon}$ anzusehen sind. Demgemäß ist auch das Potential Φ aus den freien Ladungen zu berechnen. Denn durch Φ ausgedrückt liefern die Gleichungen (130) bis (131a):

$$(133) \quad \Delta\Phi = -4\pi\varrho' = -\frac{4\pi\varrho}{\epsilon},$$

$$(134) \quad \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial n} = -4\pi\eta' = -\frac{4\pi\eta}{\epsilon},$$

$$(134a) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -4\pi\eta' = -\frac{4\pi\eta}{\epsilon} \text{ an Leiteroberflächen.}$$

Wir wollen nun wieder einen möglichst einfachen Fall, nämlich den des Plattenkondensators behandeln, wenn der Zwischenraum zwischen den beiden Platten mit einem Dielektrikum von der D.K. ϵ ausgefüllt ist. Dann haben wir nach Fig. 16:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0,$$

also

$$\Phi = Ax + B,$$

mithin für die Potentiale und die Potentialdifferenz der beiden Platten:

$$\Phi_1 = B, \quad \Phi_2 = Ad + B; \quad \Phi_1 - \Phi_2 = -Ad.$$

Ferner muß nach (134a) sein:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{4\pi\eta_1}{\epsilon},$$

also

$$A = -\frac{4\pi\eta_1}{\epsilon} = -\frac{4\pi e_1}{\epsilon F}.$$

Damit wird das Potential im Zwischenraum zwischen den beiden Platten:

$$(135) \quad \Phi = -\frac{4\pi e_1}{F\epsilon} x + B,$$

die Potentialdifferenz zwischen beiden Platten:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{4\pi e_1 d}{F \epsilon} ,$$

also die Kapazität C :

$$(136) \quad C = \frac{e_1}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{F \epsilon}{4\pi d} .$$

Sie ist also im Vergleich zu dem Vakuumwerte — Gleichung (88) — auf das ϵ fache vermehrt. Was wir hier in einem Spezialfalle nachgewiesen haben, gilt ganz allgemein. Denn unter Kapazität verstehen wir doch das Verhältnis $\frac{e}{\Phi}$ zwischen der Ladung und dem Potential eines Leiters, wenn alle übrigen Leiter geerdet sind. Wir haben also für unser Dielektrikum:

$$C = \frac{\int \eta dS}{\int \frac{\eta' dS}{r}} = \frac{\int \eta dS}{\int \frac{\eta dS}{\epsilon r}} = \epsilon \frac{\int \eta dS}{\int \frac{\eta dS}{r}} ,$$

während im Vakuum gilt ($\epsilon = 1$):

$$C_0 = \frac{\int \eta dS}{\int \frac{\eta dS}{r}} ;$$

also ist in der Tat allgemein:

$$(137) \quad C = \epsilon C_0 .$$

Der Leser möge dies Ergebnis z. B. am Kugelkondensator verifizieren.

Die Tatsache nun, daß die Kapazität C_0 eines Vakuumkondensators sich mit ϵ multipliziert, wenn der Zwischenraum mit einem Dielektrikum von der D.K. ϵ ausgefüllt wird, gilt auch für feste Dielektrika. Damit rechtfertigt sich unsere bisher experimentell nicht beweisbare Annahme, daß die Gleichung (122) des erweiterten Coulombschen Gesetzes auch für feste Isolatoren Gültigkeit besitzt. In der folgenden Tabelle sind einige Werte von Dielektrizitätskonstanten für die wichtigsten Isolatoren zusammengestellt.

Stoff	D.K.	Stoff	D.K.
Schwefel	3,5—4,1	Wasser	81
Paraffin	2,3	Petroleum	1,92
Schellack	2,7—3,6	Terpentin	2,23
Kautschuk	2,2—2,9	Rizinusöl	4,78
Crownglas	9	Benzol	2,43
Boratorn	5,5	Luft	1,059
Silikatflintglas	8,3	H ₂	1,0264
Methylalkohol	34	CO ₂	1,0946
Äthylalkohol	25,8	CO	1,03690
Amylalkohol	16,0	Stickoxydul	1,03994
Ameisensäure	62,0	Sumpfgas	1,0944
Azeton	21,85	Schweflige Säure	1,00520
Äthyläther	4,25		

Aus der Tabelle geht hervor, daß die Dielektrizitätskonstante der Luft erst in der 4. Dezimale von der Einheit abweicht. Es macht deshalb praktisch keinen Unterschied, ob die elektrostatischen Versuche, von denen wir in den ersten 10 Nummern sprachen, im Vakuum oder in Luft gemacht werden. Tatsächlich sind alle diese Versuche in Luft gemacht worden, was durch den obigen Wert der Dielektrizitätskonstante seine Rechtfertigung findet.

12. Das elektrostatische Feld im inhomogenen Isolator; Anwendungen: Messung von \mathfrak{E} und \mathfrak{D} in festen Isolatoren; Brechung der Kraftlinien; Plattenkondensator.

Wie liegen nun die Verhältnisse, wenn das Dielektrikum nicht homogen ist, wenn also ε entweder stetig von Ort zu Ort variiert oder an bestimmten Stellen, sog. Unstetigkeitflächen, sich sprunghaft ändert?

Zunächst bleibt die Tatsache erhalten, daß die elektromotorische Kraft längs jeder geschlossenen Kurve gleich Null ist. Demgemäß gelten auch im inhomogenen Dielektrikum die Gleichungen (123), (124) und (124a), die die Wirbelfreiheit, von \mathfrak{E} bzw. seine Ableitbarkeit aus einem eindeutigen skalaren Potential ausdrücken.

Die Gleichung (127), die im homogenen Dielektrikum an die Stelle der alten Gleichung vom Kraftfluß trat, haben wir damals mit Absicht allgemeiner formuliert, als es der unmittelbare Zweck erfordert hätte, indem wir

$$(127) \quad \int \mathfrak{D}_n dS = \int \varepsilon \mathfrak{E}_n dS \quad \text{statt} \quad = \varepsilon \int \mathfrak{E}_n dS$$

schrieben; d. h. wir beließen die Größe ε , obwohl sie konstant war, unter dem Integralzeichen. Die Gültigkeit dieser Gleichung (127) wollen wir auch hier annehmen, wo die D.K. eine Ortsfunktion ist, was als einfachste mögliche Annahme naheliegt. Freilich ist das durchaus hypothetisch — wie jede Verallgemeinerung — und das endgültige Urteil spricht natürlich immer die Erfahrung; diese aber gibt unserem Ansatz recht. Damit bleiben alle Gleichungen, die sich aus (127) ableiten, auch hier erhalten. Im besonderen haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{D} &= 4\pi \rho, \\ \mathfrak{D}_n^{(1)} - \mathfrak{D}_n^{(2)} &= 4\pi \eta, \\ \mathfrak{D}_n &= 4\pi \eta \text{ an Leiteroberflächen.} \end{aligned}$$

Drücken wir in der ersten dieser Gleichungen \mathfrak{D} durch \mathfrak{E} aus, so folgt:

$$\operatorname{div} (\varepsilon \mathfrak{E}) = \varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E} + (\mathfrak{E}, \operatorname{grad} \varepsilon) = 4\pi \rho.$$

Sie kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(138) \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{4\pi \rho}{\varepsilon} - \frac{(\mathfrak{E}, \operatorname{grad} \varepsilon)}{\varepsilon} = 4\pi \rho' - \frac{(\mathfrak{E}, \operatorname{grad} \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Nun hatten wir schon vorher $\rho' = \frac{\rho}{\epsilon}$ als „freie Ladung“ bezeichnet, und im homogenen Dielektrikum war $4\pi\rho'$ gleich der Divergenz von \mathfrak{E} . Hier tritt noch ein Glied hinzu, das von der Variation der D.K. herührt. Wir können dies in naheliegender Weise so interpretieren, daß im inhomogenen Dielektrikum auch überall da, wo ϵ variiert, freie Elektrizität auftritt, auch wenn gar keine wahren Ladungen ρ vorhanden sind. Man nennt diese freien Ladungen zuweilen auch „induzierte“ Ladungen, weil der Vorgang eine gewisse Ähnlichkeit mit der Influenzladung an Leitern hat, wie wir später noch genauer sehen werden. Wir wollen solche Ladungen, wo es notwendig ist, durch einen doppelten oberen Strich (ρ'' , η'') bezeichnen. In (138) ist also

$$(138a) \quad \rho'' = -\frac{1}{4\pi} \frac{(\mathfrak{E}, \text{grad } \epsilon)}{\epsilon}$$

zu setzen. In diesem erweiterten Sinne kann man auch hier noch sagen, daß die Quellen des Vektors \mathfrak{E} die freien Ladungen sind, nur muß man beachten, daß das zweite Glied auf der rechten Seite von (138) hinzukommt, das selbst noch von \mathfrak{E} abhängt. Darin liegt die besondere Komplikation dieses Falles.

Ganz analog ist es mit der Gleichung

$$\mathfrak{D}_n^{(1)} - \mathfrak{D}_n^{(2)} = 4\pi\eta.$$

Wenden wir sie auf die Unstetigkeitsfläche S an, die zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 und ϵ_2 trennt (Fig. 21), so liefert sie

$$(139) \quad \epsilon_1 \mathfrak{E}_n^{(1)} - \epsilon_2 \mathfrak{E}_n^{(2)} = 4\pi\eta,$$

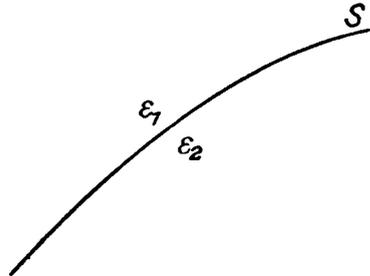


Fig. 21.

und für die Flächendivergenz von \mathfrak{E} ergibt sich:

$$(140) \quad \mathfrak{E}_n^{(1)} - \mathfrak{E}_n^{(2)} = \frac{4\pi\eta}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} \mathfrak{E}_n^{(2)}.$$

Auch hier tritt neben das uns bisher allein bekannte Glied $\eta' = \frac{\eta}{\epsilon}$ eine weitere freie Ladung, die durch den Sprung der D.K. an der Unstetigkeitsfläche bedingt ist. Ist die Unstetigkeitsfläche ungeladen, so geht (140) über in:

$$(140a) \quad \mathfrak{E}_n^{(1)} - \mathfrak{E}_n^{(2)} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} \mathfrak{E}_n^{(2)}.$$

In unserer obigen Bezeichnung ist also die Dichte der „induzierten“ Ladung in diesem Falle

$$(140b) \quad \eta'' = \frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} \mathfrak{E}_n^{(2)}.$$

Für eine Leiteroberfläche schließlich wird die Gleichung $\mathfrak{D}_n = 4\pi\eta$ zu:

$$(141) \quad \mathfrak{E}_n = \frac{4\pi\eta}{\epsilon_1},$$

wo ϵ_1 die D.K. des den Leiter umgebenden Mediums ist.

Natürlich kann man \mathfrak{E} überall durch das Potential Φ ausdrücken. Das liefert folgendes: Gleichung (138) ergibt:

$$(142) \quad \Delta\Phi = -4\pi\rho' - 4\pi\rho'' = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} - \frac{(\text{grad}\Phi, \text{grad}\epsilon)}{\epsilon},$$

Gleichung (140):

$$(143) \quad \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial n} = -4\pi\eta' - 4\pi\eta'' = -\frac{4\pi\eta}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial n},$$

Gleichung (141):

$$(144) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -4\pi\eta' = \frac{4\pi\eta}{\epsilon_1} \text{ an Leiteroberflächen.}$$

Durch diese Bedingungen ist das Potential eindeutig bestimmt und mit ihm das elektrische Feld im inhomogenen Dielektrikum. Da sämtliche freien Ladungen zum Potential beitragen, so kann es formal geschrieben werden:

$$\Phi = \int \frac{\rho'}{r} d\tau + \int \frac{\rho''}{r} d\tau + \int \frac{\eta'}{r} dS + \int \frac{\eta''}{r} dS.$$

Wir wollen zunächst eine allgemeine Folgerung aus den vorhergehenden Betrachtungen ziehen, die uns ermöglicht, in jedem beliebigen Dielektrikum die Größen \mathfrak{E} und \mathfrak{D} zu messen. In gasförmigen und flüssigen Isolatoren kann man dies freilich schon auf Grund der bisherigen Erörterung, nicht jedoch in festen Körpern. Die jetzt anzustellende Betrachtung soll diese Lücke ausfüllen; sie gilt aber offenbar ganz allgemein.

Wir denken uns ein in einem Dielektrikum bestehendes homogenes Feld, dessen Kraftlinien also alle parallel einer bestimmten Richtung laufen; in diesem Dielektrikum bringen wir eine sehr dünne und sehr lange zylindrische Aushöhlung an; die Zylinderachse soll mit der Feldrichtung zusammenfallen. Dann ist der Mantel des Zylinders überall parallel den Kraftlinien: Im Verlauf der \mathfrak{E} -Linien des äußeren Feldes tritt also — wenn wir von der Wirkung von Grund- und Gegenfläche des Zylinders absehen — durch Anbringen der Höhlung keine Änderung ein. Wegen der Stetigkeit der tangentiellen Komponenten der elektrischen Kraft, die an der Mantelfläche offenbar mit der ganzen Feldstärke identisch ist, ist also im Innern des Hohlzylinders die Feldstärke genau dieselbe, wie sie im Dielektrikum vor Anbringung der zylindrischen Höhlung war. In diesem Hohlraum können wir die Feldstärke messen und wissen nun, daß wir damit auch die Feldstärke \mathfrak{E} im Dielektrikum an dieser Stelle gemessen haben. Strenggenommen gilt dies nur für einen unendlich langen

Zylinder; wenn er jedoch dünn genug gegen seine Länge ist, so kann die Störung durch Grund- und Gegenfläche vernachlässigt werden. Auch braucht das äußere Feld in praxi nicht homogen zu sein: Die Länge des Hohlzylinders ist klein gegen die lineare Dimension der Inhomogenität des Feldes zu wählen, und der Zylinderradius wiederum sehr klein gegen seine Länge. Unsere obige Betrachtung hat also allgemeine Bedeutung: Wenn man die Feldstärke an irgendeiner Stelle eines festen Dielektrikums messen will, so muß man dort einen gegen seine Länge sehr dünnen zylindrischen Kanal parallel der Feldrichtung bohren; die Kraft, die im Innern dieses Kanals auf die Einheitsladung wirkt, ist die Feldstärke im festen Dielektrikum. Damit ist die grundsätzliche Schwierigkeit beseitigt, die bisher noch bestand.

Denken wir uns umgekehrt einen zylindrischen Hohlraum von sehr kleiner Höhe, aber von sehr großer Grund- und Gegenfläche, so im Dielektrikum angebracht, daß die Kraftlinien Grund- und Gegenfläche senkrecht durchsetzen, so können wir — diesmal unter Vernachlässigung der Wirkung des unendlich kleinen Mantels — auf Grund- und Gegenfläche den Satz von der Stetigkeit der Normalkomponente der Verschiebung \mathfrak{D} anwenden, da ja keine wahren Ladungen vorhanden sind. In unserem Falle ist die Normalkomponente \mathfrak{D}_n mit \mathfrak{D} wegen der speziellen Lage des Zylinders identisch, und so erhalten wir, wenn wir den Innenraum durch den Index i auszeichnen, während der Außenraum ohne Index bleibt:

$$\mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}.$$

Im Innenraum des Hohlzylinders ist aber $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{E}_i$, da die D.K. hier gleich 1 ist. Es ist also $\mathfrak{E}_i = \mathfrak{D}$, mithin die Feldstärke \mathfrak{E}_i in diesem

Hohlraum identisch mit der Verschiebung \mathfrak{D} im Dielektrikum, bevor der Hohlraum angebracht war. Man mißt also den Verschiebungsvektor \mathfrak{D} , indem man senkrecht zu den Kraftlinien einen sehr flachen Hohlzylinder ausschneidet; die Kraft auf die Einheitsladung im Inneren dieses Hohlraumes ist gleich der gesuchten Verschiebung \mathfrak{D} an dieser Stelle. Damit ist auch \mathfrak{D} in allen Fällen grundsätzlich der Messung zugänglich geworden.

Eine weitere allgemeine Folgerung aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente und der Unstetigkeit der Normalkomponente von \mathfrak{E} ist die an Grenzflächen zweier Medien erfolgende Brechung der \mathfrak{E} -Linien (Kraftlinien) und \mathfrak{D} -Linien (Verschiebungslinien). Denn wir haben ja (Fig. 22), wenn S die Trennungsfläche zweier Medien mit den D.K. ϵ_1 und ϵ_2 ist, und

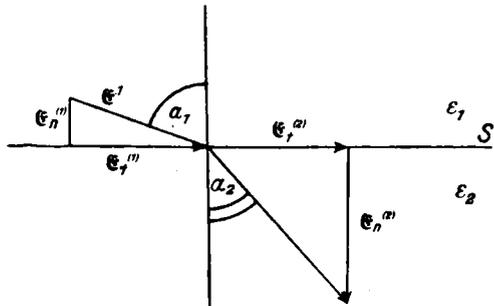


Fig. 22.

$\mathfrak{E}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{E}^{(2)}$ die Werte der elektrischen Kraft zu beiden Seiten der Trennungsfläche sind:

$$\text{tang } \alpha_1 = \frac{\mathfrak{E}_t^{(1)}}{\mathfrak{E}_n^{(1)}}, \quad \text{tang } \alpha_2 = \frac{\mathfrak{E}_t^{(2)}}{\mathfrak{E}_n^{(2)}}.$$

Da nun

$$\mathfrak{E}_t^{(1)} = \mathfrak{E}_t^{(2)}, \quad \varepsilon_1 \mathfrak{E}_n^{(1)} = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_n^{(2)}$$

ist, so folgt:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \text{tang } \alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} \text{tang } \alpha_2$$

oder

$$(145) \quad \frac{\text{tang } \alpha_1}{\text{tang } \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

d. h. die Tangenten des Einfallswinkels- und Brechungswinkels verhalten sich wie die Dielektrizitätskonstanten der beiden Medien. Genau das gleiche Gesetz gilt auch für die Brechung der \mathfrak{D} -Linien. Denn für \mathfrak{D}_t und \mathfrak{D}_n gelten ja die Gleichungen

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \mathfrak{D}_t^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_2} \mathfrak{D}_t^{(2)},$$

$$\mathfrak{D}_n^{(1)} = \mathfrak{D}_n^{(2)},$$

durch deren Division wieder (145) folgt.

Darin ist folgende Erscheinung begründet: Treffen aus einem Medium mit kleiner D.K. (z. B. Luft) Kraftlinien (oder Verschiebungslinien) auf

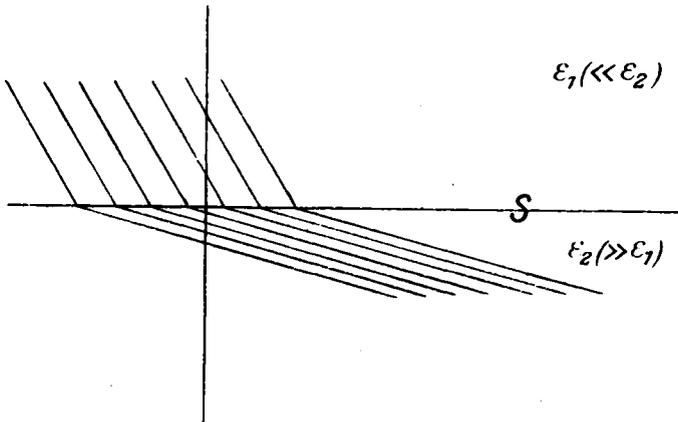


Fig. 23.

die Grenzfläche eines Mediums mit sehr großer D.K. (z. B. Wasser), so werden die Kraftlinien (Verschiebungslinien) in dem letzteren Medium sehr stark zusammengedrängt (Fig. 23), so daß im zweiten Medium eine viel größere Zahl von Linien die Flächeneinheit senkrecht durchsetzt.

Wir wenden uns nach diesen allgemeinen Erörterungen nun zur Besprechung eines einfachen Beispiels für das elektrische Feld in einem in-

homogenen Dielektrikum. Wir wählen dazu wieder den Plattenkondensator, dessen Zwischenmedium nunmehr aber eine veränderliche D.K. habe; ϵ wird also (Fig. 24) hier als Funktion von x betrachtet; es sei beispielshalber

$$\epsilon = \epsilon_0 + \alpha x .$$

Wahre Ladung vom Betrage e_1 (Dichte $\eta_1 = \frac{e_1}{F}$) sitzt auf der ersten Platte ($x = 0$); von ihr geht der Verschiebungsfluß

$$(\mathfrak{D}_x)_{x=0} F = 4\pi e_1 = 4\pi \eta_1 F$$

aus. Er wird, da das Feld homogen ist, vollkommen von der Innenseite der zweiten Platte ($x = d$) aufgenommen, auf der also sämtliche Verschiebungslinien endigen; dort befindet sich also die Influenzladung $e_2 = -e_1$. Der Verschiebungsfluß ist also im ganzen Innern des Kondensators konstant, d. h.

$$(146) \quad \mathfrak{D}_x = \frac{4\pi e_1}{F} = 4\pi \eta_1 .$$

Daraus folgt für das Feld \mathfrak{E}_x :

$$(147) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \frac{4\pi e_1}{F \epsilon} \\ &= \frac{4\pi \eta_1}{\epsilon} = \frac{4\pi \eta_1}{\epsilon_0 + \alpha x} . \end{aligned} \right.$$

Für das Potential folgt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} &= -\frac{4\pi \eta_1}{\epsilon_0 + \alpha x} \\ &= -\frac{4\pi e_1}{F(\epsilon_0 + \alpha x)} , \end{aligned}$$

woraus

$$(148) \quad \Phi = -\frac{4\pi e_1}{F} \int \frac{dx}{\epsilon_0 + \alpha x} = -\frac{4\pi e_1}{F\alpha} \log(\epsilon_0 + \alpha x) + B$$

sich ergibt. Damit ist die Aufgabe gelöst, da der Wert von B gleichgültig ist. Für die Potentiale an den beiden Platten findet man

$$\Phi_1 = -\frac{4\pi e_1}{F\alpha} \log \epsilon_0 + B, \quad \Phi_2 = -\frac{4\pi e_1}{F\alpha} \log(\epsilon_0 + \alpha d) + B;$$

daraus die Kapazität

$$(149) \quad C = \frac{e_1}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{F\alpha}{4\pi} \frac{1}{\log\left(1 + \frac{\alpha d}{\epsilon_0}\right)} .$$

Diesen Ausdruck kann man auch in die Form bringen

$$(149a) \quad C = \frac{\epsilon_0 F}{4\pi d} \frac{\frac{\alpha d}{\epsilon_0}}{\log\left(1 + \frac{\alpha d}{\epsilon_0}\right)} .$$

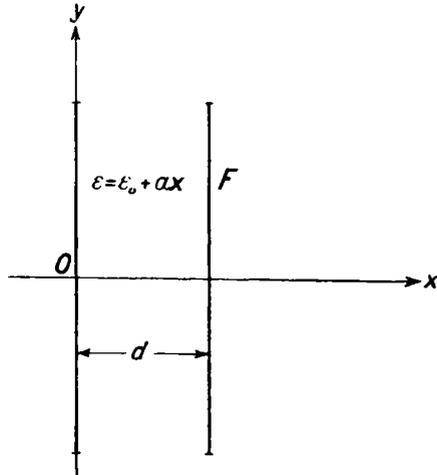


Fig. 24.

Läßt man hier α gegen Null abnehmen, so muß man den Fall des homogenen Dielektrikums ϵ_0 erhalten; in der Tat geht der Bruch $\frac{\alpha d}{\epsilon_0 \log \left(1 + \frac{\alpha d}{\epsilon_0} \right)}$ gegen 1 und C gegen $\frac{\epsilon_0 F}{4\pi d}$, wie es nach (136) sein muß.

Man hätte in diesem Falle das elektrostatische Problem auch anders angreifen können, wenn man an die Differentialgleichung (142) für $\Delta\Phi$ angeknüpft hätte. Da im Kondensator $\varrho = \varrho' = 0$ ist und Φ nur von x abhängt, nimmt diese Gleichung die einfache Gestalt an

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = - \frac{\frac{d\Phi}{dx} \frac{d\epsilon}{dx}}{\epsilon},$$

da hier $\text{grad } \Phi$ und $\text{grad } \epsilon$ in $\frac{d\Phi}{dx}$ und $\frac{d\epsilon}{dx}$ degenerieren und einander parallel gerichtet sind. Diese Gleichung kann man aber ganz allgemein integrieren:

$$\frac{\frac{d^2\Phi}{dx^2}}{\frac{d\Phi}{dx}} = - \frac{\frac{d\epsilon}{dx}}{\epsilon},$$

d. h.

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{A}{\epsilon} = \frac{A}{\epsilon_0 + \alpha x},$$

also

$$\Phi = \frac{A}{\alpha} \log(\epsilon_0 + \alpha x) + B = \frac{A}{\alpha} \log \epsilon + B,$$

und darin hätte man nur noch die Konstante A durch die Bedingung

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_{x=0} = \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{x=0} = - \frac{4\pi e_1}{F \epsilon_0} = \frac{A}{\epsilon_0}$$

zu bestimmen, um auf unser altes Resultat (148) zurückzukommen.

Von Interesse mag es noch sein, die Raumdichte ϱ'' der induzierten freien Ladung im Dielektrikum des Kondensators zu berechnen. Das ist nach (188a) oder (142) der Ausdruck

$$\varrho'' = + \frac{1}{4\pi} \frac{(\text{grad } \Phi, \text{grad } \epsilon)}{\epsilon} = - \frac{1}{4\pi} \frac{d\Phi}{dx} \frac{\alpha}{\epsilon_0 + \alpha x}.$$

Die Benutzung von (148) liefert

$$(150) \quad \varrho'' = \frac{\alpha e_1}{F(\epsilon_0 + \alpha x)^2},$$

ein Wert, der mit α natürlich verschwindet; der Maximalwert findet sich für $x = 0$, der kleinste Wert an der zweiten Platte $x = d$; zwischen diesen beiden Extremen findet nach Gleichung (150) ein stetiger Abfall statt.

Wir wollen noch ein zweites Problem behandeln, das sich auf den Plattenkondensator bezieht: Wir wollen jetzt den Innenraum z. T. mit

die für $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ natürlich wieder in den alten Wert $\frac{F\epsilon}{4\pi d}$ gemäß Gleichung (136) übergeht.

Für die Dichte der freien induzierten Ladung η'' an der Trennungsfäche findet man leicht:

$$(152) \quad \eta'' = \frac{e_1}{F} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} .$$

Damit ist auch dieser Fall vollkommen erledigt.

13. Dielektrische Kugel im homogenen Felde.

Wir wollen nun ein Problem betrachten, das dem in Nr. 10 betrachteten analog ist: In ein homogenes Feld \mathfrak{E}_0 parallel der positiven z -Richtung sei eine dielektrische Kugel vom Radius R eingebettet, deren Zentrum

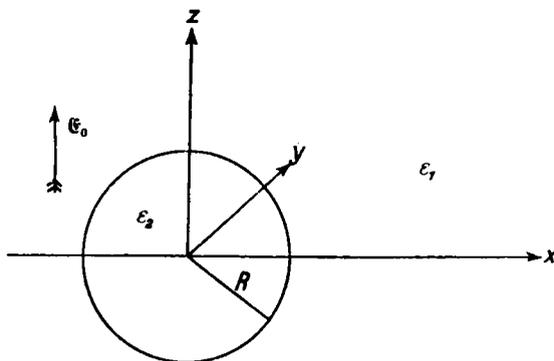


Fig. 26.

mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt (Fig. 26). Der Außenraum der Kugel sei ein Medium von der D.K. ϵ_1 ; der Innenraum der Kugel habe die D.K. ϵ_2 .

Auch hier haben wir es mit einer Lösung der spezialisierten Laplace'schen Gleichung (110) zu tun, da um die z -Achse axiale Symmetrie herrscht, d. h. Unabhängigkeit des Potentials vom Azimut ψ vorhanden ist. Ferner muß im Unendlichen das Feld gleich \mathfrak{E}_0 sein, das Potential Φ sich also dem Werte

$$\Phi_\infty = -\mathfrak{E}_0 z = -\mathfrak{E}_0 r \cos \vartheta$$

annähern. An der Kugeloberfläche ($r = R$) muß das Potential des Außenraumes Φ_a stetig in den Wert Φ_i des Innenpotentials übergehen, gleichzeitig ist die Normalkomponente (d. h. hier Radialkomponente) der dielektrischen Verschiebung stetig, da die Kugel als ungeladen vorausgesetzt wird, d. h. die mit ϵ multiplizierte Ableitung des Potentials muß stetig sein. Wir haben also folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$(153) \quad \Delta \Phi \equiv r^2 \sin \vartheta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2r \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \sin \vartheta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \cos \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = 0 ,$$

$$(154) \quad \Phi_{\infty} = - \mathfrak{G}_0 r \cos \vartheta = - \mathfrak{G}_0 z,$$

$$(155) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_a = \Phi_i \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_a}{\partial r} - \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} = 0 \end{array} \right\} \text{ für } r = R.$$

Gleichung (153) hat für Innen- und Außenraum die allgemeine Lösung — hier fehlt natürlich der kugelsymmetrische Anteil, der in Gleichung (116) auftrat, da die Kugel ungeladen ist —:

$$\Phi_a = \left(\frac{A}{r^2} + B r \right) \cos \vartheta, \quad \Phi_i = \left(\frac{C}{r^2} + D r \right) \cos \vartheta.$$

Aus (154), der Bedingung im Unendlichen, folgt:

$$(156a) \quad B = - \mathfrak{G}_0;$$

aus der ausnahmslosen Stetigkeit des Potentials auch im Punkte $r = 0$ folgt weiter

$$(156b) \quad C = 0,$$

da sonst Φ_i im Kugelzentrum unendlich würde; die Bedingungen (155) liefern weiter:

$$(156c) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} R^3 \mathfrak{G}_0, \\ D = - \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \mathfrak{G}_0. \end{array} \right.$$

Damit folgt als definitive Lösung:

$$(157) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_a = \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \mathfrak{G}_0 z, \\ \Phi_i = - \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \mathfrak{G}_0 z, \end{array} \right.$$

worin wir $r \cos \vartheta$ wieder durch z ersetzt haben. Diese Lösung — die einzige des Problems — erfüllt sämtliche Bedingungen, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Man kann leicht zwei Spezialfälle daraus ableiten: Erstens sei $\varepsilon_1 = 1$ (Außenraum gleich Vakuum) und $\varepsilon_2 = \varepsilon$ (Innenraum gleich Dielektrikum); zweitens sei umgekehrt $\varepsilon_2 = 1$ (Innenraum gleich Vakuum, d. h. kugeliger Hohlraum) und $\varepsilon_1 = \varepsilon$ (Außenraum gleich Dielektrikum).

Im ersten Falle — dielektrische Kugel im Vakuum — folgt:

$$(158) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_a' = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \mathfrak{G}_0 z, \\ \Phi_i' = - \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathfrak{G}_0 z. \end{array} \right.$$

Im zweiten Falle — kugeliger Hohlraum im Dielektrikum — folgt:

$$(159) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_a'' = \left(\frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon + 1} \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \mathfrak{G}_0 z, \\ \Phi_i'' = - \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \mathfrak{G}_0 z. \end{array} \right.$$