# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA REPRESENTACIÓN CONFORME

# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA REPRESENTACIÓN CONFORME

por el

Prof. Dr. **LUDWIG BIEBERBACH**

TRADUCCIÓN DE LA QUINTA EDICIÓN ALEMANA AMPLIADA

por

ENRIQUE FIGUERAS CALSINA
Profesor Adjunto de la Universidad de Barcelona

Con 42 figuras

EDITORIAL LABOR, S. A.
Barcelona - Madrid - Buenos Aires - Rio de Janeiro
México - Montevideo
1966

Título de la obra original: L. Bieberbach, *Einführung in die Konforme Abbildung*
Editada por Walter de Gruyter & Co. Berlín

Depósito Legal: B. 12 823.-1966
Printed in Spain
Talleres Gráficos Ibero-Americanos, S. A. Provenza, 86. Barcelona-15

# Índice de materias

## Bibliografía

La mayoría de los resultados de la Teoría de funciones que se utilizan en este libro, y no se demuestran en él, los encontrará el lector en K. Knopp, *Teoría de Funciones* (Editorial Labor).

Otras obras, a las que remitimos el lector, para el estudio de la Teoría de Funciones son: H. Bemke y F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Berlín, 1955; L. Bieberbach, *Einführung in die Funktionentheorie*, Bielefeld, 1952, y C. Carathéodory, *Funktionentheorie*, 2 tomos, Basilea, 1950.

Para una ulterior profundización en la Teoría de la representación conforme, recomendamos especialmente: G. M. Golusin, *Geometrische Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (en ruso), Moscú, 1952; Z. Nehari, *Conformal mapping*, Nueva York, 1952; C. Gattengo y A. Ostrowski, *Representation conforme à la frontière*, Mém. Sc. Math., 109-110, París, 1949; A. C. Schaeffer y D. C. Spencer, *Coefficient regions for schlicht functions*, Am. math. Soc. Coll. Publ., 35, Nueva York, 1950 (1).

---

(1) Entre las obras que tratan de la Representación Conforme, aparecidas posteriormente a la publicación de la edición alemana del presente libro, recomendamos: J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*, Springer, Berlín, 2.ª ed. corregida, 1965 ; W. von Koppenfels y F. Stallmann, *Praxis der konformen Abbildung*, Berlín, Springer, 1959; D. Gaier, *Construktive Methoden der konformen Abbildung*, Springer, Berlín, 1964. — *N. del T.*

Capítulo I

# Fundamentos. Funciones lineales

## § 1. Las funciones analíticas y la representación conforme

Como es sabido, se llama *función analítica* $w = f(z)$ de una variable compleja $z = x + i y$ $(i = \sqrt{-1})$, regular en un dominio $G$ [1], a toda función uniforme definida en $G$ y derivable en cada uno de sus puntos. Como consecuencia de la derivabilidad, se obtienen las ecuaciones en derivadas parciales de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

a las que deben satisfacer tanto la parte real como la parte imaginaria de $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. También se sabe que las funciones analíticas admiten un desarrollo en serie de potencias, de modo que en el entorno de cada punto $a$ del dominio $G$, es válida una representación de la función de la forma:

$$w = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots \tag{2}$$

---

[1] Se llama *dominio* a todo conjunto de puntos satisfaciendo las condiciones siguientes: 1.º, cada punto del conjunto es el centro de un círculo contenido también en el conjunto; 2.º, cada dos puntos del conjunto pueden unirse mediante una curva continua contenida en el conjunto. En este libro, como en Teoría de Funciones, la palabra « recinto » se utilizará como equivalente a la palabra « dominio », y a la reunión de un dominio con su contorno se le llamará indistintamente « dominio cerrado » o « recinto cerrado ».

*(N. del T.).* Así pues, en este libro se utilizan indistintamente las palabras *dominio* y *recinto* para designar un conjunto conexo (por arcos) y abierto del plano complejo. Ciertos autores reservan una de las dos palabras para el conjunto que nosotros llamamos dominio cerrado, mientras que otros la emplean para designar cualquier conjunto que sea reunión de un dominio (según nuestra definición) y una parte cualquiera (que puede ser vacía) de su contorno.

Aquí consideraremos en particular aquellas funciones $f(z)$ para las cuales es $f'(z) \neq 0$ en todo $G$. Entonces, si $x$, $y$ y $u$, $v$ son las coordenadas cartesianas rectangulares de dos planos, y si consideramos la aplicación de $G$ en un conjunto de puntos $G'$, se demuestra, en la teoría de funciones, que $G'$ también es un dominio *(teorema de la conservación de los dominios).*

Es decir: 1.° Si $c_0$ designa un punto de $G'$ tal, que el punto $a$ dado por $c_0 = f(a)$ sea un punto *interior* de $G$, también pertenecen a $G'$ todos los puntos de un círculo de centro en $c_0$ y radio suficientemente pequeño. 2.° El conjunto de puntos $G'$ es conexo.

La primera parte de esta afirmación es tan sólo una expresión geométrica del hecho de que las series de potencias se pueden invertir. Si $a$ es un punto interior de $G$, de $w = c_0 + c_1(z - a) + \ldots$ se sigue precisamente $z = a + \frac{1}{c_1}(w - c_0) + \ldots$ Esta serie de potencias converge en un círculo de centro $w = c_0$ y radio convenientemente acotado. A los puntos de este círculo corresponden valores de $z$ situados en un entorno de $z = a$, y, si nos limitamos a un círculo de centro en $w = c_0$, suficientemente pequeño, podremos asegurar que este entorno pertenece al dominio $G$. Luego el último círculo considerado está contenido totalmente en el conjunto $G'$.

La segunda parte de nuestro teorema afirma que se pueden unir dos puntos interiores cualesquiera del dominio $G'$ mediante una línea continua de puntos interiores. Pero esto no es sino una consecuencia inmediata del hecho de que ello es posible para los puntos correspondientes de $G$ y de que las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas.

*Observaciones.* 1.ª Si la función es también regular en el contorno del dominio, a los puntos del contorno de $G$ también les corresponden puntos del contorno de $G'$, pues, de lo contrario, la conservación de los dominios no se cumpliría en la transformación inversa de $G'$ en $G$.

2.ª Hemos demostrado el anterior teorema con ciertas restricciones. Pronto veremos que basta ampliar un poco la definición de dominio para que su validez se mantenga, tanto para las funciones que posean polos en los puntos donde no son regulares, como para las definidas en un dominio infinito (§ 7).

3.ª Un mismo punto del plano $w$ puede aparecer simultáneamente como punto interior y como punto frontera de $G'$. Ello depende de la multivalencia de la función. No es necesario, ni mucho menos, que ésta tome cada valor una sola vez en el recinto $G$, y puede presentarse el caso en que un mismo valor lo tome en el interior y en la frontera de $G$; entonces, el punto del plano $w$ representado por este valor es tanto un punto interior como un punto frontera de $G'$. Esto presenta dificultades para la

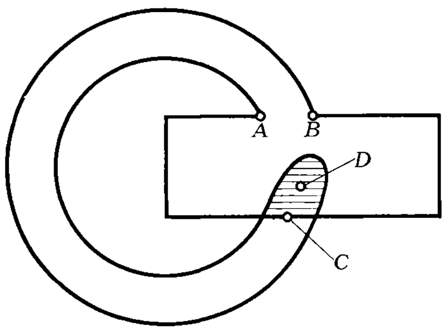


Fig. 1

interpretación geométrica; pero, gracias a los trabajos de Riemann, lo que necesitamos comprender por ahora puede ser aclarado así intuitivamente: Imaginemos, por ejemplo, una lengüeta unida por $AB$ al rectángulo de la figura 1, y que se superponga a éste en la parte rayada. La figura así obtenida se puede tomar como muestra de un dominio $G'$, en el que un punto como el $C$ es tanto punto frontera como punto interior; pues, por pertenecer al contorno del rectángulo, es punto frontera, y por pertenecer a la lengüeta, es punto interior. Asimismo, el lector encontrará sin dificultad puntos que, como el $D$, aparecen dos veces como puntos interiores de $G'$. La mejor manera de entender este sencillo ejemplo consiste en realizar un modelo de papel, lo cual puede bastar, por ahora, para dejar aclarada intuitivamente la cuestión. En lo que sigue, todo dominio que no recubra más de una vez a ninguno de los puntos del plano $w$ será llamado **liso** y en caso contrario, no liso. Asimismo, llamaremos *lisa* toda aplicación $w=f(z)$ que transforme un dominio $G$ del plano $z$ en un dominio liso $G'$ del plano $w$.

*Aplicación* del teorema de la conservación de los dominios. Si $f(z)$ es regular en el interior de un dominio $G$, $|f(z)|$ no posee ningún máximo en el interior del dominio *(principio del módulo máximo)*.

Esta afirmación — conocida como una consecuencia fácil del teorema de la integral de Cauchy — puede obtenerse también inmediatamente a partir del teorema de la conservación de los dominios. Basta tener en cuenta que $|f(z)|$ es la distancia, en el plano $w$, del origen del punto imagen del $z$, y que en el entorno de todo punto $w = c_0$, imagen de un punto $z = a$ interior de $G$ — y también, por tanto, en el entorno del supuesto $f(z)$ situado a distancia máxima del origen — existe un círculo formado por puntos que son las imágenes de los puntos de un entorno de $a$.

La propiedad de conservar los dominios la poseen, además de las aplicaciones realizadas mediante funciones analíticas, aquellas aplicaciones que son continuas en cada punto del dominio considerado y que en él poseen una función inversa uniforme, o multiforme, con un número finito de determinaciones. En cambio, el distintivo que caracteriza las primeras y que será decisivo para nuestros estudios ulteriores, nos viene dado por el **teorema de isogonalidad.**

En efecto, *la aplicación definida por una función analítica* $w = f(z)$ *es isogonal en todo punto* $z = a$ *en el que no se anula la derivada* $f'(a)$. Es decir, si $C_1$ y $C_2$ son dos curvas pasando por $a$, diferenciables en este punto y formando entre sí un ángulo $\vartheta$, las curvas imágenes en el plano $w$, $C'_1$ y $C'_2$ forman en el punto $f(a)$, imagen del punto $a$, un ángulo que es igual al $\vartheta$, tanto en magnitud como en sentido. Para comprender claramente el sentido de este teorema, además de tener en cuenta que en el punto $z = a$, $f(z)$ es regular, y posee *derivada no nula*, debemos convenir, sin que quede lugar a dudas, la forma en que deseamos medir los ángulos. Para ello elegiremos previamente como sentido de rotación positivo en el plano $z$ aquel que hace pasar del semieje positivo de las $x$ al semieje positivo de las $y$, mediante el giro más corto; asimismo, tomaremos como sentido positivo de rotación en el plano $w$ aquel que, mediante el giro más corto, conduce del sentido positivo de las $u$ al sentido positivo de las $v$. Entonces, si se elige un sentido de recorrido sobre cada una de las curvas consideradas $C_1$ y $C_2$, el ángulo entre ambas, en su punto de intersección $z = a$, se definirá como el ángulo $\vartheta$ que debe girar, en sentido positivo, el vector unitario tangente a $C_1$ en $a$ [1], para que pase a coincidir con el vector unitario tangente a $C_2$ en el mismo punto. Mediante la aplicación, estas dos curvas orientadas, $C_1$ y $C_2$, se convierten en otras dos curvas orientadas, $C'_1$ y $C'_2$, que se cortan en $w = f(a)$, y lo que nuestro teorema afirma es que *el vector unitario tangente a* $C'_1$, *en* $f(a)$ *debe girar el mismo ángulo* $\vartheta$ *para que pase a coincidir con el tangente a* $C'_2$ *en* $f(a)$.

Por otra parte, este teorema de la isogonalidad es sólo una consecuencia inmediata de las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann. Sean $z = z_1(t)$ y $z = z_2(t)$ las dos curvas dadas. En ambas se puede elegir $t$ de modo que al valor $t = 0$ le corresponda el punto $z = a$ y que a los valores crecientes de $t$ les correspondan los sentidos de recorrido en ellas elegidos. También se puede admitir que existen las derivadas $z'_1(t)$ y $z'_2(t)$, siendo $z'_1(0) \neq 0$ y $z'_2(0) \neq 0$, con lo cual quedan excluidas las curvas con puntos singulares y se descarta toda elección inadecuada del parámetro $t$. Con estas hipótesis, el ángulo que debe girar el vector unitario, y que indica la orientación de $C_1$ en $z = a$ para que pase a coincidir con el que señala la orientación de $C_2$, viene dado por

$$\vartheta = \arg \frac{z'_2(0)}{z'_1(0)}$$

(Recuérdese que si es $z' = r\, e^{i\varphi}$, siendo $\varphi$ real y $r > 0$, el valor $\varphi$ se llama *argumento de* $z'$, $\varphi = \arg z'$.) Es decir, si se pone

$$z'_1(0) = r_1\, e^{i\varphi_1} \quad \text{y} \quad z'_2(0) = r_2\, e^{i\varphi_2}$$

(1) Al decir vector unitario tangente a una curva orientada $C$ en uno de sus puntos $a$, supondremos siempre que se trata del vector unitario dirigido en el mismo sentido que $C$. — *N. del T.*

se obtiene como valor del ángulo que debe girar la curva $C_1$ para que su dirección coincida con la de $C_2$:

$$\vartheta = \arg \frac{z'_2(0)}{z'_1(0)} = \varphi_2 - \varphi_1$$

Y como las ecuaciones de las curvas imágenes son

$$w = w_1(t) = f[z_1(t)], \qquad w = w_2(t) = f[z_2(t)],$$

resulta, para el ángulo $\theta'$, que éstas forman en el punto $f(a)$,

$$\vartheta' = \arg \frac{w'_2(0)}{w'_1(0)} = \arg \frac{f'(a) \cdot z'_2(0)}{f'(a) \cdot z'_1(0)} = \arg \frac{z'_2(0)}{z'_1(0)} = \vartheta;$$

así queda demostrada la isogonalidad en los puntos donde es $f'(a) \neq 0$.

Una *consecuencia* del teorema de la isogonalidad: Supongamos un dominio liso $G$ que tiene como contorno una curva diferenciable, y que, mediante una función $f(z)$, regular tanto en el interior de $G$ como en su contorno, se transforma en otro dominio $G'$, del plano $w$, que también es liso. Supongamos, además, que se ha fijado un sentido de recorrido en el contorno $C$ de $G$, mediante una sucesión $a$, $b$, $c$, de tres de sus puntos. Los puntos $a$, $b$, $c$ corresponden, según la función, a tres puntos, $a'$, $b'$, $c'$, del contorno $C'$ de $G'$, que, al sucederse en el mismo orden con que los hemos citado, establecen también en $C'$ un determinado sentido de recorrido, sentido del que podremos decir que es la imagen del de $C$ dada por la transformación. En efecto, si, por ejemplo, $G$ se encuentra a nuestra izquierda cuando recorremos $C$ en el sentido elegido, también $G'$ se halla a la izquierda de $C'$ cuando recorremos este contorno en el sentido imagen del elegido en $C$. Esto es consecuencia inmediata del teorema de la isogonalidad; pues si, por un punto $a$ de $C$, trazamos una curva $K$ dirigida hacia el interior de $C$ y llamamos $\alpha$ al ángulo que forma la misma con $C$ — orientada según el sentido de recorrido anteriormente elegido —, también la curva $K'$, imagen de la $K$ que parte de $a'$, forma un ángulo $\alpha$ con $C'$ (orientada según el sentido imagen del de $C$); y como, además, esta curva está dirigida hacia el interior de $G'$, este dominio se hallará también a la izquierda de $C'$.

Estudiando el teorema de la isogonalidad, vemos ahora que nuestra función, regular en $z = a$ y con la derivada $f'(a)$ no nula, proporciona una **aplicación conforme** del entorno de $a$. Esto significa que, *en un entorno suficientemente pequeño*, el original y la imagen se pueden considerar *semejantes*, es decir, que la aplicación en el punto $z = a$, además de conservar los ángulos, **conserva** también **la relación de longitudes**, o, dicho de otro modo, que en el entorno de $z = a$ debe cumplirse $\frac{d S_1}{d s_1} = \frac{d S_2}{d s_2}$, siendo $s_1$ y $s_2$ las longitudes de arco medidas sobre $C_1$ y $C_2$, y $S_1$ y $S_2$, las medidas sobre $C'_1$ y $C'_2$. Pero precisamente se tiene $\frac{d s_1}{d t} = \left|\frac{d z_1}{d t}\right|$, $\frac{d s_2}{d t} = \left|\frac{d z_2}{d t}\right|$, etcétera, de donde resulta $\frac{d S_1}{d s_1} = \frac{d S_2}{d s_2} = \left|\frac{d w}{d z}\right|$, y, por tanto, queda demostrada nuestra afirmación. Para terminar, observemos que $\frac{d S}{d s}$ significa el alargamiento relativo de los segmentos en el punto $a$, y que esta «escala» de la representación depende sólo del lugar $a$, pero no de la dirección de los segmentos; es decir, es la misma para $s_1$ que para $s_2$.

En un cierto sentido, se pueden enunciar también los recíprocos de los teoremas que acabamos de demostrar relativos a la isogonalidad y a la conservación de las relaciones entre las longitudes. En efecto, se puede demostrar que tanto todas las transformaciones que conservan los ángulos como todas las que en cada punto conservan las relaciones entre longitudes, se pueden obtener mediante funciones analíticas o funciones, que dependen estrechamente de éstas. Para comprobar la primera de estas afirmaciones, utilicemos de nuevo las notaciones empleadas en la página 1 y consideremos una aplicación cualquiera $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, que conserve los ángulos de todos los pares de curvas que parten de $z = a$. Supongamos — como en lo que sigue lo supondremos siempre al referirnos a una aplicación — que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ poseen derivadas continuas de primer orden, y, en este caso, admitamos además que el determinante [1]

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero.

Una curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ se transforma en la $u = u[x(t), y(t)]$, $v = v[x(t), y(t)]$; luego, para el vector tangente a la curva imagen se tiene

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) \\ v'(t) &= \frac{\partial v}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial v}{\partial y} y'(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Fijado el punto $a$ del plano $z$, quedan fijados los valores de las derivadas parciales respecto de $u$ y $v$, y, por tanto, los vectores tangentes a las curvas imagen se obtienen, a partir de los vectores tangentes a las curvas del plano $z$ en el punto $a$, mediante la transformación lineal (3). Pero se sabe que una transformación lineal de este tipo conserva tan sólo los ángulos si es una transformación de semejanza [2], y para que esto suceda es condición necesaria y suficiente, según se demuestra en la Geometría analítica elemental, que se satisfagan las ecuaciones diferenciales (1) de Cauchy-Riemann (2) de la página 1. Pero, a su vez, la Teoría de funciones demuestra que, bajo estas condiciones, $u + i v$ depende analíticamente de $z$; luego llegamos a este resultado:

*Toda aplicación isogonal definida en un dominio se obtiene mediante una función analítica.*

---

[1] Llamado el *jacobiano* de las funciones $u$ y $v$. — *N. del T.*

[2] En Geometría Analítica, se llama transformaciones afines a las transformaciones lineales enteras, realizadas mediante coordenadas cartesianas, y se demuestra que las únicas transformaciones afines isogonales son las semejanzas.

[Obsérvese que cuando $u$ y $v$ son las partes real e imaginaria de una función analítica, debido a las (1), de la página 1, se tiene

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

y que, por tanto, la no anulación del determinante anterior equivale a la no anulación de $f'(z)$.]

A continuación se puede plantear la pregunta de si también mediante funciones analíticas se pueden obtener todas aquellas aplicaciones que en cada punto conservan las relaciones entre longitudes. Pero, según los resultados anteriores, esto equivale a preguntar si dichas transformaciones son isogonales y bastará un sencillo ejemplo para mostrar que no es verdad la hipótesis formulada. Para obtenerlo, designemos por $\bar{z}$ el número complejo conjugado de $z$ y consideremos la transformación del plano $z$ en el plano $w$ definida por $w = \bar{z}$, que representa geométricamente una simetría respecto del eje real, es decir, que transforma cada punto del plano $z$ en su simétrico respecto del eje real si nos imaginamos las $z$ y las $w$ representadas en el mismo plano, de modo que a valores iguales de $z$ y de $w$ les corresponda el mismo punto. Esta transformación no sólo conserva las relaciones entre longitudes, sino que, además, mantiene las longitudes de los arcos en el paso de cada curva a su imagen; sin embargo, de los ángulos conserva tan sólo el valor absoluto, ya que invierte su sentido. Se obtienen nuevos ejemplos de la misma clase si la transformación que acabamos de indicar se compone con una aplicación cualquiera que sea isogonal en sentido estricto (es decir, que conserve los ángulos en valor absoluto y signo). Luego la pregunta que acaso puede plantearse, es la de si todas las aplicaciones que conservan en cada punto las relaciones entre longitudes se encuentran entre los ejemplos expuestos, es decir, conservan los ángulos salvo su sentido de rotación. Consideraciones análogas a las utilizadas en el caso de la conservación de los ángulos, y que nosotros nos dispensamos de exponer aquí, muestran que, en efecto:

*Toda aplicación que conserva en cada punto las relaciones entre longitudes, se define mediante una función del tipo* $w = f(z)$ *o* $\bar{w} = f(z)$, *siendo* $f(z)$ *una función analítica; además, conserva los ángulos, salvo el sentido de rotación de los mismos.*

A continuación seguiremos tratando sólo de aquellas transformaciones que conservan en cada punto las relaciones entre longitudes y que son isogonales en sentido estricto. Tan sólo éstas se llaman *conformes*, y todas ellas están definidas mediante funciones analíticas [1].

## § 2. Funciones lineales enteras

El ejemplo más sencillo al que se pueden aplicar las cuestiones tratadas en el párrafo anterior nos lo ofrecen las funciones lineales enteras $w = a z + b$. Entre ellas podemos distinguir varias clases:

1. $\boldsymbol{w = z + b}$. La interpretación geométrica de esta transformación cuando $w$ y $z$ designan puntos de un mismo plano, es la de una traslación. En efecto, a cada número complejo se le puede hacer corresponder un vector, de modo que a la suma de números complejos le corresponde también la suma de vectores, y con ello se obtiene la expresión de un desplazamiento paralelo cuya magnitud, dirección y sentido, coinciden con los del vector $b$. Cada dominio $G$ es congruente con su transformado, y éste puede obtenerse de aquél mediante un *desplazamiento paralelo (traslación).*

2. $\boldsymbol{w = e^{i\varphi} z}$, que representa una *rotación* del plano de ángulo $\varphi$ y centro $z = 0$.

3. $\boldsymbol{w = r z}$, siendo $r$ real y positivo, y que representa una semejanza *(homotecia directa).*

---

[1] Partiendo de los trabajos iniciales de Grötzsch se ha desarrollado en los últimos 25 años, y como una de las ramas más modernas de la Teoría de Funciones Complejas, el estudio de las llamadas *aplicaciones casiconformes*, que son aplicaciones en las que el cociente $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ depende, no sólo del punto, sino también de la dirección considerada. Constituye una generalización de la Teoría de la Transformación Conforme, y para su estudio, recomendamos la obra de Hans P. KÜNZI, *Quasikonforme Abbildungen*, Springer, Berlín, 1960; O. LEHTO y K. I. VIRTANEN. *Quasikonforme Abbildungen*, Springer, Berlín, 1965. — *N. del T.*

4. La transformación lineal entera, más **general**, $w = a\,z + b$ que se puede obtener mediante las tres clases anteriormente consideradas. Pues basta poner $a = r\,e^{i\varphi}$, $z_1 = r\,z$, $z_2 = e^{i\varphi}\,z_1$, $w = z_2 + b$, para que la transformación dada pueda construirse mediante las ya descritas. Además, una manera cómoda de obtener una visión del comportamiento de la transformación dada por $w = a\,z + b$ consiste en observar que si $a \neq 0$, utilizando valores adecuados de $\alpha$ y $a = r\,e^{i\varphi}$, siempre se puede poner en la forma

$$w - \alpha = r\,e^{i\varphi}\,(z - \alpha).$$

Luego *la transformación lineal entera más general representa una traslación $(a = 1)$ o una semejanza de razón $> 0$ $(a = 1)$, semejanza que para $r = 1$ se reduce a una rotación, y para $\varphi = 0$, a una homotecia directa.*

## § 3. La función $w = \dfrac{1}{z}$

Ante todo, observemos que no ofrece dificultad esencial alguna considerar esta función para aquellos valores en los que ni $z$ ni $w$ se hacen infinitos, es decir, para todos los valores finitos del plazo $z$ que son distintos de cero. En cambio, los resultados generales del § 1 no son aplicables a $z = 0$; por esto aprovecharemos aquí el hecho de considerar esta función, para extender, simultáneamente, los resultados del § 1 a un caso especial.

Para ello nos será útil introducir coordenadas polares, poniendo $z = r\,e^{i\varphi}$ y $w = \varrho\,e^{i\vartheta}$. Con ello, nuestra función se transformará en $\varrho = \dfrac{1}{r}$, $\vartheta = -\varphi$, y esta última expresión nos indicará claramente el sentido geométrico de la transformación. En ella, los puntos $r = 1$ juegan, evidentemente, un papel especial; son los puntos de la circunferencia de radio unidad y centro en $z = 0$, o, simplemente, los puntos de la **circunferencia unidad,** como nosotros, para abreviar, diremos desde ahora en adelante. Si $z$ y $w$ se representan en el mismo plano, esta circunferencia se transforma precisamente en sí misma; pues al punto $r = 1$, $\varphi = \varphi_0$ le corresponde el $\varrho = 1$, $\vartheta = -\varphi_0$, o, hablando en términos geométricos, el que se obtiene mediante una « simetría » respecto del eje real. Entendemos por eje real la recta $y = 0$ (siendo $z = x + i\,y$) y por **simetría** respecto de la misma, el paso de cada punto del plano a su simétrico respecto del eje real, es decir, el paso de $x + i\,y$ a $x - i\,y$ (1), transformación que, como ya enunciamos

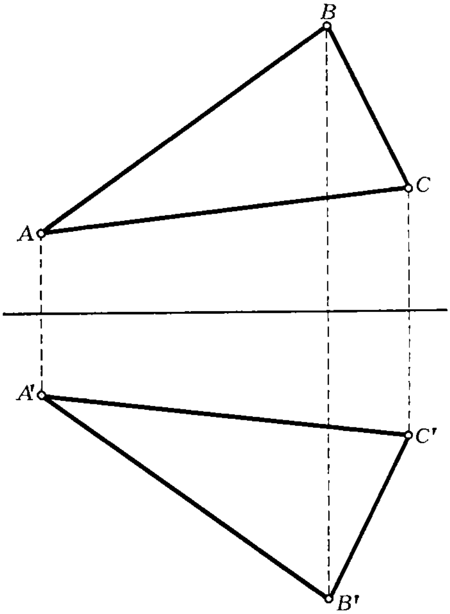


Fig. 2

en el § 1 y se pone de manifiesto en la figura 2, sólo conserva la magnitud pero no el sentido de los ángulos (2).

Si consideramos ahora puntos $z$ cualesquiera, veremos, ante todo, que la función $w = \dfrac{1}{z}$ transforma biunívocamente el conjunto de puntos $0 < |z| < \infty$ en el $0 < |w| < \infty$ ; es decir, que a cada $z$ le corresponde un $w$, y recíprocamente. Además, se obtiene una visión intuitivamente clara de la transformación si se

(1) Lo dicho aquí sirve también para ver lo que se entiende por simetría respecto de una recta cualquiera.

(2) Es decir, « invierte » los ángulos.