A. F. FEOFANOW

DIE KRÄFTEERMITTELUNG IN DÜNNWANDIGEN BLECHKONSTRUKTIONEN

HERAUSGEGEBEN VON

W. A. MARJIN

DOZENT UND KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT VON

WALTHER BALLERSTEDT

TECHNISCHER VERLAG HERBERT CRAM

BERLIN 1958

Das Buch enthält Berechnungsbeispiele für die allgemeine Festigkeitsrechnung dünnwandiger Flugzeugkonstruktionen, vornehmlich von der Art prismaförmiger ausgesteifter Schalen unter Verdrehung und Biegung.
Die Rechnungen sind nach der Kraftmethode (exakte Methode) durchgeführt sowie nach Näherungsverfahren, die vom Verfasser vorgeschlagen sind.
Das Buch ist für den Ingenieur bestimmt, der sich mit dem Entwurf von Flugzeugen befaßt und kann auch Studenten höherer Semester an Luftfahrtlehranstalten bei den Vorlesungen und Übungsarbeiten von Nutzen sein.

Die Originalausgabe erschien 1953 im Staatswehrverlag, Moskau

Titel der russischen Ausgabe:

А. Ф. Феофанов, Расчеты Тонкостенных Конструкций

Druck: Rotaprint Ag., Berlin N 65

ZUM GELEIT

Dünnwandige Konstruktionen fanden weite Verbreitung zuerst im Schiffbau. Heutzutage wendet man sie auf allen Gebieten der Technik an. Aber vorzugsweise für die Luftfahrttechnik haben die dünnwandigen Konstruktionen große Bedeutung. Mit den Berechnungsverfahren für dünnwandige Konstruktionen befaßt sich eine beträchtliche Anzahl von Arbeiten, die im Druck erschienen sind. Dieses Wissensgebiet ist durch die Gelehrten unseres Landes, Männer wie Bjelajew, Wlassow, Umanskij und andere Mitarbeiter der sowjetischen Wissenschaften behandelt worden, deren Schaffen weit in die Praxis hinein Früchte getragen hat. Jedoch ist das Problem der Berechnung dünnwandiger Konstruktionen noch weit von seiner praktischen Lösung entfernt und manche der vorgeschlagenen Methoden sind für den Gebrauch in der Praxis zu verwickelt. Unbedingt notwendig ist daher eine weitgehende Vereinfachung der Rechnung und die Ausarbeitung einer Berechnungstechnik.

Im vorliegenden Buch — es ist von einem Ingenieur verfaßt, der in einem Konstruktionsbüro tätig ist — sind einige Beispiele für eine angenäherte Berechnung dünnwandiger, ausgesteifter Konstruktionen vornehmlich von prismatischer Form aus der tragenden Flügel- oder Rumpfschale auf Biegung und Verdrehung im elastischen Bereich gebracht. Charakteristisch ist die Aufstellung eines Rechenschemas für die ausgesteifte Schale, als wäre sie eine Art räumliches Fachwerk, dessen Ecken Gelenke bilden und dessen Diagonalstäbe durch Stegbleche ersetzt sind. Die Stege werden als nur auf Schub tragend angesetzt, d. h. die Wechselwirkung zwischen den Stegen und den an sie angrenzenden Stäben wird durch Tangentialkräfte begrenzt. Ein solches Rechenschema wurde von Kissilew, Jelenowskij, Kan, Swerdlow und anderen angewandt und besonders eingehend in jüngster Zeit von Umanskij. Es ist deshalb so brauchbar, weil es gestattet, die weitgehend durchentwickelte Theorie der Fachwerkkonstruktionen auszunutzen.

Das Buch von Theofanow ist in erster Linie für Ingenieure bestimmt. Es erfordert vom Leser Kenntnisse der allgemeinen Festigkeitslehre, weil es angesichts des großen Umfanges des Stoffes die angezogenen Beispiele zusammengefaßt darlegt; ebenfalls sind in den meisten Fällen die Zahlenrechnungen abgekürzt. Das Anschauungsmaterial ist genügend anschaulich und durchsichtig.

Die Annahmen für die Näherungsrechnungen, die der Verfasser verwandt hat, sind auf ganz idealisierte Schemata gegründet (regelmäßige Systeme mit absolut starren Spanten) und befriedigen nur teilweise im Vergleich mit der Rechnung nach der Kraftmethode bei denselben oder noch einfacheren Rechnungsgängen. Daher müssen sie als Teilverfahren angesehen werden

und ergeben nur eine erste Annäherung in der Rechnung. Zugleich damit verdient die Einfachheit der angezogenen Beispiele Beachtung. Die Rechnungsbeispiele, die nach der Kraftmethode durchgeführt sind, spiegeln das Spezifikum der dünnwandigen, statisch unbestimmten Systeme wider und sind interessant durch die gelungene Wahl des Spannungszustandes, der dem wirklichen Spannungszustand des Systems nahekommt. Infolgedessen haben überzählige Unbekannte eine unbedeutende Größe im Vergleich zum vollen Spannungszustand.

W. Marjin

VORWORT DES VERFASSERS

Dünnwandige Konstruktionen fanden weite Verbreitung in der Luftfahrt, weil sie die Möglichkeit bieten, eine leichte und zugleich steife Bauweise zu erreichen. Die Wissenschaft unseres Vaterlandes erzielte ansehnliche Erfolge auf diesem Gebiet. Jedoch die Luftfahrttechnik strebt mit schnellen Schritten vorwärts und es geschieht manchmal, daß Ingenieure selbständig an die Lösung einzelner Fragen herangehen, auf die sie bei ihrer Tätigkeit in der Praxis stoßen. Im vorliegenden Buch strebt der Verfasser — indem er die weitest bekannten Grundlagen der Festigkeitslehre voraussetzt und zugrunde legt — danach, dem jungen Ingenieur zu zeigen, daß ein Vorrat an Kenntnissen ihm nicht nur erlaubt, die bekannten Methoden für die Rechnung der allgemeinen Festigkeit dünnwandiger Konstruktionen sich anzueignen, sondern ihm auch die Möglichkeit gibt, mit wissenschaftlicher Gründlichkeit die einzelnen Probleme in diesem jungen Zweig der Bautechnik zu lösen.

Der Verfasser bringt seine tiefe Dankbarkeit den Herren Professoren Bjelajew, Romaschewskij, Rostowzew und Tscheremuchin und in gleicher Weise den Dozenten Bajkow und Jelenewskij zum Ausdruck, die die handschriftliche Fassung durchgesehen und eine Reihe wertvoller Fingerzeige gegeben haben, die vom Verfasser bei der Drucklegung verwertet werden konnten.

VORWORT DES ÜBERSETZERS

Das vorliegende Buch des russischen Ingenieurs Theofanoff bringt eine Zusammenstellung der Berechnungsmethoden für den Verlauf der inneren Kräfte in Konstruktionen aus dünnwandigen Blechen, wie sie der Flugzeugbau und neuerdings auch die Fahrzeugindustrie und der Leichtbau allgemein verwenden.

Theofanoff verfaßte sein Buch in seiner Eigenschaft als stellvertretender Abteilungsleiter der Abteilung „Statik und Festigkeit" in einem russischen Konstruktionsbüro, also aus der Praxis heraus, und er wollte für die Praxis, für Kollegen in ähnlichen Stellungen ein Lehr- und Übungsbuch schaffen. Als Leiter eines mit deutschen Mitarbeitern durchsetzten Teams war er in der Lage, auch die praktischen Erfahrungen deutscher Fachleute verwerten zu können.

Die gebrachten Berechnungsgänge entsprechen einer modernen Behandlung der anfallenden Probleme. Das Buch ist für alle Lernenden wertvoll durch die gute Auswahl an Beispielen, die den Weg zur Theorie wesentlich erleichtern.

Theofanoff erwähnt deutsche Quellen für sein Wissen nicht, und an die Stelle der Veröffentlichungen von Prof. Herbert Wagner und Prof. Hans Ebner, die in den Jahren 1929 bis 1937 erst die Grundlagen für die Berechnung dünnwandiger Blechkonstruktionen vor und nach der Stabilitätsgrenze schufen, werden Arbeiten des russischen Professors Bjelajeff aus dem Jahre 1932 gesetzt. Er mag das deshalb getan haben, weil er annahm, daß seinen russischen Kollegen die Werke russischer Wissenschaftler leichter zugänglich sind als die von Ausländern. Für den Gebrauch des Buches diesseits der Grenzen der Sowjet-Union schien es geraten, das Literaturverzeichnis um die bedeutendsten deutschen, englischen und amerikanischen Arbeiten zu erweitern. Damit hat der Leser, der in einzelnen Fragen tiefer eindringen will, leichter die Möglichkeit zu einer umfassenden Information.

Ballerstedt

Kapitel I
Gleichgewicht der Bauelemente einer dünnwandigen Konstruktion

§1 Die Elemente der dünnwandigen Konstruktion

Eine dünnwandige Konstruktion der Oberfläche eines Flugzeugs stellt ein räumliches System von Gerüst und Beplankung dar. Die Bauelemente des Gerüstes sind Stringer und Spanten, die die Beplankung in einzelne viereckige Felder unterteilen.

Die Formen der Felder können verschieden sein. Es gibt fünf Grundtypen:

1) g e r a d e von rechteckiger Form
2) s c h i e f e mit Parallelogrammform
3) t r a p e z f ö r m i g e
4) v i e r e c k i g e ohne parallele Seiten
5) k r u m m l i n i g e, e b e n e, die von zwei gebogenen Gurten und zwei Vertikalstäben eingefaßt sind (s. Abb. 14a).

Am verbreitetsten sind Felder der Art 1 und 3, seltener trifft man die Art 2 und 5 und ganz selten die Art 4.

Felder der Art 1, 2, 3 und 4 sind gewöhnlich geometrisch wenig verwunden (Abb. 2) und daher wollen wir damit rechnen, daß der Winkel der Verwindung $\varphi = 0$ ist (ebene Haut). Dann muß für den Abschnitt (Abb.3), der aus dem Feld gebildet ist, die Bedingung beobachtet werden:

$$\frac{H_1 - H_2}{H_1' - H_2'} = \frac{B}{B'} . \qquad (I.1)$$

Außerdem machen wir gewöhnlich die Annnahme, daß die Stäbe an den Ecken gelenkig miteinander verbunden sind und nur Längskräfte weiterleiten, und die Haut, die von den Stä-

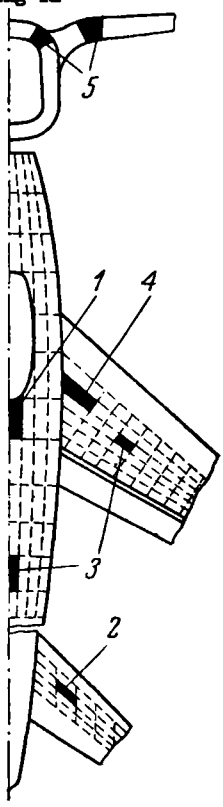


Bild 1

ben umrandet wird, von ihnen nur Schubkräfte in ihrer Ebene übernimmt.

Die über die Länge der Kanten stetig verteilten Schubkräfte q , der "Schubfluß", sind in den Zeichnungen durch Pfeile gekennzeichnet.

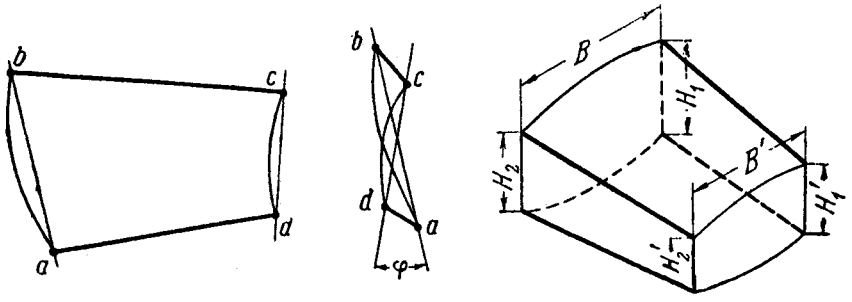


Bild 2 Bild 3

Gewöhnlich ist die Haut gewölbt, aber oft kann man diese Wölbung vernachlässigen, d. h. annehmen, daß das Feld der Art 1 , 2 , 3 oder 4 eben sei. Daher betrachten wir zunächst ebene Felder. Wir bezeichnen sie durch Sternchen: 1^*, 2^*, 3^* und 4^*.

§ 2 Gleichgewicht und potentielle Energie der Elemente der Haut

Typ 1^*

Wir setzen voraus, daß an der einen Seite des Feldes, z.B. an 2 – 3 (Bild 4a) der Schubfluß q_{2-3} angreift. Sodann müssen wir feststellen, welcher Schubfluß q_{3-4} , q_{1-4} und q_{1-2} an den anderen drei Seiten angreift, damit Gleichgewicht besteht.

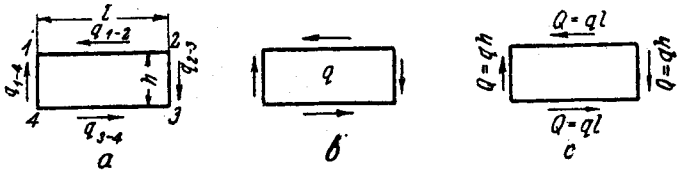


Bild 4

Bedienen wir uns der drei Gleichungen der Statik: Bezeichnen wir die Resultierende des Schubflusses mit Q , so können wir die Momentengleichung $\Sigma M_4 = 0$, bezogen auf Punkt 4 , folgendermaßen schreiben:

$$\sum M = Q_{1-2} \cdot h - Q_{2-3} \cdot l = 0 \text{ oder: } q_{1-2} \cdot l \cdot h - q_{2-3} \cdot h \cdot l = 0.$$

Folglich ist:

$$q_{1-2} = q_{2-3}.$$

Aus der Bedingung, daß die Summe der Kräfte aus den Projektionen auf die Vertikal- und die Horizontalachse für alle auf das Feld wirkenden Kräfte gleich 0 ist, erhalten wir:

$$q_{1-4} = q_{2-3}$$

und

$$q_{3-4} = q_{1-2}.$$

Ebenso kann man schreiben:

$$q_{2-3} = q_{3-4} = q_{1-4} = q_{1-2} = q. \qquad (I.2)$$

Der Richtungssinn der Schubkräfte für den Gleichgewichtszustand ist in Abb. 4b und 4c angegeben.

Die potentielle Energie der Verformung des Feldes aus dem Schub läßt sich nach der bekannten Formel bestimmen:

$$v = \frac{q^2 F}{2G\delta}, \qquad (I.3)$$

Dabei ist: F die Grundrißfläche des Feldes
δ die Dicke der Haut
G der Gleitmodul

Typ 2*

Aus der Gleichgewichtsbedingung des ganzen Feldes (Bild 5), ähnlich dem vorherigen, ist zu erkennen, daß der Schubfluß an allen vier Seiten des schiefen Feldes ein und denselben Wert hat.

Betrachten wir das Dreieck 2 - 3 - A .
Im Schnitt 2 - A herrscht die Spannung:

$$\tau_{xy} = \frac{q}{\delta} \quad \text{und} \quad \sigma_x = \frac{2\,q\,\mathrm{tg}\,\theta}{\delta}.$$

Die in der Volumeneinheit gespeicherte potentielle Energie beträgt für den ebenen Spannungszustand bekanntlich:

$$v_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\mu}{E}\sigma_x\sigma_y + \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2.$$

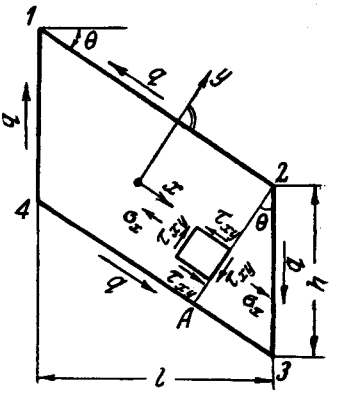


Bild 5

Bei der für die Richtung der Koordinatenachse getroffenen Wahl ist $\sigma_y = 0$ und daher ist:

$$v_0 = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

oder:

$$v_0 = \frac{(2\,qtq\theta)^2}{2\,E\delta^2} + \frac{q^2}{2\,G\delta^2}.$$

---

1) "G" sei der Gleitmodul des Feldes

Multiplizieren wir v_0 mit dem Volumen $F \cdot \delta$ des Feldes (wobei $E = G\,2\,(1+\mu) = 2{,}6\,G$ ist), so erhalten wir die Größe der potentiellen Energie der Verformung des Feldes

$$v = \frac{q^2 F}{2\,G\delta}\,(1 + 1{,}538\,\mathrm{tg}^2\,\theta). \qquad \text{(I. 4)}$$

Der Winkel Θ heißt gewöhnlich Pfeilwinkel.

Typ 3*

Wir nehmen q als gegeben an und bestimmen q_{3-4}, q_{1-2} und q_{1-4} (Bild 6).

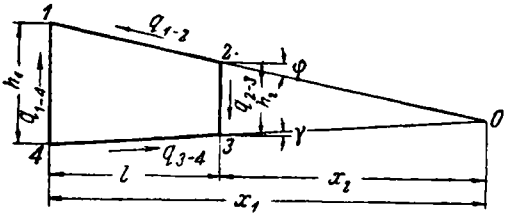


Bild 6

Um q_{1-4} zu bestimmen, stellen wir die Gleichung $\Sigma M_0 = 0$ bezogen auf Punkt 0 auf:

$$\sum M_0 = q_{1-4} h_1 x_1 - q_{2-3} h_2 x_2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$q_{1-4} = q_{2-3}\frac{h_2 x_2}{h_1 x_1}, \quad \text{но} \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{x_2}{x_1},$$

folglich ist:

$$q_{1-4} = q_{2-3}\frac{h_2^2}{h_1^2}.$$

Um q_{1-2} zu bestimmen, stellen wir die Momentengleichung bezogen auf den Punkt 4 auf:

$$q_{2-3}\,h_2 l - q_{1-2}\frac{l}{\cos\varphi}\,h_1 \cos\varphi = 0.$$

daraus folgt:

$$q_{1-2} = q_{2-3}\frac{h_2}{h_1}.$$

Die Momentengleichung bezogen auf Punkt 1 ergibt:

$$q_{3-4} = q_{2-3}\frac{h_2}{h_1}.$$

Ist nicht q_{2-3}, sondern q_{1-4} gegeben, so ergibt sich analog:

$$q_{2-3} = q_{1-4}\frac{h_1^2}{h_2^2}, \quad q_{1-2} = q_{1-4}\frac{h_1}{h_2} \quad \text{und} \quad q_{3-4} = q_{1-4}\frac{h_1}{h_2}.$$

Bezeichnen wir:

$$q_{2-3}\frac{h_2}{h_1}=q_{1-4}\frac{h_1}{h_2}=\bar{q}, \tag{I.5}$$

dann ist:

$$q_{1-2}=q_{3-4}=\bar{q}, \tag{I.6}$$

$$q_{2-3}=\bar{q}\frac{h_1}{h_2}, \tag{I.7}$$

$$q_{1-4}=\bar{q}\frac{h_2}{h_1}, \tag{I.8}$$

Dabei ist $\bar{q}$ der geometrische Mittelwert des Schubflusses für die einander gegenüberliegenden Seiten des Trapezes. Offensichtlich ist:

$$\bar{q}=\sqrt{q_{2-3}q_{1-4}}=\sqrt{q_{1-2}q_{3-4}}=q_{2-3}\frac{h_2}{h_1}.$$

Der Gleichgewichtszustand für ein trapezförmiges Feld ist in Bild 7 gezeigt. Die Resultierende Q der Schubkräfte an der einen der parallelen Seiten ist gleich dem Schubmittelwert $\bar{q}$, multipliziert mit der Länge der gegenüberliegenden Seite.

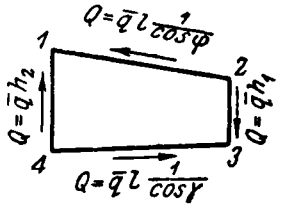


Bild 7

Die potentielle Energie der Verformung des trapezförmigen Feldes bestimmen wir näherungsweise.

Das in Bild 8 dargestellte kleine schiefe Element stellt mit einer Genauigkeit zweiten Grades ein Parallelogramm dar. Wir unterstellen, daß längs der Seiten dieses elementaren Parallelogramms nur der Schubfluß q_x wirkt.

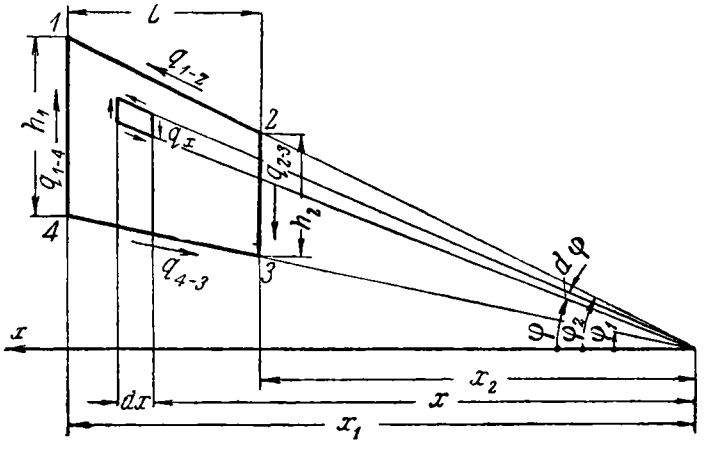


Bild 8

Dann erhalten wir unter Benutzung der Formel I,4 für das Parallelogramm:

$$dv = \frac{q_x^2\, dF}{2G\delta}\,(1 + 1{,}538\,\mathrm{tg}^2\,\varphi);$$

Wir setzen hierin den Wert $q_x = q_{2-3}\,\frac{x_2^2}{x^2}$ (s. weiter oben) und $dF = \frac{x \cdot dx \cdot d\varphi}{\cos^2\varphi}$ ein und erhalten:

$$dv = \frac{q_{2-3}^2\, x_2^4}{2G\delta x^3}\,(1 + 1{,}538\,\mathrm{tg}^2\,\varphi)\,\frac{dx\, d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

daher ist

$$v = \frac{q_{2-3}^2\, x_2^4}{2G\delta}\int_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{x^3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} +$$

$$+ 1{,}538\,\frac{q_{2-3}^2\, x_2^4}{2G\delta}\int_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{x^3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\mathrm{tg}^2\,\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{q_{2-3}^2\, x_2^4}{2G\delta}\left[\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{2x_1^2\, x_2^2}\,(\mathrm{tg}\,\varphi_2 - \mathrm{tg}\,\varphi_1) + \right.$$

$$\left. + 1{,}538\,\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{2x_1^2\, x_2^2}\,\frac{(\mathrm{tg}^3\,\varphi_2 - \mathrm{tg}^3\,\varphi_1)}{3}\right] =$$

$$= \frac{q_{2-3}^2\, h_2^2}{2G\delta h_1^2}\, l\left(\frac{h_2 + h_1}{2}\right)\left[1 + \frac{1{,}538}{3}\,(\mathrm{tg}^2\,\varphi_1 + \mathrm{tg}\,\varphi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 + \mathrm{tg}^2\,\varphi_2)\right]$$

oder:

$$v = \frac{\overline{q}^2 F}{2G\delta}\,[1 + 0{,}513\,(\mathrm{tg}^2\,\varphi_1 + \mathrm{tg}\,\varphi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 + \mathrm{tg}^2\,\varphi_2)]. \qquad (I.9)$$

In der Konstruktion einer Flugzeugfläche ändert sich gewöhnlich φ_1 von 0 bis -10^0 und φ_2 von 0 bis $+10^0$. Setzen wir nun in die Formel I,9 $\varphi_1 = -10^0$ und $\varphi_2 = +10^0$, so können wir uns davon überzeugen, daß das 2. Glied in der eckigen Klammer 1,59 % des ersten beträgt. Daher dürfen wir mit der Genauigkeit, die für solche Rechnungen in der Praxis angewandt wird, den Einfluß der Normalspannungen, die durch den Schubfluß hervorgerufen werden, vernachlässigen und die potentielle Energie für ein trapezförmiges Flächenstück nach einer Formel berechnen, die I,3 analog ist.

$$v = \frac{\overline{q}^2 F}{2G\delta}. \qquad (I.10)$$

Typ 4*

Zur Bestimmung von q_{1-2}, q_{1-4} und q_{3-4} in Abhängigkeit von q_{2-3} (Bild 9) stellen wir die drei Gleichgewichtsbedingungen auf: $\Sigma M_1 = 0$ (bezogen auf Punkt 1), $\Sigma M_4 = 0$ (bezogen auf Punkt 4) und $\Sigma Q_x = 0$ (bezogen auf die X - Achse).

Wir erhalten:

$$\sum M_1 = q_{2-3} h_2 l_1 - q_{3-4} h_0 l_2 = 0.$$

$$\sum M_4 = q_{2-3} h_2 l_2 - q_{1-2} l_1 h_1 + q_{1-2} l_1 \operatorname{tg} \varphi (l_1 - l_2) =$$

$$= q_{2-3} h_2 l_2 - q_{1-2} l_1 \; k = 0,$$

dabei ist

$$k = h_0 - \operatorname{tg} \gamma (l_1 - l_2) - \operatorname{tg} \varphi (l_1 - l_2).$$

$$\sum Q_x = -q_{1-2} l_1 + q_{3-4} l_2 - q_{1-4} (l_1 - l_2) = 0.$$

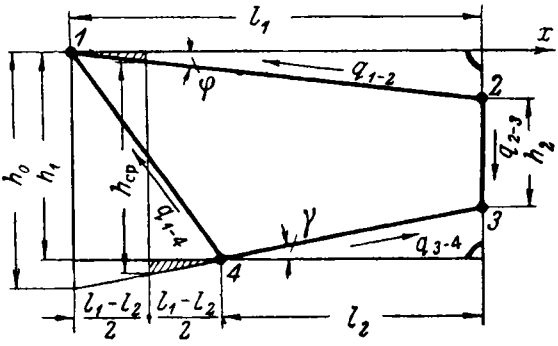


Bild 9

Aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$q_{3-4} = q_{2-3} \frac{h_2 l_1}{h_0 l_2},$$

$$q_{1-2} = q_{2-3} \frac{h_2 l_2}{l_1 k},$$

$$q_{1-4} = q_{2-3} h_2 \frac{\frac{l_1}{h_0} - \frac{l_2}{k}}{l_1 - l_2} = \frac{q_{2-3} h_2}{h_0 k} \frac{(l_1 k - l_2 h_0)}{l_1 - l_2}.$$

Beachten wir, daß

$$\frac{l_1 k - l_2 h_0}{l_1 - l_2} = \frac{l_1 [h_0 - \operatorname{tg} \gamma (l_1 - l_2) - \operatorname{tg} \varphi (l_1 - l_2)] - l_2 h_0}{l_1 - l_2} =$$

$$= \frac{l_1 [h_2 + l_2 (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \varphi)] - l_2 h_0}{l_1 - l_2} = \frac{l_1 h_2 + l_2 (h_0 - h_2) - l_2 h_0}{l_1 - l_2} = h_2,$$

so ergibt sich

$$q_{1-4} = q_{2-3} \frac{h_2^2}{h_0 k}.$$

Wir bestimmen das Schubmittel $\overline{q}$. Wir haben damit:

$$\overline{q}^2 = q_{1-2} q_{3-4} = q_{2-3} q_{1-4} = q_{2-3}^2 \frac{h_2^2}{h_0 k}$$

und folglich

$$\bar{q} = q_{2-3}\frac{h_2}{\sqrt{h_0 k}},$$

$$\bar{q} = q_{3-4}\frac{h_0 l_2}{h_2 l_1}\frac{h_2}{\sqrt{h_0 k}} = q_{3-4}\frac{h_0 l_2}{l_1\sqrt{h_0 k}},$$

$$\bar{q} = q_{1-2}\frac{l_1 k}{h_2 l_2}\frac{h_2}{\sqrt{h_0 k}} = q_{1-2}\frac{l_1}{l_2}\frac{h_0 k}{h_0\sqrt{h_0 k}} = q_{1-2}\frac{l_1}{l_2}\frac{\sqrt{h_0 k}}{h_0},$$

$$\bar{q} = q_{1-4}\frac{h_0 k}{h_2^2}\frac{h_2}{\sqrt{h_0 k}} = q_{1-4}\frac{\sqrt{h_0 k}}{h_2}.$$

Wir verwandeln den Ausdruck $\sqrt{h_0 k}$

$$\sqrt{h_0 k} = \sqrt{h_0\,[h_0 - \operatorname{tg}\gamma(l_1 - l_2) - \operatorname{tg}\varphi(l_1 - l_2)]} = h_0\sqrt{1 - x},$$

dabei ist

$$x = \frac{\operatorname{tg}\gamma(l_1 - l_2) + \operatorname{tg}\varphi(l_1 - l_2)}{h_0}.$$

Als Annäherung setzen wir:

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2},$$

und erhalten:

$$\sqrt{h_0 k} \approx h_0\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\gamma(l_1 - l_2) + \operatorname{tg}\varphi(l_1 - l_2)}{2h_0}\right) =$$

$$= h_0 - \frac{\operatorname{tg}\gamma(l_1 - l_2) + \operatorname{tg}\varphi(l_1 - l_2)}{2} = h_{cp}. \qquad \text{(s. Abb. 9)}$$

Somit können wir schreiben:

$$\bar{q} = q_{1-4}\frac{h_{cp}}{h_2} \quad (I.11) \qquad \bar{q} = q_{3-4}\frac{l_2 h_0}{l_1 h_{cp}} \quad (I.13)$$

$$\bar{q} = q_{2-3}\frac{h_2}{h_{cp}} \quad (I.12) \qquad \bar{q} = q_{1-2}\frac{l_1 h_{cp}}{l_2 h_0} \quad (I.14)$$

где (см. фиг. 9)

$$h_0 = h_2 + l_1(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\gamma), \qquad (I.15)$$

$$h_{cp} = h_2 + \frac{l_1 + l_2}{2}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\gamma). \qquad (I.16)$$

Die potentielle Energie des Feldes kann man angenähert nach der Formel bestimmen (I,10).

Diese Formel enthält nur den Grundanteil der potentiellen Energie, der von dem Schub herrührt. Der Einfluß der Normalspannungen wird durch die Formel I,10 nicht berücksichtigt.

Die Fläche F läßt sich wie folgt ausdrücken:

$$F = \frac{l_1 + l_2}{2}\,\frac{h_{cp} + h_2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right)^2(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\gamma).$$

Wenn wir den Einfluß des zweiten Gliedes dieser Gleichung vernachlässigen, also die Fläche des Feldes nach der Formel bestimmen

$$F = \frac{(l_1 + l_2)(h_{cp} + h_2)}{4},$$

so erhalten wir die Fläche mit dem Zuschlag, der in Bild 9 gestrichelt ist. Diese Formel sollten wir benutzen, erstens weil sie einfach ist, und zweitens, weil wir zugleich damit, daß wir die Fläche schon mit jenem Zuschlag erhalten, die Oberfläche etwas verringern, die sich aus der Formel I,10 ergibt; denn in ihr fehlt das Glied, das die zusätzliche potentielle Energie von der Wirkung der Normalspannungen her berücksichtigt.

Die Formel für die Bestimmung der vollen potentiellen Energie des Feldes des Typs 4 hat die Form*) :

$$v = \frac{q_{2-3}\, q_{1-4}\, F}{2G\delta}\,[1 + A], \quad \text{(I. 17)}$$

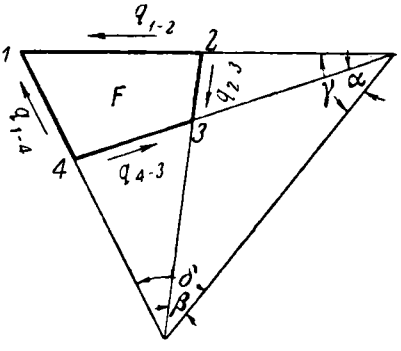


Bild 10

Dabei ist A das Glied, das den Einfluß der Normalspannungen berücksichtigt und sich so ausdrücken läßt:

$$A = \frac{4}{(1+\mu)} \frac{\Phi}{(a-c)(b-d)(a+b+c+d)}.$$

Dabei ist μ der Poissonsche Koeffizient

$$\Phi = \left[(a+b) + \frac{2}{3}(a^3+b^3) + \frac{1}{5}(a^5+b^5)\right]\ln(a+b) +$$
$$+ \left[(c+d) + \frac{2}{3}(c^3+d^3) + \frac{1}{5}(c^5+d^5)\right]\ln(c+d) -$$
$$- \left[(b+c) + \frac{2}{3}(b^3+c^3) + \frac{1}{5}(b^5+c^5)\right]\ln(b+c) -$$
$$- \left[(d+a) + \frac{2}{3}(d^3+a^3) + \frac{1}{5}(d^5+a^5)\right]\ln(d+a) +$$
$$+ \frac{1}{10}(a^2-c^2)(b^3-d^3) + \frac{1}{10}(b^2-d^2)(a^3-c^3) - \frac{1}{5}(a-c)(b^4-d^4) -$$
$$- \frac{1}{5}(b-d)(a^4-c^4) - \frac{2}{3}(a-c)(b-d)(a+b+c+d),$$

dabei ist:

$$a = \operatorname{ctg}\alpha, \quad b = \operatorname{ctg}\beta, \quad c = \operatorname{ctg}\gamma, \quad d = \operatorname{ctg}\delta \quad \text{(s. Abb. 10)}.$$

*) Siehe S. I. Garvey, The Quadrilateral «Shear» Panel, Aircraft Engineering, № 267, 1951.

Die Benutzung der Formel I,17 in den Rechnungen der Praxis ist kaum zweckmäßig. Denn die Errechnung der Größe A beansprucht ziemlich viel Zeit, was durch die erreichbare Genauigkeit der Rechnung nicht wettgemacht wird. In Festigkeitsrechnungen dünnwandiger Konstruktionen kommen Flächen des Typs 4 kaum in beträchtlicher Zahl vor und die Größe A bringt nur eine kleine Korrektur für die gesamte potentielle Energie eines solchen Systems. Das gestattet, sie zu vernachlässigen [1]) und erlaubt, für Felder des Typs 4 ebenfalls die einfache Formel I,10 zu benutzen.

Typen 1 , 2 , 3 und 4

Bisher waren Felder des Typs 1*, 2*, 3* und 4* der Betrachtung unterzogen. Sie waren als eben angesehen, die Resultierende des Schubflusses befand sich

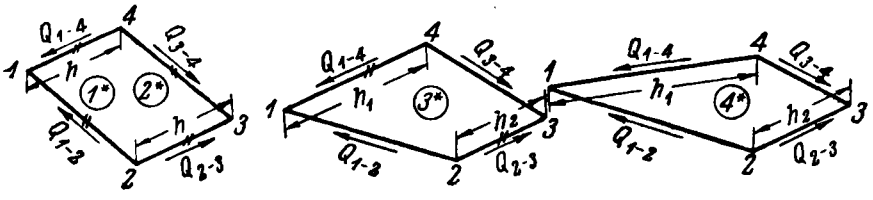


Bild 11

an allen vier Seiten in der Feldebene (Bild 11). In Wirklichkeit aber ist eine Außenhaut immer etwas gekrümmt (s.Bild 12) und die Resultierende des Schubes für den (gekrümmten) Spantschnitt liegt außerhalb der Schnittlnie.

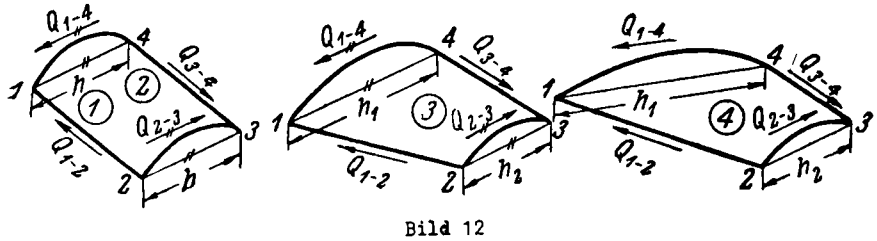


Bild 12

Wir bestimmen, in welchem Abstand von der Sehne des Schnittes die Kraft Q liegt, die dem Schubfluß das Gleichgewicht hält. Das Moment des Schubflusses bezüglich Punkt O ist (Bild 13 a) :

$$M = \int \rho q \, ds.$$

bei q = const ist

$$M = q \int \rho \, ds.$$

Das Produkt $\rho \cdot ds$ ist gleich dem doppelten Inhalt des in der Abbildung gestrichelt gezeichneten Dreiecks. Folglich ist $\int \rho \cdot ds$ die doppelte Fläche f_0, die durch die Sehne und die Mittellinie der Schnittkontur begrenzt ist (Bild 13b)

---

[1]) Siehe auch das Zahlenbeispiel auf Seite 31.

So ergibt sich:

$$M = q2f_0. \qquad (1.18)$$

Die Resultierende des Schubflusses $Q = q \cdot h$ verläuft parallel zur Sehne und von ihr im Abstand:

$$\frac{M}{Q} = \frac{q\,2f_0}{qh} = \frac{2f_0}{h} = 2H, \qquad (I.19)$$

dabei ist H die mittlere Höhe der Fläche f_0 (Bild 13 b)

Der Schubfluß, den wir für die ebenen Felder 1*, 2*, 3* und 4* erhalten haben, bleibt auch für Felder der Art 1 , 2 , 3 und 4 gültig. Man mag sich davon überzeugen, indem man den Gedankengang wiederholt.

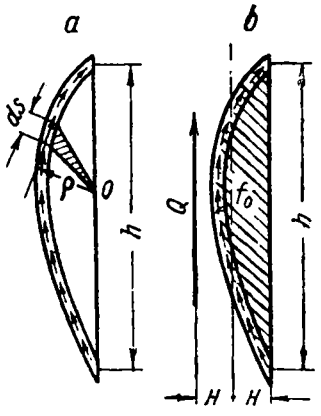


Bild 13

Bei der Bestimmung der potentiellen Energie können wir ebenfalls die früheren Formeln benutzen, nur müssen wir die Fläche F für die abgewickelte Mantelfläche umrechnen und einen Modul G unter Berücksichtigung der Krümmung wählen.

Typ 5

Für Felder der Art 5 ist charakteristisch, daß Normalkräfte in Wechselwirkung zwischen Wand und krummen Gurten bei Biegung des Feldes in seiner Ebene auftreten.

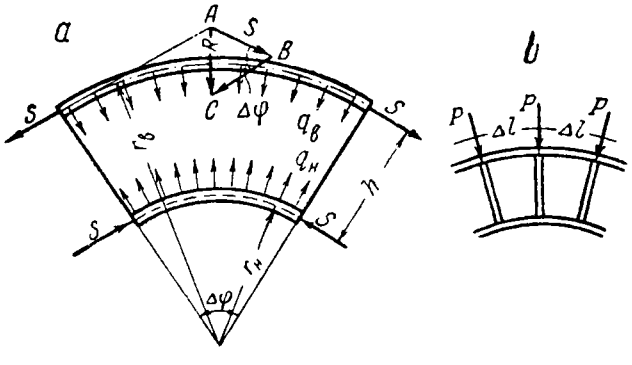


Bild 14

Das Biegemoment M sei durch ein Kräftepaar gegeben (Bild 14 a).

$$S = \frac{M}{h}.$$

Wir bezeichnen den Winkel zwischen den Endquerschnitten des Elements mit $\Delta\varphi$. Aus dem Dreieck A B C erhalten wir die Kraft R , die den Kräften S das Gleichgewicht hält, die am Obergurt angreifen: $R = S \cdot \Delta\varphi$

Verteilen wir die Resultierende R über die Länge des Obergurts, so erhalten wir eine mittlere radiale Belastung q_B über die laufende Länge:

$$q_B = \frac{R}{\Delta\varphi r_B} = \frac{S}{r_B}.$$

Analog ist für den Untergurt:

$$q_H = \frac{R}{\Delta\varphi r_H} = \frac{S}{r_H}.$$

Die Radialkraft P , die an jedem der Vertikalstäbe auftritt, die das Feld begrenzen, ist gleich:

$$P = q\Delta l,$$

dabei ist Δl der Abstand zwischen den Stäben (Bild 14 b).

§ 3 Verlauf der Längskräfte

Wir setzen voraus, daß längs der Achse des Stabes ein Kräftesystem $S_1, S_2 \ldots S_5$ und ein konstanter Schubfluß angebracht ist, der die Verbindung der Stäbe mit der Haut ersetzen soll (Bild 15).

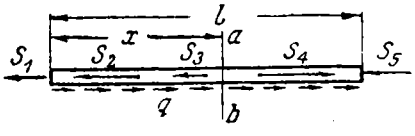


Bild 15

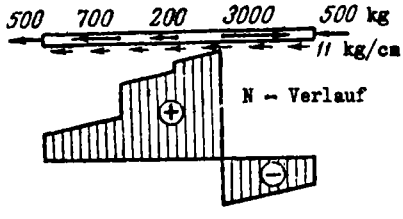


Bild 16

Aus den Gleichgewichtsbedingungen des Stabes finden wir den Schubfluß:

$$q = \frac{\Sigma S_i}{l}, \qquad (a)$$

Dabei steht im Zähler die algebraische Summe aller Kräfte S_1 :

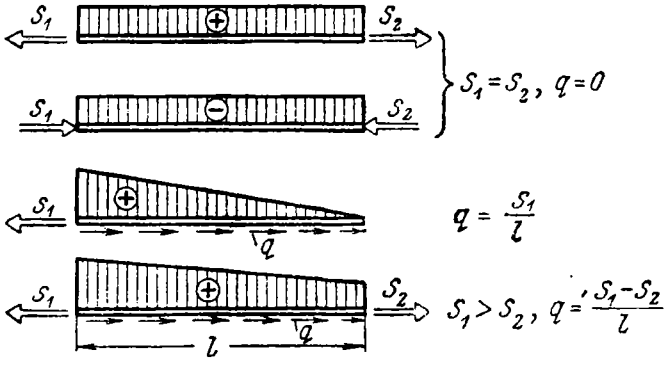


Bild 17

Aus der Gleichsgewichtsbedingung des Stabes links vom Schnitt a – b bestimmen wir die Längs- und Achsialkraft N_x in einem beliebigen Schnitt.

$$N_x = S_1 + S_2 + S_3 + qx$$

oder im allgemeinen Falle:

$$N_x = \sum S_i + qx. \qquad \text{(b)}$$

Dabei gehen in die Summe ΣS_i nur die Kräfte ein, die auf der einen Seite des betrachteten Schnittes liegen.

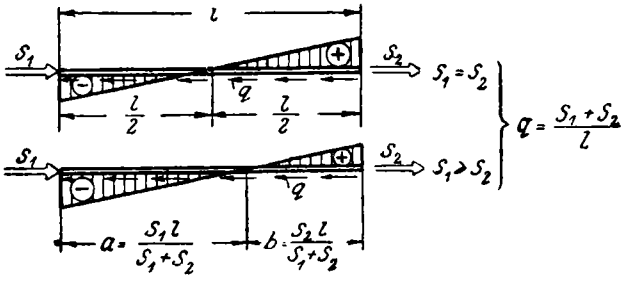


Bild 18

Es sei (Abb. 16) : S_1 = 500 kg; S_2 = 700 kg; S_3 = 200 kg; S_4 = 3000 kg
S_5 = 500 kg l = 100 cm. Nach Formel (a) ergibt sich:

$$q = \frac{+500+700+200-3000+500}{100} = -11 \text{ kg/cm}.$$

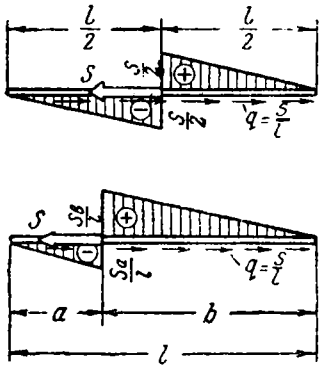


Bild 19

Nach Gleichung (b) zeichnen wir das Schaubild für N_x (Bild 16), dessen Unterschrift "Verlauf der Längs- oder Achsialkräfte" lauten würde.

In Abb. 17 , 18 und 19 sind andere Beispiele für den Verlauf der Längskräfte gezeigt.

Kapitel II

Bestimmung der Verschiebungen

§4 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Bringt man an einer elastischen Konstruktion äußere Kräfte an, so verschiebt sich natürlich ein jeder ihrer Punkte. So mag sich z.B. ein Punkt 1 mit den Koordinaten x , y , z der Konstruktion, die in Bild 20 dargestellt ist, nach dem Aufbringen der Kraft P auf den Punkt 1′ mit den Koordinaten x′, y′, z′ hin verschieben.

Die Koordinatenänderung, die wir mit "Verschiebung" bezeichnen wollen, ist in den Grenzen der elastischen Verformung klein. Das erlaubt, sie als vernachlässigbar klein gegenüber den Abmessungen der Konstruktion anzusehen. Zur Bestimmung der Größe und Richtung der Verschiebung insgesamt muß man ihre Projektion auf die drei Koordinatenachsen kennen. Jedoch genügt es meist, die Projektion der Gesamtverschiebung auf nur eine angegebene Richtung, z.B. auf i – i zu ermitteln.

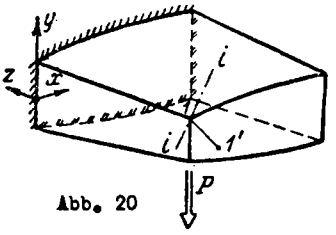


Abb. 20

Zur Bestimmung der Verschiebungen benutzen wir das Prinzip der virtuellen Verschiebungen: Wenn sich ein System im Gleichgewicht befindet, so ist die Summe der Arbeiten der inneren und der äußeren Kräfte bei beliebigen möglichen Verschiebungen gleich Null.

Hierbei muß man die Kräfte (und Verschiebungen) ganz allgemein in Rechnung setzen, d.h. es können auch Gruppen von Kräften oder Momenten vorhanden sein. Für ganz allgemeine Kräfte, die die Dimensionen [kg] [cmkg] [kg/cm] haben (Kräfte, Momente, Schubfluß), müssen die auftretenden Verschiebungen die Dimensionen [cm] [Bogenmaß] [cm^2] (Durchbiegung, Verdrehwinkel, Fläche) haben.

§5 Bestimmung der Verschiebungen

Die Arbeit ΔA_P einer allgemeinen äußeren Kraft P mal der entsprechenden Verschiebung Δ_P läßt sich wie folgt ausdrücken:

$$\Delta A_P = P\Delta_P \ [\text{cmkg}].$$

Sind mehrere äußere Kräfte da, so drückt die Summe $\sum_1^k \Delta A_p$ ihre Arbeit aus. Dabei ist k die Anzahl der äußeren Kräfte.

Mit $\sum_1^c \Delta A_R$; $\sum_1^n \Delta A_N$; $\sum_1^m \Delta A_q$ bezeichnen wir jeweilig die Arbeiten der Reaktionen der elastischen Auflager und der inneren Kräfte N und q . Dabei ist c , n und m die Anzahl der Auflager, der Stäbe und der Stegwände. Wir müssen hierbei im Auge behalten, daß die Arbeit der inneren Kräfte stets negativ ist. Denn sie streben danach, gegen die Verschiebungen, die durch die äußeren Kräfte hervorgerufen sind, Widerstand zu leisten.

Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen erhalten wir:

$$\sum_1^k \Delta A_P - \sum_1^c \Delta A_R - \sum_1^n \Delta A_N - \sum_1^m \Delta A_q = 0. \qquad \text{(II.1)}$$

Weil die Verschiebungen des Systems willkürlich und nur durch die Bindungen des Systems begrenzt sind, kann die Formel (II.1) die Summe der Arbeiten der Kräfte des Gleichgewichtszustandes des Systems in den Verschiebungen

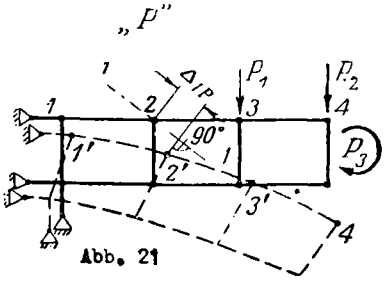


Abb. 21

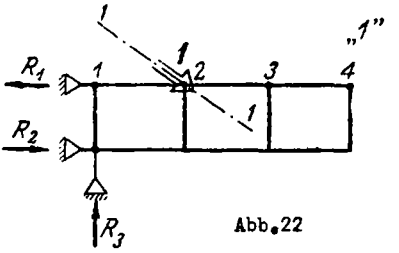


Abb.22

eines willkürlichen anderen Zustandes des elastischen Gleichgewichts ausdrücken.

Es sei einer der Zustände des gegebenen Konstruktion ein tatsächlicher Gleichgewichtszustand unter der Wirkung der allgemeinen äußeren Kräfte P_1, P_2 . . P_k (Bild 21) und der von ihnen erzeugten inneren Kräfte q_P N_p und R_p . Für sie müssen wir die Verschiebungen Δ_{1P} irgend eines Punktes z.B. des Punktes 2 in Richtung 1 - 1 ermitteln. Diesen Zustand wollen wir den Zustand "P" oder "Lastzustand" nennen.

Als anderen Zustand der gegeben Konstruktion nehmen wir den Gleichgewichtszustand (Bild 22) unter der Wirkung einer äußeren Kraft, die gleich 1 ist (und in Lage und Richtung mit der gesuchten allgemeinen Verschiebung Δ_{1P} zusammenfällt), und den entsprechenden inneren Kräften N , q , R . Der Index "1" deutet an, daß die innere Kraft aus der Wirksamkeit der Kraft "1" herrührt. Diesen Zustand nennen wir "Zustand 1" oder "Zustand der Einheitsbelastung".

Drücken wir die Arbeit der Kräfte des zweiten Zustandes in den Verschiebungen des ersten aus, so erhalten wir (nach der Formel II.1) :

$$1 \cdot \Delta_{1P} - \sum_1^c R_1 \beta_P - \sum_1^n \int_0^l \frac{N_1 N_P dx}{Ef} - \sum_1^m \frac{q_1 q_P F}{G\delta} = 0, \qquad \text{(a)}$$

Dabei bedeuten: β_p verschiebbare Auflager
f Stabquerschnitt

Erläutern wir das letzte Glied der Gleichung (a). Es entspricht einem rechteckigen Steg. Seine Abmessungen mögen a mal b sein. Die Arbeit wird ausgedrückt durch das Produkt der Schubkraft $q_1 a$ des zweiten Zustandes mal dem absoluten Wandschub $q_p \cdot b / G\delta$ (im Zustand "1").

Dieses Produkt gibt auch den Ausdruck unter dem Summenzeichen:

$$q_1 a \frac{q_P b}{G\delta} = \frac{q_1 q_P F}{G\delta},$$

Im Falle einer nicht rechtwinkligen Stegwand werden die Größen q_1 und q_p durch die angenäherten Mittelwerte des Schubflusses $\overline{q_1}$ und $\overline{q_p}$ ersetzt (s. Kapitel I).

Aus (a) erhält man:

$$\Delta_{1P} = \sum_1^m \frac{q_1 q_P F}{G\delta} + \sum_1^n \int_0^l \frac{N_1 N_P \, dx}{Ef} + \sum_1^c R_1 \beta_P. \qquad \text{(II. 2)}$$

Die Indices bei Δ zeigen an, daß die Verschiebung infolge der äußeren Kräfte des Zustandes "P" im Angriffspunkt der Kraft "1" (Bild 22) in Richtung eben dieser Kraft ermittelt war.

§ 6 Berechnung der Integrale von Mohr

Das Integral $\int_0^l \frac{N_1 \cdot N_P \cdot dx}{E \cdot f}$ heißt allgemein Mohr'sches Integral. Wir berechnen die Größe der Mohr'schen Integrale für die am häufigsten anzutreffenden Fälle.

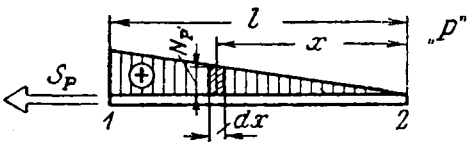


Bild 23

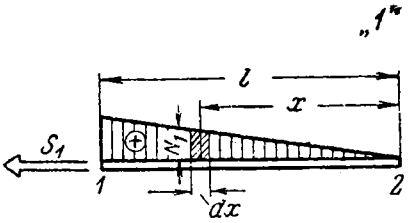


Bild24

Wir setzen voraus, daß an dem Stabe (Bild 23), der mit der Haut verbunden ist, eine Kraft S_p angreift, die durch die äußeren Kräfte des Zustandes "P" hervorgerufen ist.

Am gleichen Stabe ist eine Kraft S_1 aus der Einheitsbelastung angebracht (Bild 24).

Bei E f = const. geht die Aufgabe auf die Errechnung des Integrals $\int_0^l N_1 N_P \cdot dx$ zurück.

Wir drücken N_P und N_1 als Funktion von x aus (s. Bild 24 und 23):

$$N_P = S_P \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad N_1 = S_1 \frac{x}{l}.$$

Wir erhalten:

$$\int_0^l N_1 N_P \, dx = \frac{S_1 S_P \int_0^l x^2}{l^2} dx = \frac{1}{3} S_1 S_P \, l. \qquad \text{(II. 3)}$$

Beim Einheitszustand (entspr. Bild 25) erhalten wir:

$$\int_0^l N_1 N_P \, dx = \frac{1}{6} S_1 S_P \, l. \qquad \text{(II. 4)}$$

Kennen wir die Integrale (II,3) und (II,4), können wir auch andere Integrale für Stäbe ausrechnen, die mit der Haut verbunden sind, wobei q = Const

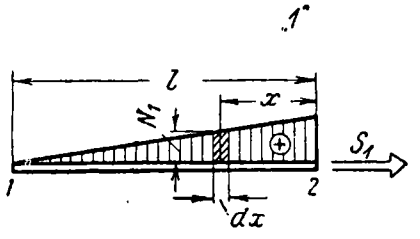


Bild 25

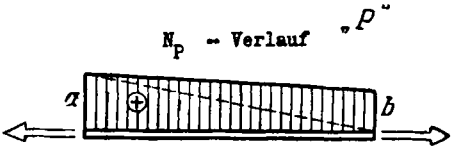


Bild 26

wirksam ist. Z.B. haben wir in Bild 26 den Verlauf der Kräfte N_P und in Bild 27 den der Achsialkräfte N_1 .
Wir teilen den Verlauf N_P in zwei Dreiecke auf und erhalten:

$$N_1 N_P \, dx = \frac{1}{3} ca \, l + \frac{1}{6} cb \, l = \frac{c}{6} (2a + b) l.$$

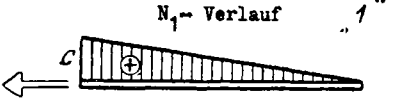


Bild 27

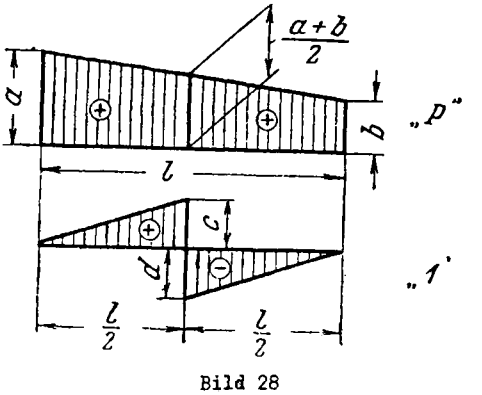


Bild 28

Wenn die Funktion der Achsialkräfte längs der Länge ℓ eine Unstetigkeit hat, muß man die Länge ℓ in zwei Teilstücke teilen, auf deren jedem die Funktion stetig verläuft, und muß dann in jedem Teilstück einzeln integrieren.

z.B. läßt sich für den Fall, der in Bild 28 dargestellt ist, das Mohr'sche Integral wie folgt bestimmen: [1])

$$\int_0^l N_1 N_P dx = \frac{1}{6}\, c \left[2\,\frac{a+b}{2} + a \right] \frac{l}{2} - \frac{1}{6}\, d \left[2\,\frac{a+b}{2} + b \right] \frac{l}{2} = \frac{l}{12} \times$$
$$\times \left[c\,(2a+b) - d\,(a+2b) \right].$$

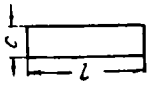
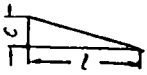
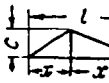
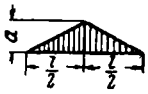
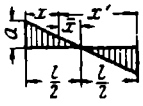
In Tabelle 1 sind die am häufigsten anzutreffenden Integrale zusammengestellt.

$$\int_0^l N_1 N_P\, dx.$$

---

[1]) In verzwickteren Fällen erfolgt die Errechnung der Mohr'schen Integrale besser nach der Methode von Wereschtschagin.

$\int_0 N_1 N_P \, dx$

Verlauf N_1 / Verlauf N_P			
	acl	$\frac{1}{2}\,acl$	$\frac{1}{2}\,ac$
	$\frac{1}{2}\,acl$	$\frac{1}{3}\,acl$	$\frac{1}{6}\,acl\Big(1 +$
	$\frac{1}{2}\,acl$	$\frac{1}{6}\,acl$	$\frac{1}{6}\,acl\Big(1 -$
	$\frac{1}{2}\,acl$	$\frac{1}{6}\,acl\left(1 + \frac{x'}{l}\right)$	$\frac{1}{3}\,ac$
	$\frac{1}{2}\,acl$	$\frac{1}{4}\,acl$	$\frac{1}{2}\,\frac{acl}{x'}\left(\frac{l}{2}\right.$
	$\frac{1}{2}\,c\,(a + b)\,l$	$\frac{1}{6}\,c\,(2a + b)\,l$	$\frac{1}{6}\,c\left[a\left(1 + \frac{x'}{l}\right) +\right.$
	$\frac{1}{2}\,c\,(a - b)\,l$	$\frac{1}{6}\,c\,(2a - b)\,l$	$\frac{1}{6}\,c\left[a\left(1 + \frac{x'}{l}\right) -\right.$
	0	$\frac{1}{6}\,acl$	$\frac{1}{3}\,ac$
			 $\int_0^l N_1 N_P dx =$