H. DÖLP UND E. NETTO

GRUNDZÜGE UND AUFGABEN DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG NEBST DEN RESULTATEN

22., verbesserte Auflage

VERLAG ALFRED TÖPELMANN, BERLIN W35
1955

INHALT

Differentialrechnung

Funktionen einer unabhängigen Variablen

Differentialrechnung

Funktionen einer unabhängigen Variablen

§ 1. Zusammenstellung der Differentialquotienten der einfachen Funktionen

$$y = ax^n \qquad \frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$$

$$y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{na}{x^{n+1}} = -nax^{-n-1}$$

$$y = a\sqrt[n]{x} = ax^{\frac{1}{n}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n}ax^{\frac{1}{n}-1}$$

$$y = a\sqrt[n]{x^p} = ax^{\frac{p}{n}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{n}a\sqrt[n]{x^{p-n}} = \frac{p}{n}ax^{\frac{p}{n}-1}$$

$$y = \sqrt{x} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = e^x \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$y = a^x \qquad \frac{dy}{dx} = a^x \lg a$$

$$y = \lg x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y = \sin x \qquad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y = \cos x \qquad \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$y = \operatorname{tg} x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$y = \operatorname{cotg} x \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$$

$$y = \operatorname{arc} \sin x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \operatorname{arc} \cos x \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$y = \operatorname{arc\,tg} x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$

$y = \operatorname{arc\,cotg} x \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$

$y = \sinh x \qquad \frac{dy}{dx} = \cosh x$ (vgl. S. 92)

$y = \cosh x \qquad \frac{dy}{dx} = \sinh x$

$y = \operatorname{arsinh} x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{+\sqrt{1 + x^2}}$

$y = \operatorname{arcosh} x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}$

§ 2. Reelle Funktionen reeller Veränderlicher. Differentialquotient

A. Funktionsbegriff

I. Eindeutige Funktionen einer Veränderlichen. Unter einer eindeutigen (reellen) Funktion $f(x)$ der (reellen) unabhängigen Veränderlichen oder Variablen x verstehen wir eine Vorschrift, derzufolge jeder Zahl x aus einer gewissen Menge D reeller Zahlen eine reelle Zahl $f(x)$, der sogenannte Wert der Funktion, zugeordnet wird; D heißt der Definitionsbereich der Funktion.

Beispiele: (1) Die Konstanten. Das sind diejenigen Funktionen, bei denen allen x der gleiche Wert, etwa c, zugeordnet ist, also $f(x) = c$ für jedes x aus D.

(2) Die Polynome. Als Polynome 0-ten Grades bezeichnet man die Konstanten. Für $k \geqq 1$ bezeichnet man als Polynome k-ten Grades die Funktionen $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$, wobei $a_0, \ldots, a_k$ (reelle) Zahlen (Konstanten) und $a_k \neq 0$ ist. Der Definitionsbereich eines Polynoms kann als die Gesamtheit aller reellen Zahlen angenommen werden. Spezialfälle: Für $k = 1$ hat man die linearen Funktionen $a_0 + a_1 x$, für $k = 2$ die quadratischen.

(3) Als rationale Funktionen bezeichnet man die Quotienten $Z(x) : N(x)$ aus je zwei Polynomen $Z(x)$ und $N(x)$. Weil mit Null niemals dividiert werden darf, enthält hier der Definitionsbereich D nur solche x, für die $N(x) \neq 0$ ist; insbesondere kann nicht $N(x) = \text{Konst.} = 0$ sein. Beispiel: $Z(x) = 3 + 2x$,

$N(x) = 1 - 2x^2 + x^4$; hier gehören $x = \pm 1$ nicht zum Definitionsbereich D.

(4) Sinus und Kosinus. $f(x) = \sin x$ ist für alle x erklärt. Da aber der Sinus periodisch, d. h. da $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ ist für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, so braucht man $\sin x$ nur für alle x mit $0 \leqq x < 2\pi$ zu kennen. Das gleiche gilt für $\cos x$.

(5) Tangens und Kotangens. Es ist $\operatorname{tg} x = \sin x : \cos x$ nur für $x \neq \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \ldots, \pm \frac{2k+1}{2}\pi, \ldots$ definiert, weil der Kosinus für $\pm \frac{2k+1}{2}\pi$ Null ist, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Für welche x ist $\operatorname{ctg} x = \cos x : \sin x$ definiert?

II. Mehrdeutige Funktionen einer Veränderlichen. Neben den eindeutigen (Ziff. I.) begegnet man auch mehrdeutigen (mehrwertigen) Funktionen $f(x)$; bei diesen sind also einzelnen oder allen x mehrere Werte zugeordnet. Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$. Hier muß zunächst $x \geqq 0$ sein (denn für $x < 0$ wird die Wurzel imaginär, während wir es nur mit reellen Funktionen zu tun haben); für $x > 0$ kann $\sqrt{x}$ sowohl positiv als negativ genommen werden, während für $x = 0$ Null der einzige Wert ist. — Andere Beispiele mehrdeutiger Funktionen treten bei den impliziten Funktionen auf (vgl. Ziff. IV.).

III. Funktionen von mehreren Veränderlichen. Entsprechend wie die (reellen) Funktionen von einer (reellen) Veränderlichen werden die Funktionen von $n \geqq 2$ (reellen) Veränderlichen erklärt. Es genügt, den Fall $n = 2$ zu besprechen. Der ganze Unterschied gegenüber dem Fall einer Veränderlichen ($n = 1$) besteht darin, daß für $n = 2$ der Definitionsbereich D der Funktion nicht mehr eine Menge von Zahlen x, sondern von Paaren (x, y) von Zahlen x, y ist. Man bezeichnet demgemäß die x und y als die (unabhängigen) Veränderlichen und die Funktion selbst mit $f(x, y)$, $g(x, y)$ usw. Im Fall $n = 1$ veranschaulicht man sich die x als Punkte auf der (Zahl-)Geraden, im Fall $n = 2$ die Paare (x, y) als Punkte auf der x, y-Ebene.

Beispiele: (1) $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, wobei $a \neq 0$, $b \neq 0$. Der Definitionsbereich ist hier die ganze Ebene. — (2) $g(x, y) = x : y$. Hier ist der Definitionsbereich die Ebene mit Ausnahme der Geraden $y = 0$. — (3) Während die Beispiele (1) und (2) eindeutige Funktionen liefern, ist $h(x, y) = \sqrt{x : y}$ zweiwertig ($y \neq 0$, $xy \geqq 0$).

IV. Unentwickelte Funktionen. Bei gegebener Funktion $f(x, y)$ kann man nach allen Paaren (x, y) des Definitionsbereiches D fragen, für die $f(x, y) = 0$ ist. Vermöge dieser Gleichung $f(x,y) = 0$ werden jedem (in Betracht kommenden) x eine oder mehrere y zugeordnet, nämlich alle y, für die $f(x, y) = 0$ ist. Dadurch wird y als Funktion von x erklärt, in Zeichen: $y = F(x)$. Die Bestimmung von $F(x)$ entspricht der „Auflösung" der Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y. Man sagt auch, durch $f(x, y) = 0$ sei y implizite als Funktion von x erklärt oder y sei implizite oder unentwickelte Funktion von x. Ist speziell $f(x, y) = y - g(x)$, also $y = g(x)$, so heißt y explizite oder entwickelte Funktion von x.

Beispiele: (1) Für $f(x,y) = (1 + x^2)y - c$ ist $F(x) = c:(1 + x^2)$ eindeutig für alle x.

(2) Für $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + c$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, ist $F(x) = \frac{b}{a}\sqrt{-ca^2 - x^2}$ nur für $c \leqq 0$ erklärt (nämlich reell), für $c = 0$ muß $x = 0$ sein, für $c < 0$ muß $x^2 \leqq -ca^2$ sein.

B. Differentialquotient

I. Differenzenquotient. Bei gegebenem $f(x)$ kann man für beliebige x, x_1 mit $x \neq x_1$ den Differenzenquotienten

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \tag{1}$$

bilden, wobei $y_1 = f(x_1)$ und $y = f(x)$ ist. Übrigens gilt bei Vertauschung von x_1 bzw. y_1 mit x bzw. y stets

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Die im Zähler und Nenner auftretenden Differenzen kürzt man auch so ab: $\Delta f = \Delta y = y_1 - y$ und $\Delta x = x_1 - x$. Der Differenzenquotient schreibt sich dann

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ wobei } \Delta x \neq 0. \tag{1a}$$

Der Differenzenquotient liefert das Verhältnis des Zuwachses der abhängigen zum Zuwachs der unabhängigen Veränderlichen.

Wir wollen den Differenzenquotienten auch geometrisch repräsentieren. Zu diesem Zwecke erinnern wir an die aus der analytischen Geometrie her bekannte Darstellung der Funktion $y = f(x)$ durch eine Kurve in der xy-Ebene. Die Abszisse OQ eines Kurvenpunktes P gibt den Wert der Veränderlichen x und seine Ordinate QP den Wert der Funktion $f(x)$ an. Je nachdem $f(x)$ ein- oder mehrwertig ist, gehören zu der Abszisse x eine oder mehrere Ordinaten y. Der Punkt P der Kurve möge die Abszisse x und die Ordinate y besitzen. Wir schreiben dies kurz $P = (x, y)$. Ebenso sei $P_1 = (x_1, y_1) = (x + \Delta x, y + \Delta y)$. Dann ist $PR = QQ_1 = x_1 - x = \Delta x$ und $P_1R = y_1 - y = \Delta y$ (vgl. Fig. 1), und wir erhalten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta.$$

Wir können $\operatorname{tg} \beta$ in einfacher und verständlicher Art das Steigungsmaß der Geraden SPP_1 nennen. Dann sieht man:

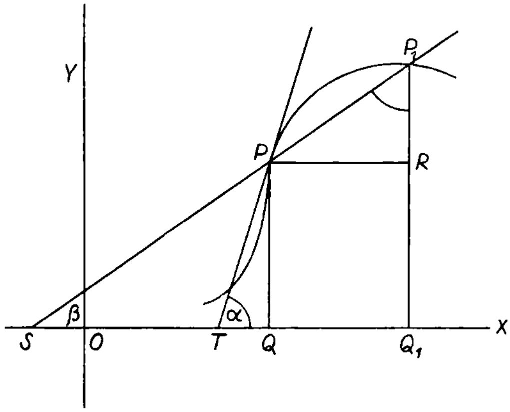

Fig. 1

Der Differenzenquotient (1) oder (1a) gibt das Steigungsmaß der Sekante PP_1 an, welche zu den Kurvenpunkten $P = (x, y)$ und $P_1 = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ gehört.

1. Beispiel: $y = ax^2$, $y_1 = ax_1^2$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a\,\frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = a(x_1 + x).$$

2. Beispiel: $y = \sqrt{x}$, $y_1 = \sqrt{x_1}$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x}}{x_1 - x} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}}.$$

II. Grenzwerte. Wir wollen nun in der Figur den Punkt P_1 auf der Kurve unbegrenzt dem als fest angenommenen Punkte P sich nähern lassen. Um richtige analytische Einsicht in diesen Prozeß zu gewinnen, müssen wir einige neue Begriffe einführen.

Sieht man bei einer reellen Größe a von dem Vorzeichen ab, so spricht man von ihrem absoluten Betrage; beispielsweise haben $+1$ und -1 den absoluten Betrag 1. Der absolute Betrag von a wird durch $|a|$ bezeichnet.

Genauer: Es ist $|a| = a$, falls $a \geqq 0$, und $|a| = -a$, falls $a < 0$. Demzufolge gilt: $|a| = 0$ nur für $a = 0$, sonst $|a| > 0$; ferner $|a| = |-a|$ und $|ab| = |a| \cdot |b|$ sowie die wichtige („Dreiecks"-)Ungleichung $|a + b| \leqq |a| + |b|$. Aus dieser Ungleichung folgt noch $||a| - |b|| \leqq |a - b| \leqq |a| + |b|$.

Man sagt nun, die Funktion $f(x)$ besitze „bei Annäherung von x an x_0", kürzer „bei $x \to x_0$", oder „an der Stelle x_0" den Grenzwert a, in Zeichen: $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, wenn folgendes gilt: Unterscheidet sich x von x_0 hinreichend wenig, wobei aber $x \neq x_0$ sein soll, so unterscheidet sich $f(x)$ von a beliebig wenig. Oder etwas anschaulicher formuliert: Es liegt $f(x)$ beliebig nahe bei a, wenn x hinreichend nahe bei x_0 liegt. (Dabei soll natürlich x stets zum Definitionsbereich gehören.)

Genauer: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß $|f(x) - a| < \varepsilon$, wenn $0 < |\Delta x| = |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Beispiel: $f(x) = x^2$. Hier gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^2$. Denn es ist $|x^2 - x_0^2| = |x + x_0| \cdot |x - x_0|$ beliebig klein, wenn $|x - x_0|$ hinreichend klein ist.

Genauer: $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, wenn $|x + x_0| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$; ist aber $|x| < 1 + |x_0|$, so ist $|x + x_0| \leqq |x| + |x_0| < 1 + 2|x_0|$ und folglich $|x + x_0| \cdot |x - x_0| < (1 + 2|x_0|) \cdot |x - x_0|$, also $|x + x_0| \cdot |x - x_0|$ sicher $< \varepsilon$, wenn $(1 + 2|x_0|) \cdot |x - x_0| < \varepsilon$, d. h. wenn $|x - x_0| < \varepsilon : (1 + 2|x_0|) = \delta(\varepsilon)$.

Die Formel $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ kann man so lesen: „Es strebt $f(x)$ gegen a, wenn x gegen x_0 strebt", in Zeichen: $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.

Enthält der Definitionsbereich von $f(x)$ absolut beliebig große positive (bzw. negative) Zahlen x, so sagt man, $f(x)$ besitze für $x \to +\infty$ (bzw. für $x \to -\infty$) den Grenzwert a, oder es strebe $f(x)$ gegen a, wenn x gegen $+\infty$ (bzw. gegen $-\infty$) strebt, in Zeichen $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ (bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$), wenn sich $f(x)$ beliebig wenig von a unterscheidet, falls nur $x > 0$ hinreichend groß (bzw. wenn $x < 0$, falls nur $|x|$ hinreichend groß) ist.

Genauer. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, wenn zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert derart, daß $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle x des Definitionsbereiches, für die $x > N(\varepsilon)$ ist. Entsprechend für $x \to -\infty$.

Beispiele für solche Grenzwerte liefern die (konvergenten) unendlichen Folgen von Zahlen $a_1, a_2, \ldots$. Hier besteht der Definitionsbereich aus den natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$ und die Funktionswerte sind $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Beispielsweise ist $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{-1} = 0$, ferner ist $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, wenn q konstant und $|q| < 1$ ist, schließlich gilt

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + p + \cdots + p^n) = 1 : (1 - p), \text{ wenn } |p| < 1$$

$$\left(\text{denn es ist } \frac{1}{1-p} - (1 + p + \cdots + p^n) = \frac{p^{n+1}}{1-p}\right).$$

Rechnen mit Grenzwerten. Es gelten die folgenden Regeln (auf deren Beweise wir hier verzichten müssen):

Addition $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm h(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$

Multiplikation $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = \big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\big) \cdot \big(\lim\limits_{x \to x_0} h(x)\big)$

Division $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) : h(x)\big) = \big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\big) : \big(\lim\limits_{x \to x_0} h(x)\big)$.

Dabei ist vorausgesetzt, daß $\lim f(x)$ und $\lim h(x)$ existieren, ferner im Falle der Division, daß $\lim h(x) \neq 0$ ist. Die Regeln gelten auch für Grenzwerte mit $x \to \pm\infty$.

Zusatz. Schließlich schreibt man $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ bzw. $= -\infty$ oder auch $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to x_0$, wenn $f(x)$ beliebig große Werte besitzt, falls x hinreichend nahe bei x_0 liegt (genauer: wenn zu beliebigem $M > 0$ bzw. < 0 ein $\delta(M)$ existiert derart, daß $f(x) > M$ bzw. $f(x) < M$, falls nur $0 < |x - x_0| < \delta(M)$).

Für Funktionen $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen x, y erklärt man entsprechend a als Grenzwert von $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) und sagt, daß $f(x, y)$ gegen a strebt, falls (x, y) gegen (x_0, y_0) strebt, wenn $f(x, y)$ beliebig nahe bei a liegt, falls $|x - x_0| + |y - y_0|$ hinreichend klein ist. In Zeichen: $a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

III. Stetigkeit. Die Funktion $f(x)$ heiße an der zu ihrem Definitionsbereich gehörigen Stelle x_0 stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist, also gleich dem Wert der Funktion an der Stelle x_0. Aus den obigen Rechenregeln für Grenzwerte folgt: Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von an der Stelle x_0 stetigen Funktionen sind wieder Funktionen, die an der Stelle x_0 stetig sind. (Evtl. auftretende Nenner sind als von Null verschieden vorauszusetzen.)

Entsprechend heißt die Funktion $f(x, y)$ der zwei Veränderlichen x, y stetig an der Stelle (x_0, y_0), wenn $f(x_0, y_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

Beispiele werden geliefert durch alle bisher betrachteten Funktionen; sie sind stetig an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches. Insbesondere sind die Polynome stetig; dies folgt nach den obigen Regeln, weil die Polynome durch Addition und Multiplikation der stetigen Funktionen $f(x) = x$ und $f(x) = \text{konst.}$ gewonnen werden.

Anmerkung. Es kann $\lim f(x)$ existieren, aber von $f(x_0)$ verschieden sein. Beispiel: $f(x) = x$ für $0 \leqq x < 1$ und für $1 < x \leqq 2$, aber $f(1) = 0$.

IV. Differentialquotient. Eine (an der Stelle x stetige) Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar an der Stelle x, wenn ihr Differenzenquotient $\Delta f : \Delta x$ für $x_1 \to x$ einen Grenzwert besitzt; dieser Grenzwert heißt der (erste) Differentialquotient oder die (erste) Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x und wird mit $f'(x)$ oder $\frac{df}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx}$ oder y' bezeichnet. Es ist also definitionsgemäß

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}. \tag{2}$$

Bei einer an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbaren Funktion ist also die Ableitung selbst eine eindeutige (reelle) Funktion von x.

Anmerkung. Ist $f(x)$ an der Stelle $x = a$ differenzierbar, so ist $f(x)$ auch stetig an der Stelle $x = a$. (Denn aus $\left| f'(a) - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < \varepsilon$ für $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ folgt $|f(x) - f(a)| < (\varepsilon + |f'(a)|) \cdot |x - a|$.)

Beispiele: (1) $f(x) = ax^2$. Es ist $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a(x + x + \Delta x) = 2ax$. — (2) $f(x) = \sqrt{x}$. Es ist $f'(x) = \lim \left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right) : \Delta x = \lim 1 : \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right) = 1 : 2\sqrt{x}$, wobei $x > 0$.

Bei der Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ ist streng daran festzuhalten, daß Zähler und Nenner nicht für sich einzeln definiert worden sind, und daß dx, dy nicht die Bedeutung von $\lim \Delta x$, $\lim \Delta y$ haben. Trotzdem dürfen wir uns erlauben, in unseren Beispielen $dy = 2\,ax\,dx$ oder $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ und allgemein

$$dy = y'\,dx = f'(x)\,dx$$

zu schreiben, sofern wir dies als gleichwertig definieren mit (2). Irrtümer können dadurch nicht hervorgerufen werden. dx und dy bezeichnet man auch als Differentiale.

Wie der Differenzenquotient, so läßt auch der Differentialquotient eine einfache geometrische Deutung zu. Wir lassen in der Figur 1 die Punkte P und Q fest und nähern den Punkt Q_1 unbegrenzt dem Punkte Q. Dabei rückt der Punkt P_1 der Kurve unbegrenzt an den Punkt P heran und die Tangente TP ergibt sich als Grenzlage der Sekante SP. Der Differentialquotient stellt das Steigungsmaß der Tangente im Punkte $P = (x, y)$ dar:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x). \tag{3}$$

V. Regeln zur Berechnung von Differentialquotienten.

V. 1. Differentialquotient der Potenz für ganze Exponenten. Wir beginnen mit

$$y = f(x) = ax^n \quad (n \text{ ganz und positiv}).$$

Den Werten x und x_1 entsprechen die Funktionswerte $y = ax^n$ und $y_1 = ax_1^n$ und daraus entsteht:

$$\frac{dy}{dx} = \lim a\left(\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}\right) = \lim a\left(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\right).$$

Für $x_1 \to x$ erhält man

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \tag{4}$$

Wird $n = 0$, so ist $y = a$, d. h. eine Konstante, und daher auch $y_1 = a$. Die Differenz Δy ist mithin gleich Null, und ebenso ist der Differenzenquotient $\Delta y : \Delta x = 0$. Geht man zur Grenze über, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = 0\,, \text{ wenn } y = a = \text{Konstante}.$$

Die Richtigkeit dieser Formel läßt sich auch an der Funktionskurve ablesen, die für $y =$ konst. eine zur x-Achse parallele gerade Linie ist, deren Tangente in jedem Punkte mit ihr zusammenfällt. Deshalb ist $\alpha = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

Wir zeigen weiter, daß (4) auch für negative ganze Zahlen n gilt. Wir setzen:

$$y = \frac{a}{x^n} = a x^{-n} \text{ (n ganz und positiv)}$$

und finden ähnlich wie oben

$$\frac{dy}{dx} = \lim a \frac{\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x^n}}{x_1 - x} = \lim \frac{-a}{x_1^n x^n} \cdot \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}$$
$$= \lim \frac{-a}{x_1^n x^n} (x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x + \cdots + x^{n-1})\,.$$

Für $x_1 \to x$ erhält man, einem negativen n in (4) entsprechend:

$$\frac{dy}{dx} = -n a x^{-n-1}.$$

V. 2. Umkehrfunktion und ihre Ableitung. Differentialquotient der Potenz für gebrochene Exponenten. Die Ableitung der Potenz x^q, wo q ein Bruch ist, ergibt sich aus einem allgemeinen Satz. Dieser bezieht sich auf die sogenannte Umkehrfunktion (auch Umkehrung oder umgekehrte Funktion) $\varphi(y)$ einer vorgegebenen Funktion $f(x)$, nämlich auf die durch $y - f(x) = 0$ implizit gegebene Funktion $x = \varphi(y)$ von y. Die Kurve von $\varphi(y)$ erhält man aus der Kurve C von $f(x)$, indem man sozusagen letztere von der y-Achse aus statt von der x-Achse aus „betrachtet", d. h. man erhält $\varphi(x)$, indem man bei festem C die y- mit der x-Achse vertauscht; oder, was auf das gleiche hinausläuft, indem man C (vgl. Fig. 1) um die Halbierende des Winkels zwischen der positiven x- und der positiven y-Achse dreht. Damit diese Umkehrfunktion eindeutig sei, ist hinreichend (und notwendig), daß $f(x)$ entweder stets zu- oder stets abnimmt. Dabei heißt $f(x)$ zu- (bzw. ab-)nehmend, wenn $f(x') < f(x'')$ bzw.

$f(x') > f(x'')$ für alle x', x'' mit $x' < x''$. Dann nämlich nimmt $f(x)$ einen Wert y, wenn überhaupt, genau einmal an, d. h. aus $y = f(x) = f(x_1)$ folgt stets $x = x_1$. Jede Funktion $f(x)$ die entweder zu- oder abnimmt, heißt auch monoton.

Die später zu betrachtenden Funktionen sind nicht sämtlich monoton, aber sie sind sämtlich stückweise monoton, d. h. ihr Definitionsbereich läßt sich in Intervalle zerlegen, in deren jedem $f(x)$ monoton ist. Beispiel: $\sin x$ ist zunehmend für $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, abnehmend für $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$ usw. Soweit von der Umkehrfunktion solcher stückweise monotoner Funktionen die Rede ist, muß also das „Monotonie-Intervall" angegeben werden, für welches die Umkehrfunktion jeweils gebildet ist (vgl. S. 28ff.).

Bei einer monotonen Funktion $f(x)$ ist $\Delta x \neq 0$ genau dann, wenn $\Delta y \neq 0$ ist. Daher hat mit $\Delta y : \Delta x$ stets auch $\Delta x : \Delta y$ einen Sinn; der letztere Quotient ist aber der Differenzenquotient der Umkehrfunktion von $f(x)$. Nach der Regel für die Division von Grenzwerten erhält man für eine stetige, differenzierbare, monotone Funktion $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$, also $\varphi'(y) = 1 : f'(x)$, wobei $y = f(x)$ und $f'(x) \neq 0$.

Wir haben somit den

Satz. Ist $f(x)$ stetig und monoton, sowie differenzierbar an der Stelle x_0, ist ferner $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch die Umkehrfunktion $\varphi(y)$ von $f(x)$ stetig und monoton, sowie differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ und es gilt

$$\varphi'(y_0) = 1 : f'(x_0). \tag{5}$$

Zum Beweis hat man nur noch zu beachten, daß bei stetigen monotonen $f(x)$ aus $\Delta y \to 0$ auch $\Delta x \to 0$ folgt (und umgekehrt).

Auch die Figur 1 läßt die Richtigkeit von (5) leicht erkennen, da bei dem Umklappen die Winkel β und α durch $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta$ und $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ zu ersetzen sind; deshalb wird:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = 1 .$$

Mit Hilfe von (5) kann jetzt nachgewiesen werden, daß die Funktion:

$$y = a \sqrt[n]{x} = a x^{\frac{1}{n}} \quad (n \neq 0 \text{ und ganz})$$

ebenfalls nach (4) differenziert werden kann. Der umgekehrten Funktion $x = \frac{1}{a^n} y^n$ entspricht nämlich der Differentialquotient

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a^n} n y^{n-1} = \frac{1}{a} n x^{1-\frac{1}{n}},$$

und daraus geht nach (5), übereinstimmend mit (4), hervor:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \cdot a x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Ist speziell $y = \sqrt{x}$, so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

V 3. Differentiation von vermittelten Funktionen.

Kettenregel: Wenn y eine Funktion von z ist, etwa $y = f(z)$, und z selbst wieder eine Funktion von x, etwa $z = g(x)$, so folgt aus $y = f\big(g(x)\big) = h(x)$, daß y auch eine Funktion von x ist. Zu den Werten x, x_1 mögen die Werte y, y_1 und z, z_1 gehören. Wir setzen:

$$x_1 - x = \Delta x,\ y_1 - y = \Delta y,\ z_1 - z = \Delta z,$$

und nehmen an, daß $\Delta z \neq 0$ sei; dann ist identisch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

und nach dem Satze vom Grenzwert eines Produktes ergibt sich[1]) die sogenannte Kettenregel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}. \tag{6}$$

Ist y eine Funktion von z, und z selbst eine Funktion von x, so ist der Differentialquotient von y nach x gleich dem Produkte aus dem Differentialquotienten von y nach z in den Differentialquotienten von z nach x.

Beispiel: $y = (ax)^2 = z^2$, wenn $z = ax$ gesetzt wird;

$$\frac{dy}{dz} = 2z, \quad \frac{dz}{dx} = a; \quad \frac{dy}{dx} = 2z \cdot a = 2a^2 x.$$

Aus $y = a^2 x^2$ erhält man denselben Wert.

---

[1]) Die Regel (6) bleibt auch richtig, wenn $\Delta z = 0$ für beliebig kleine $\Delta x \neq 0$ auftritt; es ist dann $\frac{dz}{dx} = 0$.

Die Formel (6) erweitert sich dadurch, daß wir annehmen, es sei:

$$y = f(u),\ u = \varphi(z),\ z = \varrho(x),$$

indem man alsdann hat:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Jetzt ist es endlich möglich geworden, die Anwendbarkeit der Formel (4) auch für den Fall nachzuweisen, daß der Exponent ein Bruch, und die Funktion also von der Form ist:

$$y = a\sqrt[n]{x^p} = a x^{\frac{p}{n}}.$$

Setzt man nämlich $z = x^p$, so wird

$$y = a z^{\frac{1}{n}},\ z = x^p;\ \frac{dy}{dz} = \frac{1}{n} a z^{\frac{1}{n}-1},\ \frac{dz}{dx} = p x^{p-1},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} a (x^p)^{\frac{1}{n}-1} \cdot p x^{p-1} = \frac{p}{n} a x^{\frac{p}{n}-1}.$$

Hiermit ist die Gültigkeit der Formel (4) für alle rationalen Werte des Exponenten nachgewiesen, und wir können sagen:

Eine Potenz der Variablen mit rationalem Exponenten wird differenziert, indem man ihren Koeffizienten mit dem Exponenten multipliziert und diesen selbst um die Einheit vermindert.

1. Beispiel: $f(x) = 4x^3$, $f'(x) = 12x^2$.

2. Beispiel: $f(x) = 2x^{-3}$, $f'(x) = -6x^{-4}$.

3. Beispiel: $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$, $f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$.

4. Beispiel: $f(x) = 2x^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x) = -x^{-\frac{3}{2}}$.

V 4. Differentiation von rational zusammengesetzten Funktionen. Werden mehrere Funktionen durch Additionen, Multiplikationen und Divisionen miteinander verbunden, so heißt eine solche Verbindung eine rational zusammengesetzte Funktion. Sind zwei derartige Funktionen wie $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ zur Summe oder Differenz $y = u \pm v$ verbunden, so ist $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$ und daraus folgt durch Division mit Δx und Grenzübergang:

(7) $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \quad \text{oder} \quad (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Zur Erweiterung setzen wir $v \pm w$ statt v und finden sofort:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \quad \text{oder} \quad (u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'.$$

Der Differentialquotient einer Summe von Funktionen der nämlichen Variablen ist gleich der Summe aus den Differentialquotienten der einzelnen Funktionen. Der Differentialquotient aus einer Differenz zweier Funktionen der nämlichen Variablen ist gleich der Differenz aus den Differentialquotienten von Minuendus und Subtrahendus.

Für das Produkt $y = u \cdot v$ ergeben sich folgende Beziehungen:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x,$$
$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}\lim\Delta x;$$

da das letzte Glied der letzten Gleichung verschwindet, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad (u \cdot v)' = uv' + vu'. \tag{8}$$

Ein Produkt aus zwei Funktionen der nämlichen Variablen wird differenziert, indem man den Differentialquotienten des ersten Faktors mit dem zweiten Faktor und den Differentialquotienten des zweiten Faktors mit dem ersten Faktor multipliziert und beide Produkte addiert.

1. Beispiel: $y = x^3 \cdot x^4 = u \cdot v$; $u' = 3x^2$, $v' = 4x^3$, $y' = x^4 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 4x^3 = 7x^6$, ein Wert, welcher auch aus der direkten Form $y = x^7$ hervorgeht.

2. Beispiel: $y = (a + bx^2)(c + ex^3) = u \cdot v$; $u' = 2bx$, $v' = 3ex^2$; $y' = 2bx(c + ex^3) + 3ex^2(a + bx^2) = 2bcx + 3aex^2 + 5bex^4$. Das gleiche Resultat wird erhalten, wenn man zuerst die Multiplikation ausführt und dann differenziert.

Geht v in vw über, dann verwandelt sich v' in $v'w + w'v$ und wir erhalten statt (8):

$$y' = (uvw)' = vw \cdot u' + uw \cdot v' + uv \cdot w'.$$

Tritt an die Stelle des veränderlichen Faktors v die Konstante a, so ist $v' = 0$ und daher wird für $y = au$ jetzt $y' = au'$ oder $(au)' = au'$.

Der Differentialquotient eines Produkts aus einer Konstanten mit einer Funktion von x ist gleich dem Produkt aus dieser Konstanten und dem Differentialquotienten der Funktion.

Für den Quotienten $y = \frac{u}{v}$ folgt:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}, \tag{9}$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \lim \Delta v)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Der Differentialquotient eines Bruches ist gleich dem Differentialquotienten des Zählers multipliziert mit dem Nenner, weniger dem Differentialquotienten des Nenners multipliziert mit dem Zähler, das Ganze geteilt durch das Quadrat des Nenners.

Beispiel: $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{u}{v}$; $u' = 2x$, $v' = 1$,

$$y' = \frac{2x(x - a) - 1 \cdot (x^2 - a^2)}{(x - a)^2} = 1.$$

Aus der reduzierten Form $y = x + a$ entsteht derselbe Wert.

Einfacher kann der Differentialquotient eines Quotienten aus demjenigen eines Produkts hergeleitet werden. Ist nämlich

$$y = \frac{u}{v}, \text{ so ist } u = yv,\ u' = vy' + yv',$$

$$y' = \frac{u' - yv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} \cdot v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Die abgeleiteten Theoreme über die Differentiation rational zusammengesetzter Funktionen sind besondere Fälle eines allgemeinen Satzes, zu dessen Herleitung wir nun übergehen wollen, nachdem noch eine neue Bezeichnung eingeführt worden ist.

Bedeutet $f(u, v)$ eine Funktion zweier Variablen u, v, so kann die Differentiation entweder nach u vor sich gehen, wobei v als konstant angesehen wird, oder umgekehrt nach v, wobei u als konstant gilt. Eine solche Differentiation nach einer der beiden Variablen heißt partielle Differentiation, und ihr Resultat ist der partielle Differentialquotient nach u oder nach v. Um darauf hinzudeuten, unterscheidet man diese Operation durch Benutzung eines runden ∂ von dem totalen Differentiieren und schreibt

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \lim \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u},$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \lim \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}.$$

Wir gehen jetzt zu dem angekündigten Satze über. Es sei $y = f(u, v)$ und hierbei u und v Funktionen von x, etwa $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$. Es soll $\frac{dy}{dx}$ bestimmt werden. Zu den Werten x und x_1 möge u, v, y und u_1, v_1, y_1 gehören. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} &= \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v)}{x_1 - x} \\ &= \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1) + f(u, v_1) - f(u, v)}{x_1 - x} \\ &= \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1)}{u_1 - u} \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{f(u, v_1) - f(u, v)}{v_1 - v} \frac{v_1 - v}{x_1 - x}. \end{aligned}$$

Dabei ist $u_1 - u \neq 0$, $v_1 - v \neq 0$ angenommen (vgl. aber Fußnote [1]) Seite 14).

Läßt man x_1 gegen x und damit u_1, v_1, y_1 gegen u, v, y gehen, dann wird

$$\lim \frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim \frac{v_1 - v}{x_1 - x} = \frac{dv}{dx}, \quad \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy}{dx},$$

$$\lim \frac{f(u, v_1) - f(u, v)}{v_1 - v} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v};$$

dagegen ist der Grenzwert des ersten Quotienten auf der rechten Seite der letzten Gleichung nicht unmittelbar ersichtlich. Aber in allen für uns später in Betracht kommenden Fällen gilt (wie hier nicht bewiesen wird):

$$\lim \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1)}{u_1 - u} = \lim \frac{f(u_1, v) - f(u, v)}{u_1 - u} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}.$$

Daher erhalten wir

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df(u, v)}{dx} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{dv}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Diesen Ausdruck nennen wir den totalen Differentialquotienten von y nach x. Wir sehen: Sind u und v Funktionen von x, und ist y eine Funktion von u und v, so differenziert man diese total nach der vorstehenden Formel durch Verwendung der partiellen Differentialquotienten der Funktion nach u und v.

1. Beispiel: Sind u und v zu einer Summe oder Differenz verbunden, so ist $y = f(u, v) = u \pm v$, $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v} = \pm 1$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$. (Vgl. Formel 7.)

2. Beispiel: Ist $y = f(u, v) = u \cdot v$, so wird $\frac{\partial f}{\partial u} = v$, $\frac{\partial f}{\partial v} = u$, $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$. (Vgl. Formel 8.)

3. Beispiel: Ist $y = f(u, v) = \frac{u}{v}$, so wird $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$. (Vgl. Formel 9.)

4. Beispiel: Wenn y eine Funktion nur von u ist, indem die andere Variable v ganz fehlt, dann fällt in (10) der zweite Teil der rechten Seite fort; ferner ist $\frac{\partial f}{\partial u}$ gleichbedeutend mit $\frac{df}{du}$ oder $\frac{dy}{du}$. Für $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ finden wir dann: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. (Vgl. Formel 6.)

Es erübrigt uns jetzt noch zu zeigen, auf welche Weise (10) erweitert werden kann. Aus den drei Funktionen von x, nämlich $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \varrho(x)$ setzen wir die Funktion $y = f(u, v, w)$ zusammen, legen der unabhängigen Variablen x die Werte x und x_1 bei, bilden die entsprechenden Funktionswerte:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x), & v &= \psi(x), & w &= \varrho(x), & y &= f(u, v, w) \\ u_1 &= \varphi(x_1), & v_1 &= \psi(x_1), & w_1 &= \varrho(x_1), & y_1 &= f(u_1, v_1, w_1) \end{aligned}$$

und daraus den Differenzenquotienten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1, v_1, w_1) - f(u, v, w)}{x_1 - x},$$

den wir, um ihn für den Grenzübergang geeignet zu machen, folgendermaßen umgestalten, wobei $u_1 - u \neq 0$, $v_1 - v \neq 0$, $w_1 - w \neq 0$ vorausgesetzt wird. (Vgl. aber Fußnote [1]) Seite 14.)

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1, v_1, w_1) - f(u, v_1, w_1)}{u_1 - u} \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$$
$$+ \frac{f(u, v_1, w_1) - f(u, v, w_1)}{v_1 - v} \frac{v_1 - v}{x_1 - x} + \frac{f(u, v, w_1) - f(u, v, w)}{w_1 - w} \frac{w_1 - w}{x_1 - x}.$$

Geht jetzt x_1 in x über, so verschwinden zugleich die Differenzen $(y_1 - y)$, $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$, $(w_1 - w)$ und die drei aus Differenzen der Funktionswerte bestehenden Zähler, und die Betrachtungen, welche oben zur Formel (10) führten, ergeben hier

$$\text{(10a)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}.$$

Algebraische und transzendente Funktionen. Eine Funktion $f(x)$ heißt algebraisch, wenn es eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ und Polynome $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ gibt, wobei $a_n(x)$ nicht konstant gleich Null ist, derart, daß

$$a_0(x) + a_1(x) f(x) + a_2(x) \big(f(x)\big)^2 + \cdots + a_n(x) \big(f(x)\big)^n = 0$$

für alle x des Definitionsbereiches.

Funktionen, welche nicht algebraisch sind, heißen transzendente Funktionen. Insbesondere gehören hierher die Exponentialfunktionen e^x und a^x nebst ihren Umkehrungen $\lg x$ und ${}^a\log x$ oder $\operatorname{Lg} x$; ferner die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x, \ldots$ und als deren Umkehrungen die zyklometrischen Funktionen $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x, \ldots$. (Auf Beweise für diese Behauptungen muß hier verzichtet werden.)

§ 3. Aufgaben zur Differentiation algebraischer Funktionen

1) $y = a$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 0$

2) $y = ax$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = a$

3) $y = ax + b$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = a$

4) $y = ax^2$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 2ax$

5) $y = 2x^3$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 6x^2$

6) $y = 4ax^5$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 20ax^4$

7) $y = -\frac{5x^3}{a}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-15x^2}{a}$

8) $y = a + 2bx + cx^2$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 2b + 2cx$

9) $y = \frac{a}{x} = ax^{-1}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-a}{x^2}$

10) $y = \frac{a}{x^4}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-4a}{x^5}$

11) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

12) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

13) $y = \sqrt[n]{x^p}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{p-n}}$

14) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

15) $y = \frac{1}{5\sqrt[4]{x^3}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{20} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$

16) $y = x^3\sqrt{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{x^5}$

17) $y = \frac{a}{x^3\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^9}}$

18) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt[3]{x}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{11}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}}$

19) $y = x\sqrt{x\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

20) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3\sqrt{x}}{m}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{7}{6}\sqrt[6]{\frac{x}{m^2}}$.