C. G. J. JACOBI

CANON ARITHMETICUS

MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN

HERAUSGEGEBEN VON DER
DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATHEMATIK

II. ABTEILUNG
MATHEMATISCHE MONOGRAPHIEN

BAND II

CANON ARITHMETICUS

VON

C. G. J. JACOBI

1956

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

CANON ARITHMETICUS

VON

C. G. J. JACOBI

NACH BERECHNUNGEN VON

WILHELM PATZ

IN VERBESSERTER UND ERWEITERTER FORM
NEU HERAUSGEGEBEN VON

HEINRICH BRANDT
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT HALLE
† 9. 10. 1954

1956

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Mohrenstraße 39
Lizenz-Nr. 202 · 100/329/56

Gesamtherstellung: Druckerei „Thomas Müntzer" Langensalza
Bestell- und Verlagsnummer: 5086 · Printed in Germany

I. Einleitung

Der im Jahre 1839 erschienene Canon arithmeticus ist seit langem vergriffen. Er brachte Index- und Numerustafeln für die ungeraden Primzahlen und Primzahlpotenzen sowie die Potenzen von 2 als Moduln, so weit sie unter 1000 liegen. Leider wurde der Wert dieses verdienstlichen Werkes dadurch sehr vermindert, daß man bei der Drucklegung, vielleicht auch schon bei der Herstellung des Manuskriptes nicht mit der erforderlichen Sorgfalt gearbeitet hatte, weshalb in dem Werk eine sehr große Zahl von Fehlern festzustellen ist. Der Canon selbst bringt am Schluß 5 Seiten Berichtigungen, weitere sind im Laufe der Zeit von verschiedenen Seiten mitgeteilt worden. Ganz abgesehen davon, ob alle Fehler ermittelt sind, bleibt es sehr mühsam, in einem Tabellenwerk festgestellte Fehler zu berichtigen. Deshalb dürften die Verbesserungen auch nur in den seltensten Fällen eingetragen worden sein. Dazu kommt noch, daß die Korrekturen teilweise in schwer oder heute gar nicht zugänglichen Zeitschriften erschienen sind.

Nun sind aber Fehler in einem Tabellenwerk von der Art des Canon arithmeticus sehr viel hinderlicher als in einer Logarithmentafel oder überhaupt einer Tafel irgend einer stetigen Funktion. In einer solchen Tabelle würden größere Fehler eben wegen des stetigen Fortschreitens sofort bemerkt werden, kleinere in den Endziffern das Resultat aber nur ungenau, im allgemeinen aber nicht unbrauchbar machen. Anders ist es bei Index- und Numerustafeln. Hier gibt es keine kleinen Fehler. Wird aus der Tafel in einer sonst richtigen Rechnung ein falscher Wert entnommen, so wird das Resultat vollständig unbrauchbar.

Unter diesen Umständen dürfte eine fehlerfreie Neuausgabe des Canon arithmeticus von den Mathematikern der ganzen Welt, so weit sie an zahlentheoretischen Rechnungen interessiert sind, freudig begrüßt werden.

Die Berechnungen sind von Herrn Wilhelm Patz, der durch seine (jetzt neu in erweiterter Form erschienen) Kettenbruchtabellen bekannt geworden ist, ausgeführt worden. Es handelt sich nicht um eine einfache Berichtigung der Jacobischen Tafeln, sondern um eine vollständige Neuberechnung, die zugleich die früheren Tafeln in zweifacher Hinsicht erweitert.

Dabei werden für die primitiven Wurzeln g immer die kleinsten positiven Werte zugrunde gelegt. Zwar ist es richtig, daß für gewöhnlich die Auswahl von g gleichgültig ist. Von dieser Erwägung ausgehend, hatte man bei der Herstellung der Jacobischen Tafel willkürlich einen Wert gewählt, welcher gerade für die Berechnung bequem schien. Die ziemlich künstlichen Auswahlprinzipien sind in der Einleitung auseinander gesetzt. Die kleinsten positiven primitiven Wurzeln sind nur bei den Primzahlen $p=5$,

7, 11, 41, 73, 101, 313, 337, 449, 641, 757, 859 benutzt, in einigen weiteren Fällen sind kleine negative primitive Wurzeln gewählt worden. Im übrigen hat man sich von dem Grundsatz leiten lassen, g so zu bestimmen, daß der Index von 10 oder wenn das noch möglich war, der Index von —10 möglichst klein wird. Dadurch ist aber gar nicht der bequemste Weg für die Berechnung gefunden worden. So hat man für $p = 907$ den erstaunlich unbequemen Wert $g = 539$ genommen, nur weil die dritte Potenz —10 gibt, während doch die einfachste und bequemste Wahl $g = 2$ möglich gewesen wäre. Es kann gar kein Zweifel darüber bestehen, daß für die praktische Berechnung die kleinstmöglichen positiven Werte von g weitaus die besten sind. Jedenfalls findet man bei der Durchmusterung der von Jacobi gewählten Werte nicht einen einzigen, der bequemer wäre. Diese Auswahl befriedigt auch theoretisch am meisten. Da es tiefer liegende Probleme in der Zahlentheorie gibt, bei denen die natürlichen Reste, d. h. die kleinsten positiven eine ausgezeichnete Rolle spielen, so ist es auch durchaus denkbar, daß die kleinsten positiven primitiven Wurzeln eines Tages bei neuen Problemen hervortreten.

Die Tabellen erfassen alle Moduln unter 1000, für die es primitive Wurzeln gibt, außerdem wie die Jacobischen Tafeln auch die Potenzen von 2. Es werden also nicht nur die ungeraden Primzahlen und Primzahlpotenzen, sondern auch diese Zahlen doppelt genommen berücksichtigt. Zwar können einzelne Aufgaben für den Modul $P = 2 P_0$, wo P_0 ungerade Primzahl oder Primzahlpotenz ist, leicht mit Hilfe der Tabellen für den Modul P_0 gelöst werden. Indessen sollte ein Werk wie das vorliegende Vollständigkeit anstreben. Deshalb schien es zweckmäßig, auch die Moduln $2 P_0$ aufzunehmen. Auch ist es möglich, daß man den Index einer und derselben Zahl für verschiedene Moduln feststellen will. Dann soll die Tabelle den Index angeben, ohne daß Zwischenrechnungen erforderlich sind.

Die zweite Erweiterung gegenüber den Jacobischen Tafeln besteht darin, daß für die ungeraden Primzahlen als Moduln Tabellen aufgenommen sind, welche den Additions- und Subtraktionslogarithmen entsprechen. Einzelne solcher Tabellen hatte ich mir selbst schon im Jahre 1917 gelegentlich der Korrektur des Bandes I 6 der neuen Eulerausgabe berechnet und habe mehrfach nützlichen Gebrauch davon gemacht, zuerst bei der Richtigstellung der Vorzeichen in den beiden Beispielen auf Seite 195 und 196, welche in zunächst hoffnungslos scheinende Verwirrung geraten waren. Indem ich die Beispiele nach den Moduln 101 und 113 durchrechnete, gelang es in kurzer Zeit, die Vorzeichen richtig zu stellen. Hinterher war es dann leicht, sie auch durch algebraische Rechnung zu bestätigen.

Die Vorteile dieser Tabellen sind zunächst bei längeren zusammengesetzten Rechnungen dieselben wie die der Additions- und Subtraktionslogarithmen beim gewöhnlichen logarithmischen Rechnen, die Rechnung wird abgekürzt, was zwar bei einer einzelnen Aufgabe noch kaum ins Gewicht fällt, wohl aber, wenn mehrere gleichartige Probleme nebeneinander zu lösen sind. Darüber hinaus geben die neuen Tabellen die Möglichkeit, Aufgaben zu behandeln, welche ohne dies Hilfsmittel nicht anders als durch Probieren lösbar sind. In den weiter unten folgenden Anweisungen zum Gebrauch der Tafeln werden Beispiele dafür mitgeteilt.

Die ausgewählten kleinsten primitiven Wurzeln g sind für ungerade Primzahlen p und zusammengesetzte Zahlen P aus den folgenden Aufstellungen ersichtlich, für die Potenzen von 2 wurde $g = 3$ zugrunde gelegt.

Aufstellung der benutzten primitiven Wurzeln für die 167 ungeraden Primzahlen unter 1000.

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
3	2	79	3	181	2	293	2	421	2	557	2	673	5	821	2	953	3
5	2	83	2	191	19	307	5	431	7	563	2	677	2	823	3	967	5
7	3	89	3	193	5	311	17	433	5	569	3	683	5	827	2	971	6
11	2	97	5	197	2	313	10	439	15	571	3	691	3	829	2	977	3
13	2	101	2	199	3	317	2	443	2	577	5	701	2	839	11	983	5
17	3	103	5	211	2	331	3	449	3	587	2	709	2	853	2	991	6
19	2	107	2	223	3	337	10	457	13	593	3	719	11	857	3	997	7
23	5	109	6	227	2	347	2	461	2	599	7	727	5	859	2		
29	2	113	3	229	6	349	2	463	3	601	7	733	6	863	5		
31	3	127	3	233	3	353	3	467	2	607	3	739	3	877	2		
37	2	131	2	239	7	359	7	479	13	613	2	743	5	881	3		
41	6	137	3	241	7	367	6	487	3	617	3	751	3	883	2		
43	3	139	2	251	6	373	2	491	2	619	2	757	2	887	5		
47	5	149	2	257	3	379	2	499	7	631	3	761	6	907	2		
53	2	151	6	263	5	383	5	503	5	641	3	769	11	911	17		
59	2	157	5	269	2	389	2	509	2	643	11	773	2	919	7		
61	2	163	2	271	6	397	5	521	3	647	5	787	2	929	3		
67	2	167	5	277	5	401	3	523	2	653	2	797	2	937	5		
71	7	173	2	281	3	409	21	541	2	659	2	809	3	941	2		
73	5	179	2	283	3	419	2	547	2	661	2	811	3	947	2		

Aufstellung der benutzten primitiven Wurzeln für die 123 zusammengesetzten Zahlen P unter 1000, welche primitive Wurzeln besitzen.

P	g	P	g	P	g	P	g	P	g	P	g	P	g	P	g	P	g
6	5	54	5	134	7	242	7	343	3	478	7	614	5	734	11	886	5
9	2	58	3	142	7	243	2	346	7	482	7	622	17	746	5	898	3
10	3	62	3	146	5	250	3	358	7	486	5	625	2	758	3	914	13
14	3	74	5	158	3	254	3	361	2	502	11	626	15	766	5	922	3
18	5	81	2	162	5	262	17	362	21	514	3	634	3	778	3	926	3
22	7	82	7	166	5	274	3	382	19	526	5	662	3	794	5	934	5
25	2	86	3	169	2	278	3	386	5	529	5	674	15	802	3	958	13
26	7	94	5	178	3	289	3	394	3	538	3	686	3	818	21	961	3
27	2	98	3	194	5	298	3	398	3	542	15	694	5	838	11	974	3
34	3	106	3	202	3	302	7	422	3	554	5	698	7	841	2	982	7
38	3	118	11	206	5	314	5	446	3	562	3	706	3	842	23	998	7
46	5	121	2	214	5	326	3	454	5	566	3	718	7	862	7		
49	3	122	7	218	11	334	5	458	7	578	3	722	3	866	5		
50	3	125	2	226	3	338	7	466	3	586	3	729	2	878	15		

noch 8 Potenzen von 2

II. Berechnung der Tabellen

Die Berechnung der Tabellen ist auf folgende Weise erfolgt. Es sei P eine einfach oder doppelt genommene ungerade Primzahlpotenz und $\varphi = \varphi(P)$ bezeichne die Anzahl der Restklassen, welche nur zum Modul teilerfremde Zahlen enthalten. Ist dann g eine primitive Wurzel für P, so sind die Potenzen g^ξ, wobei ξ von 1 bis φ läuft, modulo P alle verschieden und geben daher alle zum Modul teilerfremden Restklassen. Um nun die Numerustafel N der kleinsten positiven Reste $x_\xi \equiv \text{num}\, \xi \equiv g^\xi$, (P) herzustellen, ist erst eine Hilfstabelle, die nicht mit veröffentlicht wird, berechnet worden, welche die

Vielfachen von g, auf kleinste positive Reste modulo P reduziert, angibt. Aus dieser Hilfstabelle M erhält man die Tafel N durch einfaches Ablesen. Es ist nämlich modulo P $x_1 \equiv g$, $x_2 \equiv x_1 g$, $x_3 \equiv x_2 g$ ... überhaupt $x_h \equiv x_{h-1} g$ bis zum Schlußwert $x_\varphi \equiv x_{\varphi-1} g \equiv 1$. So ergibt sich für $P = p = 61$ und $g = 2$ die Multiplikationstafel

M

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	6	8	10	12	14	16	18
1	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
2	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58
3	60	1	3	5	7	9	11	13	15	17
4	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
5	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57
6	59									

Hieraus erhält man die Werte $x_1 \equiv 2$, $x_2 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4$, $x_3 \equiv 4 \cdot 2 \equiv 8$ usw., also überhaupt die Numerustafel N, welche für $\xi = 1, 2, \ldots 60$ die Zahlen $x_\xi \equiv 2^\xi$, (61) abzulesen gestattet:

N

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	3	6	12	24
1	48	35	9	18	36	11	22	44	27	54
2	47	33	5	10	20	40	19	38	15	30
3	60	59	57	53	45	29	58	55	49	37
4	13	26	52	43	25	50	39	17	34	7
5	14	28	56	51	41	21	42	23	46	31
6	1									

Diese Art der Berechnung hat den Vorteil, daß alle Werte miteinander gekoppelt sind, so daß ein Fehler bei der Berechnung nicht unbemerkt bleiben kann. Die Methode ist der direkten Berechnung der Potenzen von g vorzuziehen. Hier wird jeder Rechner sich verleiten lassen, die rechnerischen Vorteile, welche eine einzelne Potenz möglicherweise bietet, auszunutzen. Dadurch ginge aber die enge Verknüpfung der berechneten Werte verloren, so daß die Möglichkeit besteht, daß einzelne Fehler unbeachtet bleiben können.

I

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		60	1	6	2	22	7	49	3	12
1	23	15	8	40	50	28	4	47	13	26
2	24	55	16	57	9	44	41	18	51	35
3	29	59	5	21	48	11	14	39	27	46
4	25	54	56	43	17	34	58	20	10	38
5	45	53	42	33	19	37	52	32	36	31
6	30									

Aus der Tafel N ergibt sich durch Umkehrung die Indextafel I. Während bei N der Wert $x \equiv \text{num } \xi$

mod P an der Stelle ξ steht, wird I dadurch hergestellt, das der Wert $\xi \equiv \text{ind } x$

mod φ an der Stelle x eingetragen wird. So entsteht für den Modul 61 die vorstehende Tafel.

In entsprechender Weise sind die Numerus- und Indextafeln N und I für alle Moduln P und auch für die Potenzen von 2 unter Zugrundelegung der Basis $g = 3$ berechnet worden.

Für die ungeraden Primzahlmoduln $P = p$ sind indessen noch die weiteren Tafeln I′ und I″ beigefügt worden. Sie finden sich jeweils auf der rechten Seite, während die Tafeln N und I links stehen. Die Tabelle I′ liefert für das Argument ind x den Wert von ind $(x + 1)$, die Tabelle I″ für das Argument ind x den Wert von ind $(x - 1)$. Jede dieser Tabellen ist also die Umkehrung der anderen. Wenn $x \equiv p - 1$, also $\text{ind } x \equiv \frac{p-1}{2}$, ist an Stelle des nicht existierenden Wertes ind $(x + 1)$ in der Tabelle I′ ein Stern gesetzt. Ebenso wenn $x \equiv 1$ also $\text{ind } x \equiv p - 1$, ist an Stelle des nicht existierenden Wertes ind $(x - 1)$ in der Tabelle I″ ein Stern gesetzt. Dieser Stern müßte folgerichtig auch bei den Eingängen stehen, wenn in der Tabelle I′ ind $(x + 1) \equiv p - 1$ und in der Tabelle I″ ind $(x - 1) \equiv \frac{p-1}{2}$ ist. In einer Folge von Ziffern könnte der Stern auch an einer beliebigen Stelle, z. B. am Anfang oder am Ende untergebracht werden, aber der Stern fügt sich nicht der dekadischen Ordnung, welche nach der Anordnung der Tafeln dadurch bedingt ist, daß von den drei Ziffern für den Eingang die Zehner und Hunderter in der vertikalen Eingangsspalte, die Einer in der Kopfzeile stehen. Da die Eingangsstelle 00 in den Tabellen N und I leer geblieben ist, eignet sich dieser Platz am besten, um die Stelle zu bezeichnen, welche der Stern einnehmen sollte. Es ist deshalb darauf zu achten, daß bei den Tabellen I′ und I″ die Eingangsstelle 00 nicht $\text{ind } x \equiv 0$, d. h. $x \equiv 1$ sondern ind x unmöglich, d. h. $x \equiv 0$ bedeutet.

Die Konstruktion der Tafeln I′ und I″ kann in der Weise erfolgen, daß für $\text{ind } x \equiv 1, 2 \ldots$ die Werte von x aus Tafel N entnommen werden, worauf die Tafel I die Werte von ind $(x + 1)$ und ind $(x - 1)$ liefert. Da indessen bei diesem Verfahren sehr viele Tafelablesungen erforderlich sind und falsche vielleicht durch Überspringen in die benachbarte Zeile oder Spalte entstehende Lesungen eingetragen und unbemerkt bleiben können, so ist der folgende Weg für die Herstellung der Tafel I′ gewählt worden, der eine viel größere Sicherheit gibt. Man durchläuft die Tafel I der Reihe nach und schreibt in der Tafel I′ an die Stelle, welche ein Indexwert angibt, den folgenden ein. So kommt für $p = 61$ an die Stelle 60 der Wert 1, an die Stelle 1 der Wert 6, an die Stelle 6 der Wert 2 usw. bis zur letzten Stelle 30, welche mit einem Stern besetzt wird, weil kein folgender Indexwert möglich ist. Bei diesem Verfahren sind Ablesefehler durch Überspringen in eine benachbarte Zeile oder Spalte wegen des gleichmäßigen Fortgangs so gut wie ausgeschlossen. Dagegen kann möglicherweise bei der Eintragung in die Tabelle I′, namentlich bei größeren Primzahlmoduln ein falscher Platz besetzt werden. Das muß sich aber dann beim Fortgang der Eintragung dadurch bemerkbar machen, daß der betreffende Platz anderweitig benötigt wird.

So entsteht für p = 61 die Tafel

I'

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	60	6	22	12	47	21	2	49	40	44
1	38	14	23	26	39	8	57	34	51	37
2	10	48	7	15	55	54	24	46	4	59
3	*	30	36	19	58	29	31	52	45	27
4	50	18	33	17	41	53	25	13	11	3
5	28	35	32	42	56	16	43	9	20	5
6	1									

Die Herstellung der Tafel I'' kann in analoger Weise erfolgen. Man durchläuft die Tafel I rückwärts der Reihe nach und schreibt in der Tafel I'' an die Stelle, welche ein Indexwert angibt, den vorhergehenden ein. So kommt für p = 61 an die Stelle 30 der Wert 31, an die Stelle 31 der Wert 36, an die Stelle 36 der Wert 32, an die Stelle 32 der Wert 52 usw. bis herab zur Stelle 60, die mit einem Stern besetzt wird, weil kein Indexwert vorhergeht.

Ein zweites Verfahren besteht darin, daß man die Tabelle I' umkehrt, d. h. man vertauscht den Stellenwert mit dem Ablesewert. So kommt für p = 61 an die Stelle 60 der Tabelle I'' der Stellenwert 00 aus I', d.i. ein Stern, an die Stelle 6 der Wert 1, an die Stelle 22 der Wert 2, an die Stelle 12 der Wert 3, an die Stelle 47 der Wert 4 usw. bis zur letzten Stelle 1, welche mit dem Wert 60 besetzt wird.

Beide Verfahren sind angewandt worden, das eine zur Eintragung, das andere zur Kontrolle. Auf diese Weise bekommt man für p = 61 die Tafel

I''

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	30	60	6	49	28	59	1	22	15	57
1	20	48	3	57	11	23	55	43	41	33
2	58	5	2	12	26	46	13	39	50	35
3	31	36	52	42	17	51	32	19	10	14
4	8	44	53	56	9	38	27	4	21	7
5	40	18	37	45	25	24	54	16	34	29
6	*									

III. Verwendung der Tabellen

Die folgenden Tabellen geben im ersten Teil für die ungeraden Primzahlen unter 1000 vier Tafeln N, I, I', I'', im zweiten Teil für die übrigen Zahlen unter 1000, so weit sie primitive Wurzeln besitzen, zwei Tafeln N und I und in dem kleinen Schlußteil für die Potenzen von 2 ebenfalls zwei Tafeln N und I. Mit Rücksicht darauf, daß man von diesen letzten Tafeln erst bei höheren Potenzen wirkliche Vorteile hat, sind sie noch auf die beiden über 1000 liegenden Moduln 1024 und 2048 ausgedehnt worden.

Am Kopf der Tafeln, die für den Modul P konstruiert sind, finden sich, wenn $\varphi = \varphi$ (P) die Anzahl der teilerfremden Restklassen bezeichnet, Angaben über den Wert von P, der ausgewählten primitiven Wurzeln g und der Primfaktorzerlegung von φ (P). Im ersten Teil ist p statt P und $p - 1$ statt φ (P) geschrieben. Die Tafel N gibt für ind $x \equiv 1, 2, \ldots \varphi = \varphi$ (P) die kleinsten positiven Reste x modulo P. Dabei sind die Zehner der Zahl ind x in der vertikalen Eingangsspalte, die Einer in der Kopfzeile zu suchen.

Die Tafel I gibt für die zu P teilerfremden Zahlen aus dem Intervall $1, 2, \ldots P$ den kleinsten positiven Wert von ind x. Wenn P ungerade, werden die Zehner der Zahl x in der vertikalen Eingangsspalte, die Einer in der Kopfzeile gesucht. Wenn P aber gerade, schreitet die vertikale Eingangsspalte nach Zwanzigern fort, während in der Kopfzeile die 10 ungeraden Zahlen $1, 3 \ldots 19$ stehen. Dann bedeutet z. B. 4 in der Eingangsspalte und 13 in der Kopfzeile 53.

Wenn $P = 2^n$, tritt $\frac{1}{2}\varphi$ an die Stelle von φ. In der Tafel N fehlen die Zahlen von der Form $8m + 5$ und $8m + 7$, weil sie positiv genommen keinen Index haben. Dagegen sind sie wegen des gleichmäßigen Fortgangs in der Tafel I aufgeführt. Zur Unterscheidung wurde dann der Indexwert, weil er sich auf den negativen Wert des Arguments bezieht, kursiv gedruckt. Die Tafeln N sind nach dem Zehnersystem, die Tafeln I aber wieder nach dem Zwanzigersystem angeordnet.

In den nur für ungerade Primzahlen p als Moduln aufgestellten Tafeln I′ und I″ bedeuten Eingänge und Tafelablesungen Indexwerte. Es tritt aber außer den Indexwerten $1, 2, \ldots p - 1$ noch ein Stern auf. Er vertritt den nicht existierenden Index der Zahlklasse $x \equiv 0$, (p).

Für das Argument ind $x \equiv *, 1, 2 \ldots$ gibt I′ den Wert von ind $(x + 1)$, I″ den Wert von ind $(x - 1)$, und es ist in jeder dieser Tabellen ein Stern gesetzt, wenn der betreffende Index nicht existiert, in der Tabelle I′, wenn $x + 1 \equiv 0$, (p) und in der Tabelle I″, wenn $x - 1 \equiv 0$, (p). Weil der Stern bei den dekadisch angeordneten Eingängen keinen Platz findet, ist er der Stelle 00 zugeordnet worden. Es ist also darauf zu achten, daß bei den Tabellen I′ und I″ der Eingang

00 nicht ind $x \equiv 0$, $(p - 1)$, sondern $x \equiv 0$, (p), d.h. ind $x \equiv *$ bedeutet. Ist a nicht durch p teilbar, so ist mit dem Stern modulo $p - 1$ folgendermaßen wie mit einem Symbol ∞ zu rechnen, es ist $a * \equiv *$, $* \pm \text{ind } a \equiv *$, $* + * \equiv *$, dagegen ist ein Symbol $* - *$, wenn es auftreten sollte, unbestimmt.

Die Möglichkeit einer Verwendung der Tafeln ist so außerordentlich groß, daß es schwer ist, eine Auswahl zu treffen. Wir geben zuerst einige Aufgaben, bei denen nur die Tafel N oder nur die Tafel I benutzt wird.

1. Welche Zahlklassen gehören für den Modul $p = 239$ zum Exponenten 7?

Weil $239 - 1 = 238 = 7 \cdot 34$, so wird $x \equiv g^{\text{ind } x}$ der Kongruenz $x^7 \equiv 1$ genügen, wenn ind x durch 34 teilbar ist. Falls $x \not\equiv 1$, wird zugleich keine frühere Potenz kongruent 1 werden. Somit ergeben sich die 6 Indexwerte: 34, 68, 102, 136, 170, 204, denen nach der Tabelle N die Lösungen $x \equiv 24, 98, 201, 44, 100, 10$, (239) entsprechen.

2. Welche Zahlen sind für den Modul 239 17-te Potenzreste?

Weil der Index durch 17 teilbar sein muß, erhält man aus der Tabelle N für die Vielfachen von 17 als Argument die 14 Werte: 1, 10, 24, 38, 44, 98, 100, 139, 141, 195, 201, 215, 229, 238.

3. Wie lang ist die Periode des Dezimalbruchs $\frac{1}{643}$?

Die Länge l des Dezimalbruchs ist der Exponent, zu dem die Zahl 10 gehört. Die Tabelle I gibt ind $10 \equiv 480$, der größte gemeinsame Teiler von 480 und 642 ist 6. Also gehört 10 zum Exponenten $\frac{642}{6} = 107$, und so lang ist die Periode des Dezimalbruchs $\frac{1}{643}$.

4. Man zeige, daß die 5-te Fermatsche Zahl $2^{32} + 1$ durch die Primzahl $p = 641$ teilbar ist.

Wenn $a + 1 \equiv 0$, (p), hat $a \equiv -1$ den Index $\frac{p-1}{2}$. Tatsächlich ist $32 \operatorname{ind} 2 \equiv 32 \cdot 470 \equiv 320$, (640).

5. Es bezeichne $\Pi_n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p_n$ das Produkt der ersten n Primzahlen. Dann soll man feststellen, ob die Primzahl $p = 347$ in einer der Zahlen $\Pi_n \pm 1$ aufgeht. Wenn $\Pi_n \equiv -1$, (p), gilt $\operatorname{ind} \Pi_n \equiv \frac{p-1}{2}$, wenn $\Pi_n \equiv 1$, (p), gilt $\operatorname{ind} \Pi_n \equiv p-1$. Man findet für $p = 347$.

	ind Π_n	
ind $2 \equiv 1$	1	
ind $3 \equiv 152$	153	
ind $5 \equiv 277$	84	
ind $7 \equiv 289$	27	
ind $11 \equiv 272$	299	
ind $13 \equiv 238$	191	
ind $17 \equiv 183$	28	
ind $19 \equiv 145$	173	deshalb gilt

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1 \equiv 0$, (347)

6. Man soll für den Primzahlmodul p das Produkt der aufeinanderfolgenden Zahlen in Teilprodukte vom Kongruenzwert 1 zerlegen.

Man addiert die Indexwerte der aufeinanderfolgenden Zahlen, bis die Summe durch $p-1$ teilbar wird. So ergibt sich für $p = 23$: $22, 2 + 16 + 4, 1 + 18 + 19 + 6, 10 + 3 + 9, 20 + 14 + 21 + 17 + 8 + 7 + 12 + 15 + 5 + 13$ und somit die Zerlegung

(1) $(2 \cdot 3 \cdot 4)$ $(5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8)$ $(9 \cdot 10 \cdot 11)$ $(12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21)$.

Es folgen jetzt Aufgaben, bei denen die Tafeln N und I zusammen benutzt werden.

7. Man gebe Auflösungen der Gleichung $85x + 23y = 3860$ in positiven Zahlen x, y.

$85\,x \equiv 3860,\ (23),\ 16\,x \equiv 19,\ (23),\ \text{ind}\,x \equiv \text{ind}\,19 - \text{ind}\,16 \equiv 15 - 8 \equiv 7,\ (22),$
$x \equiv 17,\ (23),\ x = 17 + 23\,k,\ y = 105 - 85\,k$

gibt für $k = 0,\ x = 17,\ y = 105$

und für $k = 1,\ x = 40,\ y = 20.$

8. Man löse die Kongruenz $37\,x \equiv 507,\ (1537).$ $1537 = 29 \cdot 53,\ 37\,x \equiv 507,\ (29).$
$8\,x \equiv 14,\ (29)$

$\text{ind}\,x \equiv \text{ind}\,14 - \text{ind}\,8 \equiv 13 - 3 \equiv 10,\ (28),\ x \equiv 9,\ (29),\ x = 9 + 29\,k,$
$37\,(9 + 29\,k) \equiv 507,\ (29 \cdot 53),\ 37 \cdot 29\,k \equiv 174,\ (29 \cdot 53),\ 37\,k \equiv 6,\ (53),\ \text{ind}\,k \equiv \text{ind}\,6 - \text{ind}\,37 \equiv 18 - 30 \equiv 40,\ (52),\ k \equiv 46,\ (53),\ x \equiv 9 + 29\,k \equiv 1343,\ (1537).$

9. $x^2 \equiv 267,\ (787).$

$2\,\text{ind}\,x \equiv 632,\ (786),\ \text{ind}\,x \equiv 316,\ (393),\ x \equiv \pm 76,\ (787).$

10. Man soll für den Modul 61 die Kongruenz $34\,x^2 + 27\,x + 19 \equiv 0$ auflösen.

Weil $\frac{19}{34} \equiv 49$ und $27 \equiv -34$, kann man schreiben $x^2 - x + 49 \equiv 0$ oder $x^2 + 60\,x + 49 \equiv 0$. Also ist $(x + 30)^2 \equiv 851 \equiv 58$, somit $2\,\text{ind}\,(x + 30) \equiv 36,\ (60)$ oder $\text{ind}\,(x + 30) \equiv 18, 48,\ (60)$ und daher $x + 30 \equiv 27, 34,\ (61),\ x \equiv -3, 4,\ (61)$.

11. $x^9 \equiv 7,\ (73)$ $9\,\text{ind}\,x \equiv 33,\ (72)$ ist unlösbar.

12. $13\,x^{12} \equiv 205,\ (512),\ 12\,\text{ind}\,(\pm x) \equiv \text{ind}\,205 - \text{ind}\,13 \equiv 117 - 69 \equiv 48,\ (128),$
$\text{ind}\,(\pm x) \equiv 4,\ (32),\ \text{ind}\,(\pm x) \equiv 4 + 32\,k \equiv 4, 36, 68, 100,\ (128),$
$x \equiv \pm 81,\ \pm 209,\ \pm 175,\ \pm 47,\ (512).$

13. $73^r \equiv 19,\ (643),\ r\,\text{ind}\,73 \equiv \text{ind}\,19,\ (642),\ \text{ind}\,73 \equiv 365,\ \text{ind}\,19 \equiv 539,\ (642),$
$365\,r \equiv 539,\ (6 \cdot 107),\ 44\,r \equiv 4,\ (107),\ 11\,r \equiv 1,\ (107),\ r \equiv 39,\ (107),\ r \equiv 1,\ (6),$
$r \equiv 253,\ (642),\ 73^{253} \equiv 19,\ (643).$

14. Welchen Kongruenzwert hat $630! + 1$ für den Modul 641?

Nach dem Wilsonschen Satz ist $640! \equiv -1,\ (641)$ und $\frac{640!}{630!} \equiv 640 \cdot 639 \ldots 631 \equiv 1 \cdot 2 \ldots 10 \equiv 10! \equiv 99,\ (641)$. Deshalb wird $630! \cdot 99 \equiv -1,\ (641)$ und $(630! + 1)\,99 \equiv 98,\ (641)$. Daher ist $\text{ind}\,(630! + 1) \equiv \text{ind}\,98 - \text{ind}\,99 \equiv 98 - 518 \equiv 220,\ (640)$ also $630! + 1 \equiv 383,\ (641)$.

15. Man braucht für den Modul $p = 769$ statt der in der Tafel angegebenen auf $g = 11$ bezogenen Indexwerte (ind x) die Indexwerte (Ind x) für die primitive Wurzel $g = 13$. Es ist $x \equiv 11^{\text{ind}\,x} \equiv 13^{\text{Ind}\,x},\ (769)$, also $\text{ind}\,x \equiv \text{Ind}\,x \cdot \text{ind}\,13 \equiv 487\,\text{Ind}\,x$. Daher hat man $\text{Ind}\,x \equiv \frac{\text{ind}\,x}{487} \equiv 727\,\text{ind}\,x \equiv -41\,\text{ind}\,x,\ (768)$. Somit ergeben sich für $\text{ind}\,x \equiv 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ (768)$ die Werte $\text{Ind}\,x \equiv 727, 686, 645, 604, 563, \ldots\ (768)$.

Bei den folgenden Aufgaben finden auch die Tabellen I′ und I″ Verwendung.

16. Wenn ind a und ind b bekannt sind, sucht man ind (a + b) und ind (a − b).

$$\text{ind}\,(a + b) \equiv \text{ind}\,b + \text{ind}\left(\frac{a}{b} + 1\right)$$

$$\text{ind}\,(a - b) \equiv \text{ind}\,b + \text{ind}\left(\frac{a}{b} - 1\right).$$

Man geht mit $\text{ind}\left(\frac{a}{b}\right) \equiv \text{ind}\,a - \text{ind}\,b$ in die Tabelle I′ und addiert den gefundenen Wert zu ind b, es ergibt sich ind (a + b).

Man geht mit ind $\left(\frac{a}{b}\right)$ in die Tabelle I'' und addiert den gefundenen Wert zu ind b, es ergibt sich ind (a — b).

Wiederholte Anwendung solcher Schlüsse führt zur Berechnung des Indexwertes von algebraischen Ausdrücken, wenn die Indexwerte der einzelnen Glieder bekannt sind.

17. Man benötigt eine Angabe darüber, wie oft zwei aufeinanderfolgende Zahlen für den Modul 37 sechste Potenzreste sind. Die Tabelle I' oder I'' liefert die Indexpaare *, 36; 12, 6; 18, *; 24, 30. Der Fall tritt also zweimal ein, wenn man sich auf zum Modul teilerfremde Zahlen beschränkt und viermal, wenn man auch den Rest 0 als Potenzrest zuläßt.

18. Man soll für den Modul 997 aufeinanderfolgende Zahlen bestimmen, welche gleichzeitig 3-te und 8-te Potenzreste sind. Man geht in die Tabelle I' mit Werten ind $x \equiv 0$, (24) und sucht die Stellen, für die auch ind $(x + 1) \equiv 0$, (24). Man findet so die Indexpaare 96, 600 und 384, 936, denen nach der Tafel N die Zahlwerte 249, 250 und 74, 75 entsprechen, welche zugleich die einzigen sind, wenn man die triviale Folge 0, 1 ausschließt.

19. Dieselbe Aufgabe kann auch mit der Tafel I'' gelöst werden. Man geht mit den Werten ind $x \equiv 0$, (24) in die Tafel ein und sucht die Stellen, für die auch ind $(x - 1) \equiv 0$, (24). Man findet so wie vorhin die Indexpaare 600, 96 und 936, 384.

20. Wenn man mit Indexwerten rechnet, ohne die Zahlwerte zu benutzen, so ist trotzdem eine kurze Bezeichnung für die Zahlwerte nützlich. Wir setzen, wenn ind $x \equiv \xi$ statt $x \equiv \text{num } \xi$ kurz $x \equiv [\xi]$.

Man wünscht für den Modul 101 den Index des Polynoms

$$x^5 - [27]\, x^3 - [34]\, x^2 + [49]\, x + [19]$$

zu bestimmen, wenn ind $x \equiv 30$ gesetzt wird. Es handelt sich also um die Bestimmung von ind $\{[50] - [17] - [94] + [79] + [19]\}$.

Nach den Tabellen I' und I'' findet man ind $\{[50] - [17]\} \equiv 31 + 17 \equiv 48$, ind $\{[48] - [94]\} \equiv 80 + 94 \equiv 74$, ind $\{[74] + [79]\} \equiv 74 + 82 \equiv 56$, ind $\{[56] + [19]\} \equiv 12 + 19 \equiv 31$.

Derartige Aufgaben zeigen, wie vorteilhaft es ist, daß beide Tabellen I' und I'' zur Verfügung stehen.

Tritt in der Schlußrechnung ein Stern auf, so bedeutet das: Der betreffende x-Wert ist Nullstelle des Polynoms. Tritt in der Zwischenrechnung ein Stern auf, so ist mit $[*] \equiv 0$ zu rechnen, man kann aber auch mit dem Stern in die Tabelle I' oder I'' eingehen, man findet dann, wie es sein muß, ind $(* + 1) \equiv$ ind 1, ind $(* - 1) \equiv$ ind (-1).

21. Man bestimme (in Anlehnung an eine Aufgabe von Diophant) für den Modul 29 vier quadratische Reste, so daß die 6 Produkte zu je zweien um 1 vermehrt wieder quadratische Reste geben. Dabei soll in allen Fällen der Rest 0 ausgeschlossen sein.

Man beginnt mit $a \equiv 1$ und sucht Zahlen x mit geradem Index, so daß auch $ax + 1 \equiv x + 1$ geraden Index bekommt. Man findet aus der Tafel I' die Werte ind $x \equiv 2, 6, 8, 20, 22, 26$. Geht man mit den Summen dieser Werte zu je zweien in die Tafel I', so ergeben sich gerade Werte für folgende Paare: $2 + 6$, $2 + 20$, $6 + 20$,

$8 + 22$, $8 + 26$, $22 + 26$, woraus sich zwei Lösungen für die Indexwerte: 2, 6, 20 und 8, 22, 26 ergeben. Das Problem hat also die Lösungen:

$$a \equiv 1,\ b \equiv 4,\quad c \equiv 6,\ d \equiv 23$$
$$a \equiv 1,\ b \equiv 24,\ c \equiv 5,\ d \equiv 22.$$

Schließt man den Wert 1 aus, so können die Bedingungen der Aufgabe nur für 3, aber nicht für 4 Zahlen erfüllt werden, es sind also alle Lösungen gefunden.

22. Auflösung der Kongruenz $x^5 + y^5 + z^5 \equiv 0$, (31) in zum Modul teilerfremden Zahlen.

Offenbar sind x, y, z nur bis auf 5-te Einheitswurzeln bestimmt, deshalb darf man ind x, ind y, ind z auf die Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5 beschränken. Setzt man $\xi \equiv \frac{x}{z}$, $\eta \equiv \frac{y}{z}$, so wird $\xi^5 + \eta^5 + 1 \equiv 0$ und ξ^5 wie auch $\xi^5 + 1 \equiv -\eta^5$ haben durch 5 teilbare Indexwerte. Die Tabelle I′ gibt folgende Lösungen:

$$\text{ind } \xi^5 \equiv 10,\ \text{ind } (\xi^5 + 1) \equiv 5,\quad \text{also ind } \eta^5 \equiv 20$$
$$\text{ind } \xi^5 \equiv 20,\ \text{ind } (\xi^5 + 1) \equiv 25,\ \text{also ind } \eta^5 \equiv 10\,.$$

Beide Lösungen unterscheiden sich also nur durch die Reihenfolge. Sieht man davon ab, so hat man ind $\xi \equiv 2$, (6), ind $\eta \equiv 4$, (6). Die kleinsten Lösungen sind $\xi \equiv 5$, $\eta \equiv 7$, (31) und die allgemeinste Lösung der Aufgabe wird dann $x \equiv 5\, e_1\, z$, $y \equiv 7\, e_2\, z$, z beliebig, wobei e_1 und e_2 5-te Einheitswurzeln sind.

23. Es soll die Kongruenz $\frac{x^{20} + 1}{y^{20} + 1} \equiv z^{20}$, (101) aufgelöst werden. Offenbar sind x, y, z nur bis auf Faktoren, die 20-te Einheitswurzeln sind, bestimmt. Sieht man noch von dem möglichen Fall ab, daß x, y, z selbst 20-te Einheitswurzeln sind, so kann man ind x, ind y, ind z auf die Werte 1, 2, 3, 4 beschränken. Die Tabelle I′ gibt dann

ind (x^{20})	20	40	60	80
ind $(x^{20} + 1)$	74	56	16	54

Weil $74 \equiv 54$, (20) und $56 \equiv 16$, (20), so ergeben sich die Lösungen

ind x	1	4	2	3
ind y	4	1	3	2
ind z	1	4	2	3

also

x	2	16	4	8
y	16	2	8	4
z	2	16	4	8

24. Für einen Primzahlmodul $p = lm + 1$ werden die primitiven Reste x nach dem Kongruenzwert von ind x modulo l in Klassen (0), (1) ... $(l - 1)$ eingeteilt, welche der Untergruppe der l-ten Potenzreste und ihren Nebengruppen entsprechen. Wir

bilden dann nach dem Vorbild von Gauß die l^2 Übergangszahlen (i, k), welche abzählen, wie oft man von der Klasse (i) in die Klasse (k) kommt, wenn x durch $x + 1$ ersetzt wird. Diese Übergangszahlen können natürlich durch Abzählen gefunden werden, wenn die l-ten Potenzreste und ihre Nebengruppen bekannt sind. Sie lassen sich aber auch mit derselben Leichtigkeit aus der Tabelle I′ direkt ablesen. So erhält man für $p = 31$ und $l = 3$ das Schema

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

oder für $l = 4$ und $p = 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97$ die von Gauß berechneten Übergangszahlen (Werke II, 78).

H. Brandt.

I. TEIL

Numerus- und Indextafeln für die ungeraden Primzahlen unter 1000

N: ind $x \to x$.

I: $x \to$ ind x .

I′: ind $x \to$ ind $(x + 1)$.

I″: ind $x \to$ ind $(x - 1)$.

Bei den Tafeln I′ und I″ ist statt der Eingangsstelle oo ein Stern zu denken, vgl. Einleitung S. 6.

$p = 3,\ g = 2,\ p - 1 = 2$

N											I									
	0	1	2									0	1	2						
0		2	1								0		2	1						

$p = 5,\ g = 2,\ p - 1 = 2^2$

N											I									
	0	1	2	3	4							0	1	2	3	4				
0		2	4	3	1						0		4	1	3	2				

$p = 7,\ g = 3,\ p - 1 = 2 \cdot 3$

N											I									
	0	1	2	3	4	5	6					0	1	2	3	4	5	6		
0		3	2	6	4	5	1				0		6	2	1	4	5	3		

$p = 11,\ g = 2,\ p - 1 = 2 \cdot 5$

N												I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 1	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6		0 1	5	10	1	8	2	4	9	7	3	6

$p = 13,\ g = 2,\ p - 1 = 2^2 \cdot 3$

N												I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 1	10	2 7	4 1	8	3	6	12	11	9	5		0 1	10	12 7	1 6	4	2	9	5	11	3	8

$p = 17,\ g = 3\ \ p - 1 = 2^4$

N												I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 1	8	3 7	9 4	10 12	13 2	5 6	15 1	11	16	14		0 1	3	16 7	14 13	1 4	12 9	5 6	15 8	11	10	2

p = 3

I′										
	0	1	2							
0	2	*	1							

I″										
	0	1	2							
0	1	2	*							

p = 5

I′										
	0	1	2	3	4					
0	4	3	*	2	1					

I″										
	0	1	2	3	4					
0	2	4	3	1	*					

p = 7

I′										
	0	1	2	3	4	5	6			
0	6	4	1	*	5	3	2			

I″										
	0	1	2	3	4	5	6			
0	3	2	6	5	1	4	*			

p = 11

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 1	10 1	8	4	6	9	*	5	3	2	7

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 1	5 *	10	8	7	2	6	3	9	1	4

p = 13

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 1	12 7	4 3	9 1	8	2	11	*	6	10	5

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 1	6 8	12 5	4 *	11	1	9	7	10	3	2

p = 17

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 1	16 2	12 10	3 5	7 4	9 1	15 11	8 14	13	*	6

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 1	8 11	14 15	10 1	2 7	13 16	12 5	9 *	3	6	4

$p = 19,\ g = 2,\ p - 1 = 2 \cdot 3^2$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	13	7	14	9	18
1	17	15	11	3	6	12	5	10	1	

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		18	1	13	2	16	14	6	3	8
1	17	12	15	5	7	11	4	10	9	

$p = 23,\ g = 5,\ p - 1 = 2 \cdot 11$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	2	10	4	20	8	17	16	11
1	9	22	18	21	13	19	3	15	6	7
2	12	14	1							

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		22	2	16	4	1	18	19	6	10
1	3	9	20	14	21	17	8	7	12	15
2	5	13	11							

$p = 29,\ g = 2,\ p - 1 = 2^2 \cdot 7$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	3	6	12	24	19
1	9	18	7	14	28	27	25	21	13	26
2	23	17	5	10	20	11	22	15	1	

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		28	1	5	2	22	6	12	3	10
1	23	25	7	18	13	27	4	21	11	9
2	24	17	26	20	8	16	19	15	14	

$p = 31,\ g = 3,\ p - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		3	9	27	19	26	16	17	20	29
1	25	13	8	24	10	30	28	22	4	12
2	5	15	14	11	2	6	18	23	7	21
3	1									

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		30	24	1	18	20	25	28	12	2
1	14	23	19	11	22	21	6	7	26	4
2	8	29	17	27	13	10	5	3	16	9
3	15									

$p = 37,\ g = 2,\ p - 1 = 2^2 \cdot 3^2$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	27	17	34	31
1	25	13	26	15	30	23	9	18	36	35
2	33	29	21	5	10	20	3	6	12	24
3	11	22	7	14	28	19	1			

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		36	1	26	2	23	27	32	3	16
1	24	30	28	11	33	13	4	7	17	35
2	25	22	31	15	29	10	12	6	34	21
3	14	9	5	20	8	19	18			

p = 19

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	18	13	16	8	10	7	3	11	17	*
1	9	4	15	2	6	5	14	12	1	

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9	18	13	6	11	15	14	5	3	10
1	4	7	17	1	16	12	2	8	*	

p = 23

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	22	18	16	9	1	13	10	12	7	20
1	3	*	15	11	21	5	4	8	19	6
2	14	17	2							

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	11	4	22	10	16	15	19	8	17	3
1	6	13	7	5	20	12	2	21	1	18
2	9	14	*							

p = 29

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	28	5	22	10	21	2	12	18	16	24
1	23	9	3	27	*	14	19	26	13	15
2	8	11	6	25	17	7	20	4	1	

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	14	28	5	12	27	1	22	25	20	11
1	3	21	6	18	15	19	8	24	7	16
2	26	4	2	10	9	23	17	13	*	

p = 31

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	30	18	14	16	8	3	7	26	29	15
1	5	22	2	10	23	*	9	27	20	11
2	25	6	21	19	1	28	4	13	12	17
3	24									

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	15	24	12	5	26	10	21	6	4	16
1	13	19	28	27	2	9	3	29	1	23
2	18	22	11	14	30	20	7	17	25	8
3	*									

p = 37

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	36	26	23	16	7	20	34	17	19	5
1	12	33	6	4	9	29	24	35	*	18
2	8	14	31	27	30	22	2	32	11	10
3	28	15	3	13	21	25	1			

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	18	36	26	32	13	9	12	4	20	14
1	29	28	10	33	21	31	3	7	19	8
2	5	34	25	2	16	35	1	23	30	15
3	24	22	27	11	6	17	*			

$p = 41,\ g = 6,\ p - 1 = 2^3 \cdot 5$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		6	36	11	25	27	39	29	10	19
1	32	28	4	24	21	3	18	26	33	34
2	40	35	5	30	16	14	2	12	31	22
3	9	13	37	17	20	38	23	15	8	7
4	1									

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		40	26	15	12	22	1	39	38	30
1	8	3	27	31	25	37	24	33	16	9
2	34	14	29	36	13	4	17	5	11	7
3	23	28	10	18	19	21	2	32	35	6
4	20									

$p = 43,\ g = 3,\ p - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		3	9	27	38	28	41	37	25	32
1	10	30	4	12	36	22	23	26	35	19
2	14	42	40	34	16	5	15	2	6	18
3	11	33	13	39	31	7	21	20	17	8
4	24	29	1							

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		42	27	1	12	25	28	35	39	2
1	10	30	13	32	20	26	24	38	29	19
2	37	36	15	16	40	8	17	3	5	41
3	11	34	9	31	23	18	14	7	4	33
4	22	6	21							

$p = 47,\ g = 5,\ p - 1 = 2 \cdot 23$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	31	14	23	21	11	8	40
1	12	13	18	43	27	41	17	38	2	10
2	3	15	28	46	42	22	16	33	24	26
3	36	39	7	35	34	29	4	20	6	30
4	9	45	37	44	32	19	1			

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		46	18	20	36	1	38	32	8	40
1	19	7	10	11	4	21	26	16	12	45
2	37	6	25	5	28	2	29	14	22	35
3	39	3	44	27	34	33	30	42	17	31
4	9	15	24	13	43	41	23			

$p = 53,\ g = 2,\ p - 1 = 2^2 \cdot 13$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	11	22	44	35
1	17	34	15	30	7	14	28	3	6	12
2	24	48	43	33	13	26	52	51	49	45
3	37	21	42	31	9	18	36	19	38	23
4	46	39	25	50	47	41	29	5	10	20
5	40	27	1							

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		52	1	17	2	47	18	14	3	34
1	48	6	19	24	15	12	4	10	35	37
2	49	31	7	39	20	42	25	51	16	46
3	13	33	5	23	11	9	36	30	38	41
4	50	45	32	22	8	29	40	44	21	28
5	43	27	26							

p = 41

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	40	39	32	27	17	11	20	23	3	34
1	18	7	22	4	29	12	9	5	19	21
2	*	2	1	28	33	37	15	31	10	36
3	8	25	35	16	14	6	13	24	30	38
4	26									

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	20	22	21	8	13	17	35	11	30	16
1	28	5	15	36	34	26	33	4	10	18
2	6	19	12	7	37	31	40	3	23	14
3	38	27	2	24	9	32	29	25	39	1
4	*									

p = 43

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	42	12	10	5	33	41	21	4	17	31
1	30	34	25	32	7	16	40	3	14	37
2	26	*	6	18	38	28	24	1	35	19
3	13	23	20	22	9	39	15	36	29	2
4	8	11	27							

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	21	27	39	17	7	3	22	14	40	34
1	2	41	1	30	18	36	15	8	23	29
2	32	6	33	31	26	12	20	42	25	38
3	10	9	13	4	11	28	37	19	24	35
4	16	5	*							

p = 47

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	46	38	29	44	21	28	25	10	40	15
1	11	4	45	43	22	24	12	31	20	7
2	36	26	35	*	13	5	16	34	2	14
3	42	9	8	30	33	39	1	6	32	3
4	19	23	17	41	27	37	18			

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	23	36	28	39	11	25	37	19	32	31
1	7	10	16	24	29	9	26	42	46	40
2	18	4	14	41	15	6	21	44	5	2
3	33	17	38	34	27	22	20	45	1	35
4	8	43	30	13	3	12	*			

p = 53

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	52	17	47	34	10	23	19	39	29	36
1	35	9	4	33	3	12	46	2	14	24
2	42	28	8	11	15	51	*	26	43	40
3	38	7	22	5	48	37	30	49	41	20
4	44	50	25	27	21	32	13	18	6	31
5	45	16	1							

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	26	52	17	14	12	33	48	31	22	11
1	4	23	15	46	18	24	51	1	47	6
2	39	44	32	5	19	42	27	43	21	8
3	36	49	45	13	3	10	9	35	30	7
4	29	38	20	28	40	50	16	2	34	37
5	41	25	*							

$p = 59,\ g = 2,\ p - 1 = 2 \cdot 29$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	5	10	20	40
1	21	42	25	50	41	23	46	33	7	14
2	28	56	53	47	35	11	22	44	29	58
3	57	55	51	43	27	54	49	39	19	38
4	17	34	9	18	36	13	26	52	45	31
5	3	6	12	24	48	37	15	30	1	

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		58	1	50	2	6	51	18	3	42
1	7	25	52	45	19	56	4	40	43	38
2	8	10	26	15	53	12	46	34	20	28
3	57	49	5	17	41	24	44	55	39	37
4	9	14	11	33	27	48	16	23	54	36
5	13	32	47	22	35	31	21	30	29	

$p = 61,\ g = 2,\ p - 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	3	6	12	24
1	48	35	9	18	36	11	22	44	27	54
2	47	33	5	10	20	40	19	38	15	30
3	60	59	57	53	45	29	58	55	49	37
4	13	26	52	43	25	50	39	17	34	7
5	14	28	56	51	41	21	42	23	46	31
6	1									

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		60	1	6	2	22	7	49	3	12
1	23	15	8	40	50	28	4	47	13	26
2	24	55	16	57	9	44	41	18	51	35
3	29	59	5	21	48	11	14	39	27	46
4	25	54	56	43	17	34	58	20	10	38
5	45	53	42	33	19	37	52	32	36	31
6	30									

$p = 67,\ g = 2,\ p - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 11$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	61	55	43
1	19	38	9	18	36	5	10	20	40	13
2	26	52	37	7	14	28	56	45	23	46
3	25	50	33	66	65	63	59	51	35	3
4	6	12	24	48	29	58	49	31	62	57
5	47	27	54	41	15	30	60	53	39	11
6	22	44	21	42	17	34	1			

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		66	1	39	2	15	40	23	3	12
1	16	59	41	19	24	54	4	64	13	10
2	17	62	60	28	42	30	20	51	25	44
3	55	47	5	32	65	38	14	22	11	58
4	18	53	63	9	61	27	29	50	43	46
5	31	37	21	57	52	8	26	49	45	36
6	56	7	48	35	6	34	33			

$p = 71,\ g = 7,\ p - 1 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		7	49	59	58	51	2	14	27	47
1	45	31	4	28	54	23	19	62	8	56
2	37	46	38	53	16	41	3	21	5	35
3	32	11	6	42	10	70	64	22	12	13
4	20	69	57	44	24	26	40	67	43	17
5	48	52	9	63	15	34	25	33	18	55
6	30	68	50	66	36	39	60	65	29	61
7	1									

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		70	6	26	12	28	32	1	18	52
1	34	31	38	39	7	54	24	49	58	16
2	40	27	37	15	44	56	45	8	13	68
3	60	11	30	57	55	29	64	20	22	65
4	46	25	33	48	43	10	21	9	50	2
5	62	5	51	23	14	59	19	42	4	3
6	66	69	17	53	36	67	63	47	61	41
7	35									

p = 59

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	58	50	6	42	40	17	51	25	10	14
1	26	33	46	32	11	53	23	41	3	56
2	28	30	35	54	44	52	15	48	57	*
3	29	21	47	27	20	31	13	9	8	37
4	43	24	7	38	55	19	34	22	16	5
5	2	18	45	12	36	39	4	49	1	

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	29	58	50	18	56	49	2	42	38	37
1	8	14	53	36	9	26	48	5	51	45
2	34	31	47	16	41	7	10	33	20	30
3	21	35	13	11	46	22	54	39	43	55
4	4	17	3	40	24	52	12	32	27	57
5	1	6	25	15	23	44	19	28	*	

p = 61

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	60	6	22	12	47	21	2	49	40	44
1	38	14	23	26	39	8	57	34	51	37
2	10	48	7	15	55	54	24	46	4	59
3	*	30	36	19	58	29	31	52	45	27
4	50	18	33	17	41	53	25	13	11	3
5	28	35	32	42	56	16	43	9	20	5
6	1									

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	30	60	6	49	28	59	1	22	15	57
1	20	48	3	47	11	23	55	43	41	33
2	58	5	2	12	26	46	13	39	50	35
3	31	36	52	42	17	51	32	19	10	14
4	8	44	53	56	9	38	27	4	21	7
5	40	18	37	45	25	24	54	16	34	29
6	*									

p = 67

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	66	39	15	12	64	32	34	48	26	61
1	17	58	16	10	22	40	59	62	53	24
2	51	57	11	3	54	44	49	29	42	50
3	20	37	65	*	33	6	56	21	14	2
4	23	19	30	46	55	36	31	5	35	45
5	43	25	8	63	4	47	7	52	18	41
6	28	27	60	9	13	38	1			

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	33	66	39	23	54	47	35	56	52	63
1	13	22	3	64	38	2	12	10	58	41
2	30	37	14	40	19	51	8	61	60	27
3	42	46	5	34	6	48	45	31	65	1
4	15	59	28	50	25	49	43	55	7	26
5	29	20	57	18	24	44	36	21	11	16
6	62	9	17	53	4	32	*			

p = 71

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	70	18	62	66	3	51	26	54	13	50
1	21	30	28	68	59	44	40	53	52	42
2	22	9	65	14	49	33	12	37	32	64
3	57	38	1	48	31	*	67	15	39	7
4	27	35	4	10	56	8	25	61	43	58
5	2	23	34	36	24	29	45	55	16	19
6	11	41	5	47	20	46	69	63	60	17
7	6									

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	35	32	50	4	42	62	70	39	45	21
1	43	60	26	8	23	37	58	69	1	59
2	64	10	20	51	54	46	6	40	12	55
3	11	34	28	25	52	41	53	27	31	38
4	16	61	19	48	15	56	65	63	33	24
5	9	5	18	17	7	57	44	30	49	14
6	68	47	2	67	29	22	3	36	13	66
7	*									

$p = 73,\ g = 5,\ p - 1 = 2^3 \cdot 3^2$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	52	41	59	3	15	2	10
1	50	31	9	45	6	30	4	20	27	62
2	18	17	12	60	8	40	54	51	36	34
3	24	47	16	7	35	29	72	68	48	21
4	32	14	70	58	71	63	23	42	64	28
5	67	43	69	53	46	11	55	56	61	13
6	65	33	19	22	37	39	49	26	57	66
7	38	44	1							

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		72	8	6	16	1	14	33	24	12
1	9	55	22	59	41	7	32	21	20	62
2	17	39	63	46	30	2	67	18	49	35
3	15	11	40	61	29	34	28	64	70	65
4	25	4	47	51	71	13	54	31	38	66
5	10	27	3	53	26	56	57	68	43	5
6	23	58	19	45	48	60	69	50	37	52
7	42	44	36							

$p = 79,\ g = 3,\ p - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 13$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		3	9	27	2	6	18	54	4	12
1	36	29	8	24	72	58	16	48	65	37
2	32	17	51	74	64	34	23	69	49	68
3	46	59	19	57	13	39	38	35	26	78
4	76	70	52	77	73	61	25	75	67	43
5	50	71	55	7	21	63	31	14	42	47
6	62	28	5	15	45	56	10	30	11	33
7	20	60	22	66	40	41	44	53	1	

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		78	4	1	8	62	5	53	12	2
1	66	68	9	34	57	63	16	21	6	32
2	70	54	72	26	13	46	38	3	61	11
3	67	56	20	69	25	37	10	19	36	35
4	74	75	58	49	76	64	30	59	17	28
5	50	22	42	77	7	52	65	33	15	31
6	71	45	60	55	24	18	73	48	29	27
7	41	51	14	44	23	47	40	43	39	

$p = 83,\ g = 2,\ p - 1 = 2 \cdot 41$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	45	7	14
1	28	56	29	58	33	66	49	15	30	60
2	37	74	65	47	11	22	44	5	10	20
3	40	80	77	71	59	35	70	57	31	62
4	41	82	81	79	75	67	51	19	38	76
5	69	55	27	54	25	50	17	34	68	53
6	23	46	9	18	36	72	61	39	78	73
7	63	43	3	6	12	24	48	13	26	52
8	21	42	1							

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		82	1	72	2	27	73	8	3	62
1	28	24	74	77	9	17	4	56	63	47
2	29	80	25	60	75	54	78	52	10	12
3	18	38	5	14	57	35	64	20	48	67
4	30	40	81	71	26	7	61	23	76	16
5	55	46	79	59	53	51	11	37	13	34
6	19	66	39	70	6	22	15	45	58	50
7	36	33	65	69	21	44	49	32	68	43
8	31	42	41							

$p = 89,\ g = 3,\ p - 1 = 2^3 \cdot 11$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		3	9	27	81	65	17	51	64	14
1	42	37	22	66	20	60	2	6	18	54
2	73	41	34	13	39	28	84	74	44	43
3	40	31	4	12	36	19	57	82	68	26
4	78	56	79	59	88	86	80	62	8	24

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		88	16	1	32	70	17	81	48	2
1	86	84	33	23	9	71	64	6	18	35
2	14	82	12	57	49	52	39	3	25	59
3	87	31	80	85	22	63	34	11	51	24
4	30	21	10	29	28	72	73	54	65	74

p = 73

I′

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	72	14	67	53	47	23	16	32	6	55
1	27	40	9	54	33	11	1	39	49	45
2	62	20	59	58	12	4	56	3	64	34
3	2	38	21	24	28	15	*	52	66	63
4	61	7	44	5	36	48	30	51	60	35
5	37	71	42	26	31	22	57	68	19	41
6	69	29	17	46	70	25	10	18	43	50
7	65	13	8							

I″

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	36	16	30	27	25	43	8	41	72	12
1	66	15	24	71	1	35	6	62	67	58
2	21	32	55	5	33	65	53	10	34	61
3	46	54	7	14	29	49	44	50	31	17
4	11	59	52	68	42	19	63	4	45	18
5	69	47	37	3	13	9	26	56	23	22
6	48	40	20	39	28	70	38	2	57	60
7	64	51	*							

p = 79

I′

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	78	8	66	61	1	53	32	52	62	34
1	19	67	2	46	44	31	21	28	73	36
2	69	6	42	47	18	37	13	41	50	27
3	59	71	70	15	57	74	35	10	3	*
4	43	51	77	39	23	60	38	40	29	76
5	22	14	65	12	72	24	20	63	49	17
6	55	11	5	16	30	33	68	56	9	25
7	54	45	26	48	75	58	64	7	4	

I″

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	39	4	12	38	78	62	21	77	1	68
1	37	61	53	26	51	33	63	59	24	10
2	56	16	50	44	55	69	72	29	17	48
3	64	15	6	65	9	36	19	25	46	43
4	47	27	22	40	14	71	13	23	73	58
5	28	41	7	5	70	60	67	34	75	30
6	45	3	8	57	76	52	2	11	66	20
7	32	31	54	18	35	74	49	42	*	

p = 83

I′

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	82	72	27	62	56	14	22	61	3	17
1	12	37	18	34	57	45	55	4	38	66
2	48	44	15	76	74	60	7	73	24	80
3	40	42	68	65	19	64	33	13	5	70
4	81	*	41	31	49	58	79	29	67	32
5	36	11	10	51	78	46	63	35	50	53
6	75	23	28	47	20	69	39	30	43	21
7	6	26	2	8	77	54	16	9	52	59
8	25	71	1							

I″

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	41	82	72	8	17	38	70	26	73	77
1	52	51	10	37	5	22	76	9	12	34
2	64	69	6	61	28	80	71	2	62	47
3	67	43	49	36	13	57	50	11	18	66
4	30	42	31	68	21	15	55	63	20	44
5	58	53	78	59	75	16	4	14	45	79
6	25	7	3	56	35	33	19	48	32	65
7	39	81	1	27	24	60	23	74	54	46
8	29	40	*							

p = 89

I′

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	88	32	86	25	37	13	18	55	5	71
1	29	51	57	56	82	69	1	81	35	66
2	27	10	63	9	30	59	76	53	72	28
3	21	80	70	23	11	14	75	61	58	3
4	42	36	46	15	*	60	4	83	2	52

I″

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	44	16	48	39	46	8	64	68	83	23
1	22	34	82	5	35	43	88	70	6	78
2	50	30	85	33	51	3	61	20	29	10
3	24	87	1	84	63	18	41	4	56	52
4	77	66	40	75	60	76	42	69	81	57

p = 89 (Fortsetzung)

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	72	38	25	75	47	52	67	23	69	29	5	68	7	55	78	19	66	41	36	75	43
6	87	83	71	35	16	48	55	76	50	61	6	15	69	47	83	8	5	13	56	38	58
7	5	15	45	46	49	58	85	77	53	70	7	79	62	50	20	27	53	67	77	40	42
8	32	7	21	63	11	33	10	30	1		8	46	4	37	61	26	76	45	60	44	

p = 97, g = 5, p − 1 = $2^5 \cdot 3$

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	28	43	21	8	40	6	30	0		96	34	70	68	1	8	31	6	44
1	53	71	64	29	48	46	36	83	27	38	1	35	86	42	25	65	71	40	89	78	81
2	93	77	94	82	22	13	65	34	73	74	2	69	5	24	77	76	2	59	18	3	13
3	79	7	35	78	2	10	50	56	86	42	3	9	46	74	60	27	32	16	91	19	95
4	16	80	12	60	9	45	31	58	96	92	4	7	85	39	4	58	45	15	84	14	62
5	72	69	54	76	89	57	91	67	44	26	5	36	63	93	10	52	87	37	55	47	67
6	33	68	49	51	61	14	70	59	4	20	6	43	64	80	75	12	26	94	57	61	51
7	3	15	75	84	32	63	24	23	18	90	7	66	11	50	28	29	72	53	21	33	30
8	62	19	95	87	47	41	11	55	81	17	8	41	88	23	17	73	90	38	83	92	54
9	85	37	88	52	66	39	1				9	79	56	49	20	22	82	48			

p = 101, g = 2 p − 1 = $2^2 \cdot 5^2$

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	27	54	7	0		100	1	69	2	24	70	9	3	38
1	14	28	56	11	22	44	88	75	49	98	1	25	13	71	66	10	93	4	30	39	96
2	95	89	77	53	5	10	20	40	80	59	2	26	78	14	86	72	48	67	7	11	91
3	17	34	68	35	70	39	78	55	9	18	3	94	84	5	82	31	33	40	56	97	35
4	36	72	43	86	71	41	82	63	25	50	4	27	45	79	42	15	62	87	58	73	18
5	100	99	97	93	85	69	37	74	47	94	5	49	99	68	23	8	37	12	65	92	29
6	87	73	45	90	79	57	13	26	52	3	6	95	77	85	47	6	90	83	81	32	55
7	6	12	24	48	96	91	81	61	21	42	7	34	44	41	61	57	17	98	22	36	64
8	84	67	33	66	31	62	23	46	92	83	8	28	76	46	89	80	54	43	60	16	21
9	65	29	58	15	30	60	19	38	76	51	9	63	75	88	53	59	20	74	52	19	51
10	1										10	50									

p = 103, g = 5, p − 1 = 2 · 3 · 17

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	22	7	35	72	51	49	39	0		102	44	39	88	1	83	4	30	78
1	92	48	34	67	26	27	32	57	79	86	1	45	61	25	72	48	40	74	70	20	80
2	18	90	38	87	23	12	60	94	58	84	2	89	43	3	24	69	2	14	15	92	86
3	8	40	97	73	56	74	61	99	83	3	3	84	57	16	100	12	5	64	93	22	9
4	15	75	66	21	2	10	50	44	14	70	4	31	50	87	77	47	79	68	85	11	8

p = 89

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	20	24	39	67	65	78	38	49	79	87
6	44	26	50	34	6	74	41	77	7	47
7	17	64	73	54	68	43	45	40	19	62
8	85	48	12	8	33	22	84	31	16	

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	62	11	49	27	73	7	13	12	38	25
6	45	37	79	22	71	54	19	53	74	15
7	32	9	28	72	65	36	26	67	55	58
8	31	17	14	47	86	80	2	59	*	

p = 97

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	96	8	59	13	58	24	44	85	31	46
1	52	50	26	9	62	84	91	73	3	95
2	22	33	82	17	77	65	94	32	29	72
3	41	6	16	30	70	86	63	55	83	4
4	89	88	25	64	35	15	74	67	*	20
5	28	66	87	21	79	47	49	61	45	18
6	27	51	36	93	80	71	11	43	1	5
7	68	40	53	90	60	12	2	76	81	56
8	75	69	48	92	14	39	42	37	23	78
9	38	19	54	10	57	7	34			

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	48	68	76	18	39	69	31	95	1	13
1	93	66	75	3	84	45	32	23	59	91
2	49	53	20	88	5	42	12	60	50	28
3	33	8	27	21	96	44	62	87	90	85
4	71	30	86	67	6	58	9	55	82	56
5	11	61	10	72	92	37	79	94	4	2
6	74	57	14	36	43	25	51	47	70	81
7	34	65	29	17	46	80	77	24	89	54
8	64	78	22	38	15	7	35	52	41	40
9	73	16	83	63	26	19	*			

p = 101

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	69	24	38	30	82	90	11	37	3
1	93	91	65	71	86	62	21	98	49	51
2	74	63	36	8	70	13	78	45	76	95
3	39	33	55	40	44	27	64	12	25	96
4	56	61	15	60	41	79	89	6	67	99
5	*	50	19	59	43	34	97	17	73	20
6	16	57	87	75	28	92	10	7	23	2
7	9	66	48	18	52	88	46	85	14	42
8	54	32	31	81	5	47	72	58	53	80
9	83	94	29	4	84	77	26	35	22	68
10	1									

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	50	100	69	9	93	84	47	67	23	70
1	66	7	37	25	78	42	60	57	73	52
2	59	16	98	68	2	38	96	35	64	92
3	4	82	81	31	55	97	22	8	3	30
4	33	44	79	54	34	27	76	85	72	18
5	51	19	74	88	80	32	40	61	87	53
6	43	41	15	21	36	12	71	48	99	1
7	24	13	86	58	20	63	28	95	26	45
8	89	83	5	90	94	77	14	62	75	46
9	6	11	65	10	91	29	39	56	17	49
10	*									

p = 103

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	102	83	14	24	30	64	33	58	46	31
1	96	8	5	56	15	92	100	28	75	23
2	80	76	9	91	69	72	36	81	98	71
3	78	50	52	35	17	41	101	90	29	88
4	74	66	13	3	39	61	7	79	40	67

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	51	88	69	43	83	12	67	46	11	22
1	76	85	100	42	2	14	57	34	53	71
2	70	99	93	19	3	61	98	96	17	38
3	4	9	55	6	62	33	26	52	94	44
4	48	35	73	89	102	78	8	77	72	63

p = 103 (Fortsetzung)

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	41	102	98	78	81	96	68	31	52	54	5	46	7	58	97	59	62	34	17	28	98
6	64	11	55	69	36	77	76	71	46	24	6	26	36	101	82	60	73	42	13	56	63
7	17	85	13	65	16	80	91	43	9	45	7	49	67	6	33	35	41	66	65	53	18
8	19	95	63	6	30	47	29	42	4	20	8	75	54	94	38	29	71	19	23	91	99
9	100	88	28	37	82	101	93	53	59	89	9	21	76	10	96	27	81	55	32	52	37
10	33	62	1								10	90	95	51							

p = 107, g = 2, p − 1 = 2 · 53

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	21	42	84	0		106	1	70	2	47	71	43	3	34
1	61	15	30	60	13	26	52	104	101	95	1	48	22	72	14	44	11	4	29	35	78
2	83	59	11	22	44	88	69	31	62	17	2	49	7	23	62	73	94	15	104	45	32
3	34	68	29	58	9	18	36	72	37	74	3	12	27	5	92	30	90	36	38	79	84
4	41	82	57	7	14	28	56	5	10	20	4	50	40	8	59	24	81	63	66	74	86
5	40	80	53	106	105	103	99	91	75	43	5	95	99	16	52	105	69	46	42	33	21
6	86	65	23	46	92	77	47	94	81	55	6	13	10	28	77	6	61	93	103	31	26
7	3	6	12	24	48	96	85	63	19	38	7	91	89	37	83	39	58	80	65	85	98
8	76	45	90	73	39	78	49	98	89	71	8	51	68	41	20	9	76	60	102	25	88
9	35	70	33	66	25	50	100	93	79	51	9	82	57	64	97	67	19	75	101	87	56
10	102	99	87	67	27	54	1				10	96	18	100	55	17	54	53			

p = 109, g = 6, p − 1 = $2^2 \cdot 3^3$

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		6	36	107	97	37	4	24	35	101	0		108	57	52	6	76	1	40	63	104
1	61	39	16	96	31	77	26	47	64	57	1	25	83	58	67	97	20	12	93	53	75
2	15	90	104	79	38	10	60	33	89	98	2	82	92	32	33	7	44	16	48	46	34
3	43	40	22	23	29	65	63	51	88	92	3	77	14	69	27	42	8	2	5	24	11
4	7	42	34	95	25	41	28	59	27	53	4	31	45	41	30	89	72	90	17	64	80
5	100	55	3	18	108	103	73	2	12	72	5	101	37	73	49	105	51	103	19	91	47
6	105	85	74	8	48	70	93	13	78	32	6	26	10	71	36	18	35	84	95	99	85
7	83	62	45	52	94	19	5	30	71	99	7	65	78	59	56	62	96	81	15	68	23
8	49	76	20	11	66	69	87	86	80	44	8	88	100	102	70	98	61	87	86	38	28
9	46	58	21	17	102	67	75	14	84	68	9	21	107	39	66	74	43	13	4	29	79
10	81	50	82	56	9	54	106	91	1		10	50	9	94	55	22	60	106	3	54	

p = 113, g = 3, p − 1 = $2^4 \cdot 7$

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		3	9	27	81	17	51	40	7	21	0		112	12	1	24	83	13	8	36	2
1	63	76	2	6	18	54	49	34	102	80	1	95	74	25	22	20	84	48	5	14	99
2	14	42	13	39	4	12	36	108	98	68	2	107	9	86	41	37	54	34	3	32	89
3	91	47	28	84	26	78	8	24	72	103	3	96	50	60	75	17	91	26	67	111	23
4	83	23	69	94	56	55	52	43	16	48	4	7	94	21	47	98	85	53	31	49	16

p = 103

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	87	*	37	18	94	32	63	16	97	62
6	73	25	34	49	93	53	65	6	85	2
7	20	19	48	42	70	54	10	47	45	68
8	89	55	60	4	57	11	84	77	1	43
9	95	99	86	22	38	51	27	59	26	21
10	12	82	44							

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	31	95	32	65	75	81	13	84	7	97
6	82	45	59	56	5	66	41	49	79	24
7	74	29	25	60	40	18	21	87	30	47
8	20	27	101	1	86	68	92	50	39	80
9	37	23	15	64	54	90	10	58	28	91
10	16	36	*							

p = 107

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	106	70	47	34	29	92	61	23	59	76
1	28	4	27	10	44	104	52	54	100	75
2	9	13	72	62	81	88	91	5	77	35
3	90	26	12	21	48	78	38	83	79	58
4	8	20	33	3	11	82	42	71	22	7
5	40	68	103	*	58	87	96	64	80	24
6	102	93	73	85	97	85	74	29	41	46
7	2	43	14	94	86	101	60	81	48	84
8	65	63	57	39	50	98	95	56	82	37
9	36	89	30	105	15	99	18	67	31	16
10	55	87	25	31	45	69	1			

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	53	106	70	43	11	27	77	49	40	20
1	13	44	32	21	72	94	99	55	96	67
2	41	33	48	7	59	102	31	12	10	4
3	92	103	45	42	3	29	90	89	36	83
4	50	68	46	71	14	104	69	2	34	78
5	84	98	16	54	17	100	87	82	39	8
6	76	6	23	81	57	80	63	97	51	105
7	1	47	22	62	66	19	9	28	35	38
8	58	24	88	37	79	65	74	101	25	91
9	30	26	5	61	73	86	56	64	85	95
10	18	75	60	93	15	52	*			

p = 109

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	108	40	5	54	29	24	76	44	2	94
1	71	31	93	4	69	68	48	64	35	91
2	12	107	60	88	11	83	10	42	21	79
3	89	45	38	7	77	84	18	73	28	66
4	63	30	8	13	16	41	34	26	46	105
5	9	103	6	75	*	22	62	52	67	56
6	106	87	96	104	80	78	74	97	23	27
7	98	36	90	49	43	82	1	14	59	50
8	101	15	92	58	95	65	38	86	100	72
9	17	47	32	53	55	99	81	20	61	85
10	108	37	70	19	25	51	3	39	57	

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	54	76	8	106	13	2	52	33	42	50
1	26	24	20	43	77	81	44	90	36	103
2	97	28	55	68	5	104	47	69	38	4
3	41	11	92	32	46	18	71	101	86	107
4	1	45	27	74	7	31	48	91	16	73
5	79	105	57	93	3	94	59	108	83	78
6	22	98	56	40	17	85	39	58	15	14
7	102	10	89	37	66	53	6	34	65	29
8	64	96	75	25	35	99	87	61	23	30
9	72	19	82	12	9	84	62	67	70	95
10	88	80	100	51	63	49	60	21	*	

p = 113

I′										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	112	24	95	32	106	14	46	94	36	86
1	72	82	1	8	99	45	66	91	39	4
2	84	47	20	7	83	22	67	80	76	42
3	65	49	89	88	3	73	2	54	63	58
4	33	37	103	70	100	44	52	98	5	16

I″										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	56	12	36	34	19	48	66	23	13	107
1	62	55	112	83	5	52	49	75	81	73
2	22	94	25	111	1	74	91	69	104	109
3	97	53	3	40	54	82	8	41	77	18
4	106	86	29	51	45	15	6	21	84	31

p = 113 (Fortsetzung)

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	31	93	53	46	25	75	112	110	104	86
6	32	96	62	73	106	92	50	37	111	107
7	95	59	64	79	11	33	99	71	100	74
8	109	101	77	5	15	45	22	66	85	29
9	87	35	105	89	41	10	30	90	44	19
10	57	58	61	70	97	65	82	20	60	67
11	88	38	1							

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	66	6	46	52	15	45	44	100	101	71
6	108	102	62	10	72	105	87	109	29	42
7	103	77	38	63	79	55	11	82	35	73
8	19	4	106	40	33	88	59	90	110	93
9	97	30	65	51	43	70	61	104	28	76
10	78	81	18	39	58	92	64	69	27	80
11	57	68	56							

p = 127, g = 3, p − 1 = 2 · 3² · 7

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		3	9	27	81	116	94	28	84	125
1	121	109	73	92	22	66	71	86	4	12
2	36	108	70	83	122	112	82	119	103	55
3	38	114	88	10	30	90	16	48	17	51
4	26	78	107	67	74	95	31	93	25	75
5	98	40	120	106	64	65	68	77	104	58
6	47	14	42	126	124	118	100	46	11	33
7	99	43	2	6	18	54	35	105	61	56
8	41	123	115	91	19	57	44	5	15	45
9	8	24	72	89	13	39	117	97	37	111
10	79	110	76	101	49	20	60	53	32	96
11	34	102	52	29	87	7	21	63	62	59
12	50	23	69	80	113	85	1			

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		126	72	1	18	87	73	115	90	2
1	33	68	19	94	61	88	36	38	74	84
2	105	116	14	121	91	48	40	3	7	113
3	34	46	108	69	110	76	20	98	30	95
4	51	80	62	71	86	89	67	60	37	104
5	120	39	112	107	75	29	79	85	59	119
6	106	78	118	117	54	55	15	43	56	122
7	22	16	92	12	44	49	102	57	41	100
8	123	4	26	23	8	125	17	114	32	93
9	35	83	13	47	6	45	109	97	50	70
10	66	103	111	28	58	77	53	42	21	11
11	101	99	25	124	31	82	5	96	65	27
12	52	10	24	81	64	9	63			

p = 131, g = 2, p − 1 = 2 · 5 · 13

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	128	125	119
1	107	83	35	70	9	18	36	72	13	26
2	52	104	77	23	46	92	53	106	81	31
3	62	124	117	103	75	19	38	76	21	42
4	84	37	74	17	34	68	5	10	20	40
5	80	29	58	116	101	71	11	22	44	88
6	45	90	49	98	65	130	129	127	123	115
7	99	67	3	6	12	24	48	96	61	122
8	113	95	59	118	105	79	27	54	108	85
9	39	78	25	50	100	69	7	14	28	56
10	112	93	55	110	89	47	94	57	114	97
11	63	126	121	111	91	51	102	73	15	30
12	60	120	109	87	43	86	41	82	33	66
13	1									

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		130	1	72	2	46	73	96	3	14
1	47	56	74	18	97	118	4	43	15	35
2	48	38	57	23	75	92	19	86	98	51
3	119	29	5	128	44	12	16	41	36	90
4	49	126	39	124	58	60	24	105	76	62
5	93	115	20	26	87	102	99	107	52	82
6	120	78	30	110	6	64	129	71	45	95
7	13	55	17	117	42	34	37	22	91	85
8	50	28	127	11	40	89	125	123	59	104
9	61	114	25	101	106	81	77	109	63	70
10	94	54	116	33	21	84	27	10	88	122
11	103	113	100	80	108	69	53	32	83	9
12	121	112	79	68	31	8	111	67	7	66
13	65									

p = 113

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	60	43	15	31	34	11	*	68	92	90
6	75	104	10	79	69	51	6	111	56	27
7	61	108	105	19	25	17	78	38	81	55
8	57	18	35	13	48	53	41	109	59	96
9	110	26	64	97	21	74	50	30	85	107
10	101	71	62	77	28	87	40	9	102	29
11	93	23	12							

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	96	65	46	85	37	79	68	80	39	88
6	50	70	102	38	92	30	16	26	57	64
7	43	101	10	35	95	60	28	103	76	63
8	27	78	11	24	20	98	9	105	33	32
9	59	17	58	110	7	2	89	93	47	14
10	44	100	108	42	61	72	4	99	71	87
11	90	67	*							

p = 127

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	126	18	33	7	26	96	45	113	125	63
1	24	101	44	47	121	43	92	114	87	94
2	98	11	16	8	81	124	23	52	58	79
3	95	82	93	68	46	83	38	104	74	112
4	3	100	21	56	49	109	108	6	40	102
5	70	80	10	42	55	15	122	41	77	119
6	37	88	71	*	9	27	103	60	19	110
7	66	86	1	115	84	29	20	53	118	85
8	62	64	5	13	105	59	89	73	36	67
9	2	48	12	35	61	51	65	50	30	25
10	123	99	57	111	120	116	78	75	69	97
11	76	28	107	34	32	90	14	54	117	106
12	39	91	22	4	31	17	72			

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	63	72	90	40	123	82	47	3	23	64
1	52	21	92	83	116	55	22	125	1	68
2	76	42	122	26	10	99	4	65	111	75
3	98	124	114	2	113	93	88	60	36	120
4	48	57	53	15	12	6	34	13	91	44
5	97	95	27	77	117	54	43	102	28	85
6	67	94	80	9	81	96	70	89	33	108
7	50	62	126	87	38	107	110	58	106	29
8	51	24	31	35	74	79	71	18	61	86
9	115	121	16	32	19	30	5	109	20	101
10	41	11	49	66	37	84	119	112	46	45
11	69	103	39	7	17	73	105	118	78	59
12	104	14	56	100	25	8	*			

p = 131

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	130	72	46	14	43	128	64	66	111	121
1	88	40	16	55	47	35	41	117	97	86
2	26	84	91	75	105	101	87	10	127	5
3	110	8	83	21	37	48	90	22	57	124
4	89	36	34	15	12	95	73	56	38	126
5	28	119	82	32	116	17	74	23	60	104
6	24	114	93	70	129	*	65	7	31	53
7	94	45	2	96	18	92	62	109	30	68
8	108	77	120	9	27	50	98	102	122	125
9	49	85	19	115	54	13	3	118	51	107
10	80	106	99	113	61	76	81	52	69	63
11	6	67	79	100	25	20	33	42	4	29
12	78	112	103	59	58	123	39	11	44	71
13	1									

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	65	130	72	96	118	29	110	67	31	83
1	27	127	44	95	3	43	12	55	74	92
2	115	33	37	57	60	114	20	84	50	119
3	78	68	53	116	42	15	41	34	48	126
4	11	16	117	4	128	71	2	14	35	90
5	85	98	107	69	94	13	47	38	124	123
6	58	104	76	109	6	66	7	111	79	108
7	63	129	1	46	56	23	105	81	120	112
8	100	106	52	32	21	91	19	26	10	40
9	36	22	75	62	70	45	73	18	86	102
10	113	25	87	122	59	24	101	99	80	77
11	30	8	121	103	61	93	54	17	97	51
12	82	9	88	125	39	89	49	28	5	64
13	*									

$p = 137,\ g = 3,\ p - 1 = 2^3 \cdot 17$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		3	9	27	81	106	44	132	122	92
1	2	6	18	54	25	75	88	127	107	47
2	4	12	36	108	50	13	39	117	77	94
3	8	24	72	79	100	26	78	97	17	51
4	16	48	7	21	63	52	19	57	34	102
5	32	96	14	42	126	104	38	114	68	67
6	64	55	28	84	115	71	76	91	136	134
7	128	110	56	31	93	5	15	45	135	131
8	119	83	112	62	49	10	30	90	133	125
9	101	29	87	124	98	20	60	43	129	113
10	65	58	37	111	59	40	120	86	121	89
11	130	116	74	85	118	80	103	35	105	41
12	123	95	11	33	99	23	69	70	73	82
13	109	53	22	66	61	46	1			

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		136	10	1	20	75	11	42	30	2
1	85	122	21	25	52	76	40	38	12	46
2	95	43	132	125	31	14	35	3	62	91
3	86	73	50	123	48	117	22	102	56	26
4	105	119	53	97	6	77	135	19	41	84
5	24	39	45	131	13	61	72	47	101	104
6	96	134	83	44	60	100	133	59	58	126
7	127	65	32	128	112	15	66	28	36	33
8	115	4	129	81	63	113	107	92	16	109
9	87	67	9	74	29	121	51	37	94	124
10	34	90	49	116	55	118	5	18	23	130
11	71	103	82	99	57	64	111	27	114	80
12	106	108	8	120	93	89	54	17	70	98
13	110	79	7	88	69	78	68			

$p = 139,\ g = 2,\ p - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 23$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	128	117	95
1	51	102	65	130	121	103	67	134	129	119
2	99	59	118	97	55	110	81	23	46	92
3	45	90	41	82	25	50	100	61	122	105
4	71	3	6	12	24	48	96	53	106	73
5	7	14	28	56	112	85	31	62	124	109
6	79	19	38	76	13	26	52	104	69	138
7	137	135	131	123	107	75	11	22	44	88
8	37	74	9	18	36	72	5	10	20	40
9	80	21	42	84	29	58	116	93	47	94
10	49	98	57	114	89	39	78	17	34	68
11	136	133	127	115	91	43	86	33	66	132
12	125	111	83	27	54	108	77	15	30	60
13	120	101	63	126	113	87	35	70	1	

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		138	1	41	2	86	42	50	3	82
1	87	76	43	64	51	127	4	107	83	61
2	88	91	77	27	44	34	65	123	52	94
3	128	56	5	117	108	136	84	80	62	105
4	89	32	92	115	78	30	28	98	45	100
5	35	10	66	47	124	24	53	102	95	21
6	129	37	57	132	6	12	118	16	109	68
7	137	40	85	49	81	75	63	126	106	60
8	90	26	33	122	93	55	116	135	79	104
9	31	114	29	97	99	9	46	23	101	20
10	36	131	11	15	67	39	48	74	125	59
11	25	121	54	134	103	113	96	8	22	19
12	130	14	38	73	58	120	133	112	7	18
13	13	72	119	111	17	71	110	70	69	

$p = 149,\ g = 2,\ p - 1 = 2^2 \cdot 37$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	128	107	65
1	130	111	73	146	143	137	125	101	53	106
2	63	126	103	57	114	79	9	18	36	72
3	144	139	129	109	69	138	127	105	61	122
4	95	41	82	15	30	60	120	91	33	66
5	132	115	81	13	26	52	104	59	118	87
6	25	50	100	51	102	55	110	71	142	135
7	121	93	37	74	148	147	145	141	133	117
8	85	21	42	84	19	38	76	3	6	12
9	24	48	96	43	86	23	46	92	35	70

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		148	1	87	2	104	88	142	3	26
1	105	109	89	53	143	43	4	124	27	84
2	106	81	110	95	90	60	54	113	144	120
3	44	132	5	48	125	98	28	72	85	140
4	107	41	82	93	111	130	96	138	91	136
5	61	63	55	18	114	65	145	23	121	57
6	45	38	133	20	6	9	49	116	126	34
7	99	67	29	12	73	147	86	103	141	25
8	108	52	42	123	83	80	94	59	112	119
9	131	47	97	71	139	40	92	129	137	135

p = 137

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	136	20	85	62	129	18	77	88	120	74
1	1	42	46	61	35	66	109	70	23	41
2	75	25	102	130	39	52	105	114	36	121
3	2	14	128	115	90	3	33	94	12	45
4	38	84	30	132	60	131	95	101	117	116
5	123	37	76	97	17	118	26	64	126	58
6	100	72	91	113	111	32	28	9	*	78
7	98	103	47	50	29	11	40	135	68	7
8	106	63	99	44	24	122	73	67	69	54
9	49	86	16	89	124	43	134	6	110	57
10	133	104	56	82	96	119	108	92	8	87
11	79	27	15	107	80	4	55	22	5	53
12	93	51	21	48	34	31	127	65	112	81
13	71	13	125	59	83	19	10			

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	68	10	30	35	115	118	97	79	108	67
1	136	75	38	131	31	112	92	54	5	135
2	1	122	117	18	84	21	56	111	66	74
3	42	125	65	36	124	14	28	51	40	24
4	76	19	11	95	83	39	12	72	123	90
5	73	121	25	119	89	116	102	99	59	133
6	44	13	3	81	57	127	15	87	78	88
7	17	130	61	86	9	20	52	6	69	110
8	114	129	103	134	41	2	91	109	7	93
9	34	62	107	120	37	46	104	53	70	82
10	60	47	22	71	101	26	80	113	106	16
11	98	64	128	63	27	33	49	48	55	105
12	8	29	85	50	94	132	58	126	32	4
13	23	45	43	100	96	77	*			

p = 139

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	138	41	86	82	107	117	12	18	22	46
1	66	15	118	72	38	67	109	71	13	130
2	36	129	19	101	53	121	33	44	98	97
3	28	114	92	122	65	10	131	57	73	48
4	85	2	50	64	34	100	23	124	74	81
5	3	127	94	102	134	116	5	132	120	25
6	90	88	105	126	51	123	47	39	137	*
7	69	110	119	58	125	63	43	27	30	104
8	62	75	87	61	80	49	42	76	91	32
9	26	77	115	55	128	21	8	99	45	9
10	35	20	95	113	31	89	60	83	136	68
11	70	17	7	96	29	78	135	108	16	111
12	133	54	93	52	24	59	106	4	56	37
13	14	11	6	112	103	79	84	40	1	

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	69	138	41	50	127	56	132	112	96	99
1	35	131	6	18	130	11	118	111	7	22
2	101	95	8	46	124	59	90	77	30	114
3	78	104	89	26	44	100	20	129	14	67
4	137	1	86	76	27	98	9	66	39	85
5	42	64	123	24	121	93	128	37	73	125
6	106	83	80	75	43	34	10	15	109	70
7	110	17	13	38	48	81	87	91	115	135
8	84	49	3	107	136	40	2	82	61	105
9	60	88	32	122	52	102	113	29	28	97
10	45	23	53	134	79	62	126	4	117	16
11	71	119	133	103	31	92	55	5	12	72
12	58	25	33	65	47	74	63	51	94	21
13	19	36	57	120	54	116	108	68	*	

p = 149

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	148	87	104	26	124	48	9	32	115	49
1	101	146	73	75	30	35	21	64	114	8
2	6	36	56	121	51	108	105	84	72	12
3	76	100	10	66	99	31	7	19	133	128
4	92	82	123	4	132	38	70	97	125	116
5	78	122	42	143	113	18	37	45	118	112
6	54	63	17	55	22	145	11	29	14	127
7	39	139	85	147	*	74	13	68	117	58
8	94	110	93	80	106	140	103	2	142	53
9	60	136	129	111	59	90	138	71	28	67

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	74	148	87	142	43	132	20	36	19	6
1	32	66	29	76	68	127	134	62	55	37
2	133	16	64	145	102	141	3	124	98	67
3	14	35	7	115	126	15	21	56	45	70
4	139	107	52	143	120	57	118	131	5	9
5	101	24	108	89	60	63	22	121	79	94
6	90	136	135	61	17	114	33	99	77	117
7	46	97	28	12	75	13	30	100	50	122
8	83	106	41	123	27	72	147	1	104	109
9	95	138	40	82	80	110	130	47	125	34

p = 149 (Fortsetzung)

	N										I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	140	131	113	77	5	10	20	40	80	11	10	62	17	64	22	56	37	19	8	115	33
11	22	44	88	27	54	108	67	134	119	89	11	66	11	146	102	24	51	122	79	58	118
12	29	58	116	83	17	34	68	136	123	97	12	46	70	39	128	134	16	21	36	7	32
13	45	90	31	62	124	99	49	98	47	94	13	10	101	50	78	117	69	127	15	35	31
14	39	78	7	14	28	56	112	75	1		14	100	77	68	14	30	76	13	75	74	

p = 151, g = 6, p − 1 = 2 · 3 · 5²

	N										I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		6	36	65	88	75	148	133	43	107	0		150	70	81	140	112	1	67	60	12
1	38	77	9	54	22	132	37	71	124	140	1	32	94	71	41	137	43	130	58	82	90
2	85	57	40	89	81	33	47	131	31	35	2	102	148	14	115	141	74	111	93	57	114
3	59	52	10	60	58	46	125	146	121	122	3	113	28	50	25	128	29	2	16	10	122
4	128	13	78	15	90	87	69	112	68	106	4	22	51	68	8	84	124	35	26	61	134
5	32	41	95	117	98	135	55	28	17	102	5	144	139	31	129	13	56	127	21	34	30
6	8	48	137	67	100	147	127	7	42	101	6	33	119	98	79	120	3	95	63	48	46
7	2	12	72	130	25	150	145	115	86	63	7	99	17	72	117	86	5	80	11	42	147
8	76	3	18	108	44	113	74	142	97	129	8	92	24	121	123	138	20	78	45	4	23
9	19	114	80	27	11	66	94	111	62	70	9	44	108	105	109	96	52	131	88	54	106
10	118	104	20	120	116	92	99	141	91	93	10	64	69	59	136	101	110	49	9	83	143
11	105	26	5	30	29	23	138	73	136	61	11	126	97	47	85	91	77	104	53	100	125
12	64	82	39	83	45	119	110	56	34	53	12	103	38	39	132	18	36	149	66	40	89
13	16	96	123	134	49	143	103	14	84	51	13	73	27	15	7	133	55	118	62	116	146
14	4	24	144	109	50	149	139	79	21	126	14	19	107	87	135	142	76	37	65	6	145
15	1										15	75									

p = 157, g = 5, p − 1 = 2² · 3 · 13

	N										I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	125	154	142	82	96	9	45	0		156	141	82	126	1	67	147	111	8
1	68	26	130	22	110	79	81	91	141	77	1	142	28	52	26	132	83	96	40	149	124
2	71	41	48	83	101	34	13	65	11	55	2	127	73	13	135	37	2	11	90	117	129
3	118	119	124	149	117	114	99	24	120	129	3	68	62	81	110	25	148	134	116	109	108
4	17	85	111	84	106	59	138	62	153	137	4	112	21	58	113	154	9	120	92	22	138
5	57	128	12	60	143	87	121	134	42	53	5	143	122	152	59	75	29	102	50	114	45
6	108	69	31	155	147	107	64	6	30	150	6	53	85	47	155	66	27	95	72	10	61
7	122	139	67	21	105	54	113	94	156	152	7	133	20	119	121	101	84	94	19	93	15
8	132	32	3	15	75	61	148	112	89	131	8	97	16	6	23	43	41	98	55	139	88
9	27	135	47	78	76	66	16	80	86	116	9	150	17	105	144	77	125	7	131	123	36
10	109	74	56	123	144	92	146	102	39	38	10	128	24	107	153	137	74	44	65	60	100
11	33	8	40	43	58	133	37	28	140	72	11	14	42	87	76	35	136	99	34	30	31
12	46	73	51	98	19	95	4	20	100	29	12	38	56	70	103	32	3	140	146	51	39
13	145	97	14	70	36	23	115	104	49	88	13	12	89	80	115	57	91	151	49	46	71
14	126	2	10	50	93	151	127	7	35	18	14	118	18	5	54	104	130	106	64	86	33
15	90	136	52	103	44	63	1				15	69	145	79	48	4	63	78			

p = 149

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	77	50	24	141	88	109	81	41	52	89
11	95	130	119	144	65	33	126	69	46	131
12	44	57	79	83	27	98	34	15	134	137
13	96	47	5	20	16	62	61	135	91	40
14	107	25	3	43	120	23	102	86	1	

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	31	10	146	86	2	26	84	140	25	105
11	81	93	59	54	18	8	49	78	58	112
12	144	23	51	42	4	48	116	69	39	92
13	111	119	44	38	128	137	91	129	96	71
14	85	103	88	53	113	65	11	73	*	

p = 151

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	150	67	16	95	23	80	145	133	84	83
1	122	42	32	56	115	7	10	72	36	107
2	78	34	51	44	121	128	61	15	50	2
3	33	129	94	119	30	26	149	65	39	132
4	89	137	147	130	108	4	99	85	46	9
5	25	68	131	100	106	118	127	114	82	136
6	12	134	116	48	69	6	40	60	8	59
7	81	41	117	27	111	*	37	104	45	120
8	11	140	90	143	124	91	5	135	54	73
9	102	77	24	57	71	63	52	47	79	17
10	125	110	148	38	53	109	64	87	105	96
11	49	93	1	28	113	141	146	86	62	98
12	3	123	22	138	35	103	97	21	29	13
13	58	88	18	55	144	142	101	43	20	31
14	112	74	76	126	139	75	19	92	14	66
15	70									

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	75	112	29	120	45	86	65	15	68	49
1	16	80	60	129	148	27	2	99	132	146
2	138	127	122	4	92	50	35	73	113	128
3	34	139	12	30	21	124	18	76	103	38
4	66	71	11	137	23	78	48	97	63	110
5	28	22	96	104	88	133	13	93	130	69
6	67	26	118	95	106	37	149	1	51	64
7	150	94	17	89	141	145	142	91	20	98
8	5	70	58	9	8	47	117	107	131	40
9	82	85	147	111	32	3	109	126	119	46
10	53	136	90	125	77	108	54	19	44	105
11	101	74	140	114	57	14	62	72	55	33
12	79	24	10	121	84	100	143	56	25	31
13	43	52	39	7	61	87	59	41	123	144
14	81	115	135	83	134	6	116	42	102	36
15	*									

p = 157

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	156	67	11	140	63	54	23	131	142	120
1	61	90	89	135	42	97	6	105	5	93
2	119	58	138	43	107	148	132	95	52	102
3	31	38	3	69	30	136	128	2	56	12
4	149	98	87	41	65	53	71	155	4	46
5	114	39	26	85	104	139	70	91	113	75
6	100	133	81	78	86	60	27	147	62	145
7	103	118	10	13	44	29	35	125	*	48
8	115	110	126	96	94	47	33	76	150	80
9	117	151	22	15	19	72	40	16	55	34
10	14	84	50	32	130	144	64	153	112	108
11	25	8	21	154	45	57	109	129	18	121
12	92	101	152	36	127	7	1	73	24	68
13	106	123	83	20	116	37	99	74	143	88
14	146	82	28	122	77	79	51	111	134	124
15	17	49	59	137	9	66	141			

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	78	126	37	32	48	18	16	125	111	154
1	72	2	39	73	100	93	97	150	118	94
2	133	112	92	6	128	110	52	66	142	75
3	34	30	103	86	99	76	123	135	31	51
4	96	43	14	23	74	114	49	85	79	151
5	102	146	28	45	5	98	38	115	21	152
6	65	10	68	4	106	44	155	1	129	33
7	56	46	95	127	137	59	87	144	63	145
8	89	62	141	132	101	53	64	42	139	12
9	11	57	120	19	84	27	83	15	41	136
10	60	121	29	70	54	17	130	24	109	116
11	81	147	108	58	50	80	134	90	71	20
12	9	119	143	131	149	77	82	124	36	117
13	104	7	26	61	148	13	35	153	22	55
14	3	156	8	138	105	69	140	67	25	40
15	88	91	122	107	113	47	*			

$p = 163,\ g = 2,\ p - 1 = 2 \cdot 3^4$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	128	93	23
1	46	92	21	42	84	5	10	20	40	80
2	160	157	151	139	115	67	134	105	47	94
3	25	50	100	37	74	148	133	103	43	86
4	9	18	36	72	144	125	87	11	22	44
5	88	13	26	52	104	45	90	17	34	68
6	136	109	55	110	57	114	65	130	97	31
7	62	124	85	7	14	28	56	112	61	122
8	81	162	161	159	155	147	131	99	35	70
9	140	117	71	142	121	79	158	153	143	123
10	83	3	6	12	24	48	96	29	58	116
11	69	138	113	63	126	89	15	30	60	120
12	77	154	145	127	91	19	38	76	152	141
13	119	75	150	137	111	59	118	73	146	129
14	95	27	54	108	53	106	49	98	33	66
15	132	101	39	78	156	149	135	107	51	102
16	41	82	1							

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		162	1	101	2	15	102	73	3	40
1	16	47	103	51	74	116	4	57	41	125
2	17	12	48	9	104	30	52	141	75	107
3	117	69	5	148	58	88	42	33	126	152
4	18	160	13	38	49	55	10	28	105	146
5	31	158	53	144	142	62	76	64	108	135
6	118	78	70	113	6	66	149	25	59	110
7	89	92	43	137	34	131	127	120	153	95
8	19	80	161	100	14	72	39	46	50	115
9	56	124	11	8	29	140	106	68	147	87
10	32	151	159	37	54	27	145	157	143	61
11	63	134	77	112	65	24	109	91	136	130
12	119	94	79	99	71	45	114	123	7	139
13	67	86	150	36	26	156	60	133	111	23
14	90	129	93	98	44	122	138	85	35	155
15	132	22	128	97	121	84	154	21	96	83
16	20	82	81							

$p = 167,\ g = 5,\ p - 1 = 2 \cdot 83$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	125	124	119	94	136	12	60
1	133	164	152	92	126	129	144	52	93	131
2	154	102	9	45	58	123	114	69	11	55
3	108	39	28	140	32	160	132	159	127	134
4	2	10	50	83	81	71	21	105	24	120
5	99	161	137	17	85	91	121	104	19	95
6	141	37	18	90	116	79	61	138	22	110
7	49	78	56	113	64	153	97	151	87	101
8	4	20	100	166	162	142	42	43	48	73
9	31	155	107	34	3	15	75	41	38	23
10	115	74	36	13	65	158	122	109	44	53
11	98	156	112	59	128	139	27	135	7	35
12	8	40	33	165	157	117	84	86	96	146
13	62	143	47	68	6	30	150	82	76	46
14	63	148	72	26	130	149	77	51	88	106
15	29	145	57	118	89	111	54	103	14	70
16	16	80	66	163	147	67	1			

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		166	40	94	80	1	134	118	120	22
1	41	28	8	103	158	95	160	53	62	58
2	81	46	68	99	48	2	143	116	32	150
3	135	90	34	122	93	119	102	61	98	31
4	121	97	86	87	108	23	139	132	88	70
5	42	147	17	109	156	29	72	152	24	113
6	9	66	130	140	74	104	162	165	133	27
7	159	45	142	89	101	96	138	146	71	65
8	161	44	137	43	126	54	127	78	148	154
9	63	55	13	18	6	59	128	76	110	50
10	82	79	21	157	57	47	149	92	30	107
11	69	155	112	73	26	100	64	125	153	5
12	49	56	106	25	4	3	14	38	114	15
13	144	19	36	10	39	117	7	52	67	115
14	33	60	85	131	16	151	129	164	141	145
15	136	77	12	75	20	91	111	124	105	37
16	35	51	84	163	11	123	83			

$p = 173,\ g = 2,\ p - 1 = 2^2 \cdot 43$

N										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	128	83	166
1	159	145	117	61	122	71	142	111	49	98
2	23	46	92	11	22	44	88	3	6	12
3	24	48	96	19	38	76	152	131	89	5
4	10	20	40	80	160	147	121	69	138	103

I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		172	1	27	2	39	28	95	3	54
1	40	23	29	130	96	66	4	73	55	33
2	41	122	24	20	30	78	131	81	97	144
3	67	102	5	50	74	134	56	162	34	157
4	42	138	123	84	25	93	21	64	31	18

p = 163

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	162	101	15	40	57	148	66	139	29	104
1	28	8	48	38	72	102	47	12	160	80
2	82	96	128	90	109	59	156	145	105	140
3	52	158	151	126	131	155	26	54	49	46
4	16	125	33	137	122	114	50	103	9	55
5	115	74	141	144	27	10	124	41	88	110
6	133	63	76	134	108	24	149	86	147	5
7	113	45	39	3	116	107	64	112	70	99
8	161	*	81	20	154	35	150	32	42	92
9	129	136	43	98	79	19	83	121	44	71
10	14	2	73	51	30	146	68	117	135	91
11	89	23	65	6	123	56	4	69	78	94
12	153	84	138	7	11	17	152	120	97	93
13	119	127	22	111	77	118	130	34	85	67
14	106	75	62	61	142	157	31	87	58	25
15	36	159	18	95	21	132	60	143	53	37
16	13	100	1							

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	81	162	101	23	116	69	113	123	11	48
1	55	124	17	160	100	2	40	125	152	95
2	83	154	132	111	65	149	36	54	10	8
3	104	146	87	42	137	85	150	159	13	72
4	3	57	88	92	98	71	39	16	12	38
5	46	103	30	158	37	49	115	4	148	25
6	156	143	142	61	76	112	6	139	106	117
7	78	99	14	102	51	141	62	134	118	94
8	19	82	20	96	121	138	67	147	58	110
9	23	109	89	129	119	153	21	128	93	79
10	161	1	15	47	9	28	140	75	64	24
11	59	133	77	70	45	50	74	107	135	130
12	127	97	44	114	56	41	33	131	22	90
13	136	34	155	60	63	108	91	43	122	7
14	29	52	144	157	53	27	105	68	5	66
15	86	32	126	120	84	35	26	145	31	151
16	18	80	*							

p = 167

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	166	134	143	14	3	49	59	52	103	66
1	39	123	75	18	38	144	151	109	6	36
2	91	157	41	139	113	4	100	159	8	72
3	107	121	150	60	122	51	10	35	114	117
4	94	28	147	126	137	142	68	149	2	56
5	82	84	67	62	127	13	106	47	81	128
6	85	98	58	55	125	161	130	115	99	155
7	42	65	152	26	104	20	110	12	148	21
8	1	46	79	*	163	131	87	108	70	101
9	34	111	30	119	80	160	138	86	31	48
10	64	96	61	158	162	37	25	69	23	156
11	50	124	73	9	15	33	32	7	120	102
12	22	97	93	83	105	153	54	78	76	164
13	140	16	88	27	118	90	77	43	146	132
14	74	145	89	116	19	136	71	17	154	92
15	135	129	24	5	63	112	29	57	95	45
16	53	44	165	11	141	133	40			

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	83	80	48	4	25	153	18	117	28	113
1	36	163	77	55	3	114	131	147	13	144
2	75	79	120	108	152	106	73	133	41	156
3	92	98	116	115	90	37	19	105	14	10
4	166	22	70	137	161	159	81	57	99	5
5	110	35	7	160	126	63	49	157	62	6
6	33	102	53	154	100	71	9	52	46	107
7	88	146	29	112	140	12	128	136	127	82
8	94	58	50	123	51	60	97	86	132	142
9	135	20	149	122	40	158	101	121	61	68
10	26	89	119	8	74	124	56	30	87	17
11	76	91	155	24	38	67	143	39	134	93
12	118	31	34	11	111	64	43	54	59	151
13	66	85	139	165	1	150	145	44	96	23
14	130	164	45	2	15	141	138	42	78	47
15	32	16	72	125	148	69	109	21	103	27
16	95	65	104	84	129	162	*			

p = 173

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	172	27	39	54	73	50	169	111	124	114
1	44	167	148	103	165	57	153	99	79	77
2	30	64	129	29	20	93	38	2	95	130
3	78	18	121	41	157	118	127	52	94	28
4	23	122	138	108	115	164	14	135	160	133

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	86	172	27	95	66	102	149	107	139	89
1	152	58	146	68	46	135	91	63	31	121
2	24	93	53	40	122	84	171	1	39	23
3	20	64	72	55	162	105	110	170	26	2
4	54	33	157	151	10	167	69	75	142	101

p = 173 (Fortsetzung)

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	33	66	132	91	9	18	36	72	144	115	5	79	100	132	155	82	62	98	60	145	147
6	57	114	55	110	47	94	15	30	60	120	6	68	13	103	149	6	169	51	70	75	47
7	67	134	95	17	34	68	136	99	25	50	7	135	15	57	166	163	105	35	118	158	151
8	100	27	54	108	43	86	172	171	169	165	8	43	108	139	8	124	112	85	171	26	38
9	157	141	109	45	90	7	14	28	56	112	9	94	53	22	129	65	72	32	121	19	77
10	51	102	31	62	124	75	150	127	81	162	10	80	143	101	49	133	161	156	137	83	92
11	151	129	85	170	167	161	149	125	77	154	11	63	17	99	154	61	59	146	12	148	168
12	135	97	21	42	84	168	163	153	133	93	12	69	46	14	165	104	117	150	107	7	111
13	13	26	52	104	35	70	140	107	41	82	13	170	37	52	128	71	120	76	142	48	160
14	164	155	137	101	29	58	116	59	118	63	14	136	91	16	153	58	11	167	45	164	116
15	126	79	158	143	113	53	106	39	78	156	15	106	110	36	127	119	141	159	90	152	10
16	139	105	37	74	148	123	73	146	119	65	16	44	115	109	126	140	89	9	114	125	88
17	130	87	1								17	113	87	86							

p = 179, g = 2, p − 1 = 2 · 89

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	128	77	154	0		178	1	108	2	138	109	171	3	38
1	129	79	158	137	95	11	22	44	88	176	1	139	15	110	114	172	68	4	166	39	54
2	173	167	155	131	83	166	153	127	75	150	2	140	101	16	135	111	98	115	146	173	118
3	121	63	126	73	146	113	47	94	9	18	3	69	62	5	123	167	131	40	149	55	44
4	36	72	144	109	39	78	156	133	87	174	4	141	155	102	80	17	176	136	36	112	164
5	169	159	139	99	19	38	76	152	125	71	5	99	96	116	121	147	153	174	162	119	160
6	142	105	31	62	124	69	138	97	15	30	6	70	72	63	31	6	74	124	86	168	65
7	60	120	61	122	65	130	81	162	145	111	7	132	59	41	33	150	28	56	8	45	11
8	43	86	172	165	151	123	67	134	89	178	8	142	76	156	24	103	126	81	48	18	88
9	177	175	171	163	147	115	51	102	25	50	9	177	107	137	170	37	14	113	67	165	53
10	100	21	42	84	168	157	135	91	3	6	10	100	134	97	145	117	61	122	130	148	43
11	12	24	48	96	13	26	52	104	29	58	11	154	79	175	35	163	95	120	152	161	159
12	116	53	106	33	66	132	85	170	161	143	12	71	30	73	85	64	58	32	27	7	10
13	107	35	70	140	101	23	46	92	5	10	13	75	23	125	47	87	106	169	13	66	52
14	20	40	80	160	141	103	27	54	108	37	14	133	144	60	129	42	78	34	94	151	158
15	74	148	117	55	110	41	82	164	149	119	15	29	84	57	26	9	22	46	105	12	51
16	59	118	57	114	49	98	17	34	68	136	16	143	128	77	93	157	83	25	21	104	50
17	93	7	14	28	56	112	45	90	1		17	127	92	82	20	49	91	19	90	89	

p = 181, g = 2, p − 1 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	128	75	150	0		180	1	56	2	156	57	15	3	112
1	119	57	114	47	94	7	14	28	56	112	1	157	62	58	164	16	32	4	175	113	135
2	43	86	172	163	145	109	37	74	148	115	2	158	71	63	53	59	132	165	168	17	48
3	49	98	15	30	60	120	59	118	55	110	3	33	99	5	118	176	171	114	26	136	40
4	39	78	156	131	81	162	143	105	29	58	4	159	83	72	20	64	88	54	13	60	30

p = 173

I′

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	74	70	128	22	40	33	162	166	11	146
6	145	59	98	17	31	72	4	102	13	46
7	75	120	32	55	134	47	142	80	131	100
8	143	97	62	92	25	171	*	86	113	9
9	152	16	63	21	53	3	66	144	60	154
10	132	49	5	149	117	35	110	7	139	126
11	36	170	85	87	125	109	106	150	158	141
12	76	19	24	84	112	88	140	119	71	65
13	96	81	155	161	56	15	91	83	123	8
14	89	159	48	101	67	147	12	68	168	6
15	107	43	10	58	61	82	137	42	151	90
16	136	156	34	105	116	104	163	45	69	51
17	37	26	1							

I″

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	5	169	37	94	3	73	134	15	153	61
6	98	154	82	92	21	129	96	144	147	168
7	51	128	65	4	50	70	120	19	30	18
8	77	131	155	137	123	112	87	113	125	140
9	159	136	83	25	38	28	130	81	62	17
10	79	143	67	13	165	163	116	150	43	115
11	106	7	124	88	9	44	164	104	35	127
12	71	32	41	138	8	114	109	36	52	22
13	29	78	100	49	74	47	160	156	42	108
14	126	119	76	80	97	60	59	145	12	103
15	117	158	90	16	99	132	161	34	118	141
16	48	133	56	166	45	14	57	11	148	6
17	111	85	*							

p = 179

I′

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	178	108	138	38	166	123	74	10	45	22
1	75	142	51	66	113	110	135	176	88	90
2	49	104	46	125	103	21	9	7	56	84
3	73	6	27	150	94	163	112	14	139	54
4	149	33	78	154	141	11	105	87	18	91
5	127	143	133	100	140	44	8	26	32	41
6	129	122	5	31	58	132	52	165	4	62
7	72	30	63	85	124	23	156	93	34	175
8	17	48	20	25	57	64	168	106	177	*
9	89	19	82	157	151	120	116	145	115	96
10	134	16	80	126	50	12	169	137	2	171
11	114	98	164	67	172	146	121	61	69	160
12	152	147	130	167	86	47	81	92	77	42
13	148	40	59	144	97	111	36	170	109	15
14	101	155	76	128	60	117	173	153	43	55
15	28	158	161	174	79	102	24	83	29	71
16	70	159	119	95	99	53	39	131	65	13
17	37	3	68	118	162	35	136	107	1	

I″

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	89	178	108	171	68	62	31	27	56	26
1	7	45	105	169	37	139	101	80	48	91
2	82	25	9	75	156	83	57	32	150	158
3	71	63	58	41	78	175	136	170	3	166
4	131	59	129	148	55	8	22	125	81	20
5	104	12	66	165	39	149	28	84	64	132
6	144	117	69	72	85	168	13	113	172	118
7	160	159	70	30	6	10	142	128	42	154
8	102	126	92	157	29	73	124	47	18	90
9	19	49	127	77	34	163	99	134	111	164
10	53	140	155	24	21	46	87	177	1	138
11	15	135	36	14	110	98	96	145	173	162
12	95	116	61	5	74	23	103	50	143	60
13	122	167	65	52	100	16	176	107	2	38
14	54	44	11	51	133	97	115	121	130	40
15	33	94	120	147	43	141	76	93	151	161
16	119	152	174	35	112	67	4	123	86	106
17	137	109	114	146	153	79	17	88	*	

p = 181

I′

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	180	56	156	112	175	118	140	76	137	123
1	35	49	29	60	111	3	32	48	11	87
2	64	104	93	85	81	39	136	8	95	50
3	133	174	4	99	125	124	34	10	18	82
4	159	142	149	120	84	23	116	98	33	36

I″

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	90	180	56	15	32	99	127	79	27	95
1	37	18	87	54	155	57	164	168	38	82
2	72	151	67	45	116	170	114	80	86	12
3	60	163	16	48	36	10	49	96	169	25
4	136	77	75	141	160	68	130	167	17	11

p = 181 (Fortsetzung)

N										I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	116	51	102	23	46	92	3	6	12	24	5	133	51	166	97	169	38	18	11	49	36
6	48	96	11	22	44	88	176	171	161	141	6	34	125	100	127	6	140	119	102	177	109
7	101	21	42	84	168	155	129	77	154	127	7	172	129	115	80	27	8	137	77	41	142
8	73	146	111	41	82	164	147	113	45	90	8	160	44	84	121	73	151	21	104	65	145
9	180	179	177	173	165	149	117	53	106	31	9	89	179	55	155	14	111	61	163	31	174
10	62	124	67	134	87	174	167	153	125	69	10	134	70	52	131	167	47	98	117	170	25
11	138	95	9	18	36	72	144	107	33	66	11	39	82	19	87	12	29	50	96	37	10
12	132	83	166	151	121	61	122	63	126	71	12	35	124	126	139	101	108	128	79	7	76
13	142	103	25	50	100	19	38	76	152	123	13	141	43	120	150	103	144	178	154	110	162
14	65	130	79	158	135	89	178	175	169	157	14	173	69	130	46	116	24	81	86	28	95
15	133	85	170	159	137	93	5	10	20	40	15	9	123	138	107	78	75	42	149	143	153
16	80	160	139	97	13	26	52	104	27	54	16	161	68	45	23	85	94	122	106	74	148
17	108	35	70	140	99	17	34	68	136	91	17	152	67	22	93	105	147	66	92	146	91
18	1										18	90									

p = 191, g = 19, p − 1 = 2 · 5 · 19

N										I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		19	170	174	59	166	98	143	43	53	0		190	44	116	88	50	160	171	132	42
1	52	33	54	71	12	37	130	178	135	82	1	94	85	14	112	25	166	176	98	86	1
2	30	188	134	63	51	14	75	88	144	62	2	138	97	129	134	58	100	156	158	69	33
3	32	35	92	29	169	155	80	183	39	168	3	20	175	30	11	142	31	130	15	45	38
4	136	101	9	171	2	38	149	157	118	141	4	182	165	141	8	173	92	178	123	102	152
5	5	95	86	106	104	66	108	142	24	74	5	144	24	10	9	12	135	113	117	77	4
6	69	165	79	164	60	185	77	126	102	28	6	64	111	29	23	74	162	55	168	186	60
7	150	176	97	124	64	70	184	58	147	119	7	75	13	174	143	59	26	89	66	82	62
8	160	175	78	145	81	11	18	151	4	76	8	36	84	19	151	185	148	52	149	27	163
9	107	123	45	91	10	190	172	21	17	132	9	136	93	32	101	167	51	146	72	6	127
10	25	93	48	148	138	139	158	137	120	179	10	188	41	68	122	54	147	53	90	56	114
11	154	61	13	56	109	161	3	57	128	140	11	179	131	157	177	161	184	121	154	48	79
12	177	116	103	47	129	159	156	99	162	22	12	108	170	155	91	73	150	67	169	118	124
13	36	111	8	152	23	55	90	182	20	189	13	16	159	99	172	22	18	40	107	104	105
14	153	42	34	73	50	186	96	105	85	87	14	119	49	57	7	28	83	187	78	103	46
15	125	83	49	167	117	122	26	112	27	131	15	70	87	133	140	110	35	126	47	106	125
16	6	114	65	89	163	41	15	94	67	127	16	80	115	128	164	63	61	5	153	39	34
17	121	7	133	44	72	31	16	113	46	110	17	2	43	96	181	3	81	71	120	17	109
18	180	173	40	187	115	84	68	146	100	181	18	180	189	137	37	76	65	145	183	21	139
19	1										19	95									

p = 193, g = 5, p − 1 = 2⁶ · 3

N										I										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	125	46	37	185	153	186	158	0		192	34	84	68	1	118	104	102	168
1	18	90	64	127	56	87	49	52	67	142	1	35	183	152	141	138	85	136	31	10	145
2	131	76	187	163	43	22	110	164	48	47	2	69	188	25	162	186	2	175	60	172	123
3	42	17	85	39	2	10	50	57	92	74	3	119	82	170	75	65	105	44	5	179	33
4	177	113	179	123	36	180	128	61	112	174	4	103	151	30	24	59	169	4	29	28	16

p = 181

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	96	166	131	59	13	155	2	15	164	132
6	30	163	58	53	88	145	92	22	45	130
7	52	63	20	151	148	42	141	41	75	7
8	27	86	19	72	121	94	28	12	54	179
9	*	90	146	105	122	9	37	169	117	5
10	127	108	177	144	65	147	74	78	128	172
11	162	61	157	135	26	80	24	170	176	102
12	150	73	106	138	126	100	139	6	79	115
13	46	167	165	51	70	158	40	77	107	101
14	119	43	160	153	178	89	91	66	152	143
15	103	21	67	161	110	14	57	62	71	83
16	44	68	173	31	16	168	97	47	17	38
17	25	114	129	69	134	113	171	109	154	55
18	1									

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	29	133	70	63	88	179	1	156	62	53
6	13	111	157	71	20	104	147	152	161	173
7	134	158	83	121	106	78	7	137	107	128
8	115	24	39	159	44	23	81	19	64	145
9	91	146	66	22	85	28	50	166	47	33
10	125	139	119	150	21	93	122	138	101	177
11	154	14	3	175	171	129	46	98	5	140
12	43	84	94	9	35	34	124	100	108	172
13	69	52	59	30	174	113	26	8	123	126
14	6	76	41	149	103	65	92	105	74	42
15	120	73	148	143	178	55	2	112	135	40
16	142	153	110	61	58	132	51	131	165	97
17	117	176	109	162	31	4	118	102	144	89
18	*									

p = 191

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	190	138	43	81	64	153	127	28	173	12
1	9	142	135	174	112	45	159	109	40	151
2	175	139	18	74	10	166	89	163	83	23
3	11	130	101	20	2	126	84	76	182	34
4	107	68	94	96	116	38	70	106	79	57
5	160	146	149	90	147	168	114	7	100	26
6	75	5	36	61	111	145	82	169	122	33
7	87	120	6	150	162	13	65	4	103	108
8	115	71	62	187	19	14	1	133	50	66
9	56	73	178	32	85	*	181	129	86	172
10	156	167	152	46	105	119	125	104	170	180
11	35	29	25	117	179	128	88	77	124	49
12	17	154	54	102	16	80	47	188	164	134
13	15	157	42	140	58	113	93	37	97	95
14	110	8	31	59	24	183	72	53	52	27
15	67	185	144	39	48	91	158	177	69	99
16	171	184	55	136	63	141	176	51	186	118
17	155	132	22	92	143	30	98	161	123	131
18	189	3	165	21	121	148	60	78	41	137
19	44									

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	95	86	34	181	77	61	72	57	141	10
1	24	30	9	75	85	130	124	120	22	84
2	33	183	172	29	144	112	59	149	7	111
3	175	142	93	69	39	110	62	137	45	153
4	18	188	132	2	190	15	103	126	154	119
5	88	167	148	147	122	162	90	49	134	143
6	186	63	82	164	4	76	89	150	41	158
7	46	81	146	91	23	60	37	117	187	48
8	125	3	66	28	36	94	98	70	116	26
9	53	155	173	136	42	139	43	138	176	159
10	58	32	123	78	107	104	47	40	79	17
11	140	64	14	135	56	80	44	113	169	105
12	71	184	68	178	118	106	35	6	115	97
13	31	179	171	87	129	12	163	189	1	21
14	133	165	11	174	152	65	51	54	185	52
15	73	19	102	5	121	170	100	131	156	16
16	50	177	74	27	128	182	25	101	55	67
17	108	160	99	8	13	20	166	157	92	114
18	109	96	38	145	161	151	168	83	127	180
19	*									

p = 193

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	192	118	175	114	29	179	8	129	22	161
1	145	53	142	46	37	93	36	77	99	132
2	143	95	97	27	59	162	89	76	16	28
3	24	10	58	103	84	183	115	157	166	86
4	181	71	45	150	5	56	108	116	41	106

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	96	68	186	150	169	44	72	55	6	140
1	31	147	80	114	184	58	28	115	109	113
2	176	86	8	178	30	188	160	23	29	4
3	151	136	64	179	192	168	16	14	53	91
4	127	48	181	81	105	42	13	153	89	165

p = 193 (Fortsetzung)

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	98	104	134	91	69	152	181	133	86	44	5	36	115	17	77	94	184	14	37	157	148
6	27	135	96	94	84	34	170	78	4	20	6	153	47	116	80	12	142	109	18	99	54
7	100	114	184	148	161	33	165	53	72	167	7	139	177	78	91	39	86	21	95	67	167
8	63	122	31	155	3	15	75	182	138	111	8	137	144	185	122	64	32	58	15	93	147
9	169	73	172	88	54	77	192	188	168	68	9	11	53	38	166	63	146	62	158	50	159
10	147	156	8	40	7	35	175	103	129	66	10	70	134	149	107	51	189	111	154	128	160
11	137	106	144	141	126	51	62	117	6	30	11	26	89	48	41	71	163	191	117	182	135
12	150	171	83	29	145	146	151	176	108	154	12	187	174	81	43	150	3	114	13	46	108
13	191	183	143	136	101	119	16	80	14	70	13	176	20	143	57	52	61	133	110	88	190
14	157	13	65	132	81	19	95	89	59	102	14	173	113	19	132	112	124	125	100	73	155
15	124	41	12	60	107	149	166	58	97	99	15	120	126	55	7	129	83	101	140	9	161
16	109	159	23	115	189	173	93	79	9	45	16	171	74	178	23	27	76	156	79	98	90
17	32	160	28	140	121	26	130	71	162	38	17	66	121	92	165	49	106	127	40	181	42
18	190	178	118	11	55	82	24	120	21	105	18	45	56	87	131	72	6	8	22	97	164
19	139	116	1								19	180	130	96							

p = 197, g = 2, p − 1 = $2^2 \cdot 7^2$

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	128	59	118	0		196	1	181	2	89	182	146	3	166
1	39	78	156	115	33	66	132	67	134	71	1	90	29	183	25	147	74	4	159	167	154
2	142	87	174	151	105	13	26	52	104	11	2	91	131	30	120	184	178	26	151	148	36
3	22	44	88	176	155	113	29	58	116	35	3	75	141	5	14	160	39	168	192	155	10
4	70	140	83	166	135	73	146	95	190	183	4	92	110	132	78	31	59	121	66	185	96
5	169	141	85	170	143	89	178	159	121	45	5	179	144	27	72	152	118	149	139	37	8
6	90	180	163	129	61	122	47	94	188	179	6	76	64	142	116	6	114	15	17	161	105
7	161	125	53	106	15	30	60	120	43	86	7	40	19	169	45	193	163	156	175	11	107
8	172	147	97	194	191	185	173	149	101	5	8	93	136	111	42	133	52	79	21	32	55
9	10	20	40	80	160	123	49	98	196	195	9	60	171	122	126	67	47	186	82	97	195
10	193	189	181	165	133	69	138	79	158	119	10	180	88	145	165	28	24	73	158	153	130
11	41	82	164	131	65	130	63	126	55	110	11	119	177	150	35	140	13	38	191	9	109
12	23	46	92	184	171	145	93	186	175	153	12	77	58	65	95	143	71	117	138	7	63
13	109	21	42	84	168	139	81	162	127	57	13	115	113	16	104	18	44	162	174	106	135
14	114	31	62	124	51	102	7	14	28	56	14	41	51	20	54	170	125	46	81	194	87
15	112	27	54	108	19	38	76	152	107	17	15	164	23	157	129	176	34	12	190	108	57
16	34	68	136	75	150	103	9	18	36	72	16	94	70	137	62	112	103	43	173	134	50
17	144	91	182	167	137	77	154	111	25	50	17	53	124	80	86	22	128	33	189	56	69
18	100	3	6	12	24	48	96	192	187	177	18	61	102	172	49	123	85	127	188	68	101
19	157	117	37	74	148	99	1				19	48	84	187	100	83	99	98			

p = 199, g = 3, p − 1 = $2 \cdot 3^2 \cdot 11$

	N											I									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		3	9	27	81	44	132	197	193	181	0		198	106	1	14	138	107	142	120	2
1	145	37	111	134	4	12	36	108	125	176	1	46	189	15	172	50	139	28	123	108	55
2	130	191	175	127	182	148	46	138	16	48	2	152	143	97	118	121	78	80	3	156	70
3	144	34	102	107	122	167	103	110	131	194	3	47	164	134	190	31	82	16	11	161	173
4	184	154	64	192	178	136	10	30	90	71	4	60	167	51	88	5	140	26	76	29	86

p = 193

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	159	189	61	38	139	7	87	52	15	169
6	172	133	158	146	32	105	121	167	1	188
7	134	163	6	155	178	65	156	94	91	98
8	12	43	170	101	68	136	21	131	190	48
9	66	39	165	147	184	67	*	164	90	54
10	73	140	168	151	102	44	127	51	176	18
11	88	154	124	19	13	17	80	182	104	82
12	126	92	64	119	125	100	55	40	160	83
13	96	72	112	110	149	187	31	144	85	177
14	9	138	109	57	185	69	62	11	153	107
15	3	30	141	47	128	120	79	148	50	70
16	26	171	186	191	180	49	63	137	35	4
17	75	74	123	113	81	60	20	78	23	33
18	130	42	135	152	14	122	2	174	25	111
19	173	117	34							

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	158	107	57	11	99	126	45	143	32	24
6	175	52	146	166	122	75	90	95	84	145
7	159	41	131	100	171	170	27	17	177	156
8	116	174	119	129	34	138	39	56	110	26
9	98	78	121	15	77	21	130	22	79	18
10	125	83	104	33	118	65	49	149	46	142
11	133	189	132	173	3	36	47	191	1	123
12	155	66	185	172	112	124	120	106	154	7
13	180	87	19	61	70	182	85	167	141	54
14	101	152	12	20	137	10	63	93	157	134
15	43	103	183	148	111	73	76	37	62	50
16	128	9	25	71	97	92	38	67	102	59
17	82	161	60	190	187	2	108	139	74	5
18	164	40	117	35	94	144	162	135	69	51
19	88	163	*							

p = 197

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	196	181	89	166	159	14	114	63	76	109
1	92	107	190	38	160	17	104	161	44	169
2	54	32	128	157	73	147	151	72	24	183
3	120	59	55	189	12	140	75	8	191	168
4	19	51	133	173	162	193	81	186	84	123
5	53	20	79	124	170	60	69	94	65	121
6	171	102	112	115	142	95	185	47	101	61
7	137	117	152	158	4	141	64	58	31	21
8	86	194	97	99	187	127	22	164	145	182
9	29	131	110	136	70	143	179	195	*	98
10	83	48	172	43	18	40	135	93	57	77
11	132	42	103	16	15	113	6	138	149	177
12	184	66	126	85	80	46	67	188	33	176
13	119	30	78	52	50	41	111	62	7	37
14	13	5	116	71	27	165	3	74	36	139
15	35	148	118	130	91	10	175	129	153	167
16	39	105	174	156	23	28	90	154	192	45
17	125	122	49	134	106	11	34	150	26	144
18	88	2	146	25	178	96	82	100	68	56
19	108	9	155	163	87	180	1			

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	98	196	181	146	74	141	116	138	37	191
1	155	175	34	140	5	114	113	15	104	40
2	51	79	86	164	28	183	178	144	165	90
3	131	78	21	128	176	150	148	139	13	160
4	105	135	111	103	18	169	125	67	101	172
5	134	41	133	50	20	32	189	108	77	31
6	55	69	137	7	76	58	121	126	188	56
7	94	143	27	24	147	36	8	109	132	52
8	124	46	186	100	48	123	80	194	180	2
9	166	154	10	107	57	65	185	82	99	83
10	187	68	61	112	16	161	174	11	190	9
11	92	136	62	115	6	63	142	71	152	130
12	30	59	171	49	53	170	122	85	22	157
13	153	91	110	42	173	106	93	70	117	149
14	35	75	64	95	179	88	182	25	151	118
15	177	26	72	158	167	192	163	23	73	4
16	14	17	44	193	87	145	3	159	39	19
17	54	60	102	43	162	156	129	119	184	96
18	195	1	89	29	120	66	47	84	127	33
19	12	38	168	45	81	97	*			

p = 199

	I′									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	198	14	46	156	75	140	197	99	39	24
1	59	161	170	141	138	172	11	147	52	196
2	38	43	19	148	127	85	76	54	123	86
3	10	82	36	17	168	65	94	12	6	113
4	149	104	112	8	53	171	189	164	116	122

	I″									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	99	106	120	80	166	88	38	100	43	154
1	30	16	37	197	1	189	82	33	178	22
2	89	101	177	52	9	87	140	171	139	76
3	163	190	93	66	180	91	32	147	20	8
4	127	125	144	21	196	141	2	70	136	188