BERKA / KREISER

Logik-Texte

KAREL BERKA / LOTHAR KREISER

Logik-Texte

Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik

Dritte, erweiterte Auflage

Unter Mitarbeit von

Siegfried Gottwald und Werner Stelzner

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

1983

Erschienen im Akademie-Verlag, DDR-1086 Berlin, Leipziger Straße 3—4

Lizenznummer: 202 · 100/251/83
Printed in GDR
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", 7400 Altenburg
Einband und Schutzumschlag: Rolf Kunze
LSV 0145
Bestellnummer: 7540194 (5815)
DDR 42,— M

Inhaltsverzeichnis

* Vorgenommene Kürzungen beziehen sich nur auf Fußnoten.

Vorwort zur 3. Auflage

Die hiermit dem Leser vorgelegte 3., erweiterte Auflage ist um eine noch differenziertere Betrachtung der modernen Logikentwicklung bemüht. Die editorischen Prinzipien der voraufgehenden Auflagen sind bis auf einen, freilich wichtigen Gesichtspunkt beibehalten worden. Wie aus der Einleitung zu den bisherigen Auflagen ersichtlich, wurde angenommen, daß sich die Unterscheidung zwischen der Extensionalität und der Nicht-Extensionalität interpretierter Ausdrücke eines Kalküls deckt mit dem Unterschied zwischen klassischer und nichtklassischer Logik. Unter dieser Voraussetzung schien uns z. B. der Aufbau einer epistemischen Logik ohne eine durch pragmatische Aspekte erweiterte Semantik nicht möglich. Die Neugestaltung des V. Kapitels (Modallogik) korrigiert das damals vermutete und nunmehr verworfene Zusammenfallen beider Unterscheidungen. Die klassische Logik wurde in Rücksicht auf Fragestellungen ergänzt, die sich für die Logikentwicklung insgesamt als bedeutsam erwiesen. Das hatte auch Einfluß auf die Gestaltung anderer Kapitel, so besonders die Kapitel IX und X. Die Veränderungen haben nur an einer Stelle zur Kürzung eines bisher abgedruckten Textes geführt. Das Kapitel II der „Begriffsschrift“ von G. Frege, der „Darstellung und Ableitung einiger Urteile des reinen Denkens“ gewidmet, wurde herausgenommen und dafür die vom gleichen Autor stammende Arbeit „Sinn und Bedeutung“ aufgenommen. Sonst sind alle bisherigen Texte auch in die 3. Auflage übernommen worden, in zwei Fällen (II.1. und X.5.) erfolgte sogar der nunmehr vollständige Abdruck. Um die gegenwärtige Entwicklungsperiode der formalen Logik, für die die bisherige Bezeichnung „moderne Logik“ beibehalten wurde, noch klarer in die Geschichte dieser Wissenschaft einzuordnen, ist das Kapitel I nicht nur um einen Text, sondern in seiner Einleitung auch um eine allgemeine Systematisierung der Geschichte der formalen Logik ergänzt worden

Es versteht sich, daß dabei nicht mehr als Grundsätze einer solchen Systematisierung und deren skizzenhafte Umsetzung angegeben werden konnten.

Das Literaturverzeichnis enthält wiederum nur in mindestens einem Kapitel angezeigte Arbeiten. Auch ist nicht jede einschlägige Zeitschrift durch einen Beitrag, der in ihr erschien, vertreten. Das ist einzig und allein den genannten editorischen Prinzipien geschuldet, stellt also auf keinen Fall ein Werturteil dar.

Wir waren um eine Auswahl der Literatur bemüht, die den unterschiedlichen Standpunkten in der wissenschaftlichen Diskussion gerecht wird. Hier aber vollkommene Parität und Neutralität anstreben zu wollen, ist utopisches Ideal. Zu mehr als einer leitenden Maxime der Auswahl kann man sich daher nicht verpflichten.

Den technischen Aufbau der dritten Auflage haben wir im Vergleich zu den voraufgehenden etwas abgeändert. Im Interesse eines leichteren Gebrauchs der Registerteile haben wir uns nunmehr entschlossen, sie an das Ende des Buches zu rücken. Dadurch kommt die als Anhang gekennzeichnete Arbeit von A. Tarski „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen“ vor diese Registerteile zu stehen. Es sei deshalb an dieser Stelle ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß sich die Register nicht auf die erwähnte Arbeit von A. Tarski beziehen.

An der Überarbeitung der Einleitungen zu einzelnen Kapiteln und des Literaturverzeichnisses waren Siegfried Gottwald und Werner Stelzner in einem solchen Umfang beteiligt, daß eine Würdigung ihrer Mitarbeit den Herausgebern ein besonderes Bedürfnis ist. Wir danken Frau G. Liebau, Herrn B. Liebau und Herrn D. Mielke für ihre Mitwirkung bei der technischen Fertigstellung des Manuskripts und beim Lesen der Korrekturbögen.

Leipzig, Frühjahr 1982

Karel Berka Lothar Kreiser

Einleitung

1. Aufgabe und technischer Aufbau des Buches

Die Wissenschaft der Logik gehört mit zu den ältesten Wissenschaften. Ihr Begründer ist Aristoteles (384—322 v. u. Z.). An der Grammatik (der griechischen Sprache) orientiert, entwickelte er die Logik im engen Zusammenhang mit seinen Untersuchungen des sich konstituierenden mathematischen und naturwissenschaftlichen Denkens.

Von gewissen Modifikationen abgesehen, behielt sie bis in das 19. Jahrhundert ihre durch Aristoteles geprägte Form. Zu dieser Zeit erwies sie sich als nicht mehr ausreichend zur Bewältigung der durch die neuzeitliche Entwicklung der Wissenschaften aufgeworfenen logischen Probleme.

Bereits in der klassischen deutschen Philosophie wird die Unzulänglichkeit der aristotelischen oder, wie man auch sagt, der traditionellen formalen Logik reflektiert. Bei Kant erfährt sie eine erkenntnistheoretische „Aufstockung" in Gestalt der transzendentalen Logik, während Hegel sie in seinem philosophischen System einer ontologischen Umdeutung unterzieht, die wenig von ihrer ursprünglichen Form bestehen läßt. Die hier und in der Folgezeit im Rahmen philosophischer Strömungen unternommenen Begründungs- und Erweiterungsversuche der traditionellen formalen Logik beinhalten vielfach Fragestellungen, die heute als erkenntnistheoretische, methodologische oder gar als psychologische Probleme angesehen werden. Die Logik wurde mehr als jemals zuvor in ihrer Geschichte zum Feld scharfer philosophischer Auseinandersetzungen. Der Fortschritt vollzog sich fast unbemerkt. Er begann mit dem Versuch, logische Tatbestände mit Hilfe mathematischer Methoden und mathematischer Begriffsbildung zu erfassen. Erste Untersuchungen in dieser Hinsicht stammen von G. W. Leibniz (1646—1716). Sie blieben ohne historische Wirkung und wurden erst Anfang unseres Jahrhunderts wiederentdeckt. Mit den Arbeiten von G. Boole (1815—1864), A. DeMorgan (1806—1871), W. S. Jevons (1835—1882) und Ch. S. Peirce (1839—1914) setzen diese Bestrebungen erneut ein, nun aber mit nachhaltigem Erfolg. Durch die sich in der Folgezeit herausbildende moderne oder mathematische Logik wird nicht einfach der Bestand des logischen Wissens neu erschlossen. Das logische Wissen wird innerhalb weniger Jahrzehnte durch Erkenntnisse an Tiefe und Umfang derart erweitert, daß die Herausbildung der modernen Logik als ein revolutionierender Sprung in der Geschichte der Logik angesehen werden kann.

Mit dieser Entwicklung ist auch eine Vergrößerung des Anwendungsbereiches der Logik verbunden. Die Logik wurde seit Aristoteles als eine rein theoretische Wissenschaft aufgefaßt. Ihr Anwendungsbereich war das wissenschaftliche Denken, und ihre Funktion bestand darin, die für dieses Denken geltenden logischen Gesetze bewußt zu machen. Die Logik stellte eine propädeutische Wissenschaft für alle anderen Wissenschaften dar. Diese propädeutische Funktion hat sie auch in Gestalt der modernen Logik beibehalten. Sie hat sogar an Bedeutung gewonnen. Das Eindringen der Wissenschaften in alle Lebensbereiche bringt mit sich, daß die Anforderungen an das theoretische Denken steigen.

Die moderne Logik hat nicht nur eine propädeutische, sondern auch eine instrumentale Bedeutung für die Wissenschaften. Sie stellt die Erkenntnisse und Verfahren zur Verfügung, um die logischen Grundlagen des theoretischen Aufbaus wissenschaftlicher Hypothesen und Theorien zu erforschen. In diesem Sinne ist sie nicht nur seit G. Freges grundlegenden Untersuchungen in der Mathematik wirksam, sondern z. B. auch in der Journalistik (Argumentationslogik) oder in den Rechtswissenschaften (normative Logik). Die moderne Logik wird zunehmend methodologisches Instrument jeder Wissenschaft zum Zwecke rationeller und exakter Theorienbildung.

Seit den dreißiger Jahren ist ein drittes, erstmals nicht rein theoretisches Anwendungsfeld der modernen Logik hinzugekommen. Man fand, daß sich die Relaisschaltungen mit den Mitteln der modernen Logik theoretisch beschreiben lassen. Bald darauf wurden andere Anwendungsmöglichkeiten entdeckt. Nicht nur Relaiskontakt-Schaltungen, sondern auch andere diskret arbeitende Geräte können zweckmäßig durch den Formalismus der mathematischen Logik beschrieben werden.

Die Aufgabe unserer Textauswahl läßt sich kurz wie folgt charakterisieren: Der (deutschsprachige) Nachdruck von Arbeiten (oder Teilen aus ihnen), in denen relevante Probleme der modernen deduktiven Logik in grundlegender Weise behandelt werden, soll eine echte Möglichkeit der historischen Ergänzung und sachlicher Vertiefung des ein- oder mehrjährigen Logikstudiums geben. Aus dieser Aufgabenstellung erhellt schon zweierlei: Erstens handelt es sich bei diesem Buch um kein Lehrbuch; seine Lektüre setzt gewisse elementare Kenntnisse der modernen Logik voraus. Es ist eine Textauswahl, die wenigstens auszugsweise zum Literaturstudium für jeden Logikunterricht an Universitäten, Hoch- und Fachschulen benutzt werden kann. Auszugsweise deshalb, weil das Buch auch Texte zu solchen Problemen bzw. Logiken enthält, die im allgemeinen in einem Einführungskursus in die moderne Logik nicht berücksichtigt werden können.

In dieser Hinsicht besitzt das Buch einen relativ selbständigen Charakter. Zur Erleichterung des Verständnisses wird jedem Kapitel eine Einführung vorangestellt. Diese Einführung enthält sowohl eine kurze historische Übersicht zum Kapitelinhalt als auch Literaturhinweise, die den Problemen entsprechend angeordnet sind. Auf diese Anordnung kommen wir nachfolgend noch detaillierter zu sprechen.

Zweitens ist die Auswahl der Texte wesentlich durch pädagogische Gesichtspunkte bestimmt. Die Studientexte wurden mit der Absicht ausgewählt, einen möglichst großen Kreis von Studenten (und anderer Logikinteressenten) anzusprechen. Deshalb mußten bei der Textauswahl verschiedenartige und in ihren Anforderungen an die Logik unterschiedliche Ausbildungsrichtungen berücksichtigt werden. Wir haben versucht, dem dadurch gerecht zu werden, daß wir grundlegende, aber möglichst allgemeinverständliche Texte auswählten, d. h. solche Texte, in denen die jeweilige Problematik mehr inhaltlich als ihrer technischen Behandlung nach dargelegt wird. So enthält z. B. der gekürzte Nachdruck einer im X. Kapitel unter Ziffer 5 abgedruckten Arbeit von K. Gödel nur den erläuternden 1. Teil. In jedem Fall ließ sich das freilich nicht realisieren. Die Erfahrung wird zeigen, ob die Art der Auswahl den gewünschten Nutzen für den Leser hat. Es versteht sich daher, daß wir für jede Anregung zur Verbesserung der inhaltlichen und formalen Gestaltung der Textauswahl dankbar sind.

Das Auswahlprinzip brachte mit sich, daß erstens von einigen Logikern mehrere, von anderen hingegen keine Arbeiten vertreten sind, und zweitens, daß nicht in jedem Fall die Arbeiten von Logikern aufgenommen werden konnten, in denen ein bestimmtes logisches Problem zuerst aufgeworfen oder beantwortet wurde. Beide Diskrepanzen werden durch entsprechende Hinweise in den Einführungen beseitigt. Wir wollen aber ausdrücklich betonen, daß die Auswahl in keiner Weise eine Wertung der Leistungen dieses oder jenes Logikers darstellt.

Zu einzelnen Passagen oder Ausdrücken in den Texten wurden von uns Anmerkungen hinzugefügt. Um sowohl ihre Zahl als auch den Umfang der einzelnen Einführungen klein zu halten, wurden zusammenhängende Texte, wenn möglich, ganze Arbeiten ausgewählt.

Als kommentierte Textauswahl allein zur modernen Logik unterscheidet sich das hier vorgelegte Buch sowohl von einer Problemgeschichte der formalen Logik (J. M. Bochenski [1956]) als auch von einem reinen Nachdruck logischer Texte zu einem speziellen Problem (wie z. B. bei M. Davis [1965] oder J. v. Heijenoort [1967]).

Die Texte sind in 12 Kapitel mit jeweiliger Einführung eingeteilt. Alle Texte sind, soweit nicht Übersetzungen in die deutsche Sprache erforderlich waren und bis auf die Berichtigung offensichtlicher Druckfehler, originalgetreu nachgedruckt. Auf berichtigte Druckfehler wird in einer Anmerkung hingewiesen. Auslassungen im Text werden durch [...] angezeigt und sind dann erfolgt, wenn bereits in anderen Texten vorliegendes oder — in bezug auf das Thema des Kapitels — Nebenfragen betreffendes formuliert ist. Der originalgetreue Nachdruck brachte eine Vielfalt benutzter symbolischer Ausdrucksmittel mit sich. Eine erläuternde Zusammenstellung aller vorkommenden Symbole logischer Funktoren und Operatoren findet der Leser im Anhang; natürlich erfolgen entsprechende Erläuterungen, wenn notwendig, in den Einführungen oder in den Anmerkungen zum ausgewählten Text. In den Einleitungen selbst wird eine einheitliche logische Symbolik benutzt, und zwar — vor allem aus drucktechnischen Gründen — die klammerfreie Symbolik von J. Łukasiewicz.

Im Interesse eines wissenschaftlichen Belegs von Zitaten aus der Textauswahl wird für den Benutzer die ursprüngliche Paginierung in einer *eckigen* Klammer am Rande des Nachdrucks jeweils in der Höhe der betreffenden Zeile angegeben und das erste Wort durch eine Längslinie gekennzeichnet.

Es kommen unterschiedliche Arten von Anmerkungen (Fußnoten) vor. Anmerkungen, die von den Autoren der einzelnen Texte stammen, werden jeweils durchgehend numeriert, aber mit einer *rechten runden* Klammer versehen. Anmerkungen unsererseits in den einzelnen Texten bzw. in den Einführungen werden ebenfalls wieder auf den jeweiligen Text bzw. die jeweilige Einführung bezogen durchgehend numeriert, sind aber mit einer *rechten eckigen* Klammer versehen. Anmerkungen zu Fußnoten werden durch ein *eckiges* Klammerpaar angezeigt. Fußnoten und Anmerkungen findet der Leser am Ende der jeweiligen Einführung bzw. des jeweiligen Textes. Es kommen Verweisungen auf die Textauswahl selbst vor. Dazu wird in einem *runden* Klammerpaar das jeweilige Kapitel und eventuell noch ein Abschnitt in ihm angegeben. Bezieht sich ein Autor auf eine Arbeit, die auch in der Textauswahl abgedruckt wird, fügen wir der entsprechenden Fußnote des Autors den Hinweis auf das Kapitel und den Abschnitt hinzu, in dem sie in der Textauswahl zu finden ist. Die bibliographischen Angaben in den Einführungen oder Anmerkungen werden im Hinblick auf das Literaturverzeichnis wie folgt gegeben: Name des Autors und Erscheinungsjahr der betreffenden Arbeit. Erschienen in dem Jahr mehrere Arbeiten des Autors, wird an die Jahreszahl als Unterscheidungsindex ein kleiner lateinischer Buchstabe, mit a beginnend, angefügt, z. B. K. Gödel [1932a]. Aus dem Literaturverzeichnis sind dann unter dem Namen des Autors und der genannten Jahreszahl mit bzw. ohne Unterscheidungsindex die weiteren bibliographischen Angaben ersichtlich. Das Literaturverzeichnis selbst erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Die in den Einführungen angegebene Literatur ist eingeteilt (1) in solche, in der ein logisches Problem zum ersten Mal aufgeworfen oder gelöst wird, (2) in der dieses Problem in einer heute gängigen Form ausführlich behandelt wird, eventuell auch unter Einschluß weiterer logischer Problemstellungen und (3) in solche, in der es mehr um einen Überblick und eine Einführung in die Untersuchungen zu diesem Problem geht. Die erste Art von Literatur folgt im Text unmittelbar nach dem Namen des betreffenden Logikers, die zweite Art wird „Weitere Literatur" und die dritte Art „Ergänzende Literatur" genannt. Unvollständig ist vor allem die dritte Art von Literaturangaben. Mitunter wird in den Einführungen wie auch den Anmerkungen nur durch runde Klammerung abgesetzte Literatur angegeben, in der sich der Leser über auftretende logische Begriffsbildungen oder logische Verfahren informieren kann, die in unserem Zusammenhang nur Erwähnung erfahren konnten.

2. Zu inhaltlichen Fragen der Textauswahl

Es sollen Texte aus dem Gebiet der Geschichte der modernen Logik ausgewählt werden. Der Leser wird erwarten dürfen, zu erfahren, was wir dabei unter „moderner" Logik verstehen. Und zwar auch dann, wenn, wie in unserem Fall, die Auswahl dadurch erleichtert wird, daß bestimmte Arbeiten zu gewissen Themen bereits allgemein als klassisch oder grundlegend angesehen werden. Die Bestimmung dessen, was Gegenstand der *modernen* Logik sei, ist sehr umstritten. Es ist kaum möglich, eine Definition zu geben, die von allen Logikern akzeptiert würde. Zu viele Probleme überkreuzen sich in dieser Frage, die, dazu noch in grundlegenden Aspekten, sowohl in die Philosophie als auch in die Grundlagenforschung der Mathematik führen. Dazu kommt, daß sich die moderne Logik in einer Entwicklungsphase befindet, die den Umkreis dessen, was ihr zugänglich ist und was nicht, noch keineswegs sicher abstecken läßt. Viele Formen sprachgebundener Ausdrucksweisen, zu deren logischer Struktur es in vorausgegangenen Entwicklungsformen der Logik höchstens ansatzweise Untersuchungen gab, werden heute intensiv erforscht. So liegen z. B. erste Untersuchungen zu einer Fragelogik (M. Prior — A. N. Prior [1955]; N. D. Belnap jr. [1963]; L. Åquist [1965]) und zu einer Zeitlogik (A. N. Prior [1957], [1967]; N. Rescher [1965]) vor. Wir schließen uns zunächst einer Definition von G. Klaus ([1966], S. 7) an, wonach die Logik die Wissenschaft von den allgemeinsten Strukturen des richtigen Denkens ist. Diese Strukturen haben sich historisch herausgebildet, und zwar auf der Grundlage der gesellschaftlichen Praxis im Prozeß der ideellen Aneignung der objektiven Realität (die physiologischen Bedingungen des Denkens vorausgesetzt).

Daß die Resultate logischer Untersuchungen, die logischen Systeme, auch außerhalb des Denkens Anwendung finden, ergibt keinen Widerspruch zu dieser Definition. Aber die Definition besagt nichts über die bestehenden Unterschiede etwa zwischen der traditionellen formalen Logik und der modernen Logik.

Ein Weg wäre, die durch das Adjektiv „modern" zu bezeichnenden Eigenschaften durch eine Gegenüberstellung der traditionellen formalen Logik und der modernen Logik herauszuheben. Dieses methodische Verfahren setzt jedoch wenigstens eine Vorstellung von dem voraus, was unter „moderner Logik" zu verstehen sei.

Wir wollen unsere Auffassung von den Beziehungen her begründen, die die hier zur Sprache kommenden logischen Systeme zueinander haben, wobei die klassische Logik als ein unbestrittener Bestandteil der modernen Logik zugrunde gelegt wird. Schränken wir uns auf die klassische Logik (einschließlich der Tarskischen Semantik) ein, so könnte man die moderne Logik definieren als die Wissenschaft von der Folgerungsrelation. Bei geeigneter Deutung dessen, was unter den „allgemeinsten Strukturen des richtigen Denkens" zu verstehen ist, läßt sich sicher ein Zusammenhang mit der oben wiedergegebenen allgemeinen Definition von „Logik" herstellen. Wesentlich für unsere Verfahrensweise ist nun, daß die Tarskische Semantik von denselben Voraussetzungen Gebrauch macht wie die klassische Mathematik. Diese Voraussetzungen lassen sich durch folgende drei Punkte charakterisieren: 1. die Anerkennung des Unendlichen als Aktual-Unendliches; 2. die Existenz mathematischer (und logischer) Objekte an sich; 3. die Geltung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten. Der klassische Standpunkt ist innerhalb der Mathematik nicht unwidersprochen geblieben. Seine heute wohl schärfste Entgegensetzung, die sich besonders im Anschluß an die Bemühungen um die Ausschaltung von Antinomien (Kap. XI) herausbildete, ist der mathematische Intuitionismus. Sein finitärer Standpunkt (Priorität des Endlichen vor dem Unendlichen als eines nur potentiell möglichen), seine Einschränkung der Geltung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten und seine „Ersetzung des an sich Wahren durch das effektiv Verifizierbare, des an sich Falschen durch das effektiv Falsifizierbare und des an sich Existierenden durch das effektiv Konstruierbare" (H. Scholz — G. Hasenjaeger [1959], S. 8) läßt eine volle Entwicklung der Tarskischen Semantik nicht mehr zu.

Die logische Explikation dieses nichtklassischen Standpunktes ergibt einen von der klassischen Logik verschiedenen Bestandteil der modernen Logik. In der Textauswahl wird er im VI. Kapitel dargelegt — die klassische Logik ist Gegenstand des III. Kapitels.

Charakteristisch für die klassische Logik sind desweiteren die semantischen Voraussetzungen der Zweiwertigkeit von Aussagen und der Extensionalität betrachteter Aussagenverbindungen. Die klassische Logik ist eine extensionale Logik. Daß gerade sie historisch eine bevorzugte Ausarbeitung erfuhr, hat in erster Linie außerlogische Gründe, die in der allgemeinen Wissenschaftsentwicklung zu suchen sind.

Bezüglich der nicht-extensionalen oder intensionalen Systeme kann man grundsätzlich folgende Fälle unterscheiden: Erstens ein System, in dem der Wahrheitswert von zusammengesetzten Aussagen nicht nur von dem Wahrheitswert der einfachen Aussagen abhängt, z. B. ein System mit Aussagenformen vom Typus „Er glaubt, daß ...“ (im Unterschied zu einem extensionalen System mit Aussagenformen vom Typus „Es ist nicht der Fall, daß ...“, „entweder ... oder“ usw.). Eine solche Logik wurde noch nicht entwickelt. Ein solches System überschreitet offensichtlich die übliche semantische Grundlage einer Logik, indem pragmatische Aspekte, die formal (jedenfalls bis jetzt) nicht erfaßbar sind, berücksichtigt werden müssen. Zweitens ein System, in dem als Denotate von Aussagen andere Werte als Wahrheitswerte in Betracht kommen, in dem aber die hier vorkommenden aussagenlogischen Konstanten durch Wertmatrizen mit einer endlichen Anzahl von Werten nicht definierbar sind. Solche nichtextensionalen Systeme liegen in Gestalt der Modallogik mit den klassischen Modalwerten „möglich“, „notwendig“ und „unmöglich“ vor (Kap. V). Drittens ein System, in dem man neben Aussagen auch Befehlssätze, Sollsätze usw. zuläßt, wie das in der Sollsatzlogik bzw. deontischen Logik der Fall ist. Die Deutung des Begriffes einer nicht-extensionalen Logik als einer Modallogik bedarf folgender Ergänzungen: Man muß erstens beachten, daß der Begriff der Aussage im klassischen Sinne, d. h. als semantische Kategorie mit den Denotaten „wahr“ und „falsch“, breiter gefaßt ist. Die Annahme, daß die Denotate von Aussagen in diesem weiten Sinne keine Wahrheitswerte sind, ist zwar kein hinreichender Grund für eine Modallogik. Wir müssen auch das zweite Merkmal solcher logischer Systeme beachten, nämlich die Nichtdefinierbarkeit durch endliche Wertetafeln. Gerade dadurch unterscheidet sich eine Modallogik von einer mehrwertigen Logik (Kap. IV), die eine extensionale Logik ist.

Die logischen Systeme der klassischen Logik werden in Gestalt formalisierter Sprachen entwickelt. Es wird über diese Sprachen gesprochen, wenn, ausgehend von den Begriffen „wahr“ und „falsch“, definiert wird, was ein „allgemeingültiger Ausdruck“, ein „erfüllbarer Ausdruck“ oder ein „unerfüllbarer Ausdruck“ jeweils in diesen Sprachen ist. Da dazu auf die Bedeutung von „wahr“ und „falsch“ Bezug genommen wird, ist diese Metasprache eine semantische Sprache. Die logische Semantik als eine Theorie dieser und gleichartiger semantischer Begriffe ist in dieser Hinsicht eine metalogische Theorie. Auf sie kommen wir im XII. Kapitel zu sprechen, und zwar in ihrer durch A. Tarski gegebenen Begründung (vgl. dazu auch Anhang). Wir bemerken, daß dabei semantische Probleme, wie sie etwa durch den finitären Standpunkt aufgeworfen werden (untersucht z. B. von S. C. Kleene [1959]), nicht zur Sprache kommen. Der naturgemäß begrenzte Umfang einer Textauswahl veranlaßte uns zu dieser Beschränkung. Für weitergehendes Interesse muß auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

Wesentliche Probleme der Metalogik (in einem in der Einführung zum XII. Kapitel erläuterten Sinne des Wortes) werden im VIII., IX., X. und XI. Kapitel behandelt. Das Thema des VII. Kapitels ist die Regellogik, während das II. Kapitel Texte aus jener Entwicklungsphase der modernen Logik enthält, die man heute als die Periode der „Algebra der Logik" bezeichnet. In mehr informativer Form ist das I. Kapitel neben J. Jungius vor allem den beiden bedeutendsten Vorläufern der modernen Logik gewidmet: G. W. Leibniz und B. Bolzano.

Mit der Spiegelung an der klassischen Logik haben wir zwar eine Begründung gegeben, warum wir die einzelnen Themen zur modernen Logik rechnen, aber keinesfalls eine Definition dieses Terminus. Das ist das eine. Zum anderen ist diese Spiegelung zwar für unsere Zwecke recht nützlich, aber bietet sicherlich keine ausreichende Möglichkeit, um durch sie einen allgemeinen Leitfaden zur Klassifikation alles dessen zu finden, was den Bestand der modernen Logik ausmacht oder gar ausmachen kann. Die Spiegelung gibt nur eine erste, noch grobe Einteilung eines sozusagen an den Rändern noch offen bleibenden Feldes gegenwärtiger logischer Untersuchungen, die keinen wertenden Einfluß auf die Kapitelfolge hat. Der Umfang der gegenwärtigen logischen Forschungen ist wesentlich größer, als es in der Textauswahl zum Ausdruck kommt. So haben wir in Hinblick auf die mit dieser Textauswahl verfolgte Aufgabenstellung Abstand genommen von der Aufnahme von Arbeiten, die in speziell mathematische Theorien führen. Weitgehend durchgearbeitete Bereiche wie die Definitions- und Klassifikationslehre konnten ebenfalls nicht berücksichtigt werden. Dasselbe gilt von den ständig wachsenden Anwendungen der Logik in Wissenschaft und Technik. Eine weitere wesentliche Einschränkung der Textauswahl besteht darin, daß sie sich ausschließlich auf die deduktive Logik beschränkt. Der begrenzte Umfang unserer Textauswahl würde nur eine bruchstückhafte Berücksichtigung weiterer Gebiete der modernen Logik zulassen, deren Wert im Hinblick auf ihre Zielstellung nur sehr gering wäre. Sowohl die Geschichte als auch der gegenwärtige Entwicklungstand z. B. der induktiven Logik müssen daher einer besonderen Textsammlung dieser Art vorbehalten bleiben.

Die vorliegende Textauswahl widmet den semantischen Fragen der modernen Logik besonderes Augenmerk. Von grundsätzlicher Bedeutung ist dabei die Tarskische Arbeit: „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen". So, wie sie vorliegt, ist sie zu lang und hätte bei einer Aufnahme in das Kapitel XII die Proportionen der einzelnen Kapitel zueinander verschoben. Zu einer nur auszugsweisen Wiedergabe konnten wir uns nicht entschließen. Um sie aber auch nicht wegfallen lassen zu müssen, haben wir sie als Anhang der Textsammlung angefügt und, darauf möchten wir den Leser aufmerksam machen, ohne Angleichung an die moderne Orthographie und ebenso fast ohne Berichtigung ihrer Druckfehler nachgedruckt. Wo ausnahmsweise eine solche Korrektur erfolgte, wird die ursprüngliche Textstelle in eckigen Klammern folgend angegeben. Sofern es nur um einen allgemeinen Einblick in die semantische Grundlegung der klassischen modernen Logik geht, sei der Leser auf die im Kapitel XII nachgedruckten Arbeiten von A. Tarski verwiesen.

Karel Berka Lothar Kreiser

I

Zur Geschichte der Logik

Das Verständnis des Logischen hat sich in unserem Jahrhundert in tiefgreifender Weise verändert. Im Hinblick auf die Fülle der Themen, die noch bis in die dreißiger Jahre wie selbstverständlich unter dem Titel „Logik" geführt wurden, erscheint diese Veränderung heute wie die radikale Ausästung eines Baumes, und es fehlt nicht an Stimmen, die Schere und Säge von unbefugter Hand an falscher Stelle angesetzt sehen (vgl. z. B. G. Jacoby [1962]). Und doch, um im Bilde zu bleiben, nicht seiner Früchte, sondern des überwuchernden Laubes wegen, durchsetzt von dürrem Holze, drohte der durch Jahrtausende gewachsene Stamm der Logik, dessen Hauptwurzeln im griechischen Kulturkreis der Antike liegen, im Sturmwind der neuen Entwicklung des wissenschaftlichen Erkennens auseinander zu brechen, seiner Gestalt verlustig zu gehen, wie H. Scholz ([1931], 2. Auflage, S. 21) sagt. Nur dem ersten Anschein nach auf das dürre Gestrüpp eines Kalküls zurechtgestutzt, treibt das Kernholz nunmehr einen fruchtbringenden Zweig nach dem anderen, Lichtung um Lichtung den neuen Gestaltungsprinzipien gemäß ausfüllend. Die Frage nach den Prinzipien der neuen Gestaltungsform jedoch, die Frage sozusagen nach der natura naturata, zwingt dazu, aus dem Bilde herauszutreten. Die Frage ist kurz gesagt die: Wie lassen sich in Vergangenheit und Gegenwart hervorgebrachte Erkenntnisresultate, einschließlich ihrer Begründungsverfahren, als zur Logik gehörig in eine auch für die Zukunft offene Klassifikation bringen? Die Antwort hängt vom Verständnis des Logischen ab, und das ist nicht ein für allemal außerhalb seines Erkennens gegeben.

H. Scholz entnahm die Kriterien einer historischen Standortbestimmung der Logik ihrer neuesten Entwicklungsgestalt, der mathematischen Logik (Logistik). Sie galt ihm als die gegenwärtig reifste Erkenntnis des Logischen ([1931], 2. Auflage, S. 21). Damit wird die Geschichte der Logik Vorgeschichte der Logistik. Eine gewisse Berechtigung kann dieser Sichtweise nicht abgesprochen werden. Es darf nur der geschichtliche Prozeß in der Rückschau nicht einfach als die Verteilung einer Menge von Persönlichkeiten in einer Ebene verflacht verstanden werden, mit der Dimension der Zeit einerseits und der Dimension einer Annäherung jeweiliger logischer Anschauungen an die Logistik andererseits. Eine solche platte Geschichtsauffassung kann man H. Scholz auf keinen Fall nachsagen. Einer anderen Gefahr hingegen ist er, zumindest in der angeführten Arbeit [1931], nicht ganz entgangen. Aus zeitbedingter Problemsicht (aber welche könnte man auch sonst haben?) ist es leicht möglich, zu Überhöhungen von zwar gegenwärtigen, nicht aber für das Logische selbst relevanten Aspekten seines Erkennens zu kommen. Es ist der Kalkül, der sich bei H. Scholz aus einem Mittel in den eigentlichen Gegenstand logischer Erkenntnis zu verwandeln droht. Wie aber ist uns Logisches gegeben?

Auf Logisches ist nicht wie auf einen beliebigen Gegenstand, der unser Wahrnehmen auslöst, hinweisbar. Empirisch ist es nicht unabhängig von einer das Erkennen leitenden Theorie aufweisbar. In Rücksicht darauf wird von einer Theorie T gesagt, sie habe Logisches zum Gegenstand, wenn die

Sätze von T ihrem ausgedrückten Sinn nach Aussagen sind über eine nicht leere Menge (sprachlich irgendwie) mitteilbarer Gedanken mit bestimmten Eigenschaften sowie bestimmten Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften derart, daß alle Theoreme von T wahre Aussagen über eindeutig ausgezeichnete Eigenschaften sind, oder die Sätze von T ihrem Sinn nach Aussagen über ein n-Tupel von Theorien der eben definierten Art sind ($n \geq 1$). Eine Theorie der ersten Art heißt eine *empirische logische Theorie,* und eine Theorie der zweiten Art, also eine Theorie, in der über mindestens eine empirische logische Theorie ausgesagt wird, heißt eine *abstrakte logische Theorie* oder auch eine metalogische Theorie. Erlaubt der Kontext von dieser Unterscheidung abzusehen, so wird schlechthin von einer logischen Theorie gesprochen. Zwei empirische logische Theorien T_1 und T_2 sind bedeutungsgleich genau dann, wenn es einen Isomorphismus zwischen beiden Theorien gibt, bei welchem sich die Theoreme von T_1 und T_2 eineindeutig entsprechen. Logisches unterscheidet sich für das Erkennen demnach über die Bedeutungsverschiedenheit empirischer logischer Theorien.

An der gegebenen Definition einer logischen Theorie ist wesentlich, daß Logisches etwas mit irgendwie mitteilbaren Gedanken Verbundenes ist. Das schließt nicht aus, daß ein als sprachliches Ausdrucksmittel in einer logischen Theorie entwickelter Kalkül außer in Gedanken in noch anderen Bereichen ein Modell (erfüllende Interpretation) besitzt, denn nicht diese Sprache ist der gegebenen Bestimmung gemäß das Logische; sie ist die syntaktische Abbildung einer Art von Logischem. Das Vorhandensein einer Interpretation eines Kalküls über einem Bereich von Gedanken und über einem Bereich, der keine Gedanken enthält (sondern z. B. elektrische Schaltungen), besagt aus kybernetischer Sicht, daß gleiche Steuerungs- und Regelungsgesetze in ansonsten ihrer Natur nach verschiedenen Bereichen vorliegen. Man kann deshalb auch so tun, als ob man durch Analyse von Prozeduren in Bereichen, die keine Gedanken sind (etwa ‚reinen' Sprachzeichen als bloßen materiellen Gebilden), zu Einsichten in Logisches gelangen könne. Das Verfahren geht äußerlich nur deshalb auf, weil wenigstens sein Konstrukteur schon eine metalogisch formulierte Hypothese über Logisches hat, durch die er sich leiten läßt.

Die Last der gegebenen Definition hat der im Definiens vorkommende Begriff des *Gedankens* zu tragen. Er, wie auch der Begriff *Sinn,* wird hier in der von G. Frege ([1892], [1966], [1973], [1976]) gewiesenen Richtung verstanden (vgl. zu dieser Auslegung auch L. Kreiser [1979], [1979a], sowie auch **XII**). Die algebraische Charakterisierung einer strukturierten Gedankenmenge ist eine, wenn möglich, erstrebenswerte Form der Beschreibung von Logischem, aber durch die Definition einer logischen Theorie nicht notwendig gefordert. Die Definition läßt ferner offen, *wie* Logisches im Gedanklichen existiert. Ob dementsprechend zur Einsicht in ein Logisches als Objekte sprachlich präsente Gedanken, des Näheren als Aussagen ausgewiesen, in Rücksicht auf ihre wahrheitsfunktionalen Zusammenhänge zu analysieren sind, oder ob die Objekte mit Handlungen korrelierte sinnvolle Sprechakte sind, das ist für sie eine ebenso untergeordnete Frage wie die, was alles in eine metalogische Theorie aufgenommen werden kann, um von hier aus eine empirische logische Theorie so weit als möglich als Prozedur von Handlungen aufzubauen. Nur das sei noch bemerkt. Die Tatsache, daß es logische Theorien gibt, weist darauf hin, daß die Eigenschaften von mitteilbaren Gedanken nicht minder als die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen konstanter Natur sind. Eine vollständig ausgedrückte Aussage, die wahr ist, behält diese Eigenschaft, wann, wo und von wem auch immer reproduziert und ob von ihm in dieser Eigenschaft gewußt oder nicht gewußt. In der marxistisch-leninistischen Philosophie wird dieser Tatbestand durch die erkenntnistheoretische Kategorie der Objektivität der Wahrheit ausgesprochen. Ein vollständig ausgedrückter Gedanke, der nur mit Wahrscheinlichkeit behauptbar ist, hat zum Zeitpunkt seines Behauptens genau einen Wahrscheinlichkeitsgrad. Kann der Wahrscheinlichkeitsgrad mit der Zeit erhöht werden, so entspricht dem eine Folge verschiedener Gedanken, die zwar sinn-, aber nicht bedeutungsgleich sind. Auf diese Weise kann eine logische Theorie auch Veränderung, Bewegung erfassen.

Die Geschichte der Logik umfaßt alle Erkenntnisbemühungen, die im Themenkreis einer gegebenen logischen Theorie oder mehrerer gegebener logischer Theorien liegen, mögen sie auf inhaltliche Erweiterung, Verbesserungen aller Art oder auf metalogische Untersuchungen hinauslaufen. Die Geschichte der Logik umfaßt aber natürlich auch solche Erkenntnisbemühungen, die auf das theoretische Erfassen einer neuen Art von Logischem zielen, gleichgültig, ob dieses Bemühen sich zunächst im Rahmen einer letztlich andersartigen Aufgabenstellung vollzieht oder nicht. Denn Problemstellungen, die eine weitere Erkenntnis von Logischem auslösen, entspringen auch aus dem Wechselverhältnis der Logik insbesondere mit anderen Wissenschaften, selbst wenn spätere Analyse findet, daß bereits logische Betrachtungen vorliegen, die sich als in diese Richtung weisend deuten lassen. Wechselbeziehungen entstehen aus der Sicht der Logik durch Anwendungen logischer Erkenntnisse, etwa um eine Menge gegebener physikalischer Aussagen über einen ihnen gemeinsamen Objektbereich zu axiomatisieren oder logische Strukturen juristischer Argumentationsweisen aufzudecken. Solche Bestrebungen gehören zur Geschichte der jeweils anwendenden Wissenschaft, die ihrerseits mit Recht jede dabei erfolgte Modifikation von Einsichten in das Logische der Logik selbst zuweist.

Einen erweiterten Begriff von Geschichte der Logik erhält man, wenn man zur Logik noch ihre Geschichtsschreibung und schulmäßige Darstellung hinzunimmt. (Zu Fragen der Geschichtsschreibung in der Logik vgl. noch G. Schenk [1980]).

So sehr nun auch Persönlichkeiten oder Schulen, die es zu einer ersten und bewußten Formulierung einer logischen Theorie gebracht haben, wie Aristoteles, die Stoa oder G. Frege, eine geschichtlich herausragende Stellung einnehmen, so wird man, gemäß dem oben Bemerkten, doch nicht jene Bemühungen in einer Geschichte der Logik übersehen, die als eine ihrer Folgen Einsichten in das Logische eröffneten, wie das etwa durch die Eleaten, die Sophisten oder durch Platon geschah.

Die versuchte Bestimmung einer logischen Theorie läßt Wissen unter der Bezeichnung „Logik“ zusammenfassen; die jeweils historisch gegebene Gesamtheit solchen Wissens macht *die* Logik aus. Der Name „Logik“ ist (jedenfalls bis jetzt) nicht Bezeichnung einer einzigen logischen (Gesamt-) Theorie.

Das Erkennen von Logischem ist stets mit einer gewissen Auffassungsweise desselben verbunden. Periodisierungsmöglichkeiten der Geschichte dieses

Erkennens ergeben sich aus zeitlich gehäuft auftretenden Gemeinsamkeiten in Auffassungsweisen des Logischen. Um den tatsächlich geschichtlichen Prozeß logischen Wissens zu erfassen, ist seine Periodisierung gesellschaftlich-sozial zu fundieren.

In einer ersten, sehr allgemeinen, innere Differenzierungen und Übergänge zunächst unbeachtet lassenden Periodisierung kann man vier zeitlich aufeinander folgende Abschnitte in der Geschichte der Logik unterscheiden: die aristotelische Logik (Antike), die terministische Logik (Mittelalter), die traditionelle formale Logik (Neuzeit) und die theoretische Logik (Gegenwart).

Die aristotelische Logik hat die von Aristoteles entwickelten Einsichten in Logisches zur Grundlage. Er formuliert diese Einsichten in seinen, unter der Bezeichnung „Organon" zusammengefaßten Schriften (Aristoteles [1975]). Da er als erster eine empirische logische Theorie schuf, wird er als Begründer der Wissenschaft Logik angesehen. Logisches stellt sich Aristoteles dar in Begriffsbeziehungen, und es ist in einer nur wahre oder falsche Aussagen umfassenden Rede enthalten, wenn diese unter einen gültigen Syllogismus oder eine Folge gültiger Syllogismen fällt. Die Gültigkeit eines Syllogismus beruht auf der Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch, des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten und des Identitätssatzes. Die Gültigkeit wiederum dieser Sätze wird nach Aristoteles durch die Ontologie, die philosophische Lehre von dem Seienden, insofern es ist, gerechtfertigt. Das Logische dieser Auffassung nach ist also nur Anderssein von Strukturbeziehungen zwischen Klassen von an sich Seiendem, auf welche sich die Begriffe als ihrem jeweils Allgemeinen beziehen. Seiner Auffassungsweise von Logischem zufolge ist Logik für Aristoteles sowohl Organon als auch philosophische Disziplin. Die Zuordnung zur Philosophie wird, wenn auch mit wechselnden Begründungen, bis in die Neuzeit beibehalten. Geschichte der Logik ist so im großen Umfange zugleich auch Geschichte der Philosophie. Erst in der Gegenwart wird Logik auch als nichtphilosophische Wissenschaft anerkannt. Das hängt auch mit einer Veränderung dessen zusammen, was unter „Philosophie" verstanden wird. In Rücksicht auf die marxistisch-leninistische Philosophie hat man gute Gründe, die theoretische Logik ihr nicht als Teildisziplin einzuordnen. Sie ist ihr ein Organon, aber das ist sie für jede andere Wissenschaft auch.

Die Periode der aristotelischen Logik schließt auch die (in heutiger Sprechweise) aussagenlogischen Bestrebungen der Stoa ein, deren Verbindung mit den logischen Lehren von Aristoteles ein bevorzugtes Thema neuplatonischer Kommentatoren in der Spätantike war.

Mit dem Ausdruck „terministische Logik" wird „die eigentliche Neuschöpfung des Mittelalters" (J. Pinborg [1972], S. 14) auf dem Gebiete der Logik bezeichnet. An ihrer Ausarbeitung haben u. a. Petrus Hispanus, Wilhelm von Shyreswood und Roger Bacon mitgewirkt, an ihrer späteren Synthese mit der aristotelischen Logik vor allem William von Ockham und Johannes Buridanus. Gefördert durch den Nominalismus (vgl. dazu z. B. N. I. Kondakow [1978], Stichwort Nominalismus bzw. Logik, traditionelle), wird das Logische nicht mehr in Seinsstrukturen, sondern allein in Sprachstrukturen einer Gebrauchssprache realisiert gesehen, was vornehmlich durch semantische und syntaktische Untersuchungen am Beispiel der lateinischen Sprache dargestellt wird. In der Auffassungsweise des Mittelalters ist Logik „die Lehre von der Wahrheit und Falschheit der Sprache (De sermone vero et falso, wie man in der Frühscholastik formuliert) oder die Lehre von den Zeichen als Zeichen, d. h. von der Metasprache, die der Intellekt geschaffen hat, um über die Struktur der Erkenntnis und der Sprache reden zu können (De entibus rationis oder de secundis intentionibus, wie es in der Hoch- und Spätscholastik heißt)" (J. Pinborg [1972], S. 12). Die Rechtfertigung der Universalität und der allgemeinen Gültigkeit von Logischem hatte Aristoteles zu einem Rückgriff auf seine Metaphysik veranlaßt. Durch die Verlagerung des Logischen in das Sprachliche stellt sich die Frage nach einer Rechtfertigung der Verbindlichkeit des Logischen für alle Benutzer einer Sprache, welche in sich dieses Logische enthält, auf eine neue Weise. Die mit dem gesellschaftlichen Umbruch einhergehende Aufwertung und Neubelebung der Wissenschaften, insbesondere der Naturwissenschaften und der Mathematik, verschärft und erweitert die Problemstellung, indem an logisches Wissen noch die Forderung des Nachweises seiner Nützlichkeit für das wissenschaftliche Erkennen hinzutritt. Die Wegbereiter der traditionellen formalen Logik, Francis Bacon und Descartes, beantworten diese Frage durch Verwerfung aller bisherigen Logik. Fr. Bacon preist an ihrer Stelle die (zu schaffende) induktive Logik, und Descartes ersetzt sie durch seine Methodenlehre. Die durch die programmatischen Ideen der Aufklärung getragene neue Auffassungsweise kündigt sich an: Logisches ist nicht in an sich seienden Strukturen zu suchen, mögen sie als der Realität oder der Sprache zugehörig betrachtet werden; Logisches ist vielmehr Produkt und Norm des menschlichen Denkens. Logik wird Denklehre, und das jeweils hinzutretende Adjektiv, wie z. B. normative, richtige, vernünftige, wahrheitsfindende (Logik), deutet an, worin der Geltungsgrund für das Logische in seinem wechselnden Schwerpunkt innerhalb dieser allgemeinen Auffassung gesehen wird. Logisches ist Gesetzmäßigkeit allein zwischen Eigenschaften von Denkfähigkeiten, Geistestätigkeiten, Denkfunktionen, oder wie auch immer bezeichnet. Die sogenannte „Logik von Port Royal" (Antoine Arnauld und Pierre Nicole) hat im Anschluß an Descartes diese Auffassung zum ersten Male am deutlichsten und am nachhaltigsten mit der Formulierung zum Ausdruck gebracht: „Die Logik ist die Kunst, seine Vernunft in der Erkenntnis der Dinge gut zu leiten, sowohl um sich selbst zu unterrichten als auch um darüber die anderen zu belehren.

Diese Kunst besteht in den Überlegungen, die die Menschen über die vier Haupttätigkeiten ihres Geistes, das Vorstellen, das Urteilen, das Schließen und das Anordnen angestellt haben" (A. Arnauld [1972], S. 25). Der Bezug auf das Denken (statt auf die Gedanken, unabhängig vom hervorbringenden Denken betrachtet) ordnet die Logik ein in den Umkreis aller auf die Erforschung von Denken gerichteter Untersuchungen, vor allem psychologischer, gnoseologischer und methodologischer Art. Wenn auf der einen Seite dabei das Logische oftmals seine Eigenständigkeit verliert und nur noch als spezieller, abrundender Aspekt in Problemstellungen auftritt, die im Grunde anderen Wissenschaften als der Logik eigen sind, so kommt es doch durch diese Einbettung in übergreifende Fragestellungen auf der anderen Seite auch zu Einsichten in Anwendungsgrenzen anerkannten logischen Wissens, insbesondere der Aristotelischen Syllogistik. In diesem Zusammenhang lieferten die besten traditionellen formalen Logiker (wie z. B. A. Arnauld, Johann Heinrich Lambert [1764], John Stuart Mill [1843]) Beiträge zur Logik, durch welche die traditionelle formale Logik das Recht für sich in Anspruch nehmen kann, eine Periode in der Geschichte der Logik darzustellen. Gleich am Anfang dieser Periode steht mit ein Werk, welches diese fruchtbare Seite im hervorragenden Maße repräsentiert: Die *Logica Hamburgensis* von Joachim Jungius [1957]. Dieses von G. W. Leibniz hochgeschätzte Werk gibt eine Behandlung der Relationen, die wert ist, mit ihr die nachfolgenden Textauszüge zu beginnen (**I.** 1.). Daß die *Logica Hamburgensis* am Ende einer Darstellungsperiode logischen Wissens steht, die durch die scholastischen *Summulae logicales* gekennzeichnet ist, hat ihre Wirkungsgeschichte eingeschränkt. Aber die „stilgeschichtlich überholte Gestalt der *Logica Hamburgensis*“ entsprang den Zwängen, denen J. Jungius mit diesem Auftragswerk des Hamburger Scholarchates unterlegen war (vgl. J. Jungius [1957], S. XVIff.).

Ein Vergleich der *Logica Hamburgensis* mit der bereits erwähnten Logik von Port Royal: *La Logique ou l'art de penser* läßt die beiden Grundtendenzen innerhalb der traditionellen formalen Logik erkennen. Die eine Tendenz ist die Herabsetzung der aristotelischen Logik insgesamt, verbunden mit dem Versuch, in den so entstandenen Freiraum eine neue, mehr oder minder berechtigt als logisches System bezeichnete Lehre einzufügen. Die andere Tendenz besteht in einer Weiterarbeit auf der Grundlage eben dieser aristotelischen Logik, mit mehr oder minder starker Modifizierung oder gänzlicher Verwerfung nur ihrer Ontologie. Joachim Jungius gehört dieser, John Stuart Mill der anderen Tendenz an. Aus der durch J. Jungius repräsentierten Tendenz ragen mit G. W. Leibniz und B. Bolzano zwei Persönlichkeiten heraus, die in ihren logischen Anschauungen diejenigen der traditionellen formalen Logik in einer auf die Neuzeit gerichteten Weise übersteigen.

Das 19. Jahrhundert ist die Blütezeit von Systemen der traditionellen formalen Logik, die der durch J. St. Mill vertretenen Tendenz angehören. Aber etwa um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts beginnt sich spürbar das theoretische Umfeld der Logik zu verändern, sowohl durch eine sich zunehmend auffächernde Wissenschaftsentwicklung als auch durch den sich anbahnenden Prozeß der Bildung von Theorien mit Theorien als Modellen bedingt. In ihrem Bemühen um theoretische Begründung gewonnener Erkenntnisse ist es die Mathematik, die nicht nur neue Anforderungen an die Logik stellt, sondern sogleich auch in Gestalt der Algebra der Logik (**II.**) von ihr Besitz ergreift. Eine neue Auffassungsweise des Logischen beginnt sich, freilich noch auf unadäquate Weise, Geltung zu verschaffen. Wenn es auch G. Frege vorbehalten bleibt, der richtigen Fassung in Gestalt der klassischen Logik (**III.**) Ausdruck zu geben, die neue, gegenwärtige Periode der Logikentwicklung beginnt mit den Arbeiten von A. De Morgan und vor allem G. Boole.

Aus der Sicht der klassischen Logik (als einer Realisierungsform der Auffassungsweise des Logischen in der Periode der theoretischen Logik) werden die logischen Einsichten von G. W. Leibniz und B. Bolzano in ihrer grundlegenden Bedeutung für eben diese Auffassungsweise erkennbar. Die voraufgehende Periode der Logikgeschichte konnte sie nicht in sich aufnehmen, sie hat sie daher unbeachtet gelassen. Die Mehrzahl der logischen Werke von G. W.

Leibniz ist erst zu Beginn unseres Jahrhunderts der Öffentlichkeit zugänglich gemacht worden, ein Verdienst von L. Couturat [1901].

Weitere Literatur: Th. Ziehen [1920]; F. Enriques [1927]; J. Jørgensen [1931]; Ph. Boehner [1952]; O. Becker [1957]; T. Kotarbiński [1957]; C. Prantl [1957]; P. S. Popov [1960]; W. Kneale – M. Kneale [1962]; W. Risse [1964], [1970]; E. Kapp [1965]; N. I. Stjažkin [1967]; K. Berka [1970], [1977]; G. Schenk [1973]; M. Frede [1974]; P. S. Popov – N. I. Stjažkin [1974]; F. Kurt [1978], [1978a]; A. Seifert [1978].

Drei Forderungen sind es im wesentlichen, die G. W. Leibniz an die von ihm angestrebte neue Logik, die *mathesis universalis* (*logistica* oder *logica mathematica*) stellt (**I.2.**): Erstens den Aufbau einer *characteristica universalis*, d. h. eines Zeichensystems, dessen Grundzeichen Charaktere von Grundbegriffen sind und deren Kombination die Charaktere aller anderen Begriffe ergeben soll; zweitens die Bildung eines *calculus ratiocinator*, d. h. eines Kalküls, der eine rein rechnerische Behandlung aller in den Zeichen der characteristica universalis ausgedrückten Aussagen gestattet und drittens die Formulierung einer *ars iudicandi*, d. h. eines Verfahrens, durch das in bezug auf beliebige, in den Zeichen der characteristica universalis ausgedrückten Aussagen entschieden werden kann, ob sie wahr oder falsch sind (vgl. H. Scholz [1931], [1942], [1961]; G. Schischkoff [1947], R. Kauppi [1960]).

G. W. Leibniz hat seine Forderungen in Arbeiten aus den Jahren 1679, 1686 und 1690 zu realisieren versucht (vgl. K. Dürr [1930], [1947]). Historisch tritt das „Leibniz-Programm" (H. Scholz) verschiedentlich wieder auf, so bei Chr. Wolff (1679–1754), J. A. von Segner (1704–1777), G. Ploucquet (1716–1790), J. H. Lambert (1728–1777), G. J. von Holland (1742–1784), G. F. Castillon (1747–1814) und S. Maimon (1753–1800). Die erste Gestalt der modernen Logik, die Algebra der Logik, entstand jedoch unabhängig von diesem „Leibniz-Programm". Wird das „Leibniz-Programm" auf die Logik eingeschränkt, so entspricht innerhalb der modernen Logik der ersten Forderung die Aufstellung eines Systems von Definitionsregeln, der zweiten Forderung die Bildung eines Logikkalküls und der dritten Forderung die Formulierung eines Entscheidungsverfahrens in bezug auf Ausdrücke dieses Kalküls.

Aber auch bei Einschränkung auf die Logik läßt sich dieses Programm nicht realisieren. Die *mathesis universalis* würde dann nämlich ein Entscheidungsverfahren enthalten, mit dessen Hilfe man alle zur Diskussion stehenden semantischen Fragen sozusagen rein rechnerisch beantworten könnte. Auf Grund der Dialektik von relativer und absoluter Wahrheit ist es vom Standpunkt der marxistischen Philosophie von vornherein als unmöglich anzusehen, ein solches, die Logik insgesamt umfassendes Programm positiv zu lösen. Die auf K. Gödel zurückgehenden Erkenntnisse haben das bestätigt und gezeigt, daß schon in bezug auf die deduktive Logik das „Leibniz-Programm" nicht realisierbar ist (vgl. **X.**) Das bedeutet aber nicht, daß bei weiterer Einschränkung das „Leibniz-Programm" nicht realisierbar wäre, es also nicht Teilgebiete der Logik gäbe, in denen von jeder einschlägigen Formel durch ein

Entscheidungsverfahren (**X.**) feststellbar ist, ob und unter welchen Voraussetzungen sie wahr oder falsch ist. Das ist z. B. in der klassischen Aussagenlogik der Fall.

Ebenso wie G. W. Leibniz hatte auch B. Bolzano keinen unmittelbaren Einfluß auf die weitere Entwicklung der modernen Logik ausgeübt. Die Bedeutung seiner *Wissenschaftslehre* [1837] wurde zuerst von E. Husserl [1900—1901] erkannt, sie erfuhr aber erst durch W. Dubislav [1931a] und H. Scholz [1937] eine richtige Bewertung. (Vgl. noch Y. Bar-Hillel [1952], G. Buhl [1961] und J. Berg [1962]).

Den wichtigsten Beitrag B. Bolzanos finden wir in seinen Untersuchungen über die Ableitbarkeit und die Abfolge (**I. 3.**), die von denselben Begriffsbildungen ausgehen, wie die später völlig unabhängigen Untersuchungen von G. Gentzen (**VII. 1.**) und A. Tarski (**XII. 4.**). Zwischen dem Folgerungsbegriff von B. Bolzano und dem von G. Gentzen sowie A. Tarski bestehen jedoch gewisse Unterschiede. Für B. Bolzano folgt M, N, O, ... aus A, B, C, ... gerade nur dann, wenn (1) jedes (semantische) Modell von A, B, C, ... auch ein Modell von M und N und O und ... ist; mit anderen Worten, wenn jeder der Schlußsätze M, N, O, ... aus den Prämissen A, B, C, ... einzeln ableitbar ist. Und (2), wenn die Prämissen der Grund für die Schlußsätze sind. B. Bolzano, der damit einen sehr starken Folgerungsbegriff einführte, würde offensichtlich das Ableiten aus einer widerspruchsvollen Prämissenmenge — entsprechend der Formel CKpNpq — ablehnen. Für A. Tarski hingegen ist bereits die erste Bedingung zur Definition des Folgerungsbegriffes hinreichend. Um von einer Folgerungsbeziehung im Sinne von G. Gentzen sprechen zu können, genügt es, wenn es zu jedem (semantischen) Modell von A, B, C, ... ein (semantisches) Modell von einem der M, N, O, ... gibt, oder anders, wenn wenigstens einer der Schlußsätze aus der Prämissenmenge ableitbar ist. Der Folgerungsbegriff von G. Gentzen ist allgemeiner. Enthält jedoch die Folgerungsmenge gerade nur einen Schlußsatz, sind das Bolzanosche und das Gentzensche Folgern identisch (vgl. K. Schröter [1955—1958], I, 60f.).

B. Bolzano erkannte auch, daß der Folgerungsbegriff nur dann exakt festgelegt werden kann, wenn man entscheiden kann, welche Begriffe logische Begriffe sind. Dieses fundamentale Problem der logischen Semantik, das sowohl zur scharfen Unterscheidung von Logik und Mathematik wie auch für eine philosophische Grundlegung der Logik von größter Bedeutung ist, konnte in der modernen Grundlagenforschung (J. G. Kemeny [1948], [1956]; A. D. Getmanova [1959]) bisher nur teilweise positiv gelöst werden.

In seiner Klassifikation von Aussagen findet man ferner schon zwei wichtige Bestandteile der modernen Semantik. Erstens eine Einteilung von Aussagen in allgemeingültige („allgemeingültige“, „vollgültige“), z. B. „Der Mensch Cajus ist sterblich“; unerfüllbare („allgemein- oder durchaus ungültige“), z. B. „Der Mensch Cajus ist allwissend“, und solche, die weder das eine noch das andere sind, wie z. B. „Das Wesen Cajus ist sterblich“ ([1837], Bd. II, § 147, S. 78f., S. 82). Die veränderliche Vorstellung, d. h. diejenige Vorstellung im jeweiligen Satz, die als veränderlich angesehen wird, ist in allen angegebenen Beispielsätzen die mit ‚Cajus‘ bezeichnete Vorstellung. Bedingung für den einzusetzenden Namen einer Vorstellung ist, daß sie gegenständlich ist, d. h., daß mindestens ein Gegenstand durch sie vorgestellt wird.

Zweitens eine Unterscheidung von „analytischen Sätzen in der engeren Bedeutung" („logisch analytische", „identische", „tautologische Sätze"), z. B. „A ist A", und analytischen Sätzen „in der weiteren Bedeutung" („bloß analytische"), z. B. „Ein Mensch, der sittlich böse ist, verdient keine Achtung" ([1837], Bd. II, § 148, S. 84). Für diese Einteilung gibt B. Bolzano eine Begründung, die mit der von W. O. Quine [1953] in gleicher Weise vorgenommenen Einteilung weitgehend übereinstimmt.

Ergänzende Literatur: J. Jørgensen [1931]; T. Kotarbiński [1957]; P. S. Popov [1960]; W. Kneale — M. Kneale [1962]; N. I. Stjažkin [1967].

I. 1

J. Jungius

*Logica Hamburgensis**

| VIII. [427]

Vom Prädikament der Relation im allgemeinen.

1. Das Prädikament1] der RELATION wird von den Griechen κατηγορια τῶν πρός τι genannt, d. h. Kategorie jener (Dinge), die in Bezug stehen zu etwas.

2. Es besitzt nämlich diese Kategorie das Eigentümliche, daß der größte Teil jener (Dinge), die in ihr enthalten sind, zweckmäßiger durch konkrete Begriffe als durch abstrakte ausgedrückt werden.

3. *Relate* (τὰ πρός τι) nennt man solche, von denen gilt, daß sie das, was sie sind, für andere sind, oder die sich in irgendeiner Weise oder irgendeinem Fall auf anderes beziehen.

4. Die *Relation,* auch *Verhältnis* oder *Bezugnahme* geheißen, ist ein Akzidens, dem gemäß man sagt, ein Subjekt sei auf etwas bezogen, wie z. B. *Herrschaft* eine Relation ist, weil *Simo,* welcher Subjekt der Herrschaft ist, oder dem die Herrschaft als einem Subjekt inhäriert, diesem Akzidens zufolge der *Herr* des *Davus* genannt wird; ebenso ist *Knechtschaft* eine Relation, weil ihr zufolge *Davus,* dem die Knechtschaft als einem Subjekt inhäriert, der *Knecht* des *Simo* genannt wird. Und ebenso ist *Gleichheit* eine Relation, weil ihr zufolge die *Linie,* die Subjekt dieser Relation ist, hinsichtlich einer *anderen Linie* gleich genannt wird.

5. *Terminus* (Grenze) der Relation ist jene Sache, die die Relation in Betracht zieht, oder auf die sich das Relatum bezieht, oder das, in dem die Relation selbst ins Ziel kommt, wie z. B. *Terminus der Herrschaft,* die in Simo ist, *Davus* ist, und umgekehrt: *Terminus der Knechtschaft,* die in Davus ist, *Simo* ist, und ebenso ist *Terminus der Gleichheit,* gemäß dem man sagt, daß eine dreieckige Fläche einer quadratischen gleich sei, die *quadratische Fläche*; Terminus aber der Gleichheit, gemäß dem man sagt, daß eine quadratische Fläche einer dreieckigen gleich sei, ist die *dreieckige Fläche.*

6. *Korrelate* sind zwei Relate, welche Subjekte und Termini unter sich vertauschen, oder von denen das Subjekt des einen, Terminus des anderen ist und umgekehrt. So sind *Vater und Sohn* Korrelate, weil z. B. *David,* Subjekt der einen Relation, das die Philosophen *Vaterschaft* nennen, Terminus der anderen Relation ist, die sie *Sohnschaft* nennen und die in Salomon ist; umgekehrt ist *Salomon* Terminus der Vaterschaft, die in *David* ist. Ebenso sind *Lehrer und Schüler* für einander Korrelate, weil Subjekt der früheren Relation, z. B. *Aristoteles*, Terminus der späteren Relation ist; und umgekehrt ist *Alexander,* der Subjekt der späteren Relation ist, Terminus der früheren.

7. Korrelate sind unter sich entweder von *gleicher* oder von *verschiedener Art.*

8. *Korrelate von gleicher Art* oder *gleichförmige* Korrelate sind die, welche, insoweit sie Relate sind, derselben Definition oder Wesenheit angehören. So wenn z. B. ein *Quadrat* einem *Dreieck,* und umgekehrt dieses jenem *gleich* ist, Korrelate von gleicher Art vorliegen, weil man jedes von beiden bezüglich des anderen im selben Sinn gleich nennt.

9. *Korrelate von verschiedener Art*, der Art nach differente oder *ungleichförmige* Korrelate nennt man die, welche verschiedene Definitionen besitzen,
[428] wie z. B. *Knecht und Herr* | Korrelate verschiedener Art sind, weil die Definition des Herrn eine andere ist als die des Knechts; ebenso sind *Überfluß und Mangel; Lehrer und Schüler; Befehlender und Gehorchender; Großvater und Enkel* Korrelate verschiedener Art.

10. Die Korrelate der gleichen Art werden von den mittelalterlichen Philosophen *Relate der Aequiparanz* genannt; solche von differenter Art aber *Relate der Disquiparanz.*

11. Korrelate von übereinstimmender Art sind meistens auch *Synonyme,* d. h. sie werden mit dem gleichen Namen bezeichnet, wie z. B. *zwei Gleiche* oder *zwei Ähnliche.*

12. Und von diesen wird bisweilen auch so gesprochen, wie wenn es sich um *eine einzige* Relation zwischen beiden Beziehungsgliedern handelte, obgleich immer zweierlei Beziehungen aufzufassen sind. So sagen wir z. B. daß eine *Freundschaft zwischen Orest und Pylades* bestehe, obschon die Freundschaft, die Orest gegenüber Pylades empfindet, eine andere ist als jene, die Pylades dem Orest entgegenbringt. Ebenso steht es beim *Vertragsverhältnis* zwischen zwei Kaufleuten, bei der *Gleichheit* zwischen zwei Figuren, oder beim *Abstand* zwischen zwei Körpern.[2]]

13. Es kommt auch vor, daß man Korrelate von verschiedener Art oder ungleichförmige Korrelate unter einem *gemeinsamen Namen* vereinigt, wie z. B. „*coniunx*" (Ehebund) sowohl vom *Gatten* als von der *Gattin*; „*stipulans*" (Kontraktpartner) sowohl von jenem, der um den Kontrakt *nachsucht,* als auch von jenem, der ihn *zusichert*, gesagt wird. *Paronyme* oder *Denominative* werden solche genannt, von denen eines den Namen vom andern übernimmt; *Subalterne,* von denen eines dem andern untergeordnet ist, oder von denen eines unter dem andern steht; *Privativ — entgegengesetzte,* von denen eines die Privation des andern ist.

14. Ja selbst bei *abstrakten Worten* drängt sich diese Homonymität auf, wie man z. B. sagt, daß ein *Mandat* (Auftrag) zwischen zweien vollzogen wird, obgleich die Verpflichtung des *Mandanten* eine andere ist als die des *Mandatärs*;

oder wie man von der *Bürgschaft* zwischen dem (die Bürgschaft) heischenden und dem sie gewährenden; vom *Ehebund* zwischen dem Gatten und der Gattin spricht. Ebenso drücken auch die Griechen die Relation des *Mietens und Vermietens* mit einem einzigen Wort (μίσθωσις) aus.

15. Zuweilen sind *Heteronyme* Korrelate derselben Art. Wie z. B. *Bruder und Schwester* Relate derselben Art sind, mögen sie auch dem Namen nach verschieden sein; die Definition beider nämlich ist die, daß sie gemeinsame Eltern haben; daß aber das eine männlich, das andere weiblich ist, liegt außerhalb der Wesenheit dieser Relation, weshalb sie auch für die Griechen Synonyme sind. Ebenso ist *Knecht und Magd* eine Relation gleicher Art, weil dieselbe Relation des Knechts und der Knechtin, der Knechtin und der Magd, des Hausherrn und der Hausfrau besteht.

16. Korrelate werden eigentlich die Relate *in concreto* genannt; dennoch dehnt man die Bezeichnung auch auf abstrakt gefaßte Relationen selbst aus. So nennt man *Tun und Leiden; Überfluß und Mangel; Herrschaft und Knechtschaft; Recht und Verpflichtung; Besitzen und Besessen-werden* Korrelate.

17. Oft bilden mehr als zwei (Glieder) ein Korrelatum, was dann eintritt, wenn die Relation mehrere Termini in Betracht zieht, wie z. B. *Exzess, Exzedens und Defiziens; Kautionsstellung, Kaution und Kautionsannahme; Kläger, Angeklagter und Richter;* ebenso bezieht sich *ein Miterbe* auf den *anderen,* auf das *Erbe selbst* und auf den *Erblasser.*[3]]

18. Bisweilen ist eines der Korrelate *anonym* (namenlos), wie z. B. im freien Staatswesen *das,* was dem *Magistraten* entspricht, falls man es nicht, mit vielen, *Untergebener* oder *Untertan* nennen will, was die Griechen mit ἄρχων καὶ ἀρχόμενος bezeichnen. So ermangelt auch dem Korrelat des *Objektes* einen Namen.

19. Die Relation ist einerseits eine in der Sache selbst liegende, *innerliche,* andererseits eine bloß zukommende, *äußerliche Relation.*

20. Die Dinge selbst, die in einem innerlichen Bezug auf andere bezogen sind, nennt man *Relate gemäß dem Gesagtwerden;* jene aber, die in einem äußerlichen Bezug stehen, nennt man *Relate gemäß dem Sein.*

| IX. [429]

Von der inneren Relation.

1. Die in der Sache liegende, *innere Relation* ist jene, die gemäß dem ihr bezüglichen Ding so innerlich ist, daß sie von ihm nicht abgelöst werden kann, oder daß das bezügliche Ding niemals ohne diese Relation auftritt. Sie ist entweder *gemeinsam* oder *eigentümlich.*

2. *Gemeinsam* ist die, welche an kein Prädikament gebunden ist, sondern die durch mehrere Prädikamente sich gleichsam hindurchzieht. Solch eine Relation besteht zwischen *Ganzem und Teil,* zwischen *Subjekt und Inhärierendem,* zwischen der *inneren Ursache und ihrem Verursachten.*[4]]

3. Das GANZE ist einerseits *essentiell* andererseits *quantitativ.*

4. Ein *essentielles Ganzes* ist jenes, das so aus den seine Wesenheit konstituierenden Teilen besteht, daß sie sich gegenseitig *durchdringen* und dem Orte nach nicht getrennt sind. Solch ein Ganzes ist der aus Seele und Leib bestehende

lebendige Körper; ebenso jeder beliebige, aus Stoff und Form konstituierte, *natürliche Körper*.

5. Ein *quantitatives Ganzes* ist jenes, dessen Teile unter sich und dem Orte nach distinkt sind, oder das außer einander liegende Teile hat. Es ist zweifach: Hinsichtlich seiner Teile *gleichgeartet* und *ungleichgeartet*.

6. Das *gleichgeartete Ganze* ist jenes, dessen Teile von gleicher Art oder Definition mit dem Ganzen sind, wie z. B. *Wasser* ein quantitatives gleichgeartetes Ganzes ist, weil es außer einander liegende Teile hat und jeder beliebige quantitative Teil von ihm *Wasser* ist. So sind *Feuer, Luft, Holz, Haut, Milch, Blut* gleichgeartete quantitative Ganze.[5]]

7. Das *ungleichgeartete quantitative Ganze* ist jenes, dessen Teile sich dem Wesen und der Definition nach unterscheiden, wie z. B. der *Baum* ein ungleichgeartetes quantitatives Ganzes ist, weil er örtlich unter sich distinkte, nach Wesen und Definition verschiedene Teile hat, wie *Wurzel, Stamm* oder *Strunk, Äste, Zweige, Blätter, Blüten, Rinde, Mark*. Ebenso ist das *Lebewesen* ein ungleichgeartetes quantitatives Ganzes, weil es aus Teilen besteht, die sich dem Orte nach gegenseitig unterscheiden, nämlich *Kopf, Hals, Brust, Bauch, Beine usw.* Und ebenso ist der *Kopf* wiederum ein ungleichgeartetes Ganzes, weil er aus *Augen, Ohren, Mund, Zunge, Nase* usw., besteht.

8. Im Quantitativen ist die *gerade Linie* ein gleichgeartetes quantitatives Ganzes, weil sie nämlich in gerade Linien *zerfällt*. Die *Peripherie* ist ein ungleichgeartetes quantitatives Ganzes, sie zerfällt nämlich nicht in Peripherien, sondern in *Bogen*; ebenso zerfällt der *Kreis* nicht in Kreise, sondern in *Halbkreise, Quadranten, Sextanten* oder andere, durch ihre Definition vom Ganzen abweichende Teile.

9. Auch die Qualität hat auf Grund ihrer Intensität Teile, welche bisweilen *Grade* genannt werden, wie z. B. eine *intensive Wärme* mehr Grade hat als eine schwache.[6]]

10. Der *Teil* kann auch unterschieden werden in einen nächstliegenden und einen fernerliegenden Teil.

11. *Nächstliegender Teil* ist jener, zwischen den und dem Ganzen kein anderer Teil fällt, so wie die *Seele* und der *Körper* nächstliegende Teile des *Lebewesens* sind.

12. *Fernliegender Teil* ist jener, der Teil eines Teiles ist, wie z. B. der *Kopf* und die *Füße* fernliegende Teile des *Lebewesens* sind, weil sie Teile des organischen Körpers, der Teil des Lebewesens ist, sind. [......][7]]

[431] | X.

Von der äußerlichen Relation.

1. Die *äußerliche Relation*, die für diese Kategorie eigentümlich ist, ist einerseits *einfache*, anderseits *zusammengesetzte*.

2. EINFACHE ist diejenige, welche nicht in mehrere Beziehungen aufgelöst werden kann, da sie nämlich aus einem einfachen Fundament hervorgeht.

3. *Fundament der Relation*, was andere auch *gründenden Grund* nennen, ist aber das, was Ursache oder günstige Gelegenheit ist, damit eine Relation im Subjekt entspringt.

4. Das Fundament ist einerseits *gemeinsames* oder *transzendentes*, anderseits das einem *bestimmten Prädikament eigentümliche*. Deshalb wird die Relation als eine, bald aus dem *transzendenten*, bald aus dem *prädikamentalen* Fundament *entspringende* bezeichnet.

5. TRANSZENDENTES Fundament der Relation ist entweder die *Einheit* oder die *Vielheit*.

6. Aus der Einheit entspringt die *Identität*, d. h. die Übereinstimmung zweier Dinge gemäß der Wesenheit.

| 7. Aus der Vielheit entspringt die *Verschiedenheit*, sonst auch *Distinktheit* [432] genannt, die eine Nichtübereinstimmung zweier Dinge gemäß der Wesenheit ist.

8. Beide gehen durch alle Prädikamente hindurch, d. h. sie können ein *Subjekt* aus jeder möglichen Gattung der Seienden haben, denn man nennt sowohl die *Substanz* bezüglich der Substanz, als die *Quantität* bezüglich der Quantität, als irgend eines der übrigen Akzidentien bezüglich eines anderen entweder *identisch* oder *verschieden*, ja sogar die *Relation* bezüglich der Relation.

9. Die *Grade* der Identität und Verschiedenheit werden gemäß den Prädikabilien unterschieden, wie solche *identischer* sind, die der Zahl als die der Art nach, und solche die der Art als die der Gattung nach, und solche die der untergeordneten als der obersten Gattung nach, identisch sind.

10. Umgekehrt aber sind solche *verschiedener*, die der obersten als der untergeordneten Gattung nach und die, welche der Gattung als der Art nach und die, welche der Art als bloß der Zahl nach, verschieden sind.

11. Unter den sowohl kontinuierlichen als diskreten Quantitäten ist die (Relation) als Identität wie als Verschiedenheit eine zwiefache: Einerseits *gemäß der Determination* der Quantität, anderseits *gemäß ihrer Art*.

12. Diejenige, welche die Identität ist, nennt man *auf Grund der Determination Gleichheit* oder *Parität;* aber die Verschiedenheit wird *Ungleichheit* oder *Imparität* genannt. Daher sagt man auch, daß die eine der unter sich verglichenen Quantitäten *größer* oder *übermäßig* sei, die andere *kleiner* oder unter dem Maß, während die dritte, der *Unterschied*, das *Übermaß* oder der *Mangel* ist.

13. Diejenige, welche *der Art gemäß* im Quantitativen *Identität* oder *Verschiedenheit* ist, behält den gemeinsamen Namen bei, wie z. B. *die gerade Linie hinsichtlich der geraden* der Art nach dieselbe ist, mag sie auch ungleich sein; *die gerade Linie hinsichtlich der gekrümmten* kann, auf Grund der Determination gleich sein, mag sie auch *gemäß der Art verschieden sein.*

14. Diejenige (Relation) zwischen den Qualitäten, welche die Identität ist, wird *Ähnlichkeit*, diejenige aber, welche die Verschiedenheit zwischen jenen beiden ist, wird *Unähnlichkeit* genannt. Wie z. B. *die gelbe Farbe der gelben ähnlich, der roten unähnlich ist.* Ebenso ist *die kreisförmige Gestalt der kreisförmigen, die quadratische der quadratischen ähnlich, die kreisförmige der quadratischen aber unähnlich.*

15. Zuweilen wird der Begriff der *Ähnlichkeit* und *Unähnlichkeit* so sehr ausgedehnt, daß er die Identität und auch die Verschiedenheit, die *zwischen den Tätigkeiten und Leiden*, ja sogar den *Relationen* besteht, umfaßt.

16. Die Paronyme oder *Konkreta* dieser Relation werden im einen Sinne *vom nächstliegenden*, im andern Sinne *vom fernliegenden Subjekt*, d. h. von der Sub-

stanz prädiziert, so daß hier das Homonymische im *Hinblick auf das Eine* zutrifft, wie z. B. *der zylindrische Körper dem sphärischen gleich* genannt wird, weil die Körperhaftigkeit oder Größe des Zylinders der körperhaften Größe des Sphäroids gleich ist; ebenso wird *ein Baum dem anderen* gleich, größer oder kleiner genannt, weil er entweder gleiche, größere oder kleinere Höhe, Dicke oder Massigkeit besitzt im Vergleich zur Höhe, Dicke oder Massigkeit des andern. Ebenso sagt man, daß die *Blume der Blume ähnlich oder unähnlich sei*, weil entweder Farbe, Gestalt oder Vermögen der einen, der homogenen Qualität der andern, als ähnlich oder unähnlich erfaßt wird.

17. Das *aus einem bestimmten Prädikament* hergeholte Fundament der Relation ist entweder die *Zahl*, die *kontinuierliche Quantität*, die *Größe*, die *Zeit*, oder schließlich *Tun und Leiden*.

18. Die *aus der Zahl* als Fundament hervorgegangene Relation wird *Verhältnis*, von den Griechen λόγος genannt, wie z. B. das *Doppelte* und die *Hälfte*, bzw. *Einzweitel*; das *Dreifache* und das *Drittel*, bzw. *Eindrittel*; das
[433] *Anderthalbfache* und *Zweidrittel*; das *Vier- | drittelfache* und *Dreiviertel usw.* Hierher gehören auch *die Maße* und die Beziehungen *des Gemessenen*.

19. Die Relation, die ihr Fundament *in der kontinuierlichen Quantität* besitzt, ist diejenige des *Extremen* und des *Mittleren*.

20. Diejenige aber, welche *in der Größe* fundiert wird, ist die Relation des *Konvergierenden*, *Parallelen*, *Sekanten*, *Tangenten*, *Geraden* oder *Senkrechten*, *Schiefen*, *Angrenzenden* oder *Nächstfolgenden*, der *Distanz* oder des *Intervalls*.

21. Die *in der Zeit* fundierte Relation ist die *des Früher*, *des Zugleich* und *des Später*.

22. Die *Kategorie* der Relationen *des Tuns und Leidens* ist äußerst ergiebig, da hier ein *Fundament* reichlicher vorhanden ist als bei den meisten andern, weshalb auch die Mannigfaltigkeit der Relationen, gemäß den verschiedenen Arten und Weisen des Tuns und Leidens, eine vielfache ist.

23. Vom Tun als oberster Gattung kommt die Relation der *Wirkursache* her.

24. Von den Arten des Tuns stammen die Arten und Modi der Wirkursache ab, wie z. B. die des *Hervorbringens* oder *Erzeugens*, des *Bewahrens*, des *Instrumentalen*, d. h. dessen, das Bewegtes bewegt oder etwas Erlittenes bewirkt; ebenso die des *Bewegers*, des *Urhebers*, des *Erzeugers*.

25. Unter „*effizient*" wird entweder das verstanden, *was bewirken kann*, und so mit der inneren Relation des Vermögens zusammenfällt, oder es wird *für das* genommen, *was in Wirklichkeit wirkt*, und das zur Kategorie des Tuns gehört, oder es wird schließlich *als das* aufgefaßt, *was bewirkt*, und in diesem Sinne endlich ist es eine vom Tun als Fundament herstammende *äußerliche Relation*.

26. Unter anderen berühmt ist die Einteilung der Relation in eine solche, die man *gemäß der Natur* und eine solche, die man *gemäß der Setzung* bezeichnet .[......][8]

[434] | 32. Eine ZUSAMMENGESETZTE äußere Relation ist jene, die aus mehreren Fundamenten entstanden, in mehrere einfache Relationen aufgelöst werden kann; wie z. B. die Relation des *Großvaters*, des *Enkels*, des *Bruders*; der Großvater ist nämlich der Vater des Vaters; der Enkel ist der Sohn des Sohnes; der Bruder, der die gleichen Eltern hat. Ebenso der *Mitknecht*, der denselben Herrn hat.

33. Die zusammengesetzte Relation ist zwiefach; entweder entsteht sie nämlich aus *homogenen* bzw. gattungsgleichen *Fundamenten*, oder aus *heterogenen* Fundamenten.

34. Aus gattungsgleichen Fundamenten, wie z. B. aus der Gattung der Tätigkeit, *Großvater und Enkel;* ebenso ist *Freund* der, welcher Wohlwollenden wohlwill. Oder z. B. aus der Kategorie der *Quantität: Höher* ist das, was vom Erdmittelpunkt weiter entfernt ist; *tiefer*, was ihm näher liegt.[9]]

35. Aus gattungsverschiedenen Fundamenten hervorgegangene Relationen sind: *Kollegen* und *Genossen*; Kollegen nämlich sind die, welche vom gleichen Amt sind; Genossen die, welche im gleichen Geschäft tätig sind. Von derselben Ordnung sind die Relationen des *Bruders*, des *Mitknechtes*, des *Miterben*.

36. Ebenso werden gemäß der zusammengesetzten Relation Figuren *gleich hoch* genannt, d. h. solche, die gleiche Höhe oder gleichen Abstand des Scheitelpunktes von der Basis haben. Ebenso ist eine zusammengesetzte Relation die des *gemeinschaftlichen Maßes*, des *gemeinsamen Schnittes*, *Segmentes*. Ebenso die des *Onkels*, des *Neffen*, des *Schwagers*, des *Stiefvaters*, des *Stiefsohnes usw.*

37. ATTRIBUTE der Relation sind die folgenden.

38. I. Relate, die sich durch *inneren Bezug* aufeinander beziehen, können ein Konträres besitzen. Wie z. B. die *Tugend dem Laster* und die *Wissenschaft dem Irrtum* konträr entgegengesetzt ist.

39. Die übrigen Relate lassen eine Kontrarietät nicht zu, außer sie würden begrenzt. Wie z. B. der *Reiche dem Armen*, d. h. der *vieles* dem *wenig* Besitzenden, entgegengesetzt wird.

40. II. Einige Relate lassen ein *Mehr und Minder* zu. Wie z. B. *irgend ein Ähnliches mehr oder minder ähnlich sein kann.*

41. III. Relate sind *reziprok* (müssen sich wechselweise fordern). Wie z. B. *Die Wissenschaft, Wissenschaft des Wißbaren; der Sinn, Sinn des Sinnlichwahrnehmbaren; der Flügel, Flügel des Geflügelten; der Verlobte, Verlobter der Verlobten; der Gläubiger, Gläubiger des Schuldners ist.*

42. IV. Relate sind *von Natur gleichzeitig.* Wie z. B. *im selben Moment, da Davus anfängt Diener des Simo zu sein, beginnt Simo Herr des Davus zu sein.*

43. Relate sind von überaus schwacher und hinfälliger Wesenheit, so sehr, daß sie oft kaum von bloßen *Gedankendingen* abstehen und mit Mühe sich von diesen unterscheiden lassen.

* *Logica Hamburgensis hoc est Institutiones Logicae. In usum Schol. Hamburgensis conscriptae, et sex libris comprehensae Autore Joachimo Jungio Phil. ac Med. D. Gymnasij ac Scholae classicae Rectore.* Unter diesem Titel erschien die *Logica Hamburgensis* 1638 beim Hamburger Ratsbuchdrucker Jacob Rebenlin. Der vorliegende Text ist entnommen aus: Joachimi Jungii, Logica Hamburgensis. Edidit Rudolf W. Meyer. In Aedibus J. J. Augustin Hamburgi, MCMLVII. Diese Ausgabe enthält den bearbeiteten Originaltext und die deutsche Übersetzung, die hier übernommen wird. Die abgedruckten Teile zu den Relationen entstammen dem Ersten Buch der Allgemeinen Logik, Kapitel VIII, IX, X.

[1]] Jungius folgt hier Aristoteles, der das πρός τι als Kategorie entdeckte. Als Prädikament ist die Relation eine allgemeinste Gattung (Kategorie), die in eine Reihe von Gattungen und Arten zerfällt. Jungius untersucht allgemeine Eigenschaften

der Relation als Kategorie, d. h. allgemeinste Relationseigenschaften. Die Klasse der Relationen zerfällt in die Klasse der inneren und äußeren Relationen, welche ebenfalls von Jungius näher untersucht werden. Ansonsten enthält die *Logica Hamburgensis* noch an anderer Stelle interessante Bemerkungen zu den Relationen. Jungius bestimmt hier diese Relationen zu recht als schwach symmetrisch. Diese wie alle anderen allgemeinen Relationseigenschaften finden ihre Anwendung in der Dialektik von Jungius (Buch V).

3] Dieser Paragraph zeigt, daß Jungius auch mit dreistelligen Relationen arbeitet.

4] Die inneren Relationen strukturieren semantische Felder, sie stellen so eine logische Basis für die Dialektik und die Rhetorik dar. Die äußeren Relationen sind Strukturbeziehungen zwischen Objekten. Im Buch V, XII, 14 werden solche Relationen unter dem Gesichtspunkt der Transitivität analysiert.

5] Jungius charakterisiert hier eine kollektive Menge. Auf einer so verstandenen Menge und der Beziehung zwischen Teilen und dem Ganzen (einer Gesamtheit) baut später St. Leśniewski [1929] seine Mereologie auf.

6] Jungius zeigt hier, daß Qualitäten sich durch eine intensive Reihe repräsentieren lassen. Die Teile einer solchen Reihe sind durch Kontinuität miteinander verbunden.

7] [......] In den Paragraphen 13—41 diskutiert Jungius die inneren Relationen zwischen Subjekt und Inhärierendem und zwischen der inneren Ursache und ihrem Verursachten.

8] [......] In 5 Paragraphen stellt Jungius diese Relationssetzungen vor.

9] In den Paragraphen 34—36 ist bereits der Gedanke der Relationsverkettung (des Relationsproduktes) enthalten.
Es sei noch angemerkt, daß auf der Basis von heterogenen Fundamenten Äquivalenzrelationen entstehen und auf der Basis homogener Fundamente Ordnungsrelationen. Inwieweit Jungius sich darüber bewußt war, ist nicht eindeutig beantwortbar.

I. 2

G. W. Leibniz

*Projet et Essais pour arriver à quelque certitude pour finir une bonne partie des disputes et pour avancer l'art d'inventer**1]

[15] | Die Menschen haben etwas von dem Weg, zur Sicherheit zu gelangen, gewußt: davon ist die Logik des Aristoteles und der Stoiker und besonders das Beispiel der Mathematiker ein Beweis; und ich kann noch das der römischen Rechtsgelehrten hinzufügen, bei denen mehrere Schlußfolgerungen in den Digesten sich in nichts von einem Beweise unterscheiden.

Indessen ist man diesem Wege nicht gefolgt, weil er ein wenig unbequem ist und man auf ihm langsam und bedächtigen Schrittes gehen muß. Ich glaube aber, es ist dies nur deshalb so, weil man die Ergebnisse nicht gesehen hat. Man hat nicht bedacht, von welcher Bedeutung es sein würde, die Prinzipien der Metaphysik, der Physik und der Ethik mit derselben Gewißheit aufstellen zu können wie die Elemente der Mathematik.

Nun habe ich gefunden, daß man mit diesem Mittel nicht nur eine gesicherte Erkenntnis mehrerer wichtiger Wahrheiten erreichen, sondern auch zu einer bewundernswürdigen Erfindungskunst und zu einer Analyse gelangen würde, die in anderen Stoffgebieten etwas Ähnliches erzeugen würde wie die Algebra bei den Zahlen.

Ich habe sogar eine erstaunliche Tatsache gefunden, nämlich daß man durch die Zahlen alle Arten von wahren Sätzen und Folgerungen darstellen kann.[2]] Es sind mehr als 20 Jahre her, daß ich den Beweis dieser wichtigen Erkenntnis fand und auf den Gedanken einer Methode kam, die uns unfehlbar zur allgemeinen Analyse der menschlichen Erkenntnisse führt — wie man nach einer kleinen Abhandlung[3]] urteilen kann, die ich damals drucken ließ, worin manches ist, was den Jüngling und den Lernenden verrät; aber die Grundlage ist gut, und ich habe seither so viel darauf erbaut, als andere Geschäfte und Ablenkungen mir erlaubten.

Ich fand also, daß es gewisse, nicht absolut, aber doch für uns ursprüngliche Ausdrücke gibt, nach deren | Aufstellung alle Schlußfolgerungen in der Art [16]
der Zahlen bestimmt werden könnten; und selbst in Rücksicht auf diejenigen, bei denen die gegebenen Umstände oder die data zur Bestimmung der Frage nicht genügen, könnte man nichtsdestoweniger mathematisch den Grad der Wahrscheinlichkeit bestimmen.

Ich habe bemerkt, daß der Grund, warum wir uns außerhalb der Mathematik so leicht täuschen und die Geometer in ihren Schlußfolgerungen so glücklich sind, nur der ist, daß man in der Geometrie und den anderen Teilen der abstrakten Mathematik Proben oder fortlaufende Beweise ausführen kann, und zwar nicht nur über den Schlußsatz, sondern noch in jedem Augenblick und bei jedem Schritt, den man von den Prämissen aus tut, indem man das Ganze auf Zahlen zurückführt. In der Physik jedoch widerstreitet nach vielen Schlußfolgerungen die Erfahrung oft dem Schlußsatz; indessen berichtigt sie diese Schlußfolgerungen nicht und bezeichnet nicht die Stelle, wo man sich getäuscht hat. In der Metaphysik und der Ethik ist dies viel schlimmer: Oft könnte man hier Erfahrungen über die Schlußsätze nur auf eine sehr unbestimmte Art machen, und bei den Gegenständen der Metaphysik ist die Erfahrung manchmal in diesem Leben ganz unmöglich.

Das einzige Mittel, unsere Schlußfolgerungen zu verbessern, ist, sie ebenso anschaulich zu machen, wie es die der Mathematiker sind, derart, daß man seinen Irrtum mit den Augen findet und, wenn es Streitigkeiten unter Leuten gibt, man nur zu sagen braucht: „Rechnen wir!“ ohne eine weitere Förmlichkeit, um zu sehen, wer recht hat.

Wären die Worte gemäß einem Kunstgebilde gemacht — was ich für möglich halte, worauf jedoch diejenigen nicht gekommen sind, die Universalsprachen[4]] erdacht haben —, so könnte man zu diesem Erfolg durch die Worte selbst gelangen, was von einem unglaublichen Wert für das menschliche Leben sein würde. Inzwischen gibt es einen anderen weniger schönen Weg, der schon gangbar gemacht ist, während der andere ganz neu angelegt | [17]
werden müßte. Er besteht darin, daß man sich nach dem Beispiel der Mathematiker der Charaktere bedient, die geeignet sind, unseren Geist zu fixieren, und darin, daß man einen Beweis in Zahlen beifügt.

* in: L. Couturat, *Opuscules et Fragments Inédits de Leibniz,* F. Alcan, Paris [1903], S. 175—176. Übersetzung übernommen aus: G. W. Leibniz, *Fragmente zur Logik,* Akademie-Verlag, Berlin (1960), S. 15—17 (Gekürzter Nachdruck).

[1]] Couturat datiert diese Arbeit um das Jahr 1686.

[2] Besonders in den Arbeiten (April 1679) „Elemente der allgemeinen Charakteristik", „Elemente des Kalküls", „Elemente des allgemeinen Kalküls", „Forschungen zum allgemeinen Kalkül", „Vorschrift zur Prüfung der Folgerungen durch Zahlen", „Regeln, nach denen über die Gültigkeit der Folgerungen und über die Formen und Modi der kategorischen Syllogismen mit Hilfe von Zahlen geurteilt werden kann", „Kalkül der Folgerungen". Vgl. G. W. Leibniz [1960], S. 170–238.

[3] Hinweis auf die Schrift *Dissertatio de Arte Combinatoria* ... Leipzig 1666. Abgedr. in G. W. Leibniz [1875–1890], Bd. 4, S. 27–102.

[4] Zu diesem Thema sind folgende Arbeiten erschienen: C. Beck, *The Universal Character* (1657); G. Dalgarno, *Ars Signorum vulgo Character Universalis et Lingua Philosophica* (1661); J. J. Becker, *Character sive Clavis* (1661); A. Kircher, *Polygraphia Nova et Universalis* (1663) und J. Wilkins, *Essay towards a Real Character and a Philosophical Language* (1668).

I. 3

B. Bolzano

*Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtenteils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter.**

[113] | § 155. Besondere Arten der Verträglichkeit, und zwar a) das Verhältniß der Ableitbarkeit.

2) Wenn wir behaupten, daß gewisse Sätze **A, B, C, D, ... M, N, O, ...** in dem Verhältnisse der Verträglichkeit[1] stehen, und zwar hinsichtlich der Vorstellungen **i, j, ...**[2]: so behaupten wir der gegebenen Erklärung zu Folge nichts Mehres, als daß es gewisse Vorstellungen gebe, die an der Stelle der **i, j, ...** jene Sätze sämmtlich in wahre verwandeln. Ob es nicht außer diesen Vorstellungen, welche die Sätze **A, B, C, D, ... M, N, O, ...** sämmtlich wahr machen, noch einige andere gebe, die nur den einen oder den andern Theil derselben allein, nicht aber alle wahr machen, und wenn dieses ist, welche von den gegebenen Sätzen sich öfter als die übrigen wahr machen lassen: das ist bisher ganz unentschieden; wohl läßt sich aber begreifen, daß diese Fragen von Wichtigkeit sind. Denken wir uns also zuerst den Fall, daß unter den miteinander verträglichen Sätzen **A, B, C, D, ... M, N, O, ...** das Verhältniß bestehe, daß alle Vorstellungen, die an der Stelle der veränderlichen **i, j, ...** einen gewissen Theil dieser Sätze, namentlich alle **A, B, C, D, ...** wahr machen, auch die Beschaffenheit haben, einen gewissen anderen Theil dieser Sätze, namentlich die **M, N, O, ...** wahr zu machen. Das besondere Verhältniß, das wir auf diese Art zwischen den Sätzen **A, B, C, D, ...** einerseits, und den **M, N, O, ...** andrerseits denken, wird schon aus dem Grunde von einer großen Merkwürdigkeit seyn, weil es uns in den Stand setzt, sofern wir einmal wissen, daß es vorhanden sey, aus der erkannten Wahrheit der **A, B, C, D, ...** so
[114] fort auch die Wahrheit der **M, N, O, ...** zu | entnehmen. Ich gebe also dem Verhältnisse, das zwischen den Sätzen **A, B, C, D, ...** von der einen, und **M, N, O, ...** von der andern Seite bestehet, den Namen eines Verhältnisses

der Ableitbarkeit; und sage, daß die Sätze **M, N, O, ...** ableitbar wären aus den Sätzen **A, B, C, D, ...** hinsichtlich auf die veränderlichen Theile **i, j, ...**, wenn jeder Inbegriff[3]] von Vorstellungen, der an der Stelle **i, j, ...** die sämmtlichen **A, B, C, D, ...** wahr macht, auch die gesammten **M, N, O, ...** wahr macht. Zur Abwechslung, und, weil es bereits so gebräuchlich ist, werde ich zuweilen auch sagen, daß die Sätze **M, N, O, ...** aus dem Inbegriffe der Sätze **A, B, C, D, ...** folgen, gefolgert oder erschlossen werden können[4]]; die Sätze **A, B, C, D, ...** werde ich die Vordersätze oder Prämissen, die **M, N, O, ...** aber die sich aus ihnen ergebenden Nach- oder Schlußsätze nennen. In wiefern endlich das hier beschriebene Verhältniß zwischen den Sätzen **A, B, C, D, ...** und **M, N, O, ...** die größte Aehnlichkeit hat zwischen dem Verhältnisse umfaßter und umfassender Vorstellungen, will ich mir selbst erlauben, die Sätze **A, B, C, D, ...** umfaßte, die **M, N, O, ...** aber die sie umfassenden zu nennen.

3) Die Annahme, daß alle Vorstellungen, die an der Stelle der **i, j, ...** die Sätze **A, B, C, D, ...** wahr machen, auch die Sätze **M, N, O, ...** wahr machen, setzet noch gar nicht voraus, daß dieses auch umgekehrt seyn müsse, d. h. daß alle Vorstellungen, welche die Sätze **M, N, O, ...** wahr machen, auch die Sätze **A, B, C, D, ...** wahr machen. Das Verhältniß der Ableitbarkeit muß also nicht nothwendig ein wechselseitiges seyn.[5]] So macht wohl jedes Paar Vorstellungen, das an der Stelle der **A** und **B** den Satz: Alle **A** sind **B**, wahr macht, auch den Satz: Einige **A** sind **B**, wahr; und dieser ist also von jenem ableitbar; allein nicht umgekehrt macht jedes Paar Vorstellungen, das an der Stelle der **A** und **B** den Satz: Einige **A** sind **B**, wahr macht, auch wahr den Satz: Alle **A** sind **B**. Also ist nicht auch umgekehrt dieser von jenem ableitbar.

4) Wenn irgend einer der Sätze **A, B, C, D, ...**, aus welchen die Sätze **M, N, O, ...** ableitbar seyn sollen, hinsichtlich auf die Vorstellungen **i, j, ...**, z. B. der Satz **A**, | nicht eine einzige der letztern in sich schließt: so können wir ihn [115]
auch weglassen, und von den noch übrigen Sätzen **B, C, D, ...** behaupten, daß die Sätze **M, N, O, ...** auch schon aus ihnen allein ableitbar seyen, hinsichtlich auf die Vorstellungen **i, j, ...**. Denn unter diesen Umständen muß der Satz **A** wahr seyn, und bleibt es jederzeit, was man auch immer für Vorstellungen an die Stelle **i, j, ...** setze: so oft also nur die Sätze **B, C, D, ...** alle wahr werden, werden auch **A, B, C, D, ...** und mithin auch **M, N, O, ...** wahr.

5) Wenn gewisse Sätze **M, N, O, ...** ableitbar seyn sollen aus gewissen anderen **A, B, C, D, ...**, und unter jenen ist irgend ein falscher befindlich: so muß auch unter diesen irgend ein falscher stecken. Denn wären alle **A, B, C, D, ...** wahr: so müßten es auch alle **M, N, O, ...** seyn; weil sonst nicht wahr wäre, daß jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an der Stelle der **i, j, ...** die **A, B, C, D, ...** wahr macht (nämlich die Vorstellungen **i, j, ...** selbst), auch die **M, N, O, ...** wahr macht.

6) Wenn alle Sätze, die aus den Sätzen **A, B, C, D, ...** in Hinsicht auf gewisse Vorstellungen **i, j, ...** ableitbar sind, wahr sind: so müssen die Sätze **A, B, C, D, ...** selbst wahr seyn. Denn zu den verschiedenen Sätzen, die sich aus **A, B, C, D, ...** ableiten lassen, was immer für Vorstellungen die **i, j, ...** seyn mögen, gehören gewiß auch die Sätze: **A** ist wahr, **B** ist wahr, **C** ist wahr

u.s.w. Sind also alle Sätze, die sich aus **A**, **B**, **C**, **D**, ... ableiten lassen, wahr: so müssen auch diese es seyn. Sind aber diese wahr, so sind auch die Sätze **A**, **B**, **C**, **D**, ... selbst wahr.

[191] | §. 162. Verhältniß der Abfolge.

1) Unter Wahrheiten[6]] herrscht, wie ich im nächsten Hauptstücke umständlicher zu zeigen hoffe, ein sehr merkwürdiges Verhältniß, vermöge dessen sich einige derselben zu andern als Gründe zu ihren Folgen verhalten. So sind die beiden Wahrheiten, daß die drei Winkel eines Dreieckes zusammen zwei rechte betragen, und daß ein jedes Viereck in zwei Dreiecke zerlegt werden kann, deren sämmtliche Winkel die Winkel des Vierecks bilden, der Grund
[192] von der Wahrheit, daß die | vier Winkel eines jeden Viereckes zusammen vier rechten gleich kommen. Eben so liegt in der Wahrheit, daß es im Sommer wärmer ist als im Winter, der Grund von jener anderen Wahrheit, daß das Thermometer im Sommer höher steht als im Winter, und diese letztere dagegen läßt sich als eine Folge der ersteren betrachten. Da sich nun die Benennung Abfolge für das Verhältniß einer Folge zu ihrem Grunde gleichsam von selbst darbietet: so erlaube ich mir zu sagen, daß Wahrheiten, die sich zu andern, wie die Folge zu ihrem Grunde verhalten, in dem Verhältnisse einer Abfolge zu denselben stehen. Die eben angeführten Beispiele aber zeigen, daß eine Wahrheit, die zu gewissen andern in dem Verhältnisse einer Folge zu ihren Gründen stehet, stets[7]] auch noch aus diesen letzteren ableitbar ist, vorausgesetzt, daß wir nur eben gewisse Vorstellungen als die veränderlichen ansehen. [......] Da aber Sätze, die man durch einen willkürlichen Austausch der Vorstellungen aus gegebenen wahren erhält, nicht immer wahr seyn müssen: so wird begreiflich, wie auch unter Sätzen, die falsch sind, ein Verhältniß der Ableitbarkeit bestehen könne, welches von einer solchen Beschaffenheit ist, daß die Wahrheiten, die man erzeugt, wenn man statt der veränderlichen Vorstellungen gewisse andere setzt, jedesmal in dem Verhältnisse der Abfolge zu einander stehen. So ist es mit den zwei Sätzen: „In dem Orte **X** ist es wärmer als in dem Orte **Y**;" und: „in dem Orte **X** stehet das Thermometer höher als in dem Orte **Y**;" wenn die Vorstellungen **X** und **Y** als die einzigen veränderlichen gelten. Denn daß diese Sätze beide falsch werden können, wenn wir statt **X** und **Y** was immer für beliebige Vorstellungen setzen, ist außer Zweifel. So oft wir aber zwei solche Vorstellungen wählen, dabei der erste Satz wahr
[193] wird; wird auch der zweite eine Wahrheit, und dieß zwar eine | solche, die zu der ersten sich wie eine Folge zu ihrem Grunde verhält. Wohl zu bemerken ist jedoch, daß das so eben Gesagte nicht etwa überall, wo ein Verhältniß der Ableitbarkeit bestehet, Statt finde. So ist das Verhältniß zwischen den beiden nur eben betrachteten Sätzen ein wechselseitiges; denn wie sich aus dem Satze: In **X** ist es wärmer als in **Y**, ableiten läßt der Satz: In **X** stehet das Thermometer höher als in **Y**; so läßt sich auch umgekehrt aus dem Satze: In **X** stehet das Thermometer höher als in **Y**, recht füglich ableiten der Satz: In **X** ist es also wärmer als in **Y**. Gleichwohl wird Niemand sich einfallen lassen, den letzteren dieser Sätze, auch wenn sie beide wahr sind, als eine aus dem ersten fließende Folge, und diesen sonach als Grund von jenem zu betrachten. [......] Nicht jedes Verhältniß der Ableitbarkeit ist also so beschaffen, daß es auch,

wenn die Sätze desselben insgesammt wahr sind, ein zwischen ihnen bestehendes Verhältniß der Abfolge ausdrückt. Ohne Zweifel aber wird ein Verhältniß der Ableitbarkeit, dem diese Beschaffenheit zukömmt, merkwürdig genug seyn, um eine eigene Bezeichnung zu verdienen. Ich will es sonach ein Verhältniß der formalen Abfolge nennen, während dasjenige, das zwischen wahren Sätzen bestehet, zum deutlicheren Unterschiede das Verhältniß einer materialen Abfolge heißen mag. Ich sage also, daß die Sätze **M, N, O**, ... zu den Sätzen **A, B, C**, ... hinsichtlich auf die Vorstellungen **i, j**, ... in dem Verhältnisse einer formalen Abfolge stehen oder aus ihnen formal abfolgen oder folgen, wenn jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an der Stelle der **i, j**, die sämmtlichen **A, B, C**, ... wahr macht, auch die sämmtlichen **M, N, O**, ... in Wahrheiten und zwar solche verwandelt, die zu den Wahrheiten **A, B, C**, ... sich wie eine echte Folge zu ihrem Grunde verhalten.[8]]

* Bde. I—IV, Sulzbach 1837 (Gekürzter Nachdruck aus Bd. II, S. 113—115, S. 191 bis 193).

[1]] Wenn es Vorstellungen gibt, die, an die Stelle der **i, j**, ... gesetzt, die Sätze **A, B, C, D**, ... insgesammt wahr machen, so besteht nach Bolzano zwischen diesen Sätzen das Verhältnis der Verträglichkeit oder Einstimmung, und die Sätze **A, B, C, D**, ... selbst werden verträglich, einstimmig oder einhellig genannt. (Vgl. Bd. II, § 154, S. 100). Vgl. noch § 164, 197ff.

[2]] Die Vorstellung **i, j**, ... haben die Bedeutung von Variablen. Vgl. z. B. Bd. I, § 69, S. 311: „... wiefern wir gewisse andere Theile **i, j**, ... in ihr als veränderlich ansehen ..."; Bd. I, § 108, S. 514 „... indem wir uns vorstellen, daß gewisse, in der gegebenen Vorstellung vorkommende Bestandtheile **i, j**, ... veränderlich wären." „Sätze mit veränderlichen Theilen" (Bd. II. § 147, S. 80, 82) bzw. „Sätze mit veränderlichen Vorstellungen" (Bd II, § 154, S. 107f.) haben dann die Bedeutung von Aussagenformen.

[3]] Unter einem „Inbegriff (gewisser Dinge)" versteht Bolzano dasselbe wie „eine Verbindung oder Vereinigung dieser Dinge, ein Zusammenseyn derselben, ein Ganzes, in welchem sie als Theile vorkommen" (Bd. I, § 82, S. 393), bzw. „ein Etwas, das Zusammengesetztheit hat" (ebenda, S. 394).

[4]] Zur Ableitbarkeitsbeziehung vgl. noch Bd. II, § 164, S. 198f: „Jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an der Stelle der **i, j**, ... in den Sätzen **A, B, C**, ... **M, N, O**, ... die Sätze **A, B, C**, ... insgesammt wahr macht, — hat — die Beschaffenheit, auch die Sätze **M, N, O**, ... insgesammt wahr zu machen." Der gewöhnlichste Ausdruck, in den wir Sätze von dieser Art kleiden, ist bekanntlich: „Wenn **A, B, C**, ... wahr sind: so sind auch **M, N, O**, ... wahr". Nicht selten sagen wir aber auch: „Aus **A, B, C**, ... folgen oder sind ableitbar oder lassen sich schließen die **M, N, O**, ... u. s. w." H. Scholz ([1937] S. 460, Anmerk. 48) betont mit Recht, daß dieser Sprachgebrauch die im Text getroffene Unterscheidung von Ableitbarkeits- und Folgebeziehung nicht trifft.

[5]] Die Ableitbarkeitsbeziehung ist zwar reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch. Vgl. H. Scholz [1937] S. 450.

[6]] Unter einer „Wahrheit" im Sinne von Bolzano müssen wir eine „objektive Wahrheit" bzw. eine „Wahrheit an sich" verstehen d. h. „jeden beliebigen Satz, der etwas so, wie es ist, aussagt", wobei es unbestimmt bleibt, „ob dieser Satz von irgend Jemand wirklich gedacht und ausgesprochen worden sey oder nicht" (Bd. I, § 25, S. 112). — Zur Kritik dieses philosophischen Standpunkts vgl. Einführung zum **XII.** Kapitel.

[7]] Mit H. Scholz [1937] S. 453, Anmerk. 42 lesen wir anstatt „öfters" „stets".

8] Zur formalen Abfolge vgl. noch Bd. II, § 168, S. 207: „Sagen wir aber, daß die Sätze **M, N, O, ...** zu den **A, B, C, ...** ein Verhältniß der *formalen* Abfolge behaupten: so sagen wir eigentlich Folgendes aus: ‚Das Verhältniß der Sätze **M, N, O, ...** zu den Sätzen **A, B, C, ...** hat die Beschaffenheit, daß jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an der Stelle der **i, j, ...** die **A, B, C, ...** wahr macht, auch die **M, N, O, ...** zu solchen Wahrheiten macht, die eine Folge der ersteren sind'. Der gemeine Ausdruck ist nur: **M** ist, *weil* **A** ist; oder **M** folgt aus **A.**"

II

Die Algebra der Logik

Die Periode der modernen Logik wurde durch G. Booles (1815—1864) Werk *The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning* (1847) eröffnet. Im gleichen Jahr erschien auch *A.* DeMorgans *Formal Logic or the Calculus of Inference, Nesessary and Probable.* Man könnte die neue Entwicklungsperiode der formalen Logik auch mit beiden Werken ansetzen, aber die einen Abschnitt in dieser Periode prägenden Intentionen bringt das Werk von G. Boole zum ersten Male und klar ausgeführt zum Ausdruck. Während nämlich A. DeMorgan den Versuch unternahm, die aristotelische Logik exakter darzulegen und um die Relationsaussagen sowie Relationsschlüsse zu erweitern, stellte sich G. Boole die Aufgabe, eine neue Logik auf algebraischer Grundlage aufzubauen. Er entwickelte einen rein extensionalen abstrakten Kalkül, der algebraisch dieselbe Struktur hat wie ein sogenannter Boolescher Verband (vgl. z. B. P. R. Halmos [1963]; R. Sikorski [1960]; H. Mehrtens [1979]).

Die Grundbegriffe der Booleschen *Algebra der Logik* (**II. 1.**) sind die Multiplikation (d. h. die Auswahloperation), die Addition, die als Kontravalenz mit der Wahrheitsmatrize „0110" zu deuten ist, und die Subtraktion $(1 - x)$, die der Negation entspricht. Die Inklusion wird durch die Gleichheit dargestellt. Die Boolesche Algebra der Logik ist grundsätzlich eine binäre Algebra mit dem Gesetz $x^n = x$, die man entweder als eine Aussagenlogik deuten kann, wenn man die Symbole „1" und „0" als „wahr" und „falsch" interpretiert, oder als eine Klassenlogik, wenn man „1" als Zeichen der „Universalklasse" und „0" als Zeichen für die „leere Klasse" auffaßt. Die Hauptbestandteile dieser Algebra sind (1) die Theorie der *Auswahlfunktionen*, d. h. die Theorie der Wahrheitsfunktionen, und (2) die auf dem Absorptions- und Expansionsgesetz beruhende *Entwicklung* (development), d. h. die Herstellung der kanonischen (ausgezeichneten) Normalform. Die Boolesche Algebra enthält aber noch nicht die beiden Ableitungsregeln, die Abtrennungs- und Substitutionsregel.

Die von G. Boole gegebene Gestalt einer Algebra der Logik wurde dann von anderen Logikern dieser Epoche systematisch durchgearbeitet, vertieft und ergänzt. W. St. Jevons [1864] hat die Boolesche Kontravalenz durch die Alternative, die Subtraktion durch die Negation (bzw. das Komplement) und die noch stark algebraisch gefaßte Entwicklung durch eine tatsächliche kanonische alternative Normalform ersetzt. Die Inklusion, die bereits J. D. Gergonne (1771—1859) bekannt war, wurde vor allem von Ch. S. Peirce [1870] und E. Schröder [1890—1905] systematisch untersucht.

In dieser Zeit kommt es auch zu einer Differenzierung zwischen den beiden möglichen Interpretationen der Algebra der Logik und zur Herausbildung weiterer Konzeptionen, die unmittelbar den Aufbau der klassischen Logik beeinflußten. Der erste Logiker, der die Aussagenlogik als eine selbständige Theorie anerkannt hat, war H. Mc Coll [1877/78]. Er schuf eine algebraisch aufgebaute Aussagenlogik, jedoch nicht als Interpretation der Algebra der Logik, sondern als eigenständige Logik. Ch. S. Peirce [1931—1958] führte in seinen Arbeiten aus den Jahren 1880, 1885 und 1896 die Wahrheitsmatrizen ein, behandelte in einer allgemeinen Weise die Problematik der Wahrheitswerte und definierte in ausdrücklicher Anlehnung an Philon aus Megara (um 300 v. u. Z.) den Implikationsbegriff.

Später hat B. Russell die Philonische Implikation als materiale Implikation bezeichnet. Er führte noch die formale Implikation $\Pi x C \varphi x \psi x$ ein, d. h. eine Allaussage, deren quantorenfreier Kern die Form einer Implikation hat (vgl. z. B. B. Russell [1919], S. 21, 38, 158, 163; A. N. Whitehead — B. Russell [1910—1913], Bd. I, S. 20, 139). Vgl. dazu auch die Einführung zu Kapitel V.

In der Klassenlogik wurde die graphische Darstellung der kategorischen Aussagen, wie sie bereits L. Euler (1707—1783) eingeführt hatte, von J. Venn [1881] und L. Carroll [1896] weiter entwickelt. G. Peano [1889] führte die Elementrelation in die Klassenlogik ein und schuf eine sich auch auf andere Bestandteile der klassischen Logik (**III.** Kapitel) beziehende einheitliche Symbolik. Seinem ganzen Wirken nach ist G. Peano allerdings mehr zur nächsten Entwicklungsetappe der modernen Logik zu rechnen, die durch die Intention und Leistungen von G. Frege gekennzeichnet ist. Die Relationslogik wurde besonders von Ch. S. Peirce [1880] und E. Schröder [1890 bis 1905] untersucht. O. H. Mitchell [1883] und später auch Ch. S. Peirce (**II.** 2.) haben — ohne Kenntnis der Ergebnisse von G. Frege [1879] — Untersuchungen zu den prädikatenlogischen Quantifikationen durchgeführt.

Trotz dieser verschiedenen Tendenzen, die natürlich für die Herausbildung der klassischen Logik von großer Bedeutung waren, wurde die Algebra der Logik auch in ihrer ursprünglichen Fassung weiter bearbeitet. Zahlreiche Arbeiten zur Theorie der logischen Gleichheiten und Ungleichheiten lieferte P. S. Poreckij [1884], [1898/1899], [1900—1901], [1904], [1908]. Eine zusammenfassende Monographie zur Algebra der Logik wurde von A. N. Whitehead [1898] verfaßt. (Vgl. auch L. Couturat [1905]). Den Höhepunkt der selbständigen Ausarbeitung der Gedanken von G. Boole und zugleich den Abschluß dieser Etappe repräsentieren E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik,* die in komprimierender Weise von E. Müller bearbeitet wurden. Vgl. E. Schröder [1909—1910].

Die Axiomatisierung der Algebra der Logik durch E. Schröder und A. N. Whitehead wurde besonders von E. V. Huntington [1904] untersucht. Huntington hat drei verschiedene axiomatische Systeme gegeben. Das erste ist eine vereinfachte Fassung des Whiteheadschen Axiomensystems mit drei Grundbegriffen und zehn Axiomen, das zweite eine komprimierte Form des Schröderschen Systems mit zwei Grundbegriffen und zehn Axiomen und das dritte eine Modifikation des zweiten Systems mit zwei Grundbegriffen und neun Axiomen. H. M. Sheffer ([1913], S. 482) hat ein noch vereinfachteres axiomatisches System aufgestellt. Es enthält zwei Grundbegriffe — die Klasse K und eine binäre Kombinationsregel | — und fünf Axiome:

(1) Es gibt wenigstens zwei verschiedene K-Elemente.

(2) Wenn a und b K-Elemente sind, so ist auch $a \mid b$ ein K-Element.

$$\mathrm{Df} \quad a' = a \mid a$$

(3) Wenn a und die angegebenen Kombinationen von a K-Elemente sind, so auch $(a')' = a$.

(4) Wenn a, b und die angegebenen Kombinationen von a und b K-Elemente sind, so auch $a \mid (b \mid b') = a'$.
(5) Wenn a, b, c und die angegebenen Kombinationen von a, b und c K-Elemente sind, so auch $(a \mid (b \mid c))' = (b' \mid a) \mid (c' \mid a)$.

Diese Axiome stellen ein widerspruchsfreies und unabhängiges Axiomensystem dar.

Weitere Literatur: C. I. Lewis [1918], E. W. Beth [1947a]; W. Kneale [1948]; S. G. Gindikin [1972].

Mit den Bemühungen um eine Axiomatisierung der Algebra der Logik sind zugleich auch theoretische Untersuchungen verbunden, die für die moderne Logik insgesamt von Bedeutung sind. So hat E. Schröder (**II. 3.**) — wie zuerst von A. Church [1939] bemerkt — zur Beseitigung logischer Widersprüche in der Klassenlogik Festlegungen getroffen, die der Russellschen Typentheorie (vgl. **XI. 1.**) sehr nahe kommen.

Eine Neubelebung des Interesses an der Booleschen Algebra der Logik findet man in den Arbeiten von A. Tarski [1935a], [1938] und M. H. Stone [1936]. In den Vordergrund treten Zusammenhänge, die sich aus der Booleschen Algebra als einer mathematischen Theorie ergeben, wie z. B. die Beziehungen der Algebra und der Topologie zur modernen Logik. Untersucht werden auch die Anwendungsmöglichkeiten algebraischer Methoden zur Behandlung logischer (vgl. z. B. L. Rieger [1967]) oder metalogischer Fragen (vgl. z. B. H. Rasiowa — R. Sikorski [1963]; A. Robinson [1951]). Diese Tendenzen der Algebra der Logik führten P. R. Halmos [1956], [1962] sowie H. Rasiowa [1974] weiter. Die semiotischen Untersuchungen, ausgelöst durch die Arbeiten von Ch. S. Peirce, haben auch auf die Entwicklung der mathematischen Linguistik großen Einfluß (vgl. z. B. D. A. Bočvar — J. A. Schreider [1972]).

II. 1

G. Boole

The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning)*

| Die Grundprinzipien [15]

Das Symbol 1 (oder die Einheit) wird zur Darstellung des Universums benutzt. Es soll jede denkbare Klasse von Objekten umfassend verstanden werden, gleichgültig, ob sie wirklich existieren oder nicht.[1]] Es wird vorausgesetzt, daß man dasselbe Individuum in mehr als einer Klasse vorfinden kann, da es mehr als eine Qualität mit anderen Individuen gemeinsam haben kann. Die Buchstaben X, Y, Z sollen zur Darstellung der individuellen Elemente von Klassen benützt werden; X ist auf jedes Element einer Klasse angewandt, als Elemente dieser bestimmten Klasse, und Y auf jedes Element einer anderen Klasse, als Elemente einer solchen Klasse, usw., entsprechend der angenommenen Sprache von Abhandlungen über Logik.

Weiter soll eine Klasse von Symbolen x, y, z gedacht werden, die folgenden Charakter haben:

Es wird vorausgesetzt, daß das Symbol x, welches auf irgendeinen Individuen oder Klassen enthaltenden Gegenstand bezogen ist, aus diesem Gegenstand alle die X herausgreift, die er enthält. In einer ähnlichen Weise wird vorausgesetzt, daß das auf irgendeinen Gegenstand bezogene Symbol y aus ihm alle Individuen der Klasse Y herausgreift, die in ihm inbegriffen sind, usw.

Wenn kein Gegenstand ausgedrückt wird, werden wir annehmen, daß 1 (das Universum) der gemeinte Gegenstand ist, so daß wir

$$x = x \tag{1}$$

haben werden. Die Bedeutung beider Termini ist die Auswahl aller X aus
[16] dem Universum, die es enthält, und das Ergebnis der Operation, | ausgedrückt in der Umgangssprache, ist die Klasse X, d. h. die Klasse, deren jedes Element ein X ist.

Aus diesen Voraussetzungen folgt, daß das Produkt xy sukzessive die Auswahl der Klasse Y und die Auswahl solcher Individuen der Klasse X aus der Klasse Y darstellen wird, die in ihm enthalten sind. Das Ergebnis ist die Klasse, deren Elemente sowohl X wie Y sind. Und in einer ähnlichen Weise wird das Produkt xyz eine zusammengesetzte Operation darstellen. Seine sukzessiven Elemente sind die Auswahl der Klasse Z, die Auswahl solcher Elemente der Klasse Y aus ihr, die in ihr enthalten sind, und die Auswahl aller Individuen der Klasse X aus dem so erhaltenen Ergebnis, die es enthält. Das Endergebnis ist die gemeinsame Klasse von X, Y und Z.

Hinsichtlich der Natur der Operationen, die die Symbole x, y, z darstellen, werden wir sie als Auswahlsymbole bezeichnen. Ein Ausdruck, in dem sie vorkommen, wird eine Auswahlfunktion genannt werden, und eine Gleichung, deren Elemente Auswahlfunktionen sind, wird als eine Auswahlgleichung bezeichnet.[2]]

Es wird nicht notwendig sein, daß wir hier diejenige gedankliche Operation, die wir durch das Auswahlsymbol dargestellt haben, einer Analyse unterwerfen müssen. Sie ist kein Akt der Abstraktion — entsprechend der üblichen Auffassung dieses Terminus —, da wir das Konkrete niemals außer Sicht verlieren. Sie kann jedoch wahrscheinlich als eine Ausübung der Fähigkeiten des Vergleichens und der Aufmerksamkeit bezeichnet werden. Unser gegenwärtiges Interesse ist eher auf die Gesetze der Kombination und der Sukzession gerichtet, durch die ihr Ergebnis geleitet wird und für sie wird es genügen, folgendes zu bemerken.

1. Das Ergebnis eines Auswahlaktes ist von der Gruppierung oder Klassifikation des Gegenstandes unabhängig.

Deswegen ist es gleichgültig, ob wir aus einer Gruppe von Objekten, die als ein Ganzes betrachtet werden, die Klasse X herausgreifen, oder ob wir die Gruppe in zwei Teile aufteilen, die X aus ihnen gesondert herausgreifen und dann die Ergebnisse in einem zusammengesetzten Begriffe verbinden.

Wir können dieses Gesetz mathematisch durch die Gleichung

$$x(u + v) = xu + xv$$

ausdrücken, | wobei $u + v$ den ungeteilten Gegenstand, und u und v seine [17]
Teilkomponenten darstellen.

2. Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge zwei sukzessive Auswahlakte durchgeführt werden.

Das Ergebnis ändert sich nicht, ob wir aus der Klasse der Tiere die Schafe herausgreifen und aus den Schafen diejenigen, die gehörnt sind, oder ob wir aus der Klasse der Tiere die gehörnten herausgreifen und aus ihnen solche, die Schafe sind. In beiden Fällen gelangen wir zur Klasse *gehörnte Schafe*.

Der symbolische Ausdruck dieses Gesetzes ist

$$xy = yx.$$

3. Das Ergebnis eines gegebenen Auswahlaktes, der zweimal oder beliebig vielmal nacheinander durchgeführt wird, ist dem Ergebnis desselben Aktes, der einmal durchgeführt wird, gleich. Wir haben also

$$xx = x$$

oder

$$x^2 = x;$$

und vorausgesetzt, dieselbe Operation werde n-mal durchgeführt, haben wir

$$x^n = x,$$

was der mathematische Ausdruck des oben angegebenen Gesetzes ist.

Die Gesetze, die wir in symbolischen Formen

$$x(u + v) = xu + xv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$xy = yx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$$x^n = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

festgelegt haben, | sind für die Grundlegung eines Kalküls ausreichend. Aus [18]
dem ersten von ihnen ist ersichtlich, daß die Auswahlsymbole *distributiv*, aus dem zweiten, daß sie *kommutativ* sind; Eigenschaften, die sie mit den Symbolen der *Quantität* gemeinsam haben, und kraft deren alle Verfahren der üblichen Algebra im gegenwärtigen System anwendbar sind. Das einzige und genügende Axiom, das in dieser Anwendung inbegriffen ist, besagt, daß an äquivalenten Gegenständen durchgeführte äquivalente Operationen äquivalente Ergebnisse liefern.

Das dritte Gesetz (3) werden wir Indexgesetz nennen. Es ist den Auswahlsymbolen eigentümlich und ist von großer Wichtigkeit, da es uns ermöglicht, unsere Ergebnisse auf Formen, die für eine Interpretation geeignet sind, zurückzuführen.

Aus der Tatsache, daß die Verfahren der Algebra auf das gegenwärtige System angewendet werden können, darf man jedoch nicht schließen, daß sich die Interpretation einer Auswahlgleichung durch solche Verfahren nicht

[19] ändert. Der Ausdruck einer Wahrheit kann durch | eine legitime Operation nicht negiert werden, aber er kann eingeschränkt werden. Die Gleichung $y = z$ impliziert, daß die Klassen Y und Z äquivalent sind, Element für Element. Multiplizieren wir sie durch einen Faktor x, erhalten wir:

$$xy = xz,$$

was besagt, die Individuen, die der Klasse X und Y gemeinsam sind, sind auch den Klassen X und Z gemeinsam und *umgekehrt*. Das ist ein vollkommen legitimer Schluß, aber die Tatsache, die er ausdrückt, ist weniger allgemein als jene, die in der ursprünglichen Aussage behauptet wurde.

* Cambridge — London [1847]. Nachdruck; Basil Blackwell, Oxford 1951 (Übersetzung von S. 15—19; mit Auslassung von zwei Fußnoten ungekürzt).

1] Zur logischen Problematik dieser Begriffsbildung vgl. E. Schröder (**II. 3.**).

2] Terminologische Bemerkung zur Übersetzung: Auswahlsymbol — elective symbol, Auswahlfunktion — elective function, Auswahlgleichung — elective equation, Indexgesetz — index law.

II. 2

Ch. S. Peirce

*On the algebra of logic. A contribution to the philosophy of notation**

[180] | I. — *Drei Arten von Zeichen.*

Jede Beschreibung oder Aussage bezieht sich entweder auf einen Gegenstand, zwei Gegenstände oder auf eine Mehrzahl von Gegenständen. So z. B. hat ein Teilchen Masse, zwei Teilchen ziehen sich an, ein Teilchen rotiert um die Gerade, die zwei andere verbindet. Ein Sachverhalt, der sich auf zwei Gegenstände bezieht, ist ein zweistelliges Merkmal oder eine zweistellige Relation; aber eine Relation, die eine bloße Kombination von zwei unabhängigen Sachverhalten ist, die sich auf die zwei Gegenstände beziehen, kann *ausgeartet* genannt werden, ebenso wie man zwei Geraden einen ausgearteten Kegelschnitt nennt. In gleicher Weise muß man ein mehrstelliges Merkmal oder eine verbundene Relation ausgeartet nennen, wenn es eine bloße Verbindung von zweistelligen Eigenschaften ist.

Ein Zeichen steht in einer verbundenen Relation zu dem bezeichneten Gegenstand und zum Bewußtsein. Wenn diese dreistellige Relation nicht von ausgearteter Art ist, ist das Zeichen mit seinem Objekt nur als Folge einer geistigen Assoziation verbunden und ist von einer Gewohnheit abhängig. Solche Zeichen sind immer abstrakt und allgemein, weil Gewohnheiten allgemeine Regeln sind, denen der Organismus unterworfen worden ist. Sie sind zum größten Teil konventionell und beliebig. Sie umfassen alle allgemeinen Wörter, den Hauptteil der Rede und jegliche Art, eine Mitteilung zu übertragen. Der Kürze halber will ich sie *Symbole* nennen.

Aber wenn die dreistellige Relation zwischen dem Zeichen, seinem Objekt und dem Bewußtsein ausgeartet ist, stehen wenigstens zwei der drei Paare

Zeichen	Objekt
Zeichen	Bewußtsein
Objekt	Bewußtsein

in zweistelligen Relationen, die die dreistellige Relation bilden. Eines dieser zusammenhängenden Paare muß aus dem Zeichen und seinem Objekt bestehen, denn wenn das Zeichen mit seinem Objekt nur durch das Bewußtsein verbunden wäre, das beide separat betrachtet, würde es die Zeichenfunktion überhaupt nicht erfüllen. Angenommen, die Relation des Zeichens zu seinem Objekt bestände nicht in einer geistigen Assoziation, so muß eine direkte zweistellige | Relation des Zeichens zu seinem Objekt bestehen, die unabhängig ist von [181]
dem Bewußtsein, das das Zeichen benutzt. Im zweiten der drei gerade erwähnten Fälle ist diese zweistellige Relation nicht ausgeartet, und das Zeichen bezeichnet sein Objekt ausschließlich dadurch, daß es tatsächlich mit ihm zusammenhängt. Von dieser Art sind alle natürlichen Zeichen und physikalischen Symptome. Ich nenne ein solches Zeichen einen *Anzeiger*; ein ausgestreckter Zeigefinger gehört zu dieser Klasse.

Der Anzeiger sagt nichts aus; er sagt nur „Da!". Er zieht einfach unseren Blick auf sich und lenkt ihn gewaltsam auf ein bestimmtes Objekt, und das ist alles. Demonstrativ- und Relativpronomen sind fast reine Anzeiger, weil sie Dinge bezeichnen, ohne sie zu beschreiben; ebenso verhält es sich mit den Buchstaben einer geometrischen| Figur und den unteren Indizes, die in der Algebra einen Wert von einem anderen unterscheiden, ohne diese Werte anzugeben. Der dritte Fall ist der, wo die zweistellige Relation zwischen dem Zeichen und seinem Objekt ausgeartet ist und in einer bloßen Ähnlichkeit zwischen ihnen besteht. Ich nenne ein Zeichen, das für etwas steht, nur weil es ihm ähnelt, ein *Ikon*. Ikone treten so vollständig an die Stelle ihrer Objekte, daß man sie kaum von ihnen unterscheiden kann. So verhält es sich mit den Figuren in der Geometrie. Allerdings ist eine Figur, soweit sie eine allgemeine Bedeutung hat, kein reines Ikon; aber mitten in unseren Überlegungen vergessen wir jene Abstraktion in großem Maße; und die Figur ist für uns das Ding selbst. Auch wenn man ein Gemälde betrachtet, gibt es einen Moment, wo wir das Bewußtsein darüber verlieren, daß es nicht das Ding ist; der Unterschied zwischen der Wirklichkeit und der Kopie verschwindet, und es ist für den Augenblick ein reiner Traum, keine bestimmte Existenzform und doch nicht allgemein. In dem Augenblick betrachten wir ein Ikon.

Ich habe mich bemüht, den von mir gemachten Unterschied[1]) zwischen Ikonen, Anzeigern und Symbolen zu verdeutlichen, um folgenden Satz zu formulieren: In einem vollständigen System logischer Bezeichnung müssen diese verschiedenartigen Zeichen alle verwendet werden. Ohne Symbole gäbe es nichts Allgemeines in den Behauptungen; denn sie sind die einzigen allgemeinen Zeichen; und Allgemeinheit ist für das Schlußfolgern wesentlich. Nehmen wir z. B. die Kreise, durch die Euler die Beziehungen zwischen Begriffen darstellt. Sie erfüllen zwar die Funktionen von Ikonen, aber ihr Mangel an Allgemeinheit und ihre Unzulänglichkeit, Sätze auszudrücken, muß

jeder empfunden haben, der sie benutzt hat. Hr. Venn wurde daher dazu veranlaßt, ihnen Schraffierungen hinzuzufügen, und diese Schraffierung ist ein konventionelles Zeichen von der Art eines Symbols. In der Algebra sind sowohl die quantitativen als auch die funktionalen Buchstaben von dieser Art. Aber Symbole allein sagen nichts über den Gegenstand der Betrachtung aus; und das kann in der Tat nicht durch allgemeine Ausdrücke beschrieben werden; es kann nur angedeutet werden. Die wirkliche Welt kann von einer Welt der
[182] Phantasie nicht durch irgendeine | Beschreibung unterschieden werden. Daher braucht man Pronomen und Anzeiger, und je komplizierter der Gegenstand wird, desto nötiger braucht man sie. Die Einführung von Anzeigern in die Algebra der Logik ist das größte Verdienst von Hrn. Mitchells System.[2]) Er schreibt F_1, um auszudrücken, daß der Satz F für alle Objekte im Universum wahr ist, und F_v um auszudrücken, daß er für manche Objekte wahr ist. Dieser Unterschied kann nur in ungefähr dieser Weise gemacht werden. Anzeiger sind ebenfalls erforderlich, um zu zeigen, in welcher Art andere Zeichen miteinander verbunden sind. Allein mit diesen beiden Arten von Zeichen kann jeder Satz ausgedrückt werden, aber man kann damit nicht schlußfolgern, denn Schlußfolgern besteht in der Beobachtung, daß dort, wo gewisse Relationen bestehen, gewisse andere gefunden werden können, und es erfordert folglich die Darstellung der betrachteten Relationen in einem Ikon. Es ist lange ein Rätsel gewesen, wie es möglich sein konnte, daß die Mathematik einerseits ihrem Wesen nach rein deduktiv ist und ihre Schlüsse apodiktisch zieht, während sie andererseits eine so reiche und offensichtlich endlose Reihe von überraschenden Entdeckungen präsentiert wie jede betrachtende Wissenschaft. Vielfältig sind die Versuche gewesen, das Paradoxon zu lösen, indem man die eine oder die andere dieser Behauptungen umstößt, aber ohne Erfolg. Die Wahrheit scheint jedoch zu sein, daß jedes deduktive Schlußfolgern, sogar ein einfacher Syllogismus, ein Element der Beobachtung enthält. Deduktion besteht nämlich in der Konstruktion eines Ikons oder einer Figur, wo die Relationen ihrer Teile völlig analog zu den Teilen des betrachteten Objekts sind, im Experimentieren mit diesem Bild in der Vorstellung, und im Beobachten des Ergebnisses, um unbemerkte und verborgene Relationen zwischen den Teilen festzustellen. Nehmen wir z. B. die syllogistische Formel,

Alle M sind P

S ist M

S ist P.

Das ist wirklich eine Figur der Relationen zwischen S, M und P. Die Tatsache, daß der Mittelbegriff in den beiden Prämissen auftritt, ist tatsächlich dargestellt, und das muß gemacht werden, sonst ist die Bezeichnungsweise ohne Wert. Was die Algebra betrifft, so besteht das Wesen dieser Kunst gerade darin, daß sie Formeln darbietet, mit denen man formal umgehen kann, und darin, daß wir durch die Beobachtung der Auswirkungen solcher Manipulationen Eigenschaften finden, die man sonst nicht entdecken könnte. Bei solchem formalen Umgang werden wir von früheren Entdeckungen geleitet, die in allgemeinen Formeln eingebettet sind. Das sind Modelle, die wir bei unserem Verfahren nachahmen dürfen, sie sind die *Ikone par exellence* der Algebra. Die Buchstaben der angewandten Algebra sind gewöhnlich Symbole, aber die x, y, z usw. einer allgemeinen Formel, wie z. B.

$$(x + y) z = xz + yz,$$

| sind Leerstellen, die mit Symbolen gefüllt werden müssen, sie sind Anzeiger [183] von Symbolen. Es ist wahr, daß solch eine Formel durch eine abstrakt formulierte Regel (sagen wir, daß die Multiplikation distributiv ist) ersetzt werden kann; aber keine Anwendung solch einer abstrakten Behauptung könnte gemacht werden ohne deren Übertragung in eine verstehbare Vorstellung.

In dieser Abhandlung beabsichtige ich, eine Algebra zu entwickeln, die der Behandlung aller Probleme der deduktiven Logik adäquat ist; dabei zeige ich im weiteren Verlauf, welche Arten von Zeichen notwendigerweise auf jeder Stufe der Entwicklung verwendet werden müssen. Ich werde so zu drei Objekten kommen. Das erste ist die Ausweitung der Stärke der logischen Algebra auf die Gesamtheit ihres eigentlichen Gebietes. Das zweite ist die Darstellung von Prinzipien, die der gesamten algebraischen Bezeichnungsweise zugrunde liegen. Das dritte ist die Aufzählung der wesentlich unterschiedlichen Arten notwendigen Schließens; denn wenn die Bezeichnungsweise, die für die Darstellung eines Schlusses ausreicht, sich als unzulänglich für die Erklärung eines anderen herausstellt, ist es klar, daß letzterer ein Schlußelement enthält, das im früheren fehlt. Dementsprechend sollte das betrachtete Verfahren ein Verzeichnis von Kategorien des Schließens ergeben, deren Bedeutung nicht von der algebraischen Art der Betrachtung des Gegenstandes abhängt. Ich werde nicht in der Lage sein, die Algebra genügend zu vervollständigen, um einfache Methoden dafür angeben zu können, wie man zu logischen Schlüssen gelangt: Ich kann lediglich eine Methode angeben, durch die jeder legitime Schluß erreicht werden kann, und jeder falsche vermieden wird. Aber ich zweifle nicht daran, daß es anderen, wenn sie diesen Gegenstand aufgreifen, gelingen wird, der Bezeichnungsweise eine Form zu geben, in der sie höchst nützlich für mathematische Arbeiten sein wird. Ich hoffe sogar, daß das, was ich getan habe, sich als ein erster Schritt zur Lösung eines der Hauptprobleme der Logik erweisen wird, das darin besteht, eine Methode für die Entdeckung von Methoden in der Mathematik zu schaffen.

II. — *Non-relative Logik.*

Nach der üblichen Logik ist ein Satz entweder wahr oder falsch, und kein weiterer Unterschied wird anerkannt. Das ist die deskriptive Konzeption, wie die Geometer sagen; die metrische Konzeption bestände darin, daß jeder Satz mehr oder weniger falsch ist, die Frage ist, in welchem Maße. Wir schließen uns hier der ersteren Ansicht an.

Es seien Sätze durch Größen dargestellt. Es seien $\mathbf{v}$ und $\mathbf{f}$ zwei konstante Werte, und es sei der Wert der Größe, die einen Satz darstellt, $\mathbf{v}$, wenn der Satz wahr ist, und $\mathbf{f}$, wenn der Satz falsch ist. Folglich, wenn x ein Satz ist, wird die Tatsache, daß x entweder wahr oder falsch ist, so geschrieben

$$(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - x) = 0.$$

[184] | Daher bedeutet

$$(x - \mathfrak{f})(\mathfrak{v} - y) = 0,$$

daß entweder x falsch ist oder y wahr ist. Man kann sagen, daß das dasselbe ist wie ,wenn x wahr ist, ist y wahr'. Ein hypothetischer Satz ist im allgemeinen nicht darauf beschränkt anzugeben, was tatsächlich geschieht, sondern er gibt an, was in einem Universum von Möglichkeiten ausnahmslos wahr ist. Der vorliegende Satz ist jedoch auf den einen individuellen Sachverhalt begrenzt, den aktuellen.

Wir sind so bereits im Besitz einer logischen Bezeichnungsweise, die imstande ist, Syllogismen zu behandeln. Man nehme z. B. die Prämissen ,wenn x wahr ist, ist y wahr', und ,wenn y wahr ist, ist z wahr'. Das schreibt man

$$(x - \mathfrak{f})(\mathfrak{v} - y) = 0$$
$$(y - \mathfrak{f})(\mathfrak{v} - z) = 0.$$

Man multipliziere das erste mit $(\mathfrak{v} - z)$ und das zweite mit $(x - \mathfrak{f})$ und addiere das. Wir erhalten

$$(x - \mathfrak{f})(\mathfrak{v} - \mathfrak{f})(\mathfrak{v} - z) = 0,$$

oder, wenn man es durch $(\mathfrak{v} - \mathfrak{f})$ dividiert, was nicht 0 sein kann,

$$(x - \mathfrak{f})(\mathfrak{v} - z) = 0$$

und das ergibt die syllogistische Schlußfolgerung „wenn x wahr ist, ist z wahr."

Aber diese Bezeichnungsweise hat einen Nachteil; sie drückt die Sätze auf zwei verschiedene Arten aus, in der Form von Größen und in der Form von Gleichungen; und die Größen sind von zweierlei Art, nämlich solche, die entweder gleich $\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{v}$ sind, und solche, die gleich *Null* sind. Um dem abzuhelfen, werden wir keine Gleichungen mehr verwenden und keine Operationen ausführen, die andere Werte als $\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{v}$ ergeben.

Von Operationen mit einer einfachen Variablen benötigen wir nur eine. Denn es gibt nur zwei Dinge, die über einen einzigen Satz von ihm selbst gesagt werden können, daß er wahr ist und daß er falsch ist, $x = \mathfrak{v}$ und $x = \mathfrak{f}$. Die erste Gleichung wird durch x selbst ausgedrückt, die zweite durch eine beliebige Funktion Φ von x, die die Bedingungen erfüllt $\Phi\mathfrak{v} = \mathfrak{f}$, $\Phi\mathfrak{f} = \mathfrak{v}$. Die einfachste Lösung dieser Gleichungen ist

$$\Phi x = \mathfrak{f} + \mathfrak{v} - x.$$

Ein Produkt von n Faktoren der beiden Formen $(x - \mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{v} - y)$ ist, wenn nicht Null, gleich $(\mathfrak{v} - \mathfrak{f})^n$. Man schreibe P für das Produkt. Dann ist $\mathfrak{v} - \dfrac{P}{(\mathfrak{v} - \mathfrak{f})^{n-1}}$ die einfachste Funktion der Variablen, die $\mathfrak{v}$ wird, wenn das Produkt verschwindet, und $\mathfrak{f}$, wenn nicht. Auf diese Weise kann jeder Satz, der sich auf ein einziges Individuum bezieht, ausgedrückt werden.

Wenn wir algebraische Zeichen mit ihren üblichen Bedeutungen benutzen

wollen, hängen die Bedeutungen der Operationen gänzlich von denen von $\mathbf{f}$ und $\mathbf{v}$ ab. Boole wählte | $\mathbf{v} = 1$, $\mathbf{f} = 0$. Diese Festlegung ergibt die folgenden [185]
Formen:

$$\mathbf{f} + \mathbf{v} - x = 1 - x$$

was man am besten $\bar{x}$ schreibt.

$$\mathbf{v} - \frac{(x - \mathbf{f})\,(\mathbf{v} - y)}{\mathbf{v} - \mathbf{f}} = 1 - x + xy = \overline{x\bar{y}}$$

$$\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} - x)\,(\mathbf{v} - y)}{\mathbf{v} - \mathbf{f}} = x + y - xy$$

$$\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} - x)\,(\mathbf{v} - y)\,(\mathbf{v} - z)}{(\mathbf{v} - \mathbf{f})^2} = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$$

$$\mathbf{v} - \frac{(x - \mathbf{f})\,(y - \mathbf{f})}{\mathbf{v} - \mathbf{f}} = 1 - xy = \overline{xy}.$$

Mir scheint, daß, wenn man das strenge Boolesche System benutzt, das Zeichen + gänzlich weggelassen werden sollte. Boole und sein Anhänger, Hr. Venn (mit dem ich niemals uneinig bin, ohne seine Bemerkungen nutzbringend zu finden), ziehen es vor, $x + \bar{x}y$ statt $\overline{\bar{x}\bar{y}}$ zu schreiben. Ich gestehe, daß ich den Vorteil davon nicht sehe, denn das distributive Prinzip trifft ebensogut zu, wenn man schreibt

$$\overline{\bar{x}\bar{y}}\,z = \overline{\overline{xz}\;\overline{yz}}$$

$$\overline{\overline{xy}\,\bar{z}} = \overline{\bar{x}\bar{z}}\,.\,\overline{\bar{y}\bar{z}}.$$

Die Festlegung von $\mathbf{v} = 1$, $\mathbf{f} = 0$ entspricht der üblichen Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten. Aber es ist nicht notwendig und oftmals auch nicht vorteilhaft, Wahrscheinlichkeiten auf diese Weise zu bestimmen. Ich nehme an, daß Boole bei der Formulierung seiner Algebra mit den Buchstaben zuerst Sätze oder Ereignisse bezeichnen wollte. Wie er den Gegenstand darstellt, sind sie Klassennamen; aber es ist nicht notwendig, sie so zu betrachten. Nehmen wir z. B. die Gleichung $t = n + hf$, was bedeuten möge, daß die Gesamtheit der Steuerzahler sich aus allen Einheimischen und den einen Hausstand besitzenden Ausländern zusammensetzt.

Wir können die Bedeutung durch eines der beiden folgenden Bezeichnungssysteme erhalten, die sich in der Tat eher grammatisch als logisch unterscheiden.

Zeichen	Signifikation 1. System	Signifikation 2. System
t	Steuerzahler	Er ist ein Steuerzahler
n	Einheimischer	Er ist ein Einheimischer
h	Hausstandbesitzer	Er ist ein Hausstandbesitzer
f	Ausländer	Er ist ein Ausländer

[186] | Es gibt keinen *Anzeiger*, der zeigt, wer das „Er“ im zweiten System ist, aber das ist bedeutungslos. Wenn man sagt, daß er ein Steuerzahler ist, so ist das das gleiche, wie wenn man sagt, er ist ein Einheimischer oder ein Hausstandbesitzer oder ein Ausländer. So gesehen, sind die Konstanten 1 und 0 einfach die Wahrscheinlichkeiten für denjenigen, der weiß, was wahr und was falsch ist; und so wird das ganze System einheitlich gemacht.

Was mich betrifft, so ziehe ich es im Moment vor, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{v}$ keine bestimmten Werte zuzuordnen, ich setze die logischen Operationen auch nicht mit irgendwelchen bestimmten arithmetischen gleich, wobei ich die Möglichkeit offen lasse, dies hiernach in der Art zu tun, die am geeignetsten erscheint. Außerdem ist das ganze System, die Arithmetik in den Gegenstand einzuführen, gekünstelt, und moderne Vertreter Booles benutzen es nicht. Die Algebra der Logik sollte aus sich selbst entstehen, und die Arithmetik sollte aus der Logik hervorgehen, anstatt auf sie zurückzugreifen.[1]] Gehen wir zum Anfang der Betrachtungen zurück, und nehmen wir an, daß das Schreiben eines Buchstaben allein bedeutet, daß ein gewisser Satz wahr ist. Dieser Buchstabe ist ein *Symbol*. Es besteht eine allgemeine Übereinkunft, daß auf den tatsächlichen Sachverhalt oder auf irgendeinen anderen Bezug genommen wird. Diese Übereinkunft muß mit Hilfe eines *Anzeigers* festgelegt worden sein und kommt bis zu einem bestimmten Grad ohne andere Anzeiger aus. Die Verneinung eines Satzes wird durchgeführt, indem ein Strich darüber gezogen wird.

Ich habe an anderer Stelle gezeigt, daß die grundlegende und hauptsächliche Form der Relation zwischen zwei Sätzen die ist, die wir ausgedrückt haben in der Form:

$$\mathfrak{v} - \frac{(x - \mathfrak{f})(\mathfrak{v} - y)}{\mathfrak{v} - \mathfrak{f}}.$$

Wir werden das schreiben

$$x -\!\!< y,$$

was ebenfalls äquivalent ist mit

$$(x - \mathfrak{f})(\mathfrak{v} - y) = 0.$$

Ich habe oben gesagt, daß dies bedeutet, „wenn x wahr ist, ist y wahr“. Aber diese Bedeutung wird stark eingeschränkt durch den Umstand, daß nur auf den tatsächlichen Sachverhalt Bezug genommen wird.

Um diese Tatsache deutlich zu machen, wird es gut sein, damit zu beginnen, die Bedeutung eines hypothetischen Satzes im allgemeinen zu definieren. Wie der Sprachgebrauch sein mag, interessiert uns nicht; die Sprache hat ihre Bedeutung in technisch-logischen Formeln geändert wie bei anderen speziellen Betrachtungsweisen. Die Frage ist, was ist der Sinn, der dem hypothetischen Satz in der Logik am geeignetsten zugeordnet wird? Nun, die Besonderheit des hypothetischen Satzes liegt darin, daß er über den tatsächlichen Sachverhalt hinausgeht und erklärt, was geschehen *würde*, wenn die Dinge anders wären als sie sind oder sein können. Der Vorteil davon ist, daß er uns in den Besitz einer Regel bringt, wie z. B. „wenn A wahr ist, ist B wahr“, so daß, wenn wir danach irgendetwas erfahren sollten, das wir jetzt nicht wissen, nämlich, daß A wahr
[187] ist, wir dank dieser | Regel herausfinden, daß wir noch mehr wissen, nämlich,

daß B wahr ist. Es kann kein Zweifel daran bestehen, daß das Mögliche in seiner primären Bedeutung das ist, was, soweit wir wissen, wahr sein kann, das, über dessen Falschsein wir nichts wissen. Der Zweck ist dann erfüllt, wenn im ganzen Bereich des Möglichen, in jedem Sachverhalt, in dem A wahr ist, auch B wahr ist. Der hypothetische Satz kann daher durch einen einzigen Sachverhalt falsch werden, aber nur durch einen, in dem A wahr ist, während B falsch ist. Sachverhalte, in denen A falsch ist, ebenso wie diejenigen, in denen B wahr ist, können ihn nicht falsch machen. Wenn also B ein Satz ist, der in jedem Fall im ganzen Bereich des Möglichen wahr ist, muß der hypothetische Satz in seinem logischen Sinn als wahr betrachtet werden, unabhängig davon, wie der Gebrauch der normalen Sprache sein mag. Wenn A andererseits in keinem Fall im Bereich des Möglichen wahr ist, ist es gleichgültig, ob der hypothetische Satz als wahr oder falsch verstanden wird, da es sich erübrigt. Aber es wird einfacher sein, ihn zu den wahren Sätzen zu rechnen, da die Fälle, in denen das Antezedent falsch ist, einen hypothetischen Satz in keinem anderen Fall falsch machen. Das ist auf jeden Fall die Bedeutung, die ich einem hypothetischen Satz im allgemeinen in dieser Abhandlung zuordnen will.

Der Bereich des Möglichen ist in einem Fall weiter, in einem anderen enger gefaßt; im vorliegenden Fall ist er auf den tatsächlichen Sachverhalt begrenzt. Hier ist deshalb

$$a \prec b$$

wahr, wenn a falsch ist, oder wenn b wahr ist, aber er ist falsch, wenn a wahr ist, während b falsch ist. Aber obwohl wir uns auf den tatsächlichen Sachverhalt beschränken, wird dennoch eine Formel dieser Art, die wir von der logischen Notwendigkeit her als wahr herausfinden, auf jeden einzelnen Sachverhalt im Bereich des logisch Möglichen anwendbar. Wir können z. B. sehen, daß wir von $x \mathrel{\overline{\prec}} y$ auf $z \prec x$ schließen können. Das bedeutet nicht, daß, weil in dem tatsächlichen Sachverhalt x wahr und y falsch ist, deshalb in jedem Sachverhalt z falsch oder x wahr ist; sondern es bedeutet, daß in jeglichem Sachverhalt, in dem wir sehen, daß x wahr ist und y falsch, in diesem Sachverhalt z falsch oder x wahr ist. In diesem Sinne ist es nicht auf den tatsächlichen Sachverhalt beschränkt, sondern es trifft auf jeden einzelnen Sachverhalt zu.

Das *erste Ikon* der Algebra ist in der Identitätsformel enthalten

$$x \prec x.$$

Diese Formel rechtfertigt von sich aus keine Umformung und keinen Schluß. Sie berechtigt uns nur dazu, das weiter zu behaupten, was wir bisher behauptet haben (obwohl wir z. B. vergessen können, was uns ursprünglich dazu berechtigt hat, das zu behaupten).

| Das *zweite Ikon* ist in der Regel enthalten, daß die verschiedenen Antezedenten einer Conclusio umgestellt werden können; das bedeutet, daß wir von [188]

$$x \prec (y \prec z)$$

übergehen können zu

$$y \prec (x \prec z).$$

Das wird zum Ausdruck gebracht in der Formel

$$\{x \prec (y \prec z)\} \prec \{y \prec (x \prec z)\}.$$

Da die Sache so liegt, können die Klammern weggelassen werden, und wir können schreiben

$$y \prec x \prec z.$$

Nach der Identitätsformel ist

$$(x \prec y) \prec (x \prec y);$$

und, indem wir die Antezedenten umstellen

$$x \prec \{(x \prec y) \prec y\}$$

oder, indem wir die nicht notwendigen Klammern weglassen

$$x \prec (x \prec y) \prec y.$$

Das ist dasselbe, wie wenn wir sagen, wenn in irgendeinem Sachverhalt x wahr ist und wenn der Satz „wenn x, so y" wahr ist, daß dann in diesem Sachverhalt auch y wahr ist. Das ist der *Modus ponens* des hypothetischen Schließens und die elementarste Form des Schließens.

Wenn man sagt, daß $(x \prec x)$ im allgemeinen wahr ist, so bedeutet das, daß das in jedem Sachverhalt so ist, sagen wir in dem, in dem y wahr ist, so daß wir schreiben können

$$y \prec (x \prec x),$$

und dann, indem wir die Antezedenten umstellen,

$$x \prec (y \prec x),$$

oder wir können von x schließen auf $y \prec x$.

Das *dritte Ikon* besteht im Prinzip der Transitivität der Kopula, das ausgedrückt wird in der Formel

$$(x \prec y) \prec (y \prec z) \prec x \prec z.$$

Dementsprechend, wenn in jedem Fall y aus x folgt und z aus y, dann folgt z aus x. Das ist das Prinzip des Syllogismus in *Barbara.*

Wir haben bereits gesehen, daß aus x folgt $y \prec x$. Folglich, wenn auf Grund der Transitivität der Kopula z aus $y \prec x$ folgt, dann folgt z aus x oder aus

$$(y \prec x) \prec z$$

folgt

$$x \prec z,$$

oder

$$\{(y \prec x) \prec z\} \prec x \prec z.$$

Die ursprüngliche Bezeichnung $x \prec y$ diente ohne Veränderung dazu, die | [189] reine Identitätsformel auszudrücken. Eine Erweiterung der Konzeption der Bezeichnungsweise war erforderlich, um die Begriffe selbst komplex zu machen und um so das Prinzip der Umstellung der Antezedenten auszudrücken; und dieses neue *Ikon* ergab neue Sätze. Das dritte *Ikon* führt das Abbild einer Kette von Schlüssen ein. Wir müssen die Bezeichnungsweise noch einmal erweitern, um die Negation einzuführen. Wir haben bereits gesehen, daß wir, wenn a wahr ist, schreiben können, $x \prec a$, was immer x sein mag. Es sei b so, daß wir schreiben können $b \prec x$, was immer x sein mag. Dann ist b falsch. Wir haben hier ein *viertes Ikon*, das verschiedenen Formeln einen neuen Sinn gibt. Folglich ist das Prinzip des Vertauschens der Antezedenten so, daß wir von

$$x \prec (y \prec z)$$

schließen können auf $y \prec (x \prec z)$. Da z ein beliebiger Satz ist, bedeutet das ebensoviel wie wenn wir sagen, daß, wenn aus der Wahrheit von x die Falschheit von y folgt, dann aus der Wahrheit von y die Falschheit von x folgt.

Wieder sieht man, daß die Formel

$$x \prec \{(x \prec y) \prec y\}$$

bedeutet, daß wir von x darauf schließen können, daß irgendetwas, das wir wünschen, daraus folgt, daß ebendies aus x folgt, und *a fortiori* daraus, daß alles aus x folgt. Das heißt daher, daß aus x die Falschheit der Verneinung von x folgt; das ist das Prinzip des Widerspruchs.

Wieder rechtfertigt die Formel der Transitivität der Kopula oder

$$\{x \prec y\} \prec \{(y \prec z) \prec (x \prec z)\}$$

den Schluß

$$x \prec y$$
$$\therefore\ \bar{y} \prec \bar{x}.$$

Dieselbe Formel rechtfertigt den *Modus tollens*:

$$x \prec y$$
$$\bar{y}$$
$$\therefore\ \bar{x}$$

So zeigt die Formel $\{(y \prec x) \prec z\} \prec (x \prec z)$, daß aus der Falschheit von $y \prec x$ auf die Falschheit von x geschlossen werden kann.

Alle traditionellen Arten von Syllogismen können durch diese Methode leicht auf *Barbara* reduziert werden.

Ein *fünftes Ikon* ist erforderlich für das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten und andere damit zusammenhängende Sätze. Eine der einfachsten Formeln dieser Art ist

$$\{(x \prec y) \prec x\} \prec x.$$

Dies ist kaum axiomatisch. Daß es wahr ist, ergibt sich wie folgt. Es kann nur falsch sein, wenn das letzte x falsch ist, während sein Antezedent $(x \prec y) \prec x$

[190] | wahr ist. Wenn dies wahr ist, ist entweder seine Conclusio x wahr, wenn die ganze Formel wahr wäre, oder sein Antezedent $x \prec y$ ist falsch. Aber im letzten Fall muß das Antezedent von $x \prec y$, das ist x, wahr sein.[3])

Aus dieser gerade angegebenen Formel erhalten wir zugleich

$$\{(x \prec y) \prec \alpha\} \prec x,$$

wobei α in dem Sinne gebraucht ist, daß $(x \prec y) \prec \alpha$ bedeutet, daß aus $(x \prec y)$ jeder Satz folgt. So verstanden, gibt die Formel das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten an, daß aus der Falschheit der Verneinung von x die Wahrheit von x erfolgt.

Die bis hierher entwickelte logische Algebra enthält Zeichen der folgenden Arten:

1. Symbole; Zeichen für einfache Sätze, wie t für ‚Er ist ein Steuerzahler' usw.
2. Das einzelne Operationszeichen $\prec$; ebenfalls von der Natur eines Symbols.
3. Das Nebeneinanderschreiben der Buchstaben rechts und links vom Operationszeichen. Dieses Nebeneinanderstehen erfüllt die Funktion eines *Anzeigers*, da es die Verbindung zwischen den Symbolen anzeigt.
4. Die Klammern, die demselben Zweck dienen.
5. Die Buchstaben α, β usw., die Anzeiger irgendwelcher Symbole sind und zum Ausdruck der Negation verwendet werden.
6. Die Anzeiger von Symbolen, x, y, z usw., die in allgemeinen Formeln benutzt werden.
7. Die allgemeinen Formeln selbst, die *Ikone* sind oder Muster von algebraischen Verfahren.
8. Das vierte *Ikon*, das eine zweite Interpretation der allgemeinen Formeln liefert.

Wir können ohne die fünfte und achte Art von Zeichen auskommen — die
[191] Mittel, | durch die wir die Negation ausdrücken —, indem wir ein zweites Operationszeichen $\overline{\prec}$ einführen, so daß $x \overline{\prec} y$ bedeuten soll, daß $x = \mathfrak{v}$, $y = \mathfrak{f}$. Damit brauchten wir neue Anzeiger von Verbindungen und neue allgemeine Formeln. Möglicherweise könnte dies die vorzuziehende Bezeichnungsweise sein. Wir hätten so zwei Operationszeichen, aber kein Zeichen für die Negation. Die bisher benutzten Formen der Booleschen Algebra haben entweder zwei Operationszeichen und ein spezielles Zeichen für die Negation oder drei Operationszeichen. Eines der Operationszeichen ist in diesem Fall überflüssig. So haben wir in der üblichen Bezeichnungsweise

$$\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$$
$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{xy},$$

was zeigt, wie dieselbe Tatsache auf zwei Arten beschrieben werden kann. Das offensichtliche Gleichgewicht zwischen den beiden Mengen von Theoremen, die von Schröder so eindrucksvoll dargestellt sind, ergibt sich gänzlich aus dieser doppelten Art, alles zu schreiben. Aber während das gewöhnliche System für seinen Zweck nicht so analytisch geeignet ist wie das hier entwickelte, bringt der Charakter des Überflüssigen hier, wie in vielen anderen Fällen der Algebra, große Erleichterungen in der Arbeit mit sich.

Die oben angegebenen allgemeinen Formeln sind für die Praxis nicht günstig. Wir können vollkommen auf sie verzichten, ebenso auf einen der Anzeiger von Symbolen, die in ihnen benutzt werden, indem wir die folgenden Regeln anwenden. Ein Satz der Form

$$x \prec y$$

ist wahr, wenn $x = \mathfrak{f}$ oder $y = \mathfrak{v}$. Er ist nur falsch, wenn $y = \mathfrak{f}$ und $x = \mathfrak{v}$. Ein Satz, der in der Form

$$x \mathrel{\overline{\prec}} y$$

geschrieben ist, ist wahr, wenn $x = \mathfrak{v}$ und $y = \mathfrak{f}$, und ist falsch, wenn $x = \mathfrak{f}$ oder $y = \mathfrak{v}$. Wenn man herausfinden will, ob eine Formel notwendigerweise wahr ist, setze man dementsprechend $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{v}$ für die Buchstaben und untersuche, ob sie bei einer solchen Zuordnung von Werten als falsch betrachtet werden kann.

Nehmen wir z. B. die Formel

$$(x \prec y) \prec \{(y \prec z) \prec (x \prec z)\}.$$

Um sie falsch zu machen, müssen wir setzen

$$(x \prec y) = \mathfrak{v}$$

$$\{(y \prec z) \prec (x \prec z)\} = \mathfrak{f}$$

Das letzte ergibt $\quad (y \prec z) = \mathfrak{v},\ (x \prec z) = \mathfrak{f},\ x = \mathfrak{v},\ z = \mathfrak{f}.$

Setzt man diese Werte ein in

$$(x \prec y) = \mathfrak{v} \qquad (y \prec z) = \mathfrak{v},$$

dann erhalten wir

$$(\mathfrak{v} \prec y) = \mathfrak{v} \qquad (y \prec \mathfrak{f}) = \mathfrak{v},$$

was nicht gleichzeitig erfüllbar ist.

Als ein anderes Beispiel betrachte man die Conclusio aus den folgenden Prämissen. Jede Person, die ich heiraten könnte, wäre entweder schön oder häßlich; jede Person, die ich | heiraten könnte, wäre eine Frau; jede schöne [192]
Frau wäre als Ehefrau nicht geeignet; jede häßliche Frau wäre als Ehefrau auch nicht geeignet. Es sei

m irgendeine Person, die ich heiraten könnte,

b schön,

p häßlich,

w Frau,

i ungeeignet,

Dann lauten die Prämissen

$$m \prec (b \prec \mathbf{f}) \prec p,$$
$$m \prec w,$$
$$w \prec b \prec i,$$
$$w \prec p \prec i.$$

Es sei x die Conclusio. Dann ist

$$[m \prec (b \prec \mathbf{f}) \prec p] \prec (m \prec w) \prec (w \prec b \prec i) \prec (w \prec p \prec i) \prec x$$

notwendigerweise wahr. Wenn wir nun annehmen, daß $m = \mathbf{v}$, kann der Satz nur falsch gemacht werden, indem man $w = \mathbf{v}$ setzt und zudem b oder $p = \mathbf{v}$. In diesem Fall kann der Satz nur falsch gemacht werden, wenn man $i = \mathbf{v}$ setzt. Wenn daher x nur $\mathbf{f}$ gemacht werden kann, indem man $m = \mathbf{v}$ und $i = \mathbf{f}$ setzt, d. h. wenn $x = (m \prec i)$ ist, ist der Satz notwendigerweise wahr.

Bei dieser Methode führen wir die beiden speziellen Symbole der zweiten Intension ein, $\mathbf{f}$ und $\mathbf{v}$, behalten die beiden Anzeiger von Symbolen x und y bei, und haben ein verhältnismäßig komplexes *Ikon* mit einer besonderen Vorschrift für seine Anwendung.

Eine bessere Methode kann wie folgt gefunden werden. Wir haben gesehen, daß

$$x \prec (y \prec z)$$

praktischer $\quad x \prec y \prec z \quad$ geschrieben werden kann;

während $\quad (x \prec y) \prec z$

die Klammern beibehalten müßte. Wir wollen die Regel erweitern, so daß sie allgemeiner wird, und wir betrachten als notwendig, den Antezedenten *immer* in Klammern einzuschließen. Wir wollen daher schreiben

$$(x) \prec y,$$

statt $x \prec y$. Wenn wir nun nur das äußere Bild der beiden Zeichen ändern, nämlich, wenn wir den Querstrich an Stelle der Klammern verwenden und das Zeichen $+$ an Stelle von $\prec$, erhalten wir

$$x \prec y \quad \text{geschrieben} \quad \bar{x} + y$$
$$x \prec y \prec z \quad \text{geschrieben} \quad \bar{x} + \bar{y} + z$$
$$(x \prec y) \prec z \quad \text{geschrieben} \quad \overline{\bar{x} + \bar{y}} + z, \text{ usw.}$$

Wir können ferner für $x \mathrel{\overline{\prec}} y$ schreiben $\overline{\bar{x} + y}$, was impliziert, daß $x + y$
[193] ein Antezedent für | eine beliebige Conclusio ist und der Querstrich mit dem Zeichen der Negation identifiziert wird. Wir können ebenso das Zeichen der Multiplikation als Abkürzung benutzen und setzen

$$xy = \overline{\bar{x} + \bar{y}} = \overline{x \prec \bar{y}}.$$

Das unterwirft Addition und Multiplikation allen Regeln der üblichen Algebra und ebenso den folgenden:

$$\begin{aligned} y + x\bar{x} &= y \quad & y(x + \bar{x}) &= y \\ x + \bar{x} &= \mathfrak{v} & \bar{x}x &= \mathfrak{f} \\ xy + z &= (x + z)\,(y + z). \end{aligned}$$

Wir haben das Recht, jedem Satz einen beliebigen Ausdruck hinzuzufügen; ebenso einen beliebigen Faktor aus jedem Ausdruck zu streichen. Die Ausdrücke für verschiedene, einzeln bekannte Sätze können miteinander multipliziert werden. Das sind im wesentlichen Hrn. Mitchells Verfahrensregeln. So lauten die Prämissen von Barbara

$$\bar{x} + y \quad \text{und} \quad \bar{y} + z.$$

Multiplizieren wir diese, so erhalten wir

$$(\bar{x} + y)\,(\bar{y} + z) = \bar{x}\bar{y} + yz.$$

Wenn wir $\bar{y}$ und y weglassen, erhalten wir die Conclusio $\bar{x} + z$.

III. — *Erst-intentionale Logik der Relative.*

Die Algebra von Boole liefert eine Sprache, mit der alles ausgedrückt werden kann, was man sagen kann, ohne von mehr als einem Individuum gleichzeitig zu sprechen. Es ist wahr, daß sie aussagen kann, daß gewisse Eigenschaften zu einer ganzen Klasse gehören, aber nur solche Eigenschaften, die jedes Individuum für sich besitzt. Die Logik der Relative betrachtet Aussagen, die zwei oder mehr Individuen zugleich betreffen. Hier sind Anzeiger erforderlich. Wenn wir zuerst eine ausgeartete Form der Relation nehmen, können wir $x_i y_j$ schreiben um auszudrücken, daß x für das Individuum i wahr ist, während y für das Individuum j wahr ist. Wenn z ein Beziehungsmerkmal ist, bedeutet z_{ij}, daß i in dieser Relation zu j steht. Auf diese Weise können wir Relationen von beträchtlicher Komplexität ausdrücken. Wenn z. B.

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 3, \\ 4, & 5, & 6, \\ 7, & 8, & 9, \end{array}$$

Punkte in einer Ebene sind, und l_{123} bedeutet, daß 1, 2 und 3 auf einer Geraden liegen, kann ein bekannter Satz der Geometrie geschrieben werden

$$l_{159} \mathrel{-\!\!\prec} l_{267} \mathrel{-\!\!\prec} l_{348} \mathrel{-\!\!\prec} l_{147} \mathrel{-\!\!\prec} l_{258} \mathrel{-\!\!\prec} l_{369} \mathrel{-\!\!\prec} l_{123} \mathrel{-\!\!\prec} l_{456} \mathrel{\succ\!\!-} l_{789}.$$

In dieser Bezeichnungsweise ist ein *sechstes Ikon* enthalten.

Wir kommen nun zum Unterschied zwischen *Es gibt ein* und *alle*, einem Unterschied, der genau dem zwischen Wahrheit und Falschheit entspricht, d. h., er ist deskriptiv, nicht metrisch. | Alle Versuche, diesen Unterschied in die [194]

Boolesche Algebra einzuführen, versagten mehr oder weniger völlig, bis Hr. Mitchell zeigte, wie es gemacht werden mußte. Seine Methode besteht darin, daß er aus dem ganzen Ausdruck für den Satz zwei Teile macht, einen rein Booleschen Ausdruck, der sich auf ein Individuum bezieht, und einen quantifizierten Teil, der besagt, was das für ein Individuum ist. Wenn daher k bedeutet ‚er ist ein König' und h bedeutet ‚er ist glücklich', bedeutet die Boolesche Formel $(\bar{k} + h)$, daß das erwähnte Individuum kein König ist oder glücklich ist. Wenn wir nun die Quantifizierung anwenden, können wir schreiben

$$\text{Alle } (\bar{k} + h)$$

um anzugeben, daß das für jedes Individuum in dem (begrenzten) Universum wahr ist, oder

$$\text{Es gibt ein } (\bar{k} + h)$$

um anzugeben, daß es ein Individuum gibt, das nicht König ist oder glücklich ist. So bedeutet

$$\text{Es gibt ein } (kh),$$

daß irgendein König glücklich ist, und

$$\text{Alle } (kh)$$

bedeutet, daß jedes Individuum sowohl König als auch glücklich ist. Die Regeln für den Gebrauch dieser Bezeichnungsweise sind offensichtlich. Die beiden Sätze

$$\text{Alle } (x) \quad \text{Alle } (y)$$

sind äquivalent zu

$$\text{Alle } (xy).$$

Aus den beiden Sätzen

$$\text{Alle } (x) \quad \text{Es gibt ein } (y)$$

können wir schließen

$$\text{Es gibt ein } (xy).$$ [4])

Bei Hrn. Mitchell findet sich ebenfalls eine sehr interessante und instruktive Erweiterung seiner Bezeichnungsweise für *Es gibt ein* und *alle* auf ein zweidimensionales Universum, d. h. auf die Logik der Relative. Um diese Bezeichnungsweise so ikonisch wie möglich zu machen, können wir hier Σ für *Es gibt ein* benutzen, um eine Summe anzudeuten, und Π für *alle*, um ein Produkt anzudeuten. $\Sigma_i x_i$ bedeutet so, daß x für irgendeines der mit i bezeichneten Individuen wahr ist oder

$$\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k + \text{usw.}$$

[195] | In derselben Weise bedeutet $\Pi_i x_i$, daß x für alle diese Individuen wahr ist oder

$$\Pi_i x_i = x_i x_j x_k, \text{ usw.}$$

Wenn x eine einfache Relation ist, bedeutet $\Pi_i \Pi_j x_{ij}$, daß jedes i in dieser Relation zu jedem j steht, $\Sigma_i\Pi_j x_{ij}$, daß ein gewisses i in dieser Relation zu jedem j steht, $\Pi_j\Sigma_i x_{ij}$, daß zu jedem j eines oder das andere i in dieser Relation steht, $\Sigma_i\Sigma_j x_{ij}$, daß irgendein i in dieser Relation zu irgendeinem j steht. Man muß erwähnen, daß $\Sigma_i x_i$ und $\Pi_i x_i$ nur einer Summe und einem Produkt *ähneln*; sie sind nicht genau von dieser Art, weil die Individuen des Universums unzählbar sein können.

An dieser Stelle erhielte der Leser vielleicht auf keine andere Weise leicht eine so gute Vorstellung von der Bezeichnungsweise wie durch ein wenig Übung im Übersetzen aus der gewöhnlichen Sprache in dieses System und wieder dahin zurück. l_{ij} bedeute, daß i ein Liebhaber von j ist und b_{ij}, daß i ein Wohltäter von j ist. Dann bedeutet

$$\Pi_i\Sigma_j l_{ij} b_{ij},$$

daß alles zugleich Liebhaber und Wohltäter von etwas ist; und

$$\Pi_i\Sigma_j l_{ij} b_{ji},$$

daß alles ein Liebhaber eines Wohltäters von sich selbst ist.

$$\Sigma_i\Sigma_k\Pi_j(l_{ij} + b_{jk})$$

bedeutet, daß es zwei Personen gibt, von denen die eine alles liebt, was nicht Wohltäter der anderen ist (ob sie irgendwelche von diesen liebt oder nicht, ist nicht angegeben). g_i bedeute, daß i ein Greif ist, und c_i, daß i eine Chimäre ist, dann bedeutet

$$\Sigma_i\Pi_j(g_i l_{ij} + \bar{c}_j),$$

daß, wenn es irgendwelche Chimären gibt, es einen Greif gibt, der sie alle liebt; während

$$\Sigma_i\Pi_j g_i(l_{ij} + \bar{c}_j)$$

bedeutet, daß es einen Greif gibt, und er jede Chimära liebt, die existiert (wenn es überhaupt welche gibt). Andererseits bedeutet

$$\Pi_j\Sigma_i g_i(l_{ij} + \bar{c}_j),$$

daß Greife existieren (einer wenigstens) und daß irgendeiner von ihnen jede Chimära liebt, die es möglicherweise gibt; und

$$\Pi_j\Sigma_i(g_i l_{ij} + \bar{c}_j)$$

bedeutet, daß jede Chimära (wenn es eine gibt) von irgendeinem Greif geliebt wird.

Wir wollen ausdrücken: Jeder Teil der Welt wird entweder manchmal von Cholera heimgesucht und zu anderen Zeiten von Pocken (ohne Cholera) oder niemals zusammen von Gelbfieber und der Pest.

c_{ij} bedeute, der Ort i hat Cholera zur Zeit j.
s_{ij} bedeute, der Ort i hat Pocken zur Zeit j.
y_{ij} bedeute, der Ort i hat Gelbfieber zur Zeit j.
p_{ij} bedeute, der Ort i hat Pest zur Zeit j.

Dann schreiben wir

$$\Pi_i\Sigma_j\Sigma_k\Pi_l(c_{ij}\bar{c}_{ik}s_{ik} + \bar{y}_{il} + \bar{p}_{il}).$$

[196] | Wir wollen folgendes ausdrücken: Die eine oder die andere von zwei Theorien muß zugelassen werden: erstens, daß kein Mensch zu irgendeiner Zeit selbstlos oder frei ist, und manche Menschen stets heuchlerisch sind, und zu jeder Zeit manche Menschen freundlich sind zu Menschen, denen gegenüber sie sich zu anderer Zeit feindselig verhalten, oder zweitens, daß in jedem Augenblick alle Menschen gleichermaßen entweder Engel oder Teufel sind.

u_{ij} bedeute, der Mensch i ist selbstlos zur Zeit j

f_{ij} bedeute, der Mensch i ist frei zur Zeit j

h_{ij} bedeute, der Mensch i ist heuchlerisch zur Zeit j

a_{ij} bedeute, der Mensch i ist ein Engel zur Zeit j

d_{ij} bedeute, der Mensch i ist ein Teufel zur Zeit j

p_{ijk} bedeute, der Mensch i ist freundlich zur Zeit j zu dem Menschen k,

e_{ijk} der Mensch i ist zur Zeit j ein Freund des Menschen k

1_{jm} die beiden Objekte j und m sind identisch.

Dann lautet der Satz

$$\Pi_i\Sigma_h\Pi_j\Sigma_k\Sigma_l\Sigma_m\Pi_n\Pi_p\Pi_q(\bar{u}_{ij}\bar{f}_{ij}h_{hj}p_{kjl}e_{kml}\bar{1}_{jm} + a_{pn} + d_{qn}).$$

Wir müssen nun das Verfahren betrachten, nach dem man mit diesem Kalkül arbeitet. Es trifft durchaus nicht zu, daß das einzige Problem der Deduktion darin besteht, aus gegebenen Prämissen eine Conclusio zu ziehen. Im Gegenteil, es ist ebenso wichtig, eine Methode zu haben, um feststellen zu können, welche Prämissen zu einer gegebenen Conclusio führen. Außerdem existieren andere Probleme der Umformung, wo ein gewisses System von Fakten gegeben ist, und dieses in anderen Ausdrücken einer bestimmten Art beschrieben werden soll. Solcher Art ist z. B. das Problem von den 15 jungen Damen und andere, die sich auf Syntheme beziehen. Ich werde mich jedoch hier damit begnügen zu zeigen, wie, wenn eine Menge von Prämissen gegeben ist, diese verbunden und gewisse Buchstaben weggelassen werden können. Von den vielfältigen Methoden, die verfolgt werden können, werde ich hier die eine angeben, die mir im großen und ganzen am geeignetsten erscheint.

1. Nachdem die verschiedenen Prämissen mit unterschiedlichen Anzeigern (derselbe Anzeiger wird nicht in zwei Sätzen benutzt) hingeschrieben wurden, werden sie zusammen aufgeschrieben, und alle Π und alle Σ sind auf die linke Seite zu bringen. Das kann offensichtlich gemacht werden, denn

$$\Pi_i x_i \cdot \Pi_j x_j = \Pi_i\Pi_j x_i x_j$$
$$\Sigma_i x_i \cdot \Pi_j x_j = \Sigma_i\Pi_j x_i x_j$$
$$\Sigma_i x_i \cdot \Sigma_j x_j = \Sigma_i\Sigma_j x_i x_j.$$

2. Ohne die Anordnung der Indizes in irgendeiner Prämisse zu verändern, können die Π und Σ, die zu unterschiedlichen Prämissen gehören, relativ zueinander verschoben werden, | und die Σ sollten soweit wie möglich links [197]
von den Π angeordnet werden. Wir haben

$$\Pi_i \Pi_j x_{ij} = \Pi_j \Pi_i x_{ij}$$

$$\Sigma_i \Sigma_j x_{ij} = \Sigma_j \Sigma_i x_{ij}$$

und ebenso

$$\Sigma_i \Pi_j x_i y_j = \Pi_j \Sigma_i x_i y_j .$$

Aber diese Formel gilt nicht, wenn die i und j nicht getrennt sind. Wir haben jedoch

$$\Sigma_i \Pi_j x_{ij} \prec \Pi_i \Sigma_j x_{ij} .$$

Es wird daher gut sein, damit zu beginnen, die Σ soweit wie möglich nach links zu bringen, denn auf einer späteren Stufe des Vorgehens können sie nach rechts gebracht werden, aber nicht nach links. Wenn z. B. die Operatoren der beiden Prämissen $\Pi_i \Sigma_j \Pi_k$ und $\Sigma_x \Pi_y \Sigma_z$ sind, können wir sie in einer der beiden Reihenfolgen zusammenfassen

$$\Sigma_x \Pi_y \Sigma_z \Pi_i \Sigma_j \Pi_k$$

$$\Sigma_x \Pi_i \Sigma_j \Pi_y \Sigma_z \Pi_k ,$$

und wir werden dementsprechend gewöhnlich zwei unterschiedliche Conclusionen erhalten. Es wird oft der Geschicklichkeit überlassen sein, die günstigste Anordnung auszuwählen.

3. Es ist außerdem manchmal wünschenswert, den Booleschen Teil des Ausdrucks zu verändern, und die wegzulassenden Buchstaben kann man, wenn man will, jetzt weglassen. Zu diesem Zweck werden sie durch Relationen der zweiten Intension ersetzt, wie z. B. „außer“ usw. Wenn wir z. B. irgendwo in einem Ausdruck

$$a_{ijk} \bar{a}_{xyz}$$

finden, kann man das offensichtlich ersetzen durch

$$(n_{ix} + n_{jy} + n_{kz}),$$

wo, wie üblich, n nicht oder außer bedeutet. Diese dritte Stufe des Verfahrens ist oft ganz unerläßlich und umfaßt eine Vielfalt von Prozessen; aber in normalen Fällen kann man vollkommen darauf verzichten.

4. Der nächste Schritt, der auch normalerweise nicht gebraucht wird, besteht darin, die Anzeiger so zu wählen, daß sie sich auf dieselben Mengen von Objekten beziehen, soweit das nützlich ist. Wenn der quantifizierte Teil, oder Quantifikator, Σ_x enthält, und wir das x durch einen neuen Anzeiger i ersetzen wollen, der im Quantifikator noch nicht vorkommt, derart, daß jedes x ein i ist, können wir das sofort tun, indem wir einfach jeden Buchstaben des Booleschen Teils, der x als Anzeiger hat, mit x_i multiplizieren. Folglich, wenn wir haben „manche Frau ist ein Engel“, geschrieben in der Form $\Sigma_w a_w$ können wir das ersetzen durch $\Sigma_i (a_i w_i)$. Es wird oft angebrachter sein, den Anzeiger eines Π durch einen weiter gefaßten zu ersetzen; und das geschieht, indem man

jedem Buchstaben, der x als Anzeiger hat, $\bar{x}_i$ hinzufügt. So, wenn wir „alle Hunde sind Tiere und alle Tiere sind Wirbeltiere" folgendermaßen geschrieben haben,

$$\Pi_d \alpha_d \Pi_a v_a,$$

[198] | wo a und α beide Tier bedeuten, erscheint es günstig, den letzten Anzeiger durch i zu ersetzen, das für jedes Ding steht und den Satz zu schreiben $\Pi_i(\bar{\alpha}_i + v_i)$.

5. Der nächste Schritt besteht darin, den ganzen Booleschen Teil mit seiner Modifikation zu multiplizieren, die dadurch entstanden ist, daß für den Anzeiger von jedem Π jeder andere Anzeiger, der links von ihm im Quantifikator steht, gesetzt wurde. Also für

$$\Sigma_i \Pi_j l_{ij},$$

können wir schreiben

$$\Sigma_i \Pi_j l_{ij} l_{ii}.$$

6. Der nächste Schritt besteht in einer weiteren Umwandlung des Booleschen Teils, die 1. darin besteht, jedem beliebigen Teil irgendeinen Ausdruck hinzuzufügen; 2. darin, daß wir von irgendeinem Teil einen beliebigen Faktor weglassen und 3., daß wir beachten, daß

$$x\bar{x} = \mathbf{f},\ x + \bar{x} = \mathbf{v},$$

so daß

$$x\bar{x}y + z = z \qquad (x + \bar{x} + y)\, z = z.$$

7. Die Π und Σ im Quantifikator, deren Anzeiger nicht mehr im Booleschen Teil auftreten, werden weggelassen.

Der fünfte Schritt wird in der Praxis mit einem Teil des sechsten und siebenten kombiniert.

So gehen wir, wenn wir wollen, gleich von $\Sigma_i \Pi_j l_{ij}$ zu $\Sigma_i l_{ii}$ über.

Die folgenden Beispiele werden genügen.

Aus den Prämissen $\Sigma_i a_i b_i$ und $\Pi_j(\bar{b}_j + c_j)$ eliminiere man b. Wir schreiben zuerst

$$\Sigma_i \Pi_j a_i b_i (\bar{b}_j + c_j).$$

Der distributive Vorgang ergibt

$$\Sigma_i \Pi_j a_i (b_i \bar{b}_j + b_i c_j).$$

Aber *wir haben immer das Recht, einen Faktor wegzulassen oder einen zusätzlichen Ausdruck hinzuzufügen*. Wir erhalten so

$$\Sigma_i \Pi_j a_i (b_i \bar{b}_j + c_j).$$

Drittens können wir, wenn wir wollen, n_{ij} für $b_i \bar{b}_j$ setzen. In jedem Fall können wir j mit i identifizieren und erhalten die Conclusio

$$\Sigma_i a_i c_i.$$

Es seien die Prämissen gegeben

$$\Sigma_h \Pi_i \Sigma_j \Pi_k (\alpha_{hik} + s_{jk} l_{ji})$$
$$\Sigma_u \Sigma_v \Pi_x \Pi_y (\varepsilon_{uyx} + \bar{s}_{yv} b_{vx}).$$

Es soll s eliminiert werden. Die zusammengefaßte Prämisse lautet

$$\Sigma_u \Sigma_v \Sigma_h \Pi_i \Sigma_j \Pi_x \Pi_k \Pi_y (\alpha_{hik} + s_{jk} l_{ji}) (\varepsilon_{uyx} + \bar{s}_{yv} b_{vx}).$$

Man identifiziere k mit v und y mit j, und wir erhalten

$$\Sigma_u \Sigma_v \Sigma_h \Pi_i \Sigma_j \Pi_x (\alpha_{hiv} + s_{jv} l_{ji}) (\varepsilon_{ujx} + \bar{s}_{jv} b_{vx}).$$

Der Boolesche Teil reduziert sich dann, so daß die Conclusio lautet

$$\Sigma_u \Sigma_v \Sigma_h \Pi_i \Sigma_j \Pi_x (\alpha_{hiv} \varepsilon_{ujx} + \alpha_{hiv} b_{vx} + \varepsilon_{ujx} l_{ji}).$$

| IV. — *Zweit-intentionale Logik.* [199]

Wir wollen nun die Logik von Begriffen untersuchen, die im kollektiven Sinne verstanden werden. Unsere bisher entwickelte Bezeichnungsweise zeigt uns nicht einmal, wie man ausdrücken kann, daß zwei Indizes i und j ein und dasselbe Ding bezeichnen. Wir können ein spezielles Symbol der zweiten Intension, sagen wir 1, einführen, um die Identität auszudrücken, und können $\mathbf{1}_{ij}$ schreiben. Aber diese Identitätsrelation hat besondere Eigenschaften. Die erste ist die, daß wenn i und j identisch sind, was immer für i wahr ist, auch für j wahr ist. Das kann man so schreiben

$$\Pi_i \Pi_j \{\bar{\mathbf{1}}_{ji} + \bar{x}_i + x_j\}.$$

Der Gebrauch des allgemeinen Anzeigers x eines Symbols zeigt hier, daß die Formel ikonisch ist. Die andere Eigenschaft ist die, daß wenn alles, was für i wahr ist, für j wahr ist, i und j identisch sind. Das schreibt man ganz einfach wie folgt: Das Symbol q bezeichne die Relation einer Qualität, einer Eigenschaft, einer Tatsache oder eines Prädikats zu seinem Subjekt. Dann ist die Eigenschaft, die wir ausdrücken wollen

$$\Pi_i \Pi_j \Sigma_k (\mathbf{1}_{ij} + \bar{q}_{ki} q_{kj}).$$

Und die Identität wird so definiert:

$$\mathbf{1}_{ij} = \Pi_k (q_{ki} q_{kj} + \bar{q}_{ki} \bar{q}_{kj}).$$

Das heißt, wenn man sagt, daß Dinge identisch sind, bedeutet das, daß jedes Prädikat für beide wahr ist oder für beide falsch ist. Es mag umständlich erscheinen, den Gedanken einer Qualität einzuführen, um die Identität auszudrücken, aber dieser Eindruck wird abgeschwächt, wenn man daran denkt, daß $q_{ki} q_{kj}$[2]] nur bedeutet, daß i und j beide in der Klasse oder der Menge k liegen. Wenn wir wollen, können wir das Symbol q weglassen, indem wir den

Anzeiger eines Symbols verwenden und indem wir uns darauf in dem Quantifikator ebenso beziehen, wie wir uns auf tiefgestellte Indizes beziehen. Das heißt, wir können schreiben

$$1_{ij} = \Pi_x(x_i x_j + \bar{x}_i \bar{x}_j).$$

Die Eigenschaften des Symbols q müssen nun untersucht werden. Diese können alle auf folgende Weise zusammengefaßt werden, daß, wenn wir beliebige Individuen i_1, i_2, i_3 usw. und beliebige Individuen j_1, j_2, j_3 usw. nehmen, es eine Menge, eine Klasse oder ein Prädikat gibt, das alle i umfaßt und alle j ausschließt außer denen, die mit einigen der i's identisch sind. Das kann man so schreiben

$$(\Pi_\alpha \Pi_{i_\alpha})\,(\Pi_\beta \Pi_{j_\beta})\,\Sigma_k(\Pi_\alpha \Sigma_{i'_\alpha})\,\Pi_l q_{ki_\alpha}(\bar{q}_{kj_\beta} + q_{li'_\alpha} q_{lj_\beta} + \bar{q}_{li'_\alpha} \bar{q}_{lj_\beta}),$$

wo die i und die i' dieselbe Menge von Objekten sind. Diese Bezeichnungsweise präsentiert Indizes von Indizes. $\Pi_\alpha \Pi_{i_\alpha}$ zeigt, daß wir eine beliebige Menge von i's nehmen müssen und dann irgendein i dieser Menge. Wir müssen dann dasselbe mit den j machen. Wir können dann eine solche Qualität k finden, die das gewählte i hat und ebenfalls eine solche, die das gewählte j nicht hat, wenn wir nicht ein i finden, das mit dem gewählten j identisch ist. Die Notwendigkeit einer gewissen Art von Bezeichnungsweise, wie sie hier für die gemeinsame Behandlung von Klassen beschrieben ist, ergibt sich aus der folgenden Betrach-
[200] tung, daß wir in solch einer Darlegung weder | von einem einzigen Individuum (wie in der non-relativen Logik) noch von einer kleinen Anzahl von Individuen, wobei jedes für sich betrachtet wird, sondern von einer ganzen Klasse, vielleicht von einer Unendlichkeit von Individuen sprechen. Das erfordert einen Relativ-Begriff mit einer unbestimmten Reihe von Indizes wie $x_{ijkl}\ldots$. Solch ein Relativ wird jedoch in den meisten, wenn nicht in allen Fällen, von ausgearteter Art sein und läßt sich folglich wie oben ausdrücken. Aber es erscheint angebrachter, eine teilweise Zerlegung dieser Definition zu versuchen. Zuerst einmal kann jedes Individuum als Klasse betrachtet werden. Das schreibt man

$$\Pi_i \Sigma_k \Pi_j q_{ki}(\bar{q}_{kj} + 1_{ij}).$$

Das ist das *neunte Ikon*. Weiterhin, wenn irgendeine Klasse gegeben ist, gibt es eine andere, die alles einschließt, was die erste ausschließt und alles ausschließt, was die erste einschließt. Das bedeutet

$$\Pi_l \Pi_k \Pi_i(q_{li}\bar{q}_{ki} + \bar{q}_{li} q_{ki}).$$

Das ist das *zehnte Ikon*. Als nächstes, wenn irgend zwei Klassen gegeben sind, gibt es eine dritte, die alles einschließt, was jede der beiden einschließt und alles ausschließt, was die beiden ausschließen. Das ergibt

$$\Pi_l \Pi_m \Sigma_k \Pi_i(q_{li} q_{ki} + q_{mi} q_{ki} + \bar{q}_{li} \bar{q}_{mi} \bar{q}_{ki}).$$

Das ist das *elfte Ikon*. Dann, wenn irgend zwei Klassen gegeben sind, gibt es eine Klasse, die alle Individuen der ersten einschließt und irgend ein Individuum