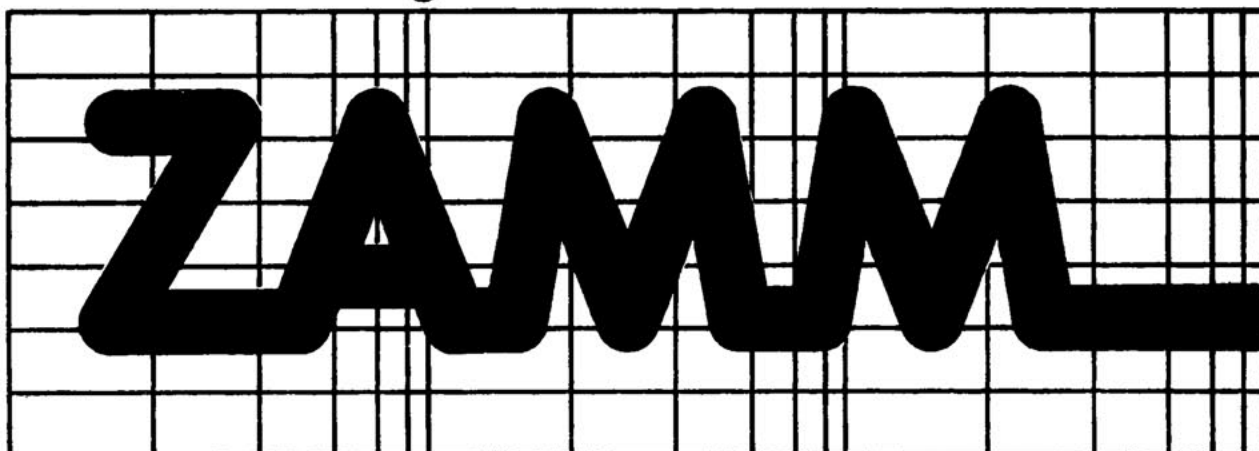




Applied Mathematics and Mechanics

Founded by Richard von Mises in 1921

Edited at Institute of Mechanics
Academy of Sciences of the G.D.R.

Editor-in-Chief: G. Schmidt

Editorial Board

G. Alefeld (Karlsruhe)
H. Beckert (Leipzig)
L. Berg (Rostock)
L. Bittner (Greifswald)
L. Collatz (Hamburg)
W. Fiszdon (Warsaw)
H. Gajewski (Berlin)
P. Germain (Paris)
H. Günther (Karl-Marx-Stadt)
J. Heinhold (Munich)
H. Heinrich (Kiel)
K. Hennig (Berlin)
P. J. van der Houwen (Amsterdam)

J. Hult (Gothenburg)
A. Ju. Ischlinski (Moscow)
R. Klötzler (Leipzig)
H. Neuber (Bad Wörishofen)
K. Oswatitsch (Vienna)
M. Peschel (Berlin)
J. Rychlewski (Warsaw)
G. Schmidt (Berlin)
J. W. Schmidt (Dresden)
G. G. Tschorny (Moscow)
H. Unger (Bonn)
F. Ziegler (Vienna)



Akademie-Verlag • Berlin

Volume 69 • 1989
Number 8

Instructions for Authors

ZAMM publishes original papers (main articles and short communications), the lectures presented at the annual GAMM conferences, and review articles (requested by the Editorial Office of ZAMM). Papers in English (preferably) or German to be submitted for publication should be sent to the address at the bottom of this page (master and one copy), in the case of original papers together with an explicit assurance that they have not been published previously in, or are submitted to, another public journal. Authors are held fully responsible for all information included in their paper and should have one copy available for correction purposes. They get two sets of page proofs, one of them has to be returned within one week. Authors may be charged for extensive corrections in the text; corrections in the figures are not possible. They receive 150 (plenary GAMM lectures), 75 (main articles and short GAMM lectures), or 25 (short communications), respectively, free-of-charge reprints. Additional reprints have to be paid for.

Manuscripts should be type-written (one-sided, double-spaced with wide margins at both sides, each sheet numbered) beginning with the authors' names and the title of the paper. Extra types (like bold-faced letters etc.) should be marked. Please, distinguish between 1, l, e; v, w; o, O, 0 (zero); k, K, x; i, u; x, X (cross), χ etc. **Formulas** must be written clearly legible (type-writer if possible, never use pencil). Formulas used in the text have to be numbered at the right margin. Use abbreviations for long terms, "exp" instead of "e" for extensive exponents, bold-faced letters for vectors etc. Instead of arrows; avoid hierarchies of indices and exponents if possible. The end of a proof should be marked.

Figures should be submitted on separate sheets, drawn with Indian ink and numbered consecutively. Add figure captions, tables, and footnotes (if not avoidable) on extra sheet each.

References should be numbered in brackets throughout the text and collected according to these numbers in the appended bibliography (References). Each reference should contain author(s), title, and complete bibliographical coordinates following the subsequent examples.

Books (Reports, Preprints etc.):

IRONS, B. M.; SHRIVE N. G.: Numerical methods in engineering and applied science — Numbers are fun. Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications, Ellis Horwood Ltd., Chichester 1987.

Articles in periodicals:

KASSEM, S. E.: Wave source potentials for two superposed fluids, each of finite depth. Indian J. Pure Appl. Math. 18 (1987) 2, 186—193.

Articles in Proceedings etc.:

LABISCH, F. K.: Some remarks on the morphology of non-unique solutions in nonlinear elastostatics. In: KÜPPER, T.; SEYDEL, R.; TROGER, H. (eds.): Bifurcation: analysis, algorithms, applications. Proc. Conf. at the Univ. of Dortmund, August 18—22, 1986. Internat. Ser. of Numer. Mathematics, Vol. 79, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart 1987, pp. 177—184.

To each original paper and review article, a **summary** of 5 to 10 lines in English (for manuscripts of more than 10 pages in German and Russian) and a short list of key-words and corresponding AMS (MOS) classification numbers are needed.

The precise address of each author with full name, academic title etc. is to be added. Information on address changes is appreciated.

ZAMM
Editorial Office
Rudower Chaussee 5
DDR-1199 Berlin

Hinweise für die Autoren

ZAMM veröffentlicht Originalarbeiten (Hauptaufsätze und Kleine Mitteilungen), die Vorträge der jährlichen GAMM-Tagungen und Übersichtsartikel (die von der Redaktion erbeten werden). Arbeiten in Englisch (vorzugsweise) oder Deutsch, die zur Publikation eingereicht werden, sind an die unten stehende Adresse zu senden (Original und eine Kopie). Dem Manuskript von Originalarbeiten ist eine Erklärung beizufügen, daß die Arbeit bisher in keiner anderen Zeitschrift veröffentlicht worden ist und auch kein Antrag auf Veröffentlichung in einer solchen Zeitschrift läuft. Die Autoren sind für den Inhalt ihrer Arbeiten voll verantwortlich und sollten für Korrekturzwecke eine weitere Kopie besitzen. Sie erhalten die Korrekturfahnen in zweifacher Ausfertigung; eine Korrektur ist innerhalb einer Woche zurückzusenden. Die Kosten für umfangreiche nachträgliche Korrekturen können dem Autor berechnet werden. Korrekturen in den Abbildungen sind nicht möglich. Die Autoren erhalten kostenlos 150 Sonderdrucke für die Hauptvorträge der GAMM-Tagungen, 75 für Hauptaufsätze, Übersichtsartikel und die GAMM-Kurzvorträge und 25 für Kleine Mitteilungen. Zusätzliche Sonderdrucke sind gegen Berechnung erhältlich.

Die **Manuskripte** müssen mit Maschine geschrieben sein (einsseitig, zweizeiliger Zeilenabstand mit breitem Rand auf beiden Seiten, jede Seite nummeriert), wobei mit den Namen der Autoren begonnen werden soll und danach der Titel folgt. Besondere Typen (z. B. halbfett) sind zu markieren. Es soll gut unterschieden werden zwischen 1, l, e; v, w; o, O, 0 (Null); k, K, x; i, u; x, X (Kreuz), χ ; usw. Die **Formeln** müssen deutlich lesbar sein (möglichst maschinenschriftlich, keine Verwendung von Bleistift). Im Text verwendete Formeln sollten am rechten Rand durchnummeriert werden. Für lange Terme sind Abkürzungen zu verwenden, „exp“ anstelle von „e“ für große Ausdrücke im Exponenten, halbfett für Vektoren anstelle von darübergesetzten Pfeilen — Mehrfach-Indizes wie auch -Exponenten möglichst vermeiden. Das Ende eines Beweises sollte gekennzeichnet werden.

Abbildungen sind auf gesonderten Blättern einzureichen und sollten mit Tusche gezeichnet und durchnummeriert sein. Die Abbildungsunterschriften, eventuelle Tabellen und (falls nicht vermeidbar) Fußnoten sind ebenfalls auf gesonderten Blättern hinzuzufügen.

Literaturzitate sind durch den gesamten Text durchnummerieren (in eckigen Klammern) und in der entsprechenden Reihenfolge im am Schluß folgenden Literaturverzeichnis aufzulisten. Jedes Zitat sollte Autor(en), Titel und die vollständigen bibliografischen Koordinaten enthalten, entsprechend den folgenden Beispielen.

Bücher (Reports, Preprints usw.):

IRONS, B. M.; SHRIVE N. G.: Numerical methods in engineering and applied science — Numbers are fun. Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications, Ellis Horwood Ltd., Chichester 1987.

Zeitschriftenartikel:

KASSEM, S. E.: Wave source potentials for two superposed fluids, each of finite depth. Indian J. Pure Appl. Math. 18 (1987) 2, 186—193.

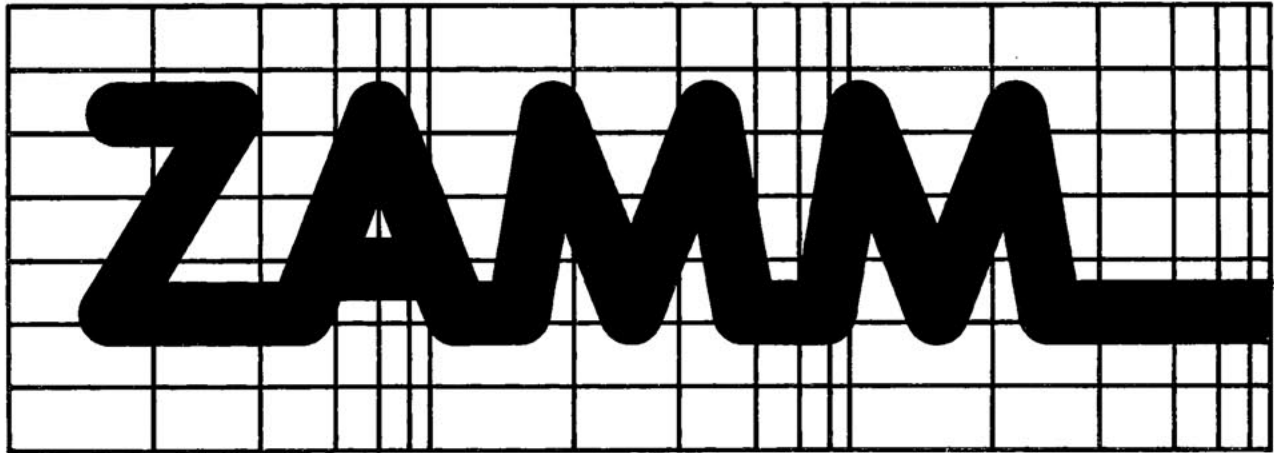
Arbeiten in Proceedings usw.:

LABISCH, F. K.: Some remarks on the morphology of non-unique solutions in nonlinear elastostatics. In: KÜPPER, T.; SEYDEL, R.; TROGER, H. (eds.): Bifurcation: Analysis, algorithms, applications. Proc. Conf. at the Univ. of Dortmund, August 18—22, 1986. Internat. Ser. of Numer. Mathematics, Vol. 79, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart 1987, pp. 177—184.

Für jede Originalarbeit und jeden Übersichtsartikel wird eine englische **Zusammenfassung** (bei Manuskripten von mehr als 10 Seiten auch je eine in Deutsch und Russisch) von 5 bis 10 Zeilen Länge sowie eine kurze Liste von Stichworten und den entsprechenden AMS (MOS)-Klassifikationsmarken benötigt.

Die genaue Adresse jedes Autors mit vollständigem Namen, akademischen Titeln usw. muß beigefügt werden. Bei Adressänderung wird eine umgehende Information erwartet.

Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik



Applied Mathematics and Mechanics

Founded by Richard von Mises in 1921

Edited at Institute of Mechanics
Academy of Sciences of the G.D.R.

Editor-in-Chief: G. Schmidt

Editorial Board

G. Alefeld (Karlsruhe)
H. Beckert (Leipzig)
L. Berg (Rostock)
L. Bittner (Greifswald)
L. Collatz (Hamburg)
W. Fiszdon (Warsaw)
H. Gajewski (Berlin)
P. Germain (Paris)
H. Günther (Karl-Marx-Stadt)
J. Heinhold (Munich)
H. Heinrich (Kiel)
K. Hennig (Berlin)
P. J. van der Houwen (Amsterdam)

J. Hult (Gothenburg)
A. Ju. Ischlinski (Moscow)
R. Klötzler (Leipzig)
H. Neuber (Bad Wörishofen)
K. Oswatitsch (Vienna)
M. Peschel (Berlin)
J. Rychlewski (Warsaw)
G. Schmidt (Berlin)
J. W. Schmidt (Dresden)
G. G. Tschorny (Moscow)
H. Unger (Bonn)
F. Ziegler (Vienna)



Akademie-Verlag · Berlin

Volume 69 · 1989

Number 8

The aim and scope of ZAMM is, in agreement with the intentions of its founder Richard von Mises, one of the outstanding scientists of our century in both Mathematics and Mechanics: to publish new results and review articles, the proceedings of the annual GAMM conferences, book reviews and information on applied mathematics (mainly on numerical mathematics and various parts and applications of analysis, in particular numerical aspects of differential and integral equations), on the whole field of theoretical and applied mechanics (solid mechanics, fluid mechanics, thermodynamics) and on mathematical physics.

The journal is of interest for persons working in applied mathematics and mechanics as well as on mathematical or mechanical questions in other sciences, for instance mechanical and civil engineering, electrotechniques, and chemistry.

In Übereinstimmung mit den Zielstellungen des Begründers der ZAMM, Richard von Mises, eines der bedeutendsten Wissenschaftler unseres Jahrhunderts auf dem Gebiet der Mathematik und Mechanik, publiziert die Zeitschrift neue Ergebnisse und Übersichtsartikel, die Vorträge auf den jährlichen GAMM-Tagungen, Buchbesprechungen und Informationen über Angewandte Mathematik (hauptsächlich über numerische Mathematik und verschiedene Teile sowie Anwendungen der Analysis, insbesondere numerische Aspekte bei Differential- und Integralgleichungen), über das gesamte Gebiet der theoretischen und angewandten Mechanik (Festkörpermechanik, Strömungsmechanik, Thermodynamik) und über mathematische Physik.

Die Zeitschrift wendet sich an Vertreter der Angewandten Mathematik und Mechanik wie auch an Wissenschaftler und Ingenieure, die sich mit mathematischen oder theoretisch-mechanischen Fragen auf anderen Gebieten, z. B. Maschinenbau und Bauwesen, Elektrotechnik und Chemie, befassen.

Terms of subscription

Orders can be sent

- **in the GDR:** to Postzeitungsvertrieb, or to Akademie-Verlag Berlin, Leipziger Str. 3—4, PF-Nr. 1233, DDR-1086 Berlin;
- **in the other socialist countries:** to a book-shop for foreign language literature or to the competent news-distributing agency;
- **in the FRG and Berlin (West):** to a book-shop or to the wholesale distributing agency Kunst und Wissen, Erich Biebert oHG, Postfach 102844, D-7000 Stuttgart 10;
- **in the other Western European Countries:** to Kunst und Wissen, Erich Biebert GmbH, General Wille-Str. 4, CH-8002 Zürich;
- **in other countries:** to the international book- and journal-selling trade, to Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Postfach 160, DDR-7010 Leipzig; or to the Akademie-Verlag Berlin, Leipziger Str. 3—4 PF-Nr. 1233, DDR-1086 Berlin.

Bezugsmöglichkeiten

Bestellungen sind zu richten:

- **in der DDR** an den Postzeitungsvertrieb oder an den Akademie-Verlag Berlin, Leipziger Str. 3—4, PF-Nr. 1233, DDR-1086 Berlin;
- **im sozialistischen Ausland** an eine Buchhandlung für fremdsprachige Literatur oder an den zuständigen Postzeitungsvertrieb;
- **in der BRD und Berlin (West)** an eine Buchhandlung oder an die Auslieferungsstelle Kunst und Wissen, Erich Biebert oHG, Postfach 102844, D-7000 Stuttgart 10;
- **in den übrigen westeuropäischen Ländern** an eine Buchhandlung oder an die Auslieferungsstelle Kunst und Wissen, Erich Biebert GmbH, General Wille-Str. 4, CH-8002 Zürich;
- **im übrigen Ausland** an den Internationalen Buch- und Zeitschriftenhandel; den Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der Deutschen Demokratischen Republik, Postfach 160, DDR-7010 Leipzig; oder an den Akademie-Verlag Berlin, Leipziger Str. 3—4, PF-Nr. 1233, DDR-1086 Berlin.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Herausgeber: AdW der DDR, Institut für Mechanik, Karl-Marx-Stadt. Mit der Herausgabe beauftragt und Chefredakteur: Prof. Dr. Günter Schmidt, Rudower Chaussee 5, DDR-1199 Berlin, Fernruf: 6743669 oder 6743668 (gleichzeitig Anschrift der Redaktion).

Verlag: Akademie-Verlag Berlin, Leipziger Straße 3—4, DDR-1086 Berlin; Fernruf: 2236221 oder 2236229; Telex-Nr.: 114420; Bank: Staatsbank der DDR, Berlin, Kto.-Nr.: 6836-26-20712. Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1282 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik. Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, DDR-5820 Bad Langensalza.

Erscheinungsweise: Die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Die 12 Hefte eines Jahres einschließlich Tagungshefte bilden einen Band. Bezugspreis je Band 420,— DM zuzüglich Versandspesen. Bezugspreis je Heft 35,— DM. Der gültige Jahresbezugspreis für die DDR ist der Postzeitungsliste zu entnehmen. Bestellnummer dieses Heftes: 1009/69/8.

Urheberrecht: Alle Rechte vorbehalten, insbesondere die der Übersetzung. Kein Teil dieser Zeitschrift darf in irgendeiner Form — durch Fotokopie, Mikrofilm oder irgendein anderes Verfahren — ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsanlagen verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden. — All rights reserved (including those of translation into foreign languages). No part of this issue may be reproduced in any form, by photoprint, microfilm or any other means, nor transmitted or translated into a machine language without written permission from the publishers.

© 1989 by Akademie-Verlag Berlin. Printed in the German Democratic Republic.

AN (EDV) 35937

02000

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 69 (1989) 8, 219 – 226

GAMER, U.; ORCAN, Y.

On the Elastic-plastic Shrink Fit Rotating with Supercritical Angular Speed

Unter Zugrundelegung der Trescaschen Fließbedingung und der zugeordneten Fließregel wird die Verteilung von Spannungen und Verschiebung in der vollplastizierten Nabe eines rotierenden Preßverbandes untersucht. Das Nabenmaterial weist lineare Verfestigung auf. Bei der kritischen Winkelgeschwindigkeit kommt es zu einem Wechsel des Tresca-Regimes.

Based on Tresca's yield criterion and the associated flow rule, the distribution of stress and displacement in the completely plasticized hub of a rotating shrink fit is studied. The hub material exhibits linear hardening. At the critical angular speed, a change in the Tresca regime takes place.

На основе условия пластичности Треска и связанного с этим условием правила течения изучается распределение натяжения и смещения в полно-пластичнованной ступице вращающей прессованной склейки. Материал ступицы показывает линейное упрочнение. При критической угловой скорости встречается изменение режима Треска.

1. Introduction

Shrink fits are extensively used in mechanical engineering as a means of transmitting high moments at low production costs. It is obvious that the strength of the material can be utilized better by a design admitting plastic deformation of the hub. The elastic-plastic shrink fit problem was first studied by LUNDBERG [1] with the help of the von Mises yield criterion but his approximate solution is hardly applicable. An exact solution, based on Tresca's yield criterion and the flow rule associated to it, is due to KOLLMANN [2]. Since in modern machinery, running with high angular speeds, shrink fits are exposed to considerable centrifugal forces, KOLLMANN investigated the dependence of the interface pressure on the angular speed [3]. A discussion of the limits of the theory presented there, especially the critical angular speed, together with a generalization to hardening material was given by GAMER [4]. The critical speed is characterized by a change in the Tresca regime. This event was studied by GAMER and KOLLMANN for a partly plasticized hub of perfectly plastic material [5]. Later, GAMER found an analytical solution for the supercritical rotation of a shrink fit with fully plasticized perfectly plastic hub [6].

Subject of the present investigation is the supercritical rotation of a shrink fit with linear hardening hub material under the presumption that the hub has been completely plasticized by assemblage or by assemblage and subcritical rotation but the generalization to a partly plasticized hub is possible. It is further assumed that the solid inclusion stays elastic, that both hub and inclusion are in a state of plane stress and that their elastic moduli agree.

After the assemblage the circumferential stress in the hub is positive whereas the radial stress is negative. Hence, according to the flow rule associated to Tresca's yield criterion, equal but opposite plastic strains occur in circumferential and in radial directions. By rotation both stresses are raised. At the critical angular speed the slope of the radial stress vanishes at the outer edge of the hub. With still increasing angular speed the radial stress becomes positive in the outer part of the hub. Therefore, plastic deformation in the axial direction occurs with its increment being equal but opposite to the increment of circumferential plastic strain. In the inner part of the hub the subcritical plastic deformation continues but at the inwards moving border between the two parts of the plasticized hub the radial plastic strain is frozen to permanent plastic strain.

2. The elastic inclusion and the inner part of the plasticized hub

The equation of motion

$$d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = -\rho\omega^2 r \quad (2.1)$$

where ρ denotes the density and ω the angular speed and the geometrical relations

$$\varepsilon_r = du/dr, \quad \varepsilon_\theta = u/r \quad (2.2)$$

hold in the entire shrink fit irrespective of the material behavior.

For elastic behavior these equations are supplemented by Hooke Law

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_\theta, \quad E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_r. \quad (2.3)$$

Therewith, the stresses and the displacement in the elastic inclusion are given by [7, 8]

$$\sigma_r = K - \frac{1}{8}(3 + \nu)\rho\omega^2 r^2, \quad \sigma_\theta = K - \frac{1}{8}(1 + 3\nu)\rho\omega^2 r^2, \quad (2.4), (2.5)$$

$$Eu = (1 - \nu)(\sigma_r + \frac{1}{4}\rho\omega^2 r^2)r = (1 - \nu)[K - \frac{1}{8}(1 + \nu)\rho\omega^2 r^2]r. \quad (2.6)$$

Since for subcritical angular speed the circumferential stress is positive and the radial stress is negative, the plastic deformation of the inner part of the hub is governed by the yield condition

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y. \quad (2.7)$$

According to the flow rule associated to this yield condition there hold

$$d\epsilon_r^p/d\epsilon_\theta^p = -1, \quad d\epsilon_z^p = 0. \quad (2.8)$$

Due to the lack of plastic predeformation similar relations hold also for the accumulated plastic strain in the inner plastic region. Consideration of the equivalence of the increment of plastic work yields

$$\epsilon_{EQ} = \epsilon_\theta^p. \quad (2.9)$$

The equivalent plastic strain (2.9) is used in the hardening law

$$\sigma_y = \sigma_0(1 + \eta\epsilon_{EQ}) \quad (2.10)$$

where σ_0 is the initial yield limit and η the hardening parameter. Therefrom, one can derive the stresses, the radial displacement and the plastic strains as [4, 8]

$$\sigma_r = \frac{1}{1+H} \left\{ \sigma_0 \log r - \frac{HC_2}{2r^2} - \frac{1}{8} [4 + (3+\nu)H] \varrho \omega^2 r^2 \right\} + C_1, \quad (2.11)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{1+H} \left\{ \sigma_0(1 + \log r) + \frac{HC_2}{2r^2} - \frac{1}{8} [4 + (1+3\nu)H] \varrho \omega^2 r^2 \right\} + C_1, \quad (2.12)$$

$$Eu = (1-\nu) \left(\sigma_r + \frac{1}{4} \varrho \omega^2 r^2 \right) r + \frac{C_2}{r} \quad (2.13)$$

or

$$Eu = \frac{1}{1+H} \left\{ (1-\nu) \sigma_0 r \log r + \frac{1}{8} [2 + (1+\nu)H] \left[4 \frac{C_2}{r} - (1-\nu) \varrho \omega^2 r^3 \right] \right\} + (1-\nu) C_1 r \quad (2.14)$$

and

$$E\epsilon_\theta^p = -E\epsilon_r^p = -\sigma_y + \frac{1}{4} (1-\nu) \varrho \omega^2 r^2 + \frac{C_2}{r^2} \quad (2.15)$$

or

$$E\epsilon_\theta^p = -E\epsilon_r^p = \frac{1}{1+H} \left[-\sigma_0 + \frac{1}{4} (1-\nu) \varrho \omega^2 r^2 + \frac{C_2}{r^2} \right] \quad (2.16)$$

with $H := \sigma_0 \eta / E$.

From the geometrical condition $u^I(a) - u^s(a) = i$ and making use of (2.6) and (2.13) one obtains immediately $C_2 = Eai$ since the radial stress has to be continuous at the interface $r = a$. In the above, s stands for shaft and I for the first or inner plastic region of the hub. In the following, II denotes the second or outer plastic region of the hub.

3. The outer part of the plasticized hub

As soon as the critical angular speed

$$\bar{\Omega}_c^2 = \frac{4}{4 + (3+\nu)H} (1 + H\bar{I}) \quad (3.1)$$

with $\bar{\Omega}^2 := \varrho \omega^2 b^2 / \sigma_0$ and $\bar{I} := Eai / (\sigma_0 b^2)$ is reached [4], the outer plastic region appears at the outer edge $r = b$ of the hub and spreads inwards with increasing angular speed. In this region the stresses satisfy the inequality

$$\sigma_\theta > \sigma_r \geq 0. \quad (3.2)$$

Hence, Tresca's yield condition becomes

$$\sigma_\theta = \sigma_y. \quad (3.3)$$

The equation of motion (2.1) and the yield condition (3.3) lead to

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \int \sigma_y dr - \frac{1}{3} \varrho \omega^2 r^2 + \frac{C_3}{r}. \quad (3.4)$$

To be able to perform the integration, one needs the dependence of σ_y on r . This follows from a second relation between the equivalent plastic strain and the yield stress. Therefore, deformation is considered.

The flow rule associated to (3.2) and (3.3) reads

$$d\epsilon_\theta^p/d\epsilon_z^p = -1, \quad d\epsilon_r^p = 0. \quad (3.5)$$

In integrating these relations, plastic predeformation has to be taken into account. According to (3.5) the increment of radial strain is governed by Hooke's law,

$$d\epsilon_r = \frac{1}{E} (d\sigma_r - \nu d\sigma_\theta), \quad (3.6)$$