B. W. GNEDENKO

LEHRBUCH DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN

HERAUSGEGEBEN VON DER
DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
INSTITUTE FÜR MATHEMATIK

I. ABTEILUNG

MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER

BAND IX

LEHRBUCH DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

VON

B. W. GNEDENKO

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

1962

B. W. GNEDENKO

LEHRBUCH DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Vom Autor neubearbeitete und autorisierte Ausgabe
in deutscher Sprache herausgegeben von

Dr. HANS-JOACHIM ROSSBERG

3. erweiterte Auflage

Mit 20 Abbildungen und 21 Tabellen

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

1962

Б. В. Гнеденко
Курс теории вероятностей

Erschienen im Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur der UdSSR, Moskau 1954;
Dritte, überarbeitete Auflage, Moskau 1961

Durch die Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
Institute für Mathematik, besorgte Übersetzung

Wissenschaftliche Redaktion: Hans-Joachim Roßberg, Berlin

Als Lehrbuch an den Universitäten
und Hochschulen eingeführt.
Staatssekretariat f. d. Hoch- u. Fachschulwesen

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4

Lizenznummer: 202 · 100/546/62
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer" Bad Langensalza
Bestellnummer: 5210 · ES 19 B 5

VORWORT ZUR DRITTEN AUFLAGE

Die sieben Jahre, die seit Erscheinen der zweiten sowjetischen Auflage dieses Buches vergangen sind, brachten nicht nur der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematischer Wissenschaft bedeutenden Erfolg, sondern auch der Erweiterung und Vertiefung ihrer Verbindung mit der Praxis sowie den Ansichten über den Charakter der Darstellung dieser Disziplin. In diesem Zeitraum erschien eine große Anzahl interessanter grundlegender Lehrbücher für Studenten und Aspiranten an den Universitäten. In erster Linie möchte ich auf solche Bücher hinweisen wie:

M. Loéve, Probability theory, New York 1955;

O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu Tulcea, Calcul probabilităţilor şi aplicaţii, Bucureşti 1956;

A. Rényi, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1962;

H. Richter, Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956;

M. Fisz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Berlin 1962.

Die Bücher von M. Loéve und H. Richter bringen die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Sinne einer abstrakten mathematischen Theorie ohne Bezug auf die anschaulichen Vorstellungen und die Behandlung angewandter Beispiele. Ich finde, daß Bücher solcher Richtung notwendig sind. Die erste Bekanntschaft mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung sollte jedoch auf der Grundlage anschaulicher Vorstellungen und unter ständiger Betonung der Vielfalt ihrer Verbindungen mit der Naturwissenschaft, Technik und anderen Tätigkeitsbereichen des Menschen stattfinden. Deshalb bin ich auch in dieser Auflage weder von meinem Stil der Darstellung noch von den methodologischen Bestrebungen abgegangen.

Im Vergleich zur zweiten Auflage hat sich das Buch etwas verändert. Es sind darin neue Paragraphen hinzugekommen, bei anderen wurde der Inhalt etwas erweitert, und einige festgestellte Druck- und Schreibfehler wurden korrigiert.

Gleichzeitig hielt ich es für notwendig, den kurzen historischen Abriß am Schluß des Buches gegenüber der zweiten Auflage etwas zu verändern und einige Abschnitte neu zu formulieren. Aus zeitlichen Gründen war es mir jedoch nicht möglich, die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung bis in unsere Tage zu verfolgen, so daß ich mich auf die Anfänge ihrer Entwicklung beschränkt habe.

Ich danke herzlich allen Lesern, die sich die Zeit genommen haben, mir Fehler in der zweiten Auflage mitzuteilen. Ich war nach besten Kräften bestrebt, die mir gegebenen Ratschläge auszuwerten. Sehr dankbar wäre ich, wenn mir auch dieses Mal die Leser ihre Wünsche, kritischen Anregungen und Hinweise auf festgestellte Fehler in der Darstellung mitteilten.

Moskau, im März 1962 B. Gnedenko

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Die vorliegende Auflage unterscheidet sich beträchtlich von der ersten. Ich habe mich bemüht, die Bemerkungen und Wünsche möglichst vollständig zu berücksichtigen, die in den Rezensionen zur ersten Auflage enthalten waren oder mir brieflich und mündlich mitgeteilt wurden. Die wesentlichste Veränderung besteht wohl darin, daß den ersten neun Kapiteln Übungsaufgaben hinzugefügt wurden. Außerdem habe ich mich entschlossen, die Anhänge wegzulassen. Anhang I ging in den Text des ersten, vierten und fünften Kapitels über. Es wurden auch einige weitere Veränderungen an diesen Kapiteln vorgenommen. Beträchtlich erweitert wurde das Kapitel IX, in dem vor allem die Theorie der stationären zufälligen Prozesse ausführlicher dargestellt wurde. Einer bedeutenden Veränderung wurde auch das letzte Kapitel unterzogen, das der mathematischen Statistik gewidmet ist. In diesem Kapitel gibt es einige neue Paragraphen, während ein Teil des Stoffes, der in der ersten Auflage enthalten war, weggelassen wurde. So wurde z. B. der komplizierte Beweis des Satzes von Kolmogoroff über die Grenzverteilung für das Maximum der Abweichung der empirischen Verteilungsfunktion von der wahren unterdrückt. Weggelassen wurde ferner der Paragraph über Sequentialanalyse. Die in der ersten Auflage festgestellten Versehen und Fehler wurden verbessert.

Ich benutze die Gelegenheit, um den Kollegen herzlich zu danken, die offen ihre Meinung über die Mängel dieses Buches geäußert und durch ihre Kritik zu ihrer Verbesserung beigetragen haben. Besonderen Dank schulde ich J. W. Linnik für sein beständiges Interesse an diesem Buch und für die Diskussion des Manuskripts zur zweiten Auflage.

Ich weiß, daß dieses Buch auch in der jetzigen Form nicht frei von Mängeln ist; daher wende ich mich an den Leser mit der Bitte, mir alle Unzulänglichkeiten der zweiten Auflage sowie Wünsche bezüglich des Inhaltes und der Darstellung des Stoffes mitzuteilen. Ich werde jedem dankbar sein, der mir interessante Aufgaben zur Verwendung in diesem Lehrbuch mitteilt.

B. Gnedenko

AUS DEM VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE

Dieser Lehrgang besteht aus zwei Teilen, einem elementaren (Kapitel I—VI) und einem speziellen (Kapitel VII—XI). Die letzten fünf Kapitel können als Grundlage dienen zu Spezialstudien über die Theorie von Summen zufälliger Größen, die Theorie der stochastischen Prozesse und die Elemente der mathematischen Statistik.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird in diesem Buch ausschließlich als mathematische Disziplin betrachtet. Daher ist die Darstellung konkreter naturwissenschaftlicher und technischer Resultate hier niemals Selbstzweck. Alle Beispiele im Text des Buches sollen nur die Sätze der allgemeinen Theorie erläutern und auf den Zusammenhang dieser Sätze mit den Aufgaben der Naturwissenschaft hinweisen. Natürlich geben diese Beispiele zugleich Hinweise auf mögliche Anwendungsgebiete der allgemeinen theoretischen Resultate und entwickeln die Fähigkeit, diese Resultate bei praktischen Aufgaben anzuwenden. Eine solche Studienweise gibt dem Leser die Möglichkeit, sich eine eigentümliche wahrscheinlichkeitstheoretische Intuition zu erarbeiten, die es gestattet, die Ergebnisse in großen Zügen vorherzusehen, noch ehe der analytische Apparat angewendet wird. Wir bemerken noch, daß es, besonders am Anfang, unmöglich ist, die Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne systematische Lösung von Aufgaben zu studieren.

Die ersten vier Paragraphen des ersten Kapitels stellen eine geringfügige Überarbeitung eines unveröffentlichten Manuskripts von A. N. KOLMOGOROFF dar.

Ich bin glücklich, an dieser Stelle meinen verehrten Lehrern A. N. KOLMOGOROFF und A. J. CHINTSCHIN danken zu können, die mir durch ihren Rat und Unterredungen über die Kernfragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung viel geholfen haben.

B. GNEDENKO

VORWORT DES VERFASSERS ZUR ERSTEN DEUTSCHEN AUFLAGE

Im Frühjahr 1954 hielt ich als Gastprofessor an der Humboldt-Universität zu Berlin Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zur gleichen Zeit bereitete ich die zweite (russische) Auflage des vorliegenden Lehrbuches vor. Deutsche Kollegen machten mir den Vorschlag, dieses Lehrbuch in die deutsche Sprache zu übersetzen, und das Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften und der Akademie-Verlag haben sich freundlicherweise bereit erklärt, die Herausgabe der Übersetzung zu besorgen.

Mein Hörer und Schüler Wolfgang Richter — damals Student der Humboldt-Universität — fertigte die Übersetzung an. Herr Hans Joachim Rossberg — wissenschaftlicher Assistent an der Deutschen Akademie der Wissenschaften — übernahm die Redaktionsarbeit. Er führte diese Arbeit mit der größten Sorgfalt durch, überarbeitete den deutschen Text und überprüfte Formeln und rechnerische Ableitungen. Dabei hat er eine Reihe von Rechenfehlern feststellen und beheben können; seine diesbezüglichen Hinweise habe ich auch bei der Herausgabe der zweiten russischen Auflage berücksichtigt. Ich möchte hiermit dem Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften, dem Akademie-Verlag und den genannten Kollegen für ihre Mühe und ihre sorgfältige Arbeit meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Das vorliegende Lehrbuch ist nur eine elementare Einleitung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dies rechtfertigt zum Teil die Tatsache, daß einige wichtige Gebiete (wie z. B. Markowsche Ketten) nur kurz, andere überhaupt nicht behandelt werden. Andererseits glaube ich, daß es für den angehenden Mathematiker wichtig ist, Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Disziplinen und den Zusammenhang zwischen Mathematik und Praxis zu erkennen. Ich habe mich bemüht, diese Seite möglichst klar heraustreten zu lassen. Diesem Zweck dienen u. a. verschiedene im Text behandelte Beispiele und dem Leser empfohlene Aufgaben, von denen viele angewandten Charakter haben. Doch möchte ich gleich bemerken, daß diese Beispiele und Aufgaben hier nur zur Illustration der Theorie dienen und keinen Anspruch erheben, dem Leser konkrete Kenntnisse über Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Naturwissenschaften und Technik zu vermitteln. Es kommt noch hinzu, daß wichtige Anwendungsgebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem Buch nicht einmal erwähnt worden sind.

Eingehende Kenntnisse über die in dem Lehrbuch angeschnittenen Gebiete können nur durch das Studium der entsprechenden Zeitschriftenliteratur und Monographien erworben werden. Für die Theorie der stochastischen Prozesse möchte ich in erster Linie auf die ausführlichen Bücher von A. Blanc-Lapierre und R. Fortet und von J. L. Doob sowie auf den ausgezeichneten Artikel von A. M. Jaglom (zum Kapitel X) hinweisen.[1]) Für den Leser, der stärkeres Interesse für angewandte Aufgaben hat und sich z. B. für Probleme der Massenbedienung interessiert, möchte ich das kürzlich in russischer Sprache erschienene Buch von A. J. Chintschin „Mathematische Methoden der Theorie der Massenbedienung" (Trudy Math. Inst. Stekloff Nr. 49, 1955) auf das wärmste empfehlen. Die Literatur über die mathematische Statistik ist in den letzten Jahren ungeheuer angewachsen. Eine recht eingehende Vorstellung über viele allgemeine Ideen dieser Wissenschaft vermittelt das Buch von H. Cramér[1]). Von den Büchern, die einen stärker angewandten Charakter haben, möchte ich die Werke von A. Hald, Statistical Theory with engineering applications (New York-London 1952); I. W. Dunin-Barkowski und N. W. Smirnow, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in der Technik (Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur, Moskau 1955), E. Weber, Grundriß der biologischen Statistik (Jena 1956) nennen. Besonders hinweisen möchte ich noch auf das Buch von L. Schmetterer, Einführung in die mathematische Statistik, Springer-Verlag, Wien 1956[2]), das ich für eines der gegenwärtig besten Bücher zur mathematischen Statistik in deutscher Sprache halte. Wichtig ist, daß hier der Versuch unternommen wird, eine deutsche Standard-Terminologie für die Statistik zu schaffen.

Der kurze historische Abriß am Ende meines Lehrbuches erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Er gibt eine Vorstellung über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Europa bis zur Mitte des XIX. Jahrhunderts. Eine ausführliche Übersicht über die moderne Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bis jetzt noch nicht geschrieben worden. Der Verfasser hofft, in den folgenden russischen Auflagen des Buches diese Lücke schließen zu können.

Ich würde mich sehr freuen, wenn die Herausgabe der vorliegenden deutschen Übersetzung des Lehrbuches dazu beitrüge, das Interesse des deutschen mathematischen Nachwuchses für das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik zu verstärken.

Kiew, im Mai 1957 B. Gnedenko

---

[1]) siehe Literaturverzeichnis (Anm. d. Red.).

[2]) und B. L. van der Waerden, Mathematische Statistik, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957.

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

Das Ziel dieses Buches ist die Darlegung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der mathematischen Disziplin, welche die Gesetzmäßigkeiten bei zufälligen Erscheinungen erforscht.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand um die Mitte des 17. Jahrhunderts und ist mit den Namen HUYGENS, PASCAL, FERMAT und JACOB BERNOULLI verknüpft. In dem Briefwechsel zwischen PASCAL und FERMAT, der durch Aufgaben hervorgerufen wurde, die mit Glücksspielen zusammenhingen und nicht in den Rahmen der Mathematik jener Zeit paßten, kristallisierten sich allmählich so wichtige Begriffe wie Wahrscheinlichkeit und mathematische Erwartung heraus. Man muß sich klar darüber sein, daß die hervorragenden Gelehrten, die sich mit Aufgaben des Glücksspiels befaßten, auch die wichtige Rolle der Wissenschaft voraussahen, welche die zufälligen Erscheinungen untersucht. Sie waren überzeugt, daß sich bei massenhaften zufälligen Ereignissen klare Gesetzmäßigkeiten herausbilden. Jedoch infolge des niedrigen Entwicklungsstandes der Naturwissenschaft jener Zeit bildeten die Glücksspiele und auch die Fragen von Demographie und Versicherung noch für lange Zeit den einzigen konkreten Gegenstand, anhand dessen man die Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickeln konnte. Dieser Umstand bestimmte auch den formalen mathematischen Apparat, mit Hilfe dessen sie die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung entstehenden Aufgaben lösten: Es wurden ausschließlich elementare arithmetische und kombinatorische Methoden verwendet. Die nachfolgende Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie die weitgehende Heranziehung ihrer Methoden und Resultate bei naturwissenschaftlichen, insbesondere physikalischen Forschungen zeigten, daß die klassischen Begriffe und Methoden auch in der Gegenwart nicht an Interesse verloren haben.

Bedeutende Anforderungen, welche die Naturwissenschaft (Theorie der Beobachtungsfehler, Aufgaben der Lehre vom Schuß, Probleme der Statistik, in erster Linie der Bevölkerungsstatistik) stellte, führten zu der Notwendigkeit einer Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Heranziehung eines komplizierten analytischen Apparates. Eine besonders bedeutende Rolle bei der Entwicklung der analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung spielten MOIVRE, LAPLACE, GAUSS und POISSON. In formal-analytischer Beziehung schließt sich dieser Richtung auch die Arbeit des Schöpfers der nichteuklidischen Geometrie, N. I. LOBATSCHEWSKIS, an, die der Theorie der

Fehler bei Messungen auf einer Kugel gewidmet war und sich das Ziel setzte, das geometrische System aufzustellen, welches dem Weltall zugrunde liegt.

Von der Mitte des 19. Jahrhunderts bis fast in die zwanziger Jahre unseres Jahrhunderts ist die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in bedeutendem Maße mit den Namen russischer Gelehrter — P. L. Tschebyschews, A. A. Markows, A. M. Ljapunows — verknüpft. Dieser Erfolg der russischen Wissenschaft wurde durch die Tätigkeit W. J. Bunjakowskis vorbereitet, der die Untersuchungen über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Statistik, insbesondere auf Versicherungsprobleme und die Bevölkerungsstatistik in Rußland, weitgehend förderte. Von ihm stammt das erste russische Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das einen großen Einfluß auf die Entwicklung des Interesses an dieser Wissenschaft in Rußland ausübte. Die grundlegende, unvergängliche Bedeutung der Arbeiten Tschebyschews, Markows und Ljapunows auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht darin, daß von ihnen der Begriff der zufälligen Größe eingeführt und ausgiebig verwendet wurde. Mit den Resultaten Tschebyschews über das Gesetz der großen Zahl, mit den „Markowschen Ketten" und mit dem Grenzwertsatz von Ljapunow befassen wir uns in den entsprechenden Abschnitten dieses Buches.

Die moderne Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist dadurch charakterisiert, daß das Interesse an ihr allgemein gewachsen und der Kreis ihrer praktischen Anwendungen ausgedehnt worden ist. In den USA, in Frankreich, Schweden, Ungarn, Japan, Deutschland, Polen und anderen Ländern gibt es zahlreiche Gelehrte, die wichtige Resultate zur Wahrscheinlichkeitsrechnung beitragen. Bei dieser intensiven wissenschaftlichen Arbeit nimmt die sowjetische Schule der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiterhin einen hervorragenden Platz ein.

Unter den sowjetischen Gelehrten müssen vor allem S. N. Bernstein, A. N. Kolmogoroff und A. J. Chintschin[1]) genannt werden. Im Laufe unserer Darlegungen werden wir durch das Wesen der Sache selbst gezwungen sein, den Leser mit den Ideen und Resultaten der Gelehrten unserer Zeit bekannt zu machen, die einen umwälzenden Einfluß auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehabt haben. So werden wir schon im ersten Kapitel über die fundamentalen Arbeiten S. N. Bernsteins und A. N. Kolmogoroffs über die Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung reden. Im ersten Jahrzehnt unseres Jahrhunderts kam E. Borel auf die Idee, die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der metrischen Theorie der reellen Funktionen zu verknüpfen. In den zwanziger Jahren entwickelten A. J. Chintschin, A. N. Kolmogoroff, E. E. Slutzki, P. Lévy, A. Lomnicki diese Idee, die sich als überaus befruchtend für die Entwicklung dieser Wissenschaft erwies. Insbesondere gelang es gerade auf diesem Wege, abschließende Lösungen für klassische Aufgaben zu finden, die schon von P. L. Tschebyschew gestellt worden waren. Wesentliche Erfolge in dieser Richtung

[1]) Dieser Name wird häufig auch mit Khintchine oder ähnlich transkribiert (Anm. der Red.).

sind mit den Namen LINDEBERG, S. N. BERNSTEIN, A. N. KOLMOGOROFF, A. J. CHINTSCHIN, P. LÉVY, W. FELLER und einigen anderen verknüpft. Die metrische Funktionentheorie, später aber auch die Funktionalanalysis, gestatteten eine wesentliche Erweiterung des Inhalts der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In den dreißiger Jahren wurden die Grundlagen für die Theorie der stochastischen (zufälligen) Prozesse geschaffen, die jetzt eine der Hauptforschungsrichtungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Diese Theorie dient in hervorragender Weise der organischen Synthese mathematischen und naturwissenschaftlichen Denkens, denn es sind hier zwei Aufgaben miteinander verknüpft: Es ist einmal das physikalische Wesen gewisser Kernprobleme der Naturwissenschaften inhaltlich zu erfassen, und sodann eine adäquate mathematische Sprache für die Theorie zu finden.

Eine Idee zur Schaffung einer ähnlichen Theorie hat anscheinend schon A. POINCARÉ geäußert und ein erster Ansatz zu ihrer Verwirklichung findet sich bei BACHELIER, FOKKER, PLANCK; jedoch ist die streng mathematische Grundlegung der Theorie der stochastischen Prozesse mit den Namen A. N. KOLMOGOROFF und A. J. CHINTSCHIN verbunden.

Es ist wichtig festzustellen, daß sich die Lösung klassischer Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung als eng zusammenhängend mit der Theorie der stochastischen Prozesse erwies. Die Elemente dieses wichtigen neuen Teilgebiets der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden wir im zehnten Kapitel darlegen. Wir erwähnen schließlich ein neues Gebiet der mathematischen Statistik, das die Bezeichnung „nichtparametrische Probleme der Statistik" erhielt. Eine gewisse Vorstellung über den Inhalt dieses Wissenschaftsgebiets geben die Paragraphen 61—63.

In den letzten zehn Jahren ist die Bedeutung unermeßlich gewachsen, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der modernen Naturwissenschaft besitzt. Seit die Molekularvorstellungen vom Aufbau der Materie allgemeine Anerkennung erhielten, begann unausweichlich eine weitgehende Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch in Physik und Chemie. Vom Standpunkt der Molekularphysik besteht jedes Ding aus einer ungeheuren Anzahl kleiner Teilchen, die sich dauernd in Bewegung befinden und dabei aufeinander einwirken. Dabei ist über die Natur dieser Teilchen, über die zwischen ihnen bestehende Wechselwirkung, die Art ihrer Bewegung usw. wenig bekannt. Im wesentlichen erschöpfen sich unsere Kenntnisse darin, daß die Anzahl der Teilchen, aus denen ein Körper besteht, sehr groß ist und daß sie sich bei einem homogenen Körper in ihren Eigenschaften wenig unterscheiden. Natürlich sind unter solchen Bedingungen die sonst in physikalischen Theorien üblichen mathematischen Forschungsmethoden völlig nutzlos. So können z. B. unter den erwähnten Umständen Differentialgleichungen keine wesentlichen Resultate liefern. In der Tat sind ja weder die Struktur, noch die Gesetze der gegenseitigen Wechselwirkung der Teilchen in ausreichendem Maße bekannt, und unter solchen Umständen muß die Anwendung der Theorie der Differentialgleichungen Elemente grober Willkür an sich tragen. Aber sogar wenn man von dieser Schwierigkeit absieht, ergeben sich, wenn man die Bewegung einer großen Menge solcher Teilchen studieren will, so große Schwierigkeiten, daß man sie mit den üblichen Gleichungen der Mechanik nicht überwinden kann.

Es kommt hinzu, daß ein solches Herangehen auch methodologisch unbefriedigend ist. In der Tat besteht die Aufgabe, welche hier vorliegt, nicht darin, die individuelle Bewegung der Teilchen zu studieren, sondern die Gesetzmäßigkeiten herauszufinden, die sich in einer Gesamtheit von einer großen Anzahl von Teilchen ergeben, die sich bewegen und miteinander in Wechselwirkung stehen. Diese Gesetzmäßigkeiten, welche sich dadurch ergeben, daß die zu ihrer Entstehung beitragenden Bestandteile in großen Massen auftreten, haben ihren eigenen Charakter und können nicht durch eine einfache Summierung der individuellen Bewegungen erhalten werden. Außerdem erweisen sich diese Gesetzmäßigkeiten innerhalb gewisser Grenzen als unabhängig von den individuellen Besonderheiten der Teilchen, um die es sich jeweils handelt. Natürlich müssen zum Studium dieser neuen Gesetzmäßigkeiten auch entsprechende neue mathematische Forschungsmethoden gefunden werden.

Welche Forderungen müssen in erster Linie an diese Methoden gestellt werden? Es ist klar, daß sie in erster Linie berücksichtigen müssen, daß die betrachteten Erscheinungen Massencharakter haben. Daher darf für diese Methoden das Vorhandensein einer großen Anzahl aufeinander einwirkender Teilchen keine zusätzliche Erschwerung sein, sondern es muß das Studium der Gesetzmäßigkeiten erleichtern. Ferner darf die Unzulänglichkeit unserer Kenntnisse über die Natur und den Aufbau der Teilchen ihre Wirksamkeit nicht beschränken. Diesen Bedingungen genügen vor allem die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Damit das Gesagte nicht falsch verstanden wird, betonen wir noch einmal folgenden Umstand. Wenn wir sagen, daß der Apparat der Wahrscheinlichkeitsrechnung dem Studium der Molekularerscheinungen am besten angepaßt ist, so wollen wir damit nicht etwa behaupten, daß die philosophischen Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in unserer „ungenügenden Kenntnis" liegen. Das Grundprinzip besteht darin, daß die Massenerscheinungen eigentümliche neue Gesetzmäßigkeiten erzeugen. Beim Studium von Erscheinungen, die durch eine große Anzahl von Molekülen bedingt sind, ist die Kenntnis der Eigenschaften jedes Moleküls nicht notwendig. In der Tat muß man beim Studium der Naturerscheinungen vom Einfluß unwesentlicher Einzelheiten absehen. Eine Betrachtung aller Details und aller Zusammenhänge, die für die betrachtete Erscheinung gar nicht alle wesentlich sind, führt nur dazu, daß die Erscheinung selbst verdunkelt wird und die Beherrschung infolge der künstlich erschwerten Verhältnisse schwieriger wird.

Wie gut die Schematisierung einer Erscheinung vollzogen, wie günstig der mathematische Apparat zu ihrer Untersuchung gewählt worden ist, das können wir durch Vergleich der Theorie mit der Erfahrung, mit der Praxis beurteilen.

Die Entwicklung der Naturwissenschaft, insbesondere der Physik, zeigt, daß der Apparat der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich bei der Erforschung zahlreicher Naturerscheinungen als sehr geeignet erwiesen hat.

Der erwähnte Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und den Bedürfnissen der modernen Physik erklärt am besten die Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung in den letzten Jahrzehnten zu einem derjenigen Gebiete der Mathematik geworden ist, die sich am schnellsten entwickeln. Neue theoretische Resultate eröffneten neue Möglichkeiten für die Naturwissenschaft, die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu benutzen. Das allseitige Studium der Naturerscheinungen führt die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Entdeckung neuer Gesetzmäßigkeiten, die vom Zufall erzeugt werden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung sondert sich nicht von den Interessen anderer Wissenschaften ab, sondern hält Schritt mit der allgemeinen Entwicklung der Naturwissenschaft. Dies bedeutet natürlich nicht, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur Hilfsmittel für die Lösung praktischer Aufgaben ist. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist in den letzten drei Jahrzehnten zu einer strengen mathematischen Disziplin mit eigenen Problemen und Beweismethoden geworden. Dabei erwies es sich zugleich, daß die wichtigsten Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Zusammenhang mit der Lösung verschiedener Aufgaben der Naturwissenschaft stehen.

Wir definierten eingangs die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Wissenschaft, welche die zufälligen Erscheinungen studiert. Wir verschieben die Klärung des Begriffs „zufällige Erscheinung (zufälliges Ereignis)" auf das erste Kapitel und beschränken uns hier auf einige Bemerkungen. Im Sinne der landläufigen Vorstellungen und der alltäglichen Praxis ist ein zufälliges Ereignis etwas sehr Seltenes, das der gewohnten Ordnung der Dinge, der gesetzmäßigen Entwicklung der Ereignisse zuwiderläuft. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehen wir von diesen Vorstellungen ab. Die zufälligen Ereignisse, wie sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet werden, haben eine Reihe charakteristischer Eigenschaften, insbesondere treten sie bei Massenerscheinungen auf. Unter Massenerscheinungen verstehen wir solche Vorgänge, die in Gesamtheiten stattfinden, die aus einer großen Anzahl von gleichberechtigten oder fast gleichberechtigten Objekten bestehen, und die gerade durch den Massencharakter der Erscheinung bestimmt werden und nur in unbedeutendem Maße von der Natur der einzelnen Objekte abhängen, aus denen sich die Gesamtheit zusammensetzt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt sich wie andere Teile der Mathematik aus den Bedürfnissen der Praxis heraus. Sie gibt in abstrakter Form die Gesetzmäßigkeiten an, die bei zufälligen Erscheinungen von Massencharakter auftreten. Diese Gesetzmäßigkeiten spielen eine unerhört wichtige Rolle in der Physik und in anderen Gebieten der Naturwissenschaft, im Kriegswesen, auf mannigfaltigen technischen Gebieten, in der Wirtschaftslehre usw. In letzter Zeit werden im Zusammenhang mit der breiten Entwicklung von Betrieben, welche Massenartikel produzieren, Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht nur bei der Prüfung schon fertiger Produkte, sondern, was viel wichtiger ist, zur Organisation des Produktionsprozesses selbst ausgenutzt (statistische Produktionskontrolle).

Der Zusammenhang der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit praktischen Bedürfnissen war, wie wir schon erwähnten, eine Hauptursache für ihre schnelle Entwicklung in den letzten drei Jahrzehnten. Viele ihrer Teilgebiete wurden gerade im Zusammenhang mit Bedürfnissen der Praxis entwickelt. Wir wollen hier an das bemerkenswerte Wort des Begründers unserer vaterländischen wahrscheinlichkeitstheoretischen Schule, P. L. Tschebyschews, erinnern: „Die Annäherung von Wissenschaft und Praxis gibt die fruchtbarsten Resultate, und es ist nicht nur die Praxis, die daraus Vorteil zieht; die Wissenschaft selbst entwickelt sich unter dem Einfluß der Praxis, denn diese eröffnet neue Probleme für die Forschung oder neue Seiten an längst bekannten Gegenständen ... Wenn die Theorie viel gewinnt von neuen Anwendungen alter Methoden oder ihrer Weiterentwicklung, so zieht sie doch noch viel größeren Nutzen aus der Erschließung neuer Methoden, und in diesem Fall ist die Wissenschaft der wahrhafte Führer in der Praxis.“

I.

DER BEGRIFF DER WAHRSCHEINLICHKEIT

§ 1. Sichere, unmögliche und zufällige Ereignisse

Die Wissenschaft gelangt auf Grund von Beobachtungen und Experimenten zur Formulierung von Gesetzmäßigkeiten, denen der Verlauf der von ihr untersuchten Erscheinungen unterworfen ist. Das einfachste und geläufigste Schema, solche Gesetzmäßigkeiten zu formulieren, ist das folgende:

1. *Jedesmal, wenn alle in einem Komplex $\mathfrak{S}$ zusammengefaßten Bedingungen erfüllt sind, tritt das Ereignis A ein.*

Wird z. B. Wasser bei einem Druck von 760 mm auf 100° C erhitzt (dies ist der Komplex $\mathfrak{S}$), so geht es in Dampf über (dies ist das Ereignis A). Oder ein anderes Beispiel: Wenn bei einer chemischen Reaktion irgendwelcher Stoffe kein Austausch mit dem umgebenden Mittel stattfindet (dies sind die Bedingungen aus $\mathfrak{S}$), so bleibt die Gesamtmasse der Stoffe unverändert (dies ist das Ereignis A). Letztere Aussage ist das Gesetz von der Erhaltung der Materie. Der Leser kann leicht andere Beispiele ähnlicher Gesetzmäßigkeiten aus der Physik, der Chemie, der Biologie und aus anderen Wissenschaften anführen.

Ein Ereignis, das bei jeder Realisierung des Komplexes $\mathfrak{S}$ eintritt, heißt ein *sicheres* Ereignis. Wenn ein Ereignis A bei Verwirklichung aller Bedingungen von $\mathfrak{S}$ auf keinen Fall eintreten kann, so nennt man es ein *unmögliches* Ereignis.

Unter 1. wird die Sicherheit eines Ereignisses A bei Verwirklichung aller Bedingungen aus $\mathfrak{S}$ ausgesagt. Die Behauptung der Unmöglichkeit irgendeines Ereignisses, wenn alle Bedingungen des Komplexes $\mathfrak{S}$ erfüllt sind, stellt nichts wesentlich Neues dar. Diese läßt sich nämlich leicht auf eine Aussage vom Typus 1. zurückführen: Die Unmöglichkeit eines Ereignisses A ist gleichwertig mit der Sicherheit des entgegengesetzten Ereignisses $\overline{A}$. Dieses besteht darin, daß das Ereignis A nicht eintritt.

Aber lange nicht alle realen Erscheinungen ereignen sich nach diesem Schema. Möge z. B. das Ereignis A in dem einmaligen Reißen des Fadens an einer Spindel während einer Zeitspanne von 10 Min. bestehen (Komplex $\mathfrak{S}$: gegebene Spindel, gegebenes Material, gegebene Qualität und gegebenes Zeitintervall). Bekanntlich kann das Ereignis unter diesen Bedingungen eintreten, es braucht aber nicht einzutreten.

Wir kommen so zu der Notwendigkeit, Gesetzmäßigkeiten einer anderen Art zu betrachten, nämlich solche, die bei einem gegebenen Bedingungskomplex eintreten können, aber nicht notwendig einzutreten brauchen. Solche Ereignisse nennt man *zufällige* Ereignisse. Bei Änderung des Bedingungskomplexes kann ein zufälliges Ereignis in ein sicheres oder auch in ein unmögliches übergehen und umgekehrt. Die Eigenschaft eines Ereignisses sicher, zufällig oder unmöglich zu sein, hängt also stets von einer bestimmten Gesamtheit $\mathfrak{S}$ von Bedingungen ab.

Mit der Aussage allein, daß ein Ereignis zufällig ist, kann man nicht viel anfangen. Sie gibt nur einen Hinweis darauf, daß der Komplex $\mathfrak{S}$ von Bedingungen nicht die Gesamtheit aller Ursachen widerspiegelt, die zum Eintreten eines Ereignisses A notwendig und hinreichend sind. Einen solchen Hinweis braucht man nicht als vollständig nutzlos anzusehen, denn er kann Anlaß zu einer weiteren Erforschung der Bedingungen geben, unter denen das Ereignis A auftritt. Nur liefert er selbst noch keine positiven Erkenntnisse.

Für eine Vielzahl von Erscheinungen tritt nun der folgende Sachverhalt ein: Der Komplex $\mathfrak{S}$ von Bedingungen sei mehrfach erfüllt. Jede Realisierung des Komplexes $\mathfrak{S}$ wollen wir einen Versuch nennen. Es mögen n Versuche ausgeführt werden. Die Anzahl der Versuche, bei denen das Ereignis A eintritt, sei gleich m. Es zeigt sich, daß in vielen Fällen der Quotient $\frac{m}{n}$ für große n nahezu konstant ist und sein Wert in der Nähe einer Zahl p bleibt. Diese Zahl kann zu einer quantitativen Charakterisierung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A (bei gegebenem Komplex $\mathfrak{S}$) dienen.

In solchen Fällen läßt sich außer der einfachen Feststellung der Zufälligkeit des Ereignisses A auch eine quantitative Abschätzung der Möglichkeit seines Auftretens angeben. Diese Abschätzung findet in Sätzen wie etwa dem folgenden ihren Ausdruck:

2. *Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei Realisierung aller Bedingungen aus $\mathfrak{S}$ das Ereignis A eintritt, ist gleich p.*

Ereignisse dieser zweiten Art heißen *wahrscheinliche* oder *stochastische* Ereignisse. Die stochastischen Ereignisse spielen auf den verschiedensten Gebieten der Wissenschaft eine große Rolle. So gibt es z. B. kein Verfahren, vorauszusagen, ob ein vorgegebenes Radiumatom innerhalb eines gegebenen Zeitintervalles zerfällt oder nicht zerfällt. Man kann jedoch auf Grund der Erfahrung eine Wahrscheinlichkeit des Zerfalls angeben: Ein Radiumatom zerfällt im Verlaufe von t Jahren mit der Wahrscheinlichkeit

$$p = 1 - e^{-0{,}000436\, t}.$$

Der Komplex $\mathfrak{S}$ besteht in diesem Beispiel darin, daß man ein Radiumatom betrachtet, das im Verlaufe einer gewissen Anzahl von Jahren keinen außergewöhnlichen Operationen, wie etwa einer Beschießung durch schnelle Teilchen, unterworfen wird. Die übrigen Existenzbedingungen sind dabei ganz unwesentlich: Es ist z. B. unwichtig, in welches Medium es eingebettet ist und welche Temperatur dabei herrscht. Das Ereignis A besteht darin, daß das Atom im Verlaufe von t Jahren zerfällt.

Die uns jetzt ganz natürlich erscheinende Idee, daß sich die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses A bei bekannten Bedingungen quantitativ mit Hilfe einer gewissen Zahl

$$p = \mathsf{P}(A)$$

abschätzen läßt, erfuhr eine systematische Entwicklung zuerst im 17. Jh. durch die Arbeiten von FERMAT (1601—1665), PASCAL (1623—1662), HUYGENS (1629—1695) und besonders J. BERNOULLI (1654—1705). Ihre Untersuchungen legten den Grundstein für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Als mathematische Disziplin hat sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung seit dieser Zeit stetig entwickelt und dabei neue wichtige Resultate hervorgebracht. Auch ihre Anwendbarkeit auf die Untersuchungen realer Erscheinungen der verschiedensten Art findet sich ständig von Neuem glänzend bestätigt.

Zweifellos verdient der Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit eine eingehendere philosophische Untersuchung. Das spezifisch philosophische Problem, daß einmal durch die Existenz der Wahrscheinlichkeitsrechnung an sich und ferner durch ihre erfolgreiche Anwendung auf Erscheinungen der Umwelt entstand, besteht in folgendem: Unter welchen Bedingungen hat die quantitative Abschätzung der Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses A mit Hilfe einer bestimmten Zahl $\mathsf{P}(A)$ — genannt die *mathematische Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A* — eine objektive Bedeutung und welche objektive Bedeutung besitzt diese Abschätzung? Eine klare Vorstellung von den Beziehungen zwischen den beiden philosophischen Kategorien des Zufälligen und des Notwendigen ist eine unbedingte Vorraussetzung für eine erfolgreiche Analyse des Begriffes der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Diese Analyse kann jedoch nicht vollständig sein ohne eine Antwort auf die von uns gestellte Frage, unter welchen Bedingungen die Zufälligkeit eine quantitative Abschätzung in Form einer Zahl — der Wahrscheinlichkeit — gestattet.

Jeder Forscher, der sich mit den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Physik, die Biologie, die Ballistik, die ökonomische Statistik oder eine beliebige andere konkrete Wissenschaft beschäftigt, geht bei seiner Arbeit im wesentlichen von der Überzeugung aus, daß *die stochastischen Aussagen gewisse objektive Eigenschaften der untersuchten Erscheinungen ausdrücken.* Die Behauptung, daß für irgendeinen Komplex $\mathfrak{S}$ von Bedingungen das Auftreten eines Ereignisses A die Wahrscheinlichkeit p besitzt, ist gleichwertig mit der Behauptung, daß zwischen dem Komplex $\mathfrak{S}$ und dem Ereignis A ein eigentümlicher, aber wohlbestimmter und nichtsdestoweniger objektiver, von dem beobachtenden Subjekt vollkommen unabhängiger Zusammenhang besteht. Die philosophische Aufgabe besteht gerade in der Aufdeckung der Natur dieses Zusammenhanges. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe ist auch die Ursache für die paradoxe Erscheinung, daß man selbst unter Gelehrten, die in allgemeinen

Fragen der Philosophie nicht auf einen idealistischen Standpunkt stehen, anstelle einer positiven Lösung des Problems das Bestreben beobachten kann, den Sachverhalt so zu deuten, als hätten die stochastischen Aussagen nur eine Beziehung zu dem Zustand des erkennenden Subjekts (indem sie ein Maß für den Grad seiner Überzeugtheit vom Auftreten des Ereignisses A darstellen usw.).

Die vielfältigen Erfahrungen bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf den verschiedensten Gebieten lehren, daß gerade die Aufgabe der quantitativen Abschätzung der Wahrscheinlichkeit irgendeines Ereignisses nur unter gewissen ganz bestimmten Bedingungen einen objektiven Sinn hat.

Die oben gegebene Definition der Zufälligkeit eines Ereignisses A bezüglich eines Komplexes $\mathfrak{S}$ von Bedingungen trägt rein negativen Charakter: Ein Ereignis ist zufällig, wenn es nicht notwendig und nicht unmöglich ist. Aus der Zufälligkeit eines Ereignisses in diesem rein negativen Sinne folgt noch lange nicht, daß es sinnvoll ist, von seiner Wahrscheinlichkeit als von einer ganz bestimmten, wenn uns vielleicht auch unbekannten Zahl zu sprechen. Anders ausgedrückt stellt nicht nur die Aussage — „das Ereignis A besitzt bezüglich des Komplexes $\mathfrak{S}$ von Bedingungen die bestimmte Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}(A)$" — sondern auch die einfachere Aussage, daß diese Wahrscheinlichkeit existiert, eine Behauptung dar, die in jedem einzelnen Falle begründet werden muß, oder, wenn sie als Hypothese angenommen wird, einer nachfolgenden Bestätigung bedarf.

Trifft z. B. ein Physiker auf ein neues radioaktives Element, so wird er von vornherein voraussetzen, daß für ein Atom dieses Elements, das sich selbst überlassen ist (d. h. nicht äußeren Einwirkungen von überaus großer Intensität ausgesetzt ist), eine gewisse Wahrscheinlichkeit für den Zerfall während eines Zeitintervalles t existiert, deren Abhängigkeit von der Zeit durch die Formel

$$p = 1 - e^{-\alpha t},$$

beschrieben wird. Er wird sich dann die Aufgabe stellen, den Koeffizienten α zu bestimmen, der die Zerfallsgeschwindigkeit des neuen radioaktiven Elements charakerisiert. Es kann z. B. die Frage gestellt werden, wie die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls von äußeren Bedingungen, etwa von der Intensität der kosmischen Strahlung, abhängt. Hierbei muß der Forscher von der Annahme ausgehen, daß jeder *hinreichend bestimmten* Gesamtheit von äußeren Bedingungen ein ganz bestimmter Wert des Koeffizienten α zukommt.

Ebenso steht es auch in allen anderen Fällen, in denen sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung bei der Anwendung auf praktische Aufgaben bewährt hat. Die Aufgabe, den realen Inhalt des Begriffes der „mathematischen Wahrscheinlichkeit" von philosophischer Seite aufzuklären, kann man daher von vornherein als hoffnungslos ansehen, wenn man Definitionen fordert, die auf ein beliebiges Ereignis A bei einem beliebigen Komplex von Bedingungen $\mathfrak{S}$ anwendbar sind.

§ 2. Verschiedene Wege zur Definition der Wahrscheinlichkeit

Die Anzahl der verschiedenen von dem einen oder anderen Autor vorgeschlagenen Definitionen der mathematischen Wahrscheinlichkeit ist sehr groß. Wir wollen aber jetzt nicht diese zahlreichen Definitionen mit allen ihren logischen Feinheiten darlegen. Jede wissenschaftliche Definition eines solchen grundlegenden Begriffes wie des Begriffes der Wahrscheinlichkeit ist lediglich eine verfeinerte logische Bearbeitung einer Reihe sehr einfacher Beobachtungen und zweckmäßiger Verfahren, die sich durch lange und erfolgreiche Anwendung in der Praxis bewährt haben. Das Interesse an einer logisch einwandfreien „Begründung" der Wahrscheinlichkeitstheorie entstand historisch später, als man schon längst die Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmt hatte, mit diesen Wahrscheinlichkeiten gerechnet hatte und auch die Resultate der durchgeführten Rechnungen in der Praxis und bei wissenschaftlichen Untersuchungen benutzt hatte. Bei den meisten Versuchen, den allgemeinen Begriff der Wahrscheinlichkeit wissenschaftlich zu definieren, kann man daher leicht die verschiedenen Seiten des konkreten Erkenntnisprozesses studieren, der in jedem einzelnen Falle zur tatsächlichen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des einen oder anderen Ereignisses führt, sei es der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer 6 bei vier Würfen eines Würfels oder der Wahrscheinlichkeit des radioaktiven Zerfalls oder der Wahrscheinlichkeit, ein Ziel zu treffen. Einige Definitionen gehen von völlig unwesentlichen Eigenschaften der realen Prozesse aus — derartige Definitionen sind gänzlich unfruchtbar. Andere berücksichtigen nur spezielle Gesichtspunkte oder benutzen irgendwelche Verfahren für die praktische Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, die nicht in allen Fällen anwendbar sind — solche Definitionen müssen wir trotz ihrer Einseitigkeit eingehender betrachten.

Von dem hier skizzierten Standpunkt aus läßt sich die Mehrzahl der Definitionen der mathematischen Wahrscheinlichkeit in drei Gruppen einteilen:

1. Definitionen der mathematischen Wahrscheinlichkeit als eines quantitativen Maßes für den „Überzeugtheitsgrad" des erkennenden Subjekts.

2. Definitionen, die den Begriff der Wahrscheinlichkeit auf den Begriff der „Gleichmöglichkeit" als ursprünglicheren Begriff zurückführen (die sog. *„klassische" Definition* der Wahrscheinlichkeit).

3. Definitionen, die von der „relativen Häufigkeit" des Auftretens eines Ereignisses in einer großen Anzahl von Versuchen ausgehen (die *„statistische" Definition* der Wahrscheinlichkeit). Den Definitionen der zweiten und dritten Gruppe sind die §§ 4 und 7 gewidmet.

Den Schluß dieses Paragraphen benutzen wir zu einer Kritik der Definitionen der ersten Gruppe. Wenn die mathematische Wahrscheinlichkeit ein quantitatives Maß für den Grad der Überzeugtheit des erkennenden Subjekts ist, so erscheint die Wahrscheinlichkeitsrechnung als ein Teilgebiet der Psychologie. Im Enderfolg führt ein konsequentes Festhalten an einer solchen rein subjektivistischen Konzeption über die Wahrscheinlichkeit notwendig zum subjektiven Idealismus. Nimmt man nämlich an, daß die quantitative Abschätzung der Wahrscheinlichkeit nur vom Zustand des erkennenden Subjekts abhängt, so besitzt auch keine aus den wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen (der Form 2) abgeleitete Aussage einen objektiven, vom erkennenden Subjekt unabhängigen Inhalt. Währenddessen zieht die Wissenschaft aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen der Form 2 viele positive Folgerungen, die sich in ihrer Bedeutung in nichts von Sätzen unterscheiden, die man ohne Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhält. Z. B. leitet die Physik alle „makroskopischen" Eigenschaften der Gase aus Voraussetzungen über die Wahrscheinlichkeit des Verhaltens der einzelnen Moleküle ab. Schreibt man diesen Aussagen eine objektive, vom erkennenden Subjekt unabhängige Bedeutung zu, so muß man auch in den wahrscheinlichkeitstheoretischen Hypothesen über den Verlauf der „mikroskopischen" molekularen Prozesse, von denen man ausgeht, notwendig etwas mehr sehen, als lediglich die Konstatierung eines psychologischen Zustandes, der in uns beim Nachdenken über die Bewegung der Moleküle wachgerufen wird.

Für den, der die Ansicht vertritt, daß die Außenwelt eine von uns unabhängige Realität besitzt und prinzipiell erkennbar ist, und der außerdem berücksichtigt, daß die wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen mit Erfolg zur Erforschung der äußeren Welt benutzt werden, muß die Haltlosigkeit einer rein subjektiven Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit absolut klar sein. Mit dem bisher Gesagten könnte man die Beurteilung der Definitionen der ersten Gruppe abschließen, wenn sie nicht gerade die Grundlage zu dem ursprünglichen populären Sinn des Wortes Wahrscheinlichkeit bildeten. Es ist doch in der Tat so, daß in der Umgangssprache die Ausdrücke „wahrscheinlich", „sehr wahrscheinlich", „wenig wahrscheinlich" usw. einfach eine Beziehung des Sprechenden zur Frage der Wahrheit oder Falschheit irgendeines *einzelnen* Urteils ausdrücken. Man muß daher unbedingt einen Umstand hervorheben, den wir bis jetzt noch nicht besonders berücksichtigten. In § 1 richteten wir sehr schnell unsere Aufmerksamkeit auf die stochastischen Gesetzmäßigkeiten der Form 2, wobei wir sie den streng kausalen Gesetzmäßigkeiten der Form 1 gegenüberstellten. Dabei gingen wir in völliger Übereinstimmung mit den erfolgreichen wissenschaftlichen Anwendungen des Begriffes der mathematischen Wahrscheinlichkeit vor, wichen jedoch von Anfang an etwas von dem üblichen „vorwissenschaftlichen" Sinne des Wortes „Wahrscheinlichkeit" ab: Während man bei den wissenschaftlichen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Praxis stets unter „Wahrscheinlichkeit" die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines gewissen Ereignisses A versteht, wobei es wenigstens *im Prinzip möglich sein soll, den Komplex* $\mathfrak{S}$ *von Bedingungen unbeschränkt oft zu realisieren* (nur in diesem Falle drückt die Gleichung

$$p = \mathsf{P}(A)$$

eine gewisse objektive Gesetzmäßigkeit aus), so spricht man im Umgang gewöhnlich von einer größeren oder kleineren Wahrscheinlichkeit irgendeines wohlbestimmten Urteils. Nehmen wir z. B. die folgenden Aussagen:

a) Jede gerade natürliche Zahl, die größer als zwei ist, läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.

b) Am 7. Mai 1969 fällt in Moskau Schnee. — Dazu kann man folgendes sagen: In bezug auf die Aussage a) weiß man z. Z. bei weitem noch nicht alles, viele halten sie jedoch für sehr wahrscheinlich; eine genaue Antwort auf die Aussage b) wird man sicher erst am 7. Mai 1969 erhalten. Da jedoch der Schnee in Moskau im Mai äußerst selten fällt, muß man z. Z. die Aussage b) für wenig wahrscheinlich halten.

Ähnlichen Aussagen bezüglich der Wahrscheinlichkeit einzelner Tatbestände oder überhaupt irgendwelcher spezieller Urteile kann man in der Tat nur eine subjektive Bedeutung beilegen: Sie spiegeln lediglich eine Beziehung des Sprechenden zu der vorgelegten Frage wider. Spricht man nämlich von der größeren oder kleineren Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Aussage, so hat man gewöhnlich nicht die Absicht, die Anwendbarkeit des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten einem Zweifel zu unterwerfen, z. B. wird niemand daran zweifeln, daß in Wirklichkeit jede der beiden Aussagen a) und b) entweder wahr oder falsch ist. Wenn auch die sog. Intuitionisten bezüglich der Aussage a) ähnliche Zweifel hegen, so hängt doch in der üblichen Auffassung in jedem Falle die Möglichkeit, von der größeren oder kleineren Wahrscheinlichkeit dieses Satzes zu sprechen, nicht mit Zweifeln an der Anwendbarkeit des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten auf diesen Satz zusammen. Wenn irgendwann einmal die Behauptung a) bewiesen oder widerlegt sein wird, so verlieren alle vorläufigen jetzt ausgesprochenen Abschätzungen ihrer Wahrscheinlichkeit ihren Sinn. Ebenso wird man am 7. Mai 1969 leich entscheiden können, ob die Aussage b) wahr oder falsch ist: Wenn an diesem Tage Schnee fällt, so verliert die Ansicht, daß dieses Ereignis wenig wahrscheinlich ist, jeglichen Sinn.

Eine vollständige Untersuchung der vielfältigen psychischen Grade des Zweifelns, die zwischen der kategorischen Bejahung und der kategorischen Verneinung einer einzelnen Aussage liegen, würde uns jedoch — so interessant sie auch für die Psychologie wäre — von unserer Hauptaufgabe ablenken, das Wesen der wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesetzmäßigkeiten zu erläutern. Diese besitzen — worauf wir schon hinwiesen — eine objektive wissenschaftliche Bedeutung.

§ 3. Das Ereignisfeld

Im vorhergehenden Paragraphen sahen wir, daß die Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit als eines quantitativen Maßes für den „Überzeugtheitsgrad“ des erkennenden Subjekts nicht den Inhalt des Begriffes der

Wahrscheinlichkeit erfaßt. Wir kehren im folgenden zu der Frage zurück, wie man zu den objektiven stochastischen Gesetzmäßigkeiten kommt. Eine einfache und direkte Antwort auf diese Frage wollen die klassische und die statistische Definition der Wahrscheinlichkeit geben. Wir werden später sehen, daß diese beiden Definitionen wesentliche Seiten des realen Inhalts des Begriffes der Wahrscheinlichkeit wiedergeben. Jedoch ist jede von ihnen einzeln genommen unzureichend. Für ein volles Verständnis des Wesens der Wahrscheinlichkeit ist ihre Synthese erforderlich. In den nächsten Paragraphen beschäftigen wir uns ausschließlich mit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit. Diese geht von der Vorstellung aus, daß die Gleichmöglichkeit eine objektive Eigenschaft ist, die den verschiedenen möglichen Varianten des Verlaufs der zu untersuchenden Erscheinungen auf Grund ihrer realen Symmetrien zukommt. Nur mit einer solchen Vorstellung von der Gleichmöglichkeit werden wir es im folgenden zu tun haben. Die Definition der Wahrscheinlichkeit durch „Gleichmöglichkeit", aufgefaßt in dem rein subjektiven Sinn einer gleichen „Wahrheitsähnlichkeit" für das erkennende Subjekt, ist jedoch nur in ihrer äußeren Form von den Definitionen der Wahrscheinlichkeit durch den „Überzeugtheitsgrad" des erkennenden Subjekts verschieden; letztere haben wir aber von unseren Betrachtungen ausgeschlossen.

Bevor wir zur klassischen Definition des Begriffes der Wahrscheinlichkeit übergehen, machen wir noch einige Vorbemerkungen. Fest vorgegeben sei uns ein Komplex $\mathfrak{S}$ von Bedingungen. Wir wollen dann ein gewisses System S von Ereignissen A, B, C, ... betrachten[1]). Bei jeder Realisierung des Komplexes $\mathfrak{S}$ kann jedes von diesen Ereignissen eintreten, es braucht aber nicht einzutreten. Zwischen den Ereignissen des Systems S können gewisse Beziehungen bestehen, mit denen wir es ständig zu tun haben werden. Wir wollen sie daher zunächst untersuchen.

1. Wenn bei jeder Realisierung des Komplexes $\mathfrak{S}$ von Bedingungen, bei der das Ereignis A eintritt, stets auch das Ereignis B eintritt, so sagen wir, *A ziehe B nach sich*[2]) und schreiben

$$A \subset B$$

oder

$$B \supset A .$$

2. Wenn A das Ereignis B nach sich zieht und gleichzeitig B ein Teilereignis von A ist, d. h., wenn bei jeder Realisierung des Komplexes $\mathfrak{S}$ die Ereignisse A und B entweder beide auftreten oder beide nicht auftreten, so sagen wir, die Ereignisse A und B seien *gleichwertig*, und bezeichnen diesen Sachverhalt durch das Symbol $A = B$.

---

[1]) Ereignisse werden im folgenden mit großen lateinischen Buchstaben A, B, C, D, E, ... bezeichnet.

[2]) Anstelle von „A zieht B nach sich" sagt man auch „A ist ein Teilereignis von B".

3. Das Ereignis, das im gleichzeitigen Auftreten der Ereignisse A und B besteht, nennen wir das *Produkt* der Ereignisse A und B und bezeichnen es mit AB.

4. Das Ereignis, das darin besteht, daß mindestens eines der Ereignisse A und B eintritt, nennen wir die *Summe* der Ereignisse A und B und schreiben dafür $A + B$.

5. Das Ereignis, das darin besteht, daß das Ereignis A eintritt, während B nicht eintritt, nennen wir die *Differenz* der Ereignisse A und B und schreiben dafür $A - B$.

Der Komplex $\mathfrak{S}$ bestehe z. B. darin, daß auf gut Glück innerhalb des in Abb. 1 gezeichneten Quadrates irgendein Punkt gewählt wird, der auf keinem

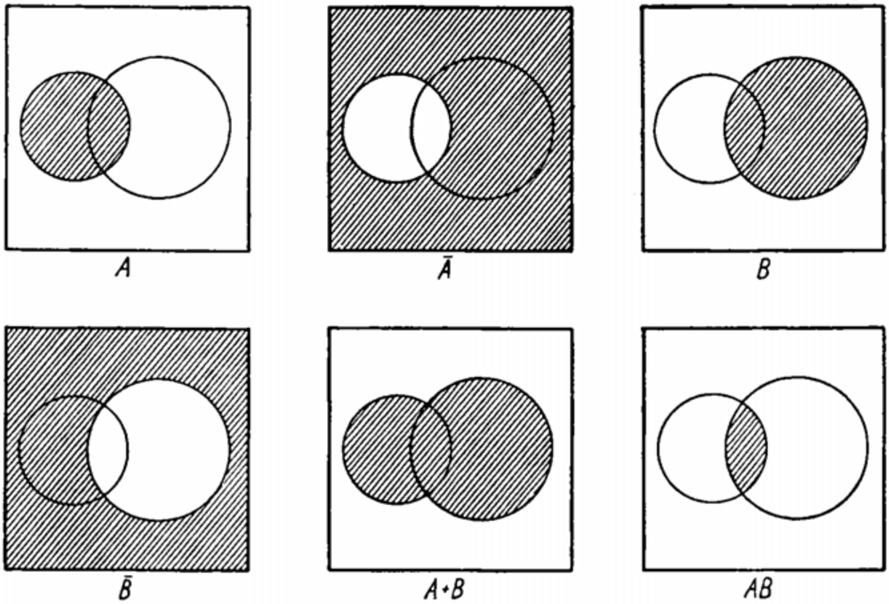

Abb. 1

in dieser Abbildung dargestellten Kreise liegt. Wir bezeichnen mit A das Ereignis „der ausgewählte Punkt liegt innerhalb des linken Kreises", und mit B das Ereignis „der ausgewählte Punkt liegt innerhalb des rechten Kreises". Dann bestehen die Ereignisse A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, $A + B$, AB darin, daß der ausgewählte Punkt in das auf den entsprechenden Figuren von Abb. 1 schraffierte Gebiet fällt.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel. Der Komplex $\mathfrak{S}$ bestehe darin, daß auf einen Tisch (einmal) ein Würfel geworfen wird, auf dessen Flächen jeweils 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Augen markiert sind. Wir bezeichnen mit A das Ereignis, daß auf der oberen Fläche des Würfels 6 Augen erscheinen, mit B das Auftreten von 3 Augen, mit C das Auftreten irgendeiner geraden Anzahl von Augen, mit D das Auftreten irgendeiner Anzahl von Augen, die durch 3 teilbar ist. Dann hängen die Ereignisse A, B, C und D durch die folgenden Beziehungen zusammen:

$$A \subset C, \quad A \subset D, \quad B \subset D, \quad A + B = D, \quad CD = A.$$

Die Definition der Summe und des Produktes zweier Ereignisse läßt sich auf eine beliebige Anzahl von Ereignissen verallgemeinern:

$$A + B + \cdots + N$$

bezeichnet dasjenige Ereignis, das im Auftreten wenigstens eines der Ereignisse $A, B, C, \ldots, N$ besteht, während

$$AB \ldots N$$

dasjenige Ereignis bezeichnet, das im Auftreten aller Ereignisse $A, B, \ldots, N$ besteht.

6. Ein Ereignis heißt *sicher*, wenn es mit Notwendigkeit (bei jeder Realisierung des Komplexes $\mathfrak{S}$) eintreten muß. Bei einem Wurf mit zwei Würfeln ist es z. B. sicher, daß die Summe der Augen nicht kleiner als zwei ist.

Ein Ereignis heißt *unmöglich*, wenn es niemals (bei keiner Realisierung des Komplexes $\mathfrak{S}$ von Bedingungen) eintreten kann. Bei einem Wurf mit zwei Würfeln ist es z. B. unmöglich, daß die Summe der Augen gleich 13 ist.

Offenbar sind alle sicheren Ereignisse einander gleichwertig. Daher schreibt man auch für alle sicheren Ereignisse ein und denselben Buchstaben. Wir benutzen hierfür den Buchstaben U. Ebenso sind alle unmöglichen Ereignisse einander gleichwertig. Wir bezeichnen sie mit dem Buchstaben V.

7. Zwei Ereignisse A und $\bar{A}$ heißen *einander entgegengesetzt*, wenn für sie gleichzeitig die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$A + \bar{A} = U, \quad A\bar{A} = V.$$

Wird z. B. beim Wurf eines Würfels mit C das Auftreten einer geraden Anzahl von Augen bezeichnet, so ist

$$U - C = \bar{C}$$

das Ereignis, das im Auftreten einer ungeraden Anzahl von Augen besteht.

8. Zwei Ereignisse A und B heißen *unvereinbar*, wenn ihr gleichzeitiges Auftreten unmöglich ist, d. h. wenn

$$AB = V$$

ist. Gilt

$$A = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$

und sind die Ereignisse B_i paarweise unvereinbar, d. h.

$$B_i B_j = V \quad \text{für} \quad i \neq j,$$

dann sagt man, *das Ereignis A lasse sich in die Teilereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zerlegen.* So läßt sich z. B. beim Wurf eines Würfels das Ereignis C, das im Auftreten einer geraden Anzahl von Augen besteht, in die Teilereignisse E_2, E_4, E_6 zerlegen, die entsprechend in dem Auftreten von 2, 4 und 6 Augen bestehen.

Die Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bilden eine *vollständige Gruppe von Ereignissen*, wenn mindestens eines von ihnen (bei jeder Realisierung des Komplexes $\mathfrak{S}$) eintreten muß, d. h. wenn

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n = U$$

gilt. Besonders wichtig sind für uns im folgenden die *vollständigen Gruppen paarweise unvereinbarer Ereignisse.* Eine solche Gruppe ist z. B. bei einmaligem Wurf eines Würfels das System der Ereignisse

$$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6,$$

die entsprechend im Auftreten von 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Augen bestehen.

9. In jeder Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man es mit irgendeinem bestimmten Komplex $\mathfrak{S}$ von Bedingungen und mit irgendeinem System S von Ereignissen zu tun, die nach jeder Realisierung des Komplexes eintreten oder nicht eintreten können. Bezüglich dieses Systems macht man zweckmäßigerweise folgende Annahmen:

a) *Gehören dem System S die Ereignisse A und B an, so gehören ihm auch die Ereignisse AB, $A + B$, $A - B$ an.*

b) *Das System enthält die sicheren und die unmöglichen Ereignisse.*

Ein System, das diesen Annahmen genügt, heißt ein *Ereignisfeld.*

Wir bemerken noch zum Schluß, daß man in allen Betrachtungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gleichwertige Ereignisse miteinander vertauschen kann. Zwei beliebige gleichwertige Ereignisse wollen wir daher im folgenden als identisch ansehen.

§ 4. Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit führt den Begriff der Wahrscheinlichkeit auf den der Gleichwahrscheinlichkeit (Gleichmöglichkeit) von Ereignissen zurück, der als grundlegend gilt und keiner weiteren Definition unterliegt. Z. B. werden beim Wurf eines Würfels, der eine einwandfreie kubische Gestalt besitzt und aus vollkommen homogenem Material gefertigt ist, das Auftreten von 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Augen gleichmögliche Ereignisse sein, denn auf Grund der Symmetrie ist keine Seite des Würfels vor einer andern ausgezeichnet.

Im allgemeinen Falle betrachten wir irgendeine Gruppe G, die aus n paarweise unvereinbaren gleichmöglichen Ereignissen (wir nennen sie *elementare* Ereignisse) besteht:

$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

und bilden das System F aus dem unmöglichen Ereignis V, allen Ereignissen E_k der Gruppe G und allen Ereignissen A, die sich in Teilereignisse der Gruppe G zerlegen lassen.

Besteht z. B. die Gruppe G aus den drei Ereignissen E_1, E_2 und E_3, so enthält das System F die Ereignisse[1])

$$V,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_1+E_2,\ E_2+E_3,\ E_1+E_3,\ U=E_1+E_2+E_3\,.$$

Man prüft leicht nach, daß das System F ein Ereignisfeld ist. Es ist offensichtlich, daß Summe, Differenz und Produkt von Ereignissen aus F wieder in F liegen. Das unmögliche Ereignis V liegt nach Definition in F, und das sichere Ereignis U liegt ebenfalls in F, da es sich in der Form

$$U = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

darstellen läßt.

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die Ereignisse des Systems F und läßt sich folgendermaßen formulieren: *Wenn sich ein Ereignis A in m Teilereignisse zerlegen läßt, die alle zu einer vollständigen Gruppe von n paarweise unvereinbaren und gleichmöglichen Ereignissen gehören, so ist die Wahrscheinlichkeit* $\mathsf{P}(A)$ *des Ereignisses A gleich*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m}{n}\,.$$

Bei einmaligem Wurf eines Würfels besteht z. B. eine vollständige Gruppe paarweise unvereinbarer und gleichmöglicher Ereignisse aus den Ereignissen

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5,\ E_6\,,$$

die das Auftreten von 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Augen bedeuten sollen. Das Ereignis

$$C = E_2 + E_4 + E_6\,,$$

das im Auftreten einer geraden Anzahl von Augen besteht, läßt sich in drei Teilereignisse zerlegen, die in der vollständigen Gruppe unvereinbarer und gleichmöglicher Ereignisse vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C ist daher gleich

$$\mathsf{P}(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

Ebenso ist es offensichtlich, daß auf Grund unserer Definition gilt

$$\mathsf{P}(E_i) = \frac{1}{6}\,,\qquad 1 \le i \le 6,$$

$$\mathsf{P}(E_1 + E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,,$$

usw.

---

[1]) Durch diese 8 Ereignisse wird das System F erschöpft, wenn man (wie wir es sei dem Ende des § 3 tun wollen) einander gleichwertige Ereignisse nicht unterscheidet Man zeigt leicht, daß im allgemeinen Falle einer Gruppe G von n Ereignissen das System F aus 2^n Ereignissen besteht.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird weitgehend folgende Terminologie verwandt, an die wir uns im folgenden oft halten werden. Um festzustellen, ob ein Ereignis A (etwa das Erscheinen einer durch 3 teilbaren Anzahl von Augen) eintritt oder nicht, muß man unbedingt einen Versuch ausführen (d. h. den Komplex $\mathfrak{S}$ von Bedingungen realisieren), der eine Antwort auf die gestellte Frage gibt (in unserem Beispiel muß der Würfel tatsächlich einmal geworfen werden). Eine vollständige Gruppe paarweise unvereinbarer und gleichwahrscheinlicher Ereignisse, die bei einem solchen Versuch eintreten können, heißt eine vollständige Gruppe *möglicher Versuchsergebnisse*. Diejenigen möglichen Versuchsergebnisse, aus denen sich das Ereignis A zusammensetzt, heißen Versuchsergebnisse, die A begünstigen. In Benutzung dieser Terminologie kann man sagen, daß *die Wahrscheinlichkeit* $\mathsf{P}(A)$ *eines Ereignisses A gleich dem Verhältnis der Anzahl der für das Ereignis A günstigen zur Anzahl aller möglichen Versuchsergebnisse ist.*

Eine solche Definition setzt natürlich voraus, daß die einzelnen möglichen Versuchsergebnisse gleichwahrscheinlich sind.

Betrachten wir z. B. den Wurf zweier Würfel. Wenn es sich um „richtige" Würfel handelt, so ist das Auftreten einer jeden der 36 möglichen Kombinationen der Augenzahlen auf dem ersten und zweiten Würfel gleichwahrscheinlich. Wir sagen daher, die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von insgesamt 12 Augen sei gleich $\frac{1}{36}$. Das Auftreten von 11 Augen ist auf zweierlei Art möglich: einmal auf dem ersten Würfel 5 und auf dem anderen 6 und zum anderen Mal auf dem ersten Würfel 6 und auf dem zweiten 5 Augen. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der Augenzahl gleich 11 ist, beträgt daher $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Der Leser prüft leicht nach, daß die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der einzelnen Anzahlen von Augen in der folgenden Tabelle richtig angegeben sind.

Tabelle 1

Augenzahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit . . .	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Entsprechend unserer Definition wird jedem Ereignis A, das dem oben konstruierten Wahrscheinlichkeitsfeld angehört, eine wohlbestimmte Wahrscheinlichkeit

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m}{n}$$

zugeschrieben. Dabei ist m die Anzahl derjenigen Ereignisse E_i der Ausgangsgruppe G, die Teilereignisse von A sind. Auf diese Weise läßt sich die Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}(A)$ als eine *auf dem Wahrscheinlichkeitsfeld F definierte Funktion des Ereignisses A deuten.* Diese Funktion besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. *Für jedes Ereignis A des Wahrscheinlichkeitsfeldes F gilt*

$$\mathsf{P}(A) \geq 0 \,.$$

2. *Für das sichere Ereignis U gilt*

$$\mathsf{P}(U) = 1 \,.$$

3. *Läßt sich das Ereignis A in die Teilereignisse B und C zerlegen und gehören alle drei Ereignisse A, B und C dem Feld F an, so ist*

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) \,.$$

Diese Eigenschaft nennt man das *Additionstheorem der Wahrscheinlichkeiten.*

Die Eigenschaft 1. ist evident, denn der Bruch $\frac{m}{n}$ kann nie negativ sein. Eigenschaft 2. ist nicht weniger einleuchtend, da für das sichere Ereignis U alle n möglichen Versuchsergebnisse günstig sind. Daher ist

$$\mathsf{P}(U) = \frac{n}{n} = 1 \,.$$

Wir beweisen nun die Eigenschaft 3. Für das Ereignis B seien m', für das Ereignis C hingegen m'' Elementarereignisse E_i der Gruppe G günstig. Da die Ereignisse B und C nach Annahme unvereinbar sind, unterscheiden sich diejenigen Ereignisse E_i, die für B günstig sind, von denen, die für C günstig sind. Im ganzen haben wir also $m' + m''$ Elementarereignisse E_i, die für das Auftreten irgendeines der Ereignisse B oder C günstig sind, d. h. die das Ereignis $B + C = A$ begünstigen. Folglich ist

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m' + m''}{n} = \frac{m'}{n} + \frac{m''}{n} = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) \,,$$

q. e. d.

Wir beschränken uns an dieser Stelle auf einen Hinweis auf einige weitere Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit.

4. *Die Wahrscheinlichkeit des dem Ereignis A entgegengesetzten Ereignisses $\bar{A}$ ist gleich*

$$\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A) \,.$$

Wegen

$$A + \bar{A} = U$$

ist nämlich auf Grund der bewiesenen Eigenschaft 2

$$\mathsf{P}(A + \bar{A}) = 1 \,.$$

Da aber die Ereignisse A und $\bar{A}$ miteinander unvereinbar sind, so gilt nach Eigenschaft 3

$$\mathsf{P}(A + \bar{A}) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\bar{A}) \,.$$

Die beiden letzten Gleichungen beweisen unseren Satz.

5. *Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist gleich Null.*

Die Ereignisse U und V sind nämlich unvereinbar, daher ist

$$\mathsf{P}(U) + \mathsf{P}(V) = \mathsf{P}(U) .$$

Hieraus folgt dann aber

$$\mathsf{P}(V) = 0 .$$

6. *Wenn das Ereignis A das Ereignis B nach sich zieht, so ist*

$$\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B) .$$

Das Ereignis B läßt sich nämlich als Summe der beiden Ereignisse A und $\bar{A}B$ darstellen. Hieraus gewinnen wir auf Grund der Eigenschaften 3 und 1 die Beziehung

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A + \bar{A}B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\bar{A}B) \geq \mathsf{P}(A) .$$

7. *Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses liegt zwischen den Zahlen* 0 *und* 1.

Für ein beliebiges Ereignis A gelten nämlich die Beziehungen

$$V \subset A + V = A = AU \subset U;$$

hieraus ergeben sich auf Grund der bisher angeführten Eigenschaften die Ungleichungen

$$0 = \mathsf{P}(V) \leq \mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(U) = 1.$$

§ 5. Beispiele

Wir betrachten nun einige Beispiele für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen unter Benutzung der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit. Die von uns angeführten Beispiele tragen ausschließlich einen illustrativen Charakter und sind nicht dazu bestimmt, den Leser mit allen wichtigen Methoden der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten vertraut zu machen.

Beispiel 1. Aus einem Kartenspiel (36 Karten) greift man auf gut Glück 3 Karten heraus. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich unter ihnen genau ein As befindet.

Lösung. Die vollständige Gruppe gleichwahrscheinlicher und unvereinbarer Ereignisse besteht in unserer Aufgabe aus allen möglichen Kombinationen von 3 Karten, ihre Anzahl ist gleich C_{36}^3 [1]). Die Anzahl der günstigen Ereignisse kann man folgendermaßen berechnen. Ein As können wir auf C_4^1 verschiedene Arten wählen, zwei andere Karten (keine Asse) hingegen auf C_{32}^2 verschiedene Arten. Da zu jedem As die beiden übrigen Karten noch auf C_{32}^2 Arten ge-

[1]) In der internationalen Literatur wird gelegentlich diese Bezeichnung benutzt. Es ist $C_n^k = \binom{n}{k}$ (Anm. d. Red.).

wählt werden können, so gibt es im ganzen $C_4^1\, C_{32}^2$ günstige Fälle. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also gleich

$$p = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{\frac{4}{1} \cdot \frac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2}}{\frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{31 \cdot 16}{35 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{496}{1785} \approx 0{,}2778\,,$$

d. h. ein wenig größer als 0,25.

Beispiel 2. Aus einem Kartenspiel (36 Karten) werden auf gut Glück 3 Karten gezogen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter ihnen wenigstens ein As vorkommt.

Lösung. Wir bezeichnen das uns interessierende Ereignis mit dem Buchstaben A. Es läßt sich als Summe der folgenden 3 unvereinbaren Ereignisse darstellen: A_1 — das Auftreten eines einzigen Asses, A_2 — das Auftreten von genau 2 Assen, A_3 — das Auftreten von 3 Assen.

Durch analoge Überlegungen wie bei der Lösung der vorigen Aufgabe stellt man leicht fest, daß die Anzahl der günstigen Fälle für

das Ereignis A_1 gleich $C_4^1 \cdot C_{32}^2$,
,, A_2 ,, $C_4^2 \cdot C_{32}^1$,
,, A_3 ,, $C_4^3 \cdot C_{32}^0$

ist.

Da die Anzahl aller möglichen Fälle gleich C_{36}^3 ist, erhält man

$$\mathsf{P}(A_1) = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{16 \cdot 31}{3 \cdot 35 \cdot 17} \approx 0{,}2778\,,$$

$$\mathsf{P}(A_2) = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3} = \frac{3 \cdot 16}{3 \cdot 35 \cdot 17} \approx 0{,}0269\,,$$

$$\mathsf{P}(A_3) = \frac{C_4^3 \cdot C_{32}^0}{C_{36}^3} = \frac{1}{3 \cdot 35 \cdot 17} \approx 0{,}0006\,.$$

Auf Grund des Additionstheorems ist dann

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) = \frac{109}{3 \cdot 119} \approx 0{,}3053\,.$$

Dieses Beispiel läßt sich auch noch anders lösen. Das dem Ereignis A entgegengesetzte Ereignis $\bar{A}$ besteht darin, daß unter den herausgegriffenen Karten kein As vorkommt. Offensichtlich kann man aus dem Kartenspiel nach Entfernen der 4 Asse noch auf C_{32}^3 verschiedene Arten drei Karten herausgreifen, folglich erhält man

$$\mathsf{P}(\bar{A}) = \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{31 \cdot 8}{3 \cdot 17 \cdot 7} \approx 0{,}6947\,.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\bar{A}) \approx 0{,}3053\,.$$

Bemerkung. In beiden Beispielen besagt der Ausdruck „auf gut Glück", daß alle möglichen Kombinationen von 3 Karten gleichwahrscheinlich sind.

Beispiel 3. Ein aus 36 Karten bestehendes Kartenspiel werde auf gut Glück in zwei gleichgroße Stöße geteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in beiden Stößen die gleiche Anzahl roter und schwarzer Karten vorhanden ist?

Der Ausdruck „auf gut Glück" besagt hier, daß alle möglichen Aufteilungen des Kartenspiels in 2 gleiche Teile gleichwahrscheinlich sind.

Lösung. Wir müssen die Wahrscheinlichkeit dafür suchen, daß unter den auf gut Glück herausgegriffenen 18 Karten 9 rote und 9 schwarze sind.

Aus 36 Karten kann man auf C_{36}^{18} verschiedene Arten 18 Karten auswählen. Für unser Beispiel günstig sind alle die, bei denen von den 18 roten Karten des Spieles gerade 9 und von den 18 schwarzen Karten ebenfalls gerade 9 herausgegriffen werden. 9 rote Karten kann man aber auf C_{18}^{9} verschiedene Arten entnehmen. Da man nach Entnahme eines ganz bestimmten Satzes von 9 roten Karten noch auf C_{18}^{9} verschiedene Arten 9 schwarze ziehen kann, ist die Anzahl der günstigen Fälle gleich $C_{18}^{9} \cdot C_{18}^{9}$. Als gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man also

$$p = \frac{C_{18}^{9} \cdot C_{18}^{9}}{C_{36}^{18}} = \frac{(18!)^4}{36!(9!)^4}\,.$$

Um uns eine Vorstellung von der Größe dieser Wahrscheinlichkeit zu machen und dabei nicht irgendwelche ermüdende Berechnung anstellen zu müssen, benutzen wir die STIRLINGsche Formel. Nach dieser gilt die folgende asymptotische Gleichung

$$n\,! \sim \sqrt{2\,\pi\,n}\,n^n\,e^{-n}\,.$$

Wir haben also

$$18! \approx 18^{18}\,e^{-18}\sqrt{2\,\pi \cdot 18}\,,$$

$$9! \approx 9^{9}\,e^{-9}\sqrt{2\,\pi \cdot 9}\,,$$

$$36! \approx 36^{36} \cdot e^{-36}\sqrt{2\,\pi \cdot 36}\,,$$

und damit

$$p \approx \frac{(\sqrt{2\,\pi \cdot 18} \cdot 18^{18} \cdot e^{-18})^4}{\sqrt{2\,\pi \cdot 36} \cdot 36^{36} \cdot e^{-36}\,(\sqrt{2\,\pi \cdot 9} \cdot 9^{9} \cdot e^{-9})^4}\,.$$

Nach einigen einfachen Umformungen bekommen wir schließlich

$$p \approx \frac{2}{\sqrt{18\,\pi}} \approx \frac{4}{15} \approx 0{,}26\,.$$

Beispiel 4. Vorgegeben seien n Teilchen, von denen sich jedes mit ein und derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{N}$ in jedem von $N (N > n)$ Kästchen befinden kann. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich

1. in n ausgewählten Kästchen je 1 Teilchen befindet,
2. in beliebigen n Kästchen je 1 Teilchen befindet.

Lösung. Diese Aufgabe spielt in der modernen statistischen Physik eine wichtige Rolle; je nachdem, wie die vollständige Gruppe gleichwahrscheinlicher Ereignisse gebildet wird, kommt man zu der physikalischen Statistik von BOLTZMANN, BOSE-EINSTEIN oder von FERMI-DIRAC.

In der BOLTZMANNschen Statistik werden zwei beliebige denkbare Verteilungen als gleichwahrscheinlich angesehen: In jedem Kästchen kann sich eine beliebige Anzahl von Teilchen befinden, die von 0 bis n variieren kann; und jede Permutation der Teilchen schafft eine neue Verteilung.

Die Anzahl der möglichen Verteilungen bestimmen wir folgendermaßen: Jedes Teilchen kann sich in jedem der N Kästchen befinden, folglich können sich n Teilchen auf N^n verschiedene Arten auf die Kästchen verteilen.

In der ersten Frage ist die Anzahl der günstigen Fälle offenbar gleich $n!$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in n vorher ausgewählte Kästchen je ein Teilchen fällt, gleich

$$p_1 = \frac{n!}{N^n}.$$

In der zweiten Frage ist die Anzahl der günstigen Fälle C_N^n mal so groß, daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in irgend n Kästchen je 1 Teilchen fällt, gleich

$$p_2 = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

In der BOSE-EINSTEINschen Statistik sieht man alle die Fälle als identisch an, die durch Vertauschen der Teilchen ineinander übergehen (wichtig ist nur, wie viele Teilchen in ein Kästchen fallen, jedoch nicht, welche Teilchen es sind). Die vollständige Gruppe gleichwahrscheinlicher Ereignisse besteht aus allen möglichen Verteilungen von n Teilchen auf N Kästchen, wobei man die ganze Klasse von BOLTZMANNschen Verteilungen, die sich nicht durch die Anzahl der auf die einzelnen Kästchen entfallenden Teilchen, sondern nur durch die Teilchen selbst unterscheiden, zu einem einzigen Fall zusammenfaßt. Um eine anschauliche Vorstellung vom Unterschied der BOLTZMANNschen und der BOSE-EINSTEINschen Statistik zu bekommen, betrachten wir ein spezielles Beispiel: $N = 4$, $n = 2$. Alle möglichen Verteilungen lassen sich in diesem Beispiel in Form der folgenden Tabelle zusammenfassen, a und b mögen dabei die

Tabelle 2

Fall	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	ab				a	a	a				b	b	b			
Kästchen		ab			b			a	a		a			b	b	
			ab			b		b		a		a		a		b
				ab			b		b	b			a		a	a

beiden Teilchen bezeichnen. In der BOLTZMANNschen Statistik sind alle 16 Möglichkeiten verschiedene gleichwahrscheinliche Ereignisse, in der BOSE-EINSTEINschen Statistik dagegen werden die Fälle 5 und 11, 6 und 12, 7 und 13, 8 und 14, 9 und 15, 10 und 16 paarweise identifiziert, so daß wir eine Gruppe von 10 gleichwahrscheinlichen Ereignissen bekommen.

Wir berechnen nun die Anzahl der gleichwahrscheinlichen Fälle in der BOSE-EINSTEINschen Statistik. Dazu bemerken wir, daß man die möglichen Verteilungen der Teilchen auf die verschiedenen Kästchen auf folgende Weise erhalten kann: Wir ordnen die Kästchen auf einer Geraden dicht nebeneinander an, ferner ordnen wir auch die Teilchen eins neben dem anderen auf der selben Geraden in einer Reihe an. Wir betrachten nun alle möglichen Permutationen der n Teilchen und $N - 1$ Trennungswände zwischen den Kästchen (insgesamt $N + n - 1$ Elemente). Wie man sich leicht überlegt, werden auf diese Weise alle möglichen Besetzungen der Kästchen mit Teilchen berücksichtigt, die sich sowohl durch die Anordnung der Teilchen in den Kästchen, als auch durch die Ordnung der Trennungswände unterscheiden.

Die Anzahl dieser Permutationen ist gleich $(N + n - 1)!$ Unter diesen Permutationen kommen aber identische vor: Jede Verteilung der Teilchen auf die Kästchen wird $(N - 1)!$-mal gezählt, da wir unterschieden, welche Zwischenwände zwischen den Kästchen lagen. Außerdem zählten wir jede Verteilung auf die Kästchen $n!$-mal, da wir nicht nur die Anzahl der Teilchen in einem Kästchen, sondern auch die Reihenfolge der Teilchen in diesem Kästchen berücksichtigten. Jede Verteilung auf die Kästchen zählten wir also $n!\,(N - 1)!$-mal. Die Anzahl der im Sinne von BOSE-EINSTEIN verschiedenen Verteilungen der Teilchen auf die Kästchen ist also gleich

$$\frac{(n + N - 1)!}{n!\,(N - 1)!}\,.$$

Damit haben wir die Anzahl der gleichwahrscheinlichen Ereignisse in der vollständigen Gruppe von Ereignissen gefunden. Nunmehr können wir auch leicht die Fragen unserer Aufgabe beantworten. In der BOSE-EINSTEINschen Statistik sind die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 gleich

$$p_1 = \frac{1}{\dfrac{(n + N - 1)!}{n!\,(N - 1)!}} = \frac{n!\,(N - 1)!}{(n + N - 1)!}\,,$$

$$p_2 = \frac{C_N^n}{\dfrac{(n + N - 1)!}{n!\,(N - 1)!}} = \frac{N!\,(N - 1)!}{(N - n)!\,(N + n - 1)!}\,.$$

Zum Schluß betrachten wir noch die FERMI-DIRACsche Statistik. Nach dieser Statistik kann ein Kästchen entweder mit einem einzigen Teilchen besetzt sein oder mit keinem; Vertauschung der Teilchen schafft keine neue Verteilung.

Die Anzahl der verschiedenen Verteilungen der Teilchen auf die Kästchen läßt sich nun in der FERMI-DIRACschen Statistik leicht berechnen. Das erste

Teilchen kann auf N verschiedene Arten angeordnet werden, das zweite nur auf $N - 1$, das dritte auf $N - 2$ und schließlich das n-te auf $(N - n + 1)$ verschiedene Arten. Als verschieden sehen wir hierbei noch die Verteilungen an, die sich nur durch eine Permutation der Teilchen unterscheiden. Daher müssen wir die so gewonnene Zahl durch $n!$ dividieren. n Teilchen können also auf die N Kästchen auf

$$\frac{1}{n!} \cdot N(N-1) \cdots (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}$$

verschiedene gleichwahrscheinliche Arten verteilt werden.

Man überlegt sich leicht, daß in der Fermi-Diracschen Statistik die gesuchten Wahrscheinlichkeiten gleich

$$p_1 = \frac{(N-n)!\,n!}{N!},$$

$$p_2 = 1$$

sind.

Das betrachtete Beispiel zeigt, wie wichtig es ist, genau festzulegen, welche Ereignisse in der Aufgabe als gleichwahrscheinlich anzusehen sind.

Beispiel 5. An einer Theaterkasse stehen $2n$ Menschen in einer Reihe an. n Leute haben nur Fünfmarkscheine, die übrigen n nur Zehnmarkscheine. Zu Beginn des Kartenverkaufs ist in der Kasse kein Geld vorhanden, jeder Käufer nimmt eine Eintrittskarte zu 5 Mark. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Käufer hintereinander abgefertigt werden können, ohne auf Wechselgeld warten zu müssen?

Lösung. Alle möglichen Anordnungen der Käufer sind gleichwahrscheinlich, uns interessiert aber nicht die Anordnung der Käufer selbst, sondern nur der Käufer, der Fünfmarkscheine, und der Käufer, der Zehnmarkscheine hat. Zur Lösung der uns interessierenden Aufgabe benutzen wir folgendes geometrisches Verfahren: Wir betrachten die xy-Ebene und zeichnen auf der Abszissenachse der Punkte $1, 2, \ldots, 2n$ in dieser Reihenfolge ein. Im Koordinatenanfangspunkt liege die Kasse. Jeder Person, die einen Zehnmarkschein besitzt, ordnen wir die Ordinate $+1$ zu und jeder Person mit einem Fünfmarkschein die Ordinate -1. Nun summieren wir von links nach rechts die so definierten Ordinaten in den ganzzahligen Punkten und zeichnen in jedem dieser Punkte die erhaltene Summe ein (s. Abb. 2). Man sieht leicht, daß im Punkt mit der Abszisse $2n$ diese Summe gleich Null ist (es kommt n mal Summand 1 und n mal Summand -1 vor). Wir verbinden jetzt die so erhaltenen einander benachbarten Punkte durch Geraden und den Koordinatenursprung mit dem ersten dieser Punkte von links gerechnet. Den so gewonnenen Streckenzug nennen wir eine Trajektorie. Die Anzahl der verschieden möglichen Trajektorien ist — wie man leicht einsieht — gleich C_{2n}^{n} (sie ist gleich der Anzahl der möglichen Kombinationen von n Aufwärtsbewegungen unter $2n$ Aufwärts- und Abwärtsbewegungen). Für das uns interessierende Ereignis günstig sind solche und nur solche Trajektorien, die nirgends über der Abszissenachse verlaufen (sonst kommt einmal ein Käufer zur Kasse mit einem Zehnmarkschein, während in der Kasse kein Wechselgeld ist). Wir berechnen nun die Anzahl der Trajektorien, die wenigstens einmal die Gerade $y = 1$ erreichen oder schneiden. Dazu konstruieren wir eine neue Trajektorie folgendermaßen: Bis zur ersten Berührung mit der Geraden $y = 1$ fällt die neue Trajektorie mit der alten zusammen und vom ersten Berührungspunkt ab ist die neue Trajektorie das Spiegelbild der alten Trajektorie an der Geraden $y = 1$ (s. Abb. 2). Man sieht leicht, daß die neue Trajektorie nur für solche Trajektorien definiert ist, die wenigstens einmal die Gerade $y = 1$ erreichen, für die übrigen Trajektorien (d. h. für die, welche für das uns interessierende Ereignis günstig sind), fällt die neue Trajektorie mit der alten zusammen. Eine neue Trajektorie, die im Punkt (0, 0) beginnt, endet im Punkt $(2n, 2)$. Die neue Trajektorie bewegt sich also zweimal mehr nach oben als nach unten.

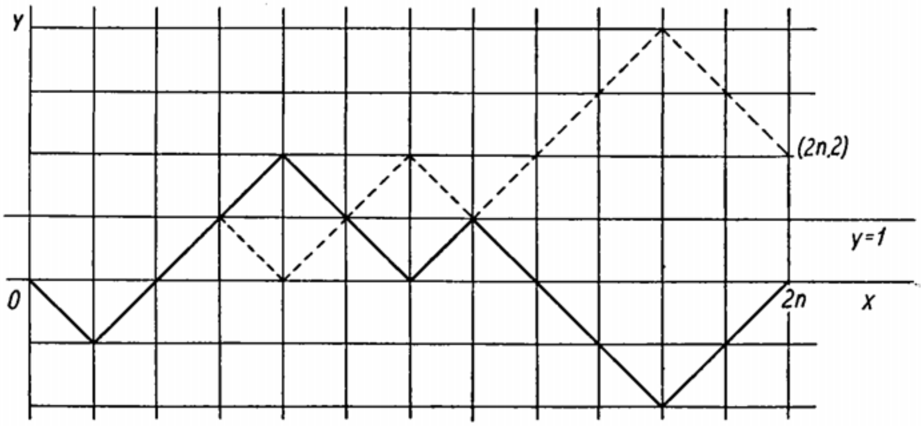

Abb. 2

Dieser Tatbestand zeigt uns, daß die Anzahl der neuen Trajektorien gleich C_{2n}^{n+1} ist (Anzahl der Kombinationen von $n+1$ Aufwärtsbewegungen unter $2n$ Aufwärts- und Abwärtsbewegungen). Die Anzahl der günstigen Fälle ist also gleich $C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1}$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$p = \frac{C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1}}{C_{2n}^{n}} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

§ 6. Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Schon am Anfang der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bemerkte man, daß die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit, die auf der Betrachtung endlicher Gruppen gleichwahrscheinlicher Ereignisse beruht, unzureichend ist. Schon damals führten spezielle Beispiele zu einer Abänderung dieser Definition und zu einer Bildung des Begriffs der Wahrscheinlichkeit auch in solchen Fällen, in denen unendlich viele Versuchsergebnisse denkbar