R. Halin

Graphentheorie

Mathematische Lehrbücher und Monographien
Herausgegeben von der Akademie der Wissenschaften der DDR
Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik

I. Abteilung
Mathematische Lehrbücher
Band 40

Graphentheorie

von R. Halin

Graphentheorie

von Rudolf Halin

Mit 56 Abbildungen

Akademie-Verlag Berlin
1989

Verfasser:

Prof. Dr. Rudolf Halin
Universität Hamburg

Die vorliegende Ausgabe ist textidentisch mit der im Originalverlag erschienenen zweiten, überarbeiteten und erweiterten Auflage, Darmstadt 1989.
Die erste Auflage dieses Werkes erschien in 2 Bänden nur in der Reihe „Erträge der Forschung" des Originalverlages.

ISBN 3-05-500405-1 Akademie-Verlag Berlin
ISBN 3-534-10140-5 Wissenschaftliche Buchgesellschaft
ISSN 0076-5422

Erschienen im Akademie-Verlag Berlin, Leipziger Straße 3—4, Berlin, DDR - 1086
Lizenzausgabe mit Genehmigung der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft, Darmstadt

Lizenznummer: 202 · 100/404/88
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg, DDR - 7400
LSV 1024
Bestellnummer: 763 746 3 (9069)

07900

Meinem verehrten Lehrer,
Herrn Prof. Dr. Klaus Wagner,
in Dankbarkeit gewidmet

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

Die Graphentheorie ist ein relativ junges Teilgebiet der Mathematik. Sie nahm ihren Anfang 1736 mit EULERS berühmter Untersuchung zum sog. Königsberger Brückenproblem. Als einheitliche Disziplin wurde sie genau 200 Jahre später durch das in Stil und Darstellung noch heute vorbildliche Buch „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" des ungarischen Mathematikers DÉNES KÖNIG begründet. Die Entwicklung der Graphentheorie bis zu diesem klassischen Werke ist im wesentlichen durch drei Hauptwurzeln bestimmt, die in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts gelegt wurden:

1. Die Theorie der Stromverzweigungen von KIRCHHOFF;
2. Die Untersuchungen von CAYLEY und SYLVESTER über chemische Verbindungen. CAYLEY hat auch das berühmteste Problem der Graphentheorie, die Vierfarbenvermutung, publik gemacht, und von SYLVESTER rührt der Name „Graph" her;
3. Die Arbeiten von PETERSEN im Anschluß an ein Faktorproblem der Invariantentheorie.

In den Jahren vor dem Erscheinen des Königschen Buches haben vor allem MENGER, WHITNEY, KURATOWSKI und KÖNIG selbst den Grund für die weitere Entwicklung gelegt. Seit fünfundzwanzig Jahren hat die Graphentheorie eine hohe Blütezeit; die entstandene Literatur ist nahezu unübersehbar. Immer noch aber stellt die Graphentheorie sich als eine Fülle von Einzeluntersuchungen dar, mit zum Teil sehr tiefen und geistreichen Ideen, ohne daß man indessen von bestimmten beherrschenden Methoden sprechen könnte. So erscheint eine systematische Darstellung unter einem einheitlichen Gesichtspunkte derzeit schwerlich möglich. Jedoch hat sich ein gewisser Bestand von klassisch gewordenen Sätzen herauskristallisiert, die als grundlegend anzusehen sind, wie z. B. der Heiratssatz von D. KÖNIG und PH. HALL, die Sätze von MENGER, PETERSEN, KURATOWSKI, FRUCHT, TURÁN und das Faktortheorem von TUTTE.

Ziel der vorliegenden Darstellung ist einerseits, eine Einführung in diese Grundtatsachen zu geben, andererseits, soweit es der begrenzte Umfang erlaubt, ein Bild davon zu vermitteln, womit die graphentheoretische Forschung sich gegenwärtig beschäftigt; dabei mußte der Verfasser sich häufig mit Literaturhinweisen begnügen.

Bei der Auswahl des Stoffes waren natürlicherweise persönliche Interessen und Vorlieben ausschlaggebend, aber auch der Wunsch, größere Überschneidungen mit anderen bereits vorliegenden Büchern über Graphen nach Möglichkeit zu vermeiden.

Logisch abstrakt gesehen ist die Graphentheorie eigentlich nichts anderes als die Theorie der Mengen mit einer binären Relation. Die natürliche geometrisch-anschauliche

Auffassung eines Graphen, die jedem Graphen sozusagen eine „Individualität", eine „Physiognomie" verleiht, hat hohen heuristischen Wert und führt in natürlicher Weise zu ganz neuartigen, reizvollen Fragestellungen.

Die Erfahrung zeigt, daß, wer etwas tiefer in die Graphentheorie eingedrungen ist, ihrer Faszination kaum widerstehen kann. Er begegnet einer Fülle ansprechender Probleme, deren Schwierigkeit im voraus gar nicht eingeschätzt werden kann und bei deren Lösung die gängigen Methoden der Mathematik versagen. Wie in kaum einer anderen mathematischen Disziplin ist hier der Vorstoß in noch unberührtes Neuland möglich, wo der Einzelne auf sich alleine und seine Findigkeit angewiesen ist.

Angesichts der Natürlichkeit und Einfachheit ihrer Begriffsbildungen fragt man sich, warum die Graphentheorie erst so relativ spät entwickelt worden ist. Eine Erklärung liegt vielleicht darin, daß die klassische Mathematik (mit dem Zentrum Analysis) in Wechselwirkung mit der Physik entwickelt worden ist, aus dem Bedürfnis, die Welt der Naturerscheinungen zu begreifen; da letztere kontinuierlich verlaufen, wurde die Theorie der reellen Zahlen und Funktionen als angemessenes Hilfsmittel geschaffen. Heute wird mehr und mehr ein formales Erfassen der Beziehungen einzelner Individuen untereinander (etwa in den Gesellschaftswissenschaften) wichtig; so gewinnt die diskrete Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie) an Bedeutung. Einen ähnlichen Gedanken finden wir in dem Vorwort des Buches von König: „Vielleicht noch mehr als der Berührung der Menschheit mit der Natur verdankt die Graphentheorie der Berührung der Menschen untereinander".

In jüngster Zeit gewinnen die Anwendungen der Graphentheorie in Disziplinen wie Operations Research, den Wirtschaftswissenschaften, Theoretischer Physik und Chemie, Biologie, Informatik immer mehr an Bedeutung. Dies spricht für die Lebenskraft und Fruchtbarkeit unserer Disziplin. In der vorliegenden Darstellung werden wir uns jedoch überwiegend auf die reine Theorie konzentrieren. Im Gegensatz zu den meisten neueren Büchern über Graphen beziehen wir die Theorie der unendlichen Graphen mit ein. Eine Einengung des Blickfeldes ausschließlich auf endliche Graphen erscheint dem Verfasser im Hinblick auf die Erschließung neuer Problemkreise und den notwendigen Brückenschlag zu den anderen mathematischen Disziplinen wenig sinnvoll. Der Schwerpunkt liegt auf den ungerichteten Graphen; gerichtete Graphen werden nur am Rande mitbehandelt. Hypergraphen werden lediglich im Anhang kurz angesprochen. Dagegen wird in Kap. 8 ausführlich auf die Beziehungen zwischen Matroiden und Graphen eingegangen.

Die in diesem Buche vorausgesetzten mathematischen Kenntnisse sind gering. Wir bedienen uns der mengentheoretischen Sprechweise; nur in den Teilen, die unendliche Graphen betreffen, werden gewisse transfinite Hilfsmittel (wie das Zornsche Lemma) benutzt. Darüber hinaus werden an einigen wenigen Stellen elementare Kenntnisse aus der linearen Algebra und der Gruppentheorie benötigt. Weniger als in der Mathematik sonst üblich bauen die einzelnen Teile aufeinander auf; man wird daher, nach Kenntnis der Grundbegriffe und der fundamentalen Sätze, die einzelnen Kapitel unabhängig voneinander lesen können. Die Darstellung ist, angesichts des Zieles, möglichst viel Information auf kleinem Raume zu geben, relativ knapp, aber, wie der Verfasser hofft, in den Beweisen lückenlos. Sicher wird der aufmerksame Leser viele kleine (und hoffentlich wenige große) Fehler finden, trotz mehrfacher sorgfältiger Durchsicht des Manuskriptes. Für alle Unbilden, die die Lektüre mit sich bringen mag, bittet der Verfasser im voraus höflichst um Vergebung.

Nach dem ersten Kapitel, sodann nach jedem Paragraphen befindet sich eine Anzahl von Übungsaufgaben, die dem Verständnis und der Vertiefung des Vorangegangenen dienen sollen und meist nicht schwierig sind. Aufgaben, die an späterer Stelle benötigt werden, sind durch Fettdruck ihrer Nummer hervorgehoben; wird zu ihrer Lösung eine besondere Idee erfordert, so ist der Beweisgang kurz skizziert.

Hinweise auf das Literaturverzeichnis sind durch eckige Klammern angedeutet. Arabische Zahlen beziehen sich auf das Verzeichnis von Originalarbeiten, das dem jeweiligen Kapitel (separat mit jeweils neu beginnender Numerierung) beigegeben ist. Bei Lehrbüchern und Monographien ist stets der Anfangsbuchstabe des Verfassernamens hinzugefügt, und römische Zahlen beziehen sich auf Sammelbände.

Hamburg, im Dezember 1979 RUDOLF HALIN

Vorwort zur zweiten Auflage

Es ist mir eine große Freude, daß nunmehr eine zweite Auflage meiner zweibändigen „Graphentheorie" von 1980/81 erscheint. Beide Teile sind jetzt zu einem Band vereinigt, der in Lettern gesetzt ist, statt des bisherigen Schreibdrucks. Ich danke der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft Darmstadt, insbesondere Herrn Dr. HANS-DETLEF SCHULZ, und dem Akademie-Verlag Berlin für das Zustandekommen dieser Neuauflage, wie überhaupt für die gute Zusammenarbeit.

Diese zweite Auflage weist gegenüber der ersten nur geringe Veränderungen auf. Eine Reihe von Versehen und Ungenauigkeiten in der ersten Auflage sind berichtigt, zu knappe oder schwer verständliche Passagen klarer dargestellt. Es war jedoch nicht möglich, die wichtigen Entwicklungen der letzten Jahre zu berücksichtigen; ein neues Buch hätte geschrieben werden müssen. Nur einige wenige Hinweise werden gegeben. In Kap. 10 wird nun ein Beweis des Satzes von LEKKERKERKER-BOLAND zur Charakterisierung der Intervallgraphen dargestellt, nachdem eine kurze Beweisführung gefunden worden ist; ferner wird ein Paragraph über universelle Graphen, als eine Anwendung der Homomorphiebasen, hinzugefügt.

Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle meinen Dank an die Damen, die die mühevolle Schreibarbeit für die erste Auflage geleistet haben, zu wiederholen. Ferner danke ich den Herren W. MADER, R. SCHMIDT und R. DIESTEL für hilfreiche Kommentare zum Text, insbesondere Hinweise auf eine Reihe von Versehen. Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. KLAUS WAGNER, dem dieses Buch gewidmet ist. Ihm verdanke ich menschlich und mathematisch so viel, daß ohne ihn dieses Buch wohl nicht entstanden wäre.

Hamburg, im August 1986 RUDOLF HALIN

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen zur Bezeichnungsweise und Terminologie

Zur Abkürzung werden gelegentlich logische Symbole benutzt:

$\Rightarrow$ (logische Implikation),
$\Leftrightarrow$ (logische Äquivalenz),
$\bigwedge$ (Allquantor),
$\bigvee$ (Existenzquantor),
$\wedge$ (und),
$\vee$ (oder, in einschließendem Sinne),
$\neg$ (logische Negation).

$\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3 \ldots$, $\mathbb{N}'$ sei die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{N}_n$ die Menge $\{1, \ldots, n\}$. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ bezeichnen die Menge der ganzen, der rationalen, der reellen bzw. der reellen positiven Zahlen. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $[x]$ die größte ganze Zahl z mit $z \leqq x$, und $\{x\}$ bezeichnet die kleinste ganze Zahl z mit $z \geqq x$. Für $n \in \mathbb{N}$ werde gesetzt

$$(2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2,$$

$$(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1.$$

$\mathbb{F}_q$ ist das Galois-Feld der Ordnung q.

Die Transponierte einer Matrix A bezeichnen wir durch A^T.

$\mathfrak{P}(M)$ bezeichnet die Potenzmenge einer Menge M und $\mathfrak{E}(M)$ die Menge der endlichen Teilmengen von M. „Anzahl" oder „Zahl" (der Elemente einer Menge) werden im Sinne von „Kardinalzahl" gebraucht. $\binom{M}{n}$ bezeichnet die Menge der n-elementigen Teilmengen von M. Die Inklusion von Mengen wird durch $\subseteq$ bezeichnet; $\subset$ bedeutet *echte* Inklusion. Für Mengen A, B bezeichnen wir mit $A - B$ die Differenzmenge $\{x \mid x \in A, x \notin B\}$ und mit $A \oplus B$ die symmetrische Differenz $(A \cup B) - (A \cap B)$.

Eine Relation aus einer Menge A in eine Menge B ist eine Teilmenge ϱ der Paarmenge $A \times B$; speziell im Falle $A = B$ sprechen wir von einer Relation in A. Für $(a, b) \in \varrho$ schreiben wir meist $a\varrho b$.

Abbildungen werden als Relationen, also als Mengen (geordneter Paare) aufgefaßt, so daß das (mengentheoretische) Enthaltensein für Abbildungen, das Bilden der Vereinigung von Abbildungen usw. sinnvoll sind. Mit id_M bezeichnen wir die identische Abbildung von M, mit $f \circ g$ die Hintereinanderausführung von Abbildungen f, g (sofern möglich), wobei $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ist.

Was die transfiniten Teile der Theorie anbelangt, so nehmen wir durchweg das Auswahlpostulat (AWP) als gültig an, ohne dies jeweils besonders zu erwähnen. Ist $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl, so bezeichne $\mathfrak{a}^+$ ihren Nachfolger und $\omega(\mathfrak{a})$ ihre Anfangszahl. Für eine Ordnungszahl τ bedeute $\overline{\overline{\tau}}$ die zugehörige Kardinalzahl. (Also $\omega(\mathfrak{a})$ ist die kleinste Ordnungszahl τ mit $\overline{\overline{\tau}} = \mathfrak{a}$.) Speziell sei $\omega = \omega(\aleph_0)$. $W(\tau)$ bezeichne den Abschnitt von τ, d. h. die Menge aller Ordnungszahlen α mit $\alpha < \tau$. $\aleph$ sei die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Eine Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ heißt regulär, wenn sie sich nicht als Summe von weniger als $\mathfrak{a}$ Kardinalzahlen schreiben läßt, die alle kleiner als $\mathfrak{a}$ sind, andernfalls singulär.

Es sei $\leqq$ eine Teilordnung in M. Eine Abbildung $\varphi\colon M \to M$ heißt Hüllenoperation oder Abschluß (-Operation) auf $(M, \leqq)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\bigwedge\limits_{x \in M} x \leqq \varphi(x)$ (Extensionalität),

(2) $x \leqq y \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y)$ (Monotonie),

(3) $\bigwedge\limits_{x \in M} \varphi^2(x) = \varphi(x)$ (Idempotenz).

$\varphi(x)$ heißt die Hülle von x und wird meist durch $\bar{x}$ bezeichnet. (2) und (3) können ersetzt werden durch

(2′) $x \leqq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y)$.

Wenn wir von einer Hüllenoperation in einer Menge M (ohne explizite Angabe einer Teilordnung) sprechen, so soll immer ein Abschluß in $\mathfrak{P}(M)$ unter Zugrundelegung der Inklusion $\subseteq$ gemeint sein. Eine Hüllenoperation in M ist also gekennzeichnet durch die Hüllenaxiome

[H 1] $A \subseteq \bar{A}$,

[H 2] $A \subseteq \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

(für alle $A, B \subseteq M$).

Die Mengen der Form $\bar{A}$ (das sind zugleich die Mengen, die mit ihrer Hülle übereinstimmen) heißen abgeschlossen. M selbst ist abgeschlossen, und der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist wiederum abgeschlossen; man erhält die Hülle von $A \in \mathfrak{P}(M)$ als Durchschnitt aller A enthaltenden abgeschlossenen Mengen. Man nennt eine Teilmenge $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{P}(M)$ ein Hüllensystem auf M, wenn $M \in \mathfrak{H}$ gilt und der Durchschnitt jeder Familie von Elementen auf $\mathfrak{H}$ wiederum zu $\mathfrak{H}$ gehört. Die abgeschlossenen Mengen bezüglich einer Hüllenoperation bilden dann stets ein Hüllensystem, und umgekehrt gibt es zu jedem solchen genau einen Abschluß in M, so daß die zugehörigen abgeschlossenen Mengen gerade das gegebene Hüllensystem ausmachen. Der Zusammenhang ist so eng, daß man zwischen Hüllensystem und Hüllenoperation nicht immer streng zu unterscheiden braucht.

Kapitel 1

Grundbegriffe

§ 1. Begriff des Graphen

Unter einem *Graphen* verstehen wir eine Menge E zusammen mit einer Teilmenge K von $\binom{E}{2}$. Die Elemente von E heißen die *Ecken*, die von K die *Kanten* des betreffenden Graphen. Wir bezeichnen Graphen meist durch die Buchstaben $G, H, A, B, \ldots$ Ist G der Graph mit der Eckenmenge E und der Kantenmenge K, so schreiben wir $G = (E, K)$.

Haben wir irgendeinen Graphen G, so bezeichne $E(G)$ bzw. $K(G)$ seine Ecken- bzw. Kantenmenge. Ecken werden durch kleine lateinische Buchstaben $e, x, y, a, b, \ldots$ wiedergegeben. Jede Kante von G ist nach unserer Definition eine Zweiermenge $\{x, y\}$, wo $x \neq y$ Ecken von G sind; statt $\{x, y\}$ schreiben wir einfach xy, wenn die betreffende Kante in G auftritt. (In gewissen Zusammenhängen können 2-elementige Teilmengen von $E(G)$ auch in anderer Bedeutung auftreten; in diesen Fällen ist es günstig, wenn wir $\{x, y\}$ von der Kante xy unterscheiden können.) Zur Bezeichnung von Kanten reservieren wir den Bubstaben k.

Ist $k = xy \in K(G)$, so heißen x, y in G *benachbart* (auch: *adjazent*); wir sagen, k *verbindet* x, y, und x, y heißen die *Endpunkte* von k; x, y sind mit k *inzident*. Gelegentlich nennen wir auch zwei verschiedene Kanten inzident, wenn sie eine Ecke gemeinsam haben.

Im Graphen $G = (E, K)$ ist „benachbart“ offenbar eine irreflexive und symmetrische Relation auf E; umgekehrt gibt es zu jeder solchen Relation R genau ein $K \subseteq \binom{E}{2}$, so daß „benachbart“ in (E, K) mit R übereinstimmt. Ein Graph ist daher relationentheoretisch einfach eine Menge E mit einer irreflexiven, symmetrischen Relation.

Der hohe Reiz unserer Disziplin beruht nicht zuletzt auf der unmittelbaren geometrisch-anschaulichen Bedeutung des Graphenbegriffes. Man „zeichnet“ einen Graphen — das Wort „Graph“ leitet sich von dem griechischen „graphein“ (schreiben, zeichnen) her —, indem man seine Ecken e_i durch Punkte p_i und jede Kante e_ie_j durch die Strecke p_ip_j oder auch einen von p_i nach p_j führenden Jordan-Bogen (= homöomorphes Bild einer Strecke) wiedergibt.

Betrachten wir einige wichtige Beispiele. Die Ecken und Kanten eines Polyeders (sein 1-Skelett) bilden stets einen Graphen. (Von dieser Klasse von Beispielen rühren auch die Bezeichnungen „Ecken“ und „Kanten“ bei Graphen her.) In Abb. 1 bis 5 sind die Graphen der platonischen Körper dargestellt.

Das 1-Skelett des n-dimensionalen Simplexes liefert einen Graphen, in dem je zwei Ecken benachbart sind. Ein Graph mit dieser Eigenschaft heißt *vollständiger Graph*;

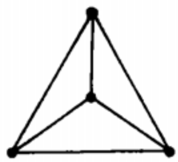

Abb. 1. Tetraeder

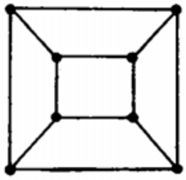

Abb. 2. Würfel

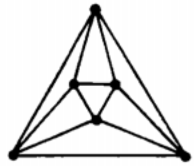

Abb. 3. Oktaeder

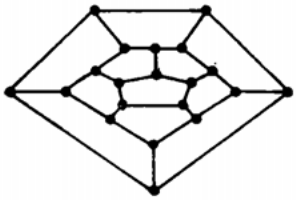

Abb. 4. Dodekaeder

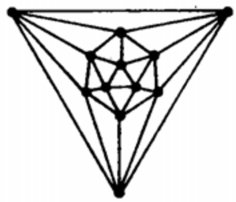

Abb. 5. Ikosaeder

nach seiner Herkunft werden wir ihn aber auch ein *Simplex* nennen. Zur Bezeichnung der Simplexe reservieren wir den Buchstaben S. $S(n)$ bezeichne das Simplex mit n Ecken (kurz: n-Simplex).

Der Graph des *n-dimensionalen Würfels* kann wie folgt dargestellt werden: Seine Eckenmenge ist $\{0, 1\}^n$, die Menge aller 0, 1-Folgen der Länge n; zwei derartige Folgen heißen benachbart, wenn sie sich an genau einer Stelle unterscheiden.

Eine wichtige Klasse von Graphen erhält man mittels der Landkarten. Jede solche läßt sich als Graph auffassen, dessen Ecken die einzelnen Länder sind und wobei zwei Länder genau dann benachbart heißen, wenn sie eine gemeinsame Grenze (die mindestens einen Jordan-Bogen umfaßt) besitzen. Die berühmte Vierfarbenvermutung besagt, daß die Länder jeder (denkbaren) Landkarte auf dem Globus sich mit 4 Farben so färben lassen, daß benachbarte Länder stets verschieden gefärbt sind. (Dabei ist vorauszusetzen, daß alle Länder zusammenhängende, durch Jordan-Kurven berandete Gebiete sind.)

Ein weiteres, nicht aus der Geometrie stammendes Beispiel eines Graphen ist etwa die Menge der Menschen (als Ecken) mit der Relation „verheiratet".

Manche Probleme erfordern Variationen des Graphenbegriffes, meist dahingehend, daß die Kanten eine Richtung (Orientierung) besitzen müssen und zwischen gewissen Ecken mehrere Kanten verlaufen dürfen („Mehrfachkanten"), ferner, daß die beiden Endpunkte einer Kante zusammenfallen können (Schlingen). Diese Varianten sollen jetzt formal exakt definiert werden.

Ein *gerichteter Graph* (kurz: *D-Graph*) $G = (E, K)$ besteht aus einer Menge E, deren Elemente die Ecken von G heißen, zusammen mit einer Teilmenge K von $E \times E$, deren Elemente (gerichtete) Kanten von G genannt werden. Jedes $k \in K$ hat also die Form $k = (x, y)$ mit $x, y \in E$; x heißt *Anfangs-*, y *Endpunkt* von k, und wir sagen, k führt von x nach y. Anschaulich stellt man k durch einen von x nach y gerichteten Pfeil dar. Kanten der Form (x, x) heißen *Schlingen*.

Ein D-Graph ist also im Prinzip das gleiche wie eine Menge mit einer Relation. Beispiel eines D-Graphen (mit einer großen Zahl von Schlingen) ist etwa die Menge der Menschen zusammen mit der Relation „x liebt y".

Die Theorie der D-Graphen umfaßt begrifflich die der (ungerichteten) Graphen: Jedem Graphen $G = (E, K)$ wird kanonisch ein D-Graph (mit der Eckenmenge E) zugeordnet, wenn man jedem $k = xy \in K$ das Paar der gerichteten Kanten (x, y), (y, x) entsprechen läßt.

Definition. Ein *Multigraph*, kurz *M-Graph*, ist ein Tripel $G = (E, K, \varphi)$, wobei E, K disjunkte Mengen sind, deren Elemente Ecken bzw. Kanten heißen, und φ eine Abbildung von K in $\mathfrak{P}(E)$ mit $\bigwedge_{k \in K} |\varphi(k)| = 1$ oder 2 darstellt; $\varphi(k)$ ist die Menge der Endpunkte von $k \in K$. Hat k nur den einen Endpunkt x, so heißt k eine *Schlinge* (in x); k heißt *eigentliche Kante*, wenn $|\varphi(k)| = 2$ ist.

Zu $x, y \in E$ kann es im M-Graphen G mehr als eine Kante geben, die x, y als Endpunkte hat; wir sprechen dann von „Mehrfachkanten".

Ein Tripel $G = (E, K, \varphi)$ mit $E \cap K = \emptyset$, $\varphi\colon K \to E \times E$ ist ein *gerichteter Multigraph* (*D-M-Graph*). Ist $\varphi(k) = (x, y)$, so heißt x der Anfangs-, y der Endpunkt der Kante $k \in K$; k heißt *Schlinge*, wenn $x = y$ ist.

Ein *gemischter Multigraph* ist ein Quintupel $G = (E, K, K', \varphi, \varphi')$ derart, daß E, K, K' disjunkte Mengen sind und (E, K, φ) ein M-Graph, (E, K', φ') ein D-M-Graph ist. E ist die Eckenmenge, K bzw. K' die Menge der ungerichteten bzw. gerichteten Kanten von G.

Ein Beispiel für einen M-Graphen erhält man etwa so: Ein Tanzabend ist von einer Menge M von Mädchen und einer Menge J von Jungen besucht. Es sei $E = M \cup J$, und für jeden Tanz, den $m \in M$ mit $j \in J$ macht, ziehe man eine Kante mj.

Natürlich kann auch jeder Graph (E, K) als M-Graph aufgefaßt werden (vermöge $\varphi\colon K \to \binom{E}{2}$, wobei $\varphi(k) = k$). — Beispiele für gemischte M-Graphen erhält man, wenn man etwa das Straßennetz einer Stadt betrachtet, unter besonderer Berücksichtigung der Einbahnstraßen.

Wir treffen weitere Bezeichnungsfestsetzungen. Für einen M-Graphen $G = (E, K, \varphi)$ bezeichne $\alpha(G)$ bzw. $\varkappa(G)$ die Zahl der Ecken bzw. Kanten von G. $\alpha(G)$ heißt auch die *Ordnung* von G. G heißt *endlich* (*unendlich*, *abzählbar* bzw. *überabzählbar*), wenn $\alpha(G) < \aleph_0$ ($\geqq \aleph_0$, $= \aleph_0$ bzw. $> \aleph_0$) ist. Um die Bezeichnungen im folgenden zu vereinfachen, wollen wir vereinbaren, daß $E, K, \alpha, \varkappa$ stets die Ecken- bzw. Kantenmenge sowie die Ecken- bzw. Kantenzahl eines jeweils mit G bezeichneten Graphen bedeuten sollen. (Entsprechend sollen z. B. auch $G', E', K', \alpha', \varkappa'$ zusammengehören.)

Für $x \in E$ wird der *Grad* von x in G, bezeichnet durch $\gamma_G(x)$, definiert als die Zahl der x enthaltenden eigentlichen Kanten zuzüglich der doppelten Zahl der x enthaltenden Schlingen von G. Ecken vom Grade 0 heißen *isoliert*.

Man zeigt leicht

1.1. $\sum_{x \in E} \gamma_G(x) = 2\varkappa,$

woraus folgt

1.2. *Ist $\varkappa < \infty$, so ist die Zahl der Ecken x mit $\gamma_G(x) \equiv 1 \bmod 2$ gerade.*

Ist $\gamma_G(x) = r$ für alle $x \in E$, so heißt G *regulär* vom Grade r, kurz *r-regulär*. Ist G r-regulär, r ungerade, so ist α wegen (1.2) stets gerade. Mit $\gamma_G^{\min}$ bzw. $\gamma_G^{\max}$ bezeichnen wir das Minimum bzw. Maximum (sofern vorhanden) unter den Eckengraden von G.

Sind $x_1, \ldots, x_n$ die Ecken von G, so heißt $(\gamma_G(x_1), \ldots, \gamma_G(x_n))$ die *Gradsequenz* von G. Ein interessantes Problem ist es, diejenigen n-Tupel ganzer Zahlen zu charakterisieren, die als Gradsequenz eines Graphen auftreten können; (1.2) liefert hier eine erste starke Einschränkung. Vgl. hierzu BERGE [B 5], Chap. VI oder HARARY [H 3], Chap. 6 sowie die Übungen am Schluß dieses Kapitels.

Im folgenden seien G, G' Graphen[1]). G' heißt *Teilgraph* von G, in Zeichen $G' \subseteq G$, wenn $E' \subseteq E$, $K' \subseteq K$ gilt. — Gelegentlich identifizieren wir eine Teilmenge E' von E mit dem Teilgraphen $(E', \emptyset)$, ebenso die Ecke e mit der Menge $\{e\}$ oder dem Graphen $(\{e\}, \emptyset)$. — Der *Nullgraph* $\Theta = (\emptyset, \emptyset)$ ist Teilgraph jedes Graphen. — $S(1)$ wird der *triviale Graph* genannt.

Für $A \subseteq G$ bezeichne $N_G(A)$ die Menge aller $e \in E - E(A)$, die zu mindestens einem $a \in E(A)$ in G benachbart sind.

G' heißt *Untergraph* von G, in Zeichen $G' \sqsubseteq G$, wenn $E' \subseteq E$ gilt und K' aus genau den Kanten $xy \in K$ mit $x, y \in E'$ besteht, wenn also G' durch Restriktion der Nachbarschaftsrelation in G auf E' entsteht. Ist $G' \subseteq G$, so existiert eindeutig der durch G' *erzeugte* (oder *aufgespannte*) *Untergraph*, das ist der Untergraph von G mit der Eckenmenge $E(G')$. Er werde mit $G[G']$ bezeichnet.

Für $K' \subseteq K$ bezeichne $\langle K' \rangle$ den Graphen (E', K'), wo E' die Menge der Ecken ist, die Endpunkte wenigstens eines $k \in K'$ sind.

Ein *Faktor* von G ist ein Teilgraph von G, der die gleiche Eckenmenge wie G hat. Während also die Untergraphen von G bijektiv den Teilmengen der Eckenmenge entsprechen, entsprechen die Faktoren von G in natürlicher Weise den Teilmengen der Kantenmenge von G.

Es sei $G_i = (E_i, K_i)$, $i \in I$, eine Familie von Graphen. $\left(\bigcap_{i \in I} E_i, \bigcap_{i \in I} K_i\right)$, $\left(\bigcup_{i \in I} E_i, \bigcup_{i \in I} K_i\right)$ sind wiederum Graphen; sie heißen der *Durchschnitt* bzw. die *Vereinigung* der G_i und werden mit $\bigcap_{i \in I} G_i$ bzw. $\bigcup_{i \in I} G_i$ bezeichnet. Die Familie der G_i heißt *disjunkt*, wenn je zwei der E_i leeren Durchschnitt haben. Ein System von Kanten, von denen je zwei keine Ecke gemeinsam haben, heißt *unabhängig*. Die G_i heißen *kantendisjunkt*, wenn die K_i disjunkt sind. Wir schreiben $\dot{\bigcup}_{i \in I} G_i$, wenn G die disjunkte Vereinigung der G_i ist.

Sind $a, b \in E$ in G nicht benachbart, so nennen wir $k = ab$ eine *neue Kante* zu G; $G \cup k$ bezeichne den durch Adjunktion von $k = ab$ zu G entstehenden Graphen $(E, K \cup \{k\})$.

Sind G, G' Graphen, so heißt $G[E - E']$ der *Differenzgraph* $G - G'$ von G und G'. Für $E' \subseteq E$, $K' \subseteq K$, $e \in E$, $k \in K$ setzen wir $G - E' = G[E - E']$, $G - K' = (E, K - K')$, $G - k = G - \{k\}$, $G - e = G - \{e\}$.

Der *Komplementärgraph* $\overline{G}$ von G wird definiert als der Graph $\left(E, \binom{E}{2} - K\right)$. In $\overline{G}$ sind also zwei Ecken $a \neq b$ benachbart genau dann, wenn $ab \notin K$ gilt.

Ein *Isomorphismus* des Graphen G auf den Graphen G' ist eine bijektive Abbildung φ: $E \to E'$, so daß $ab \in K \Leftrightarrow \varphi(a)\,\varphi(b) \in K'$; wir schreiben dann $\varphi\colon G \simeq G'$. Gibt es ein solches φ, so heißen G, G' isomorph, in Zeichen: $G \simeq G'$. Isomorphe Graphen werden als im wesentlichen gleich angesehen. — Ein *Automorphismus* von G ist ein Isomorphismus von G auf sich selbst. Die Automorphismen von G bilden (bezüglich der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen) eine Gruppe, die *Automorphismengruppe* Aut G von G.

[1]) Die im folgenden definierten Begriffe (abgesehen vom Komplementärgraphen) lassen sich ganz entsprechend auch für M-Graphen einführen.

Ist G ein Graph und m eine Kardinalzahl, so bezeichnen wir mit mG die disjunkte Vereinigung von m zu G isomorphen Graphen. (mG ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.)

§ 2. Kantenfolgen, Wege, Zusammenhang

$G = (E, K, \varphi)$ sei ein M-Graph. Eine Folge

$$x_1 k_1 x_2 k_2 x_3 \ldots x_n k_n x_{n+1} \tag{$*$}$$

mit $x_\nu \in E$, $k_\nu \in K$, $\varphi(k_\nu) = \{x_\nu, x_{\nu+1}\}$, $n \geqq 1$ heißt eine *Kantenfolge* in G. ($*$) heißt *geschlossen,* wenn $x_{n+1} = x_1$ ist; ($*$) heißt ein *Kantenzug,* wenn $\nu \neq \mu \Rightarrow k_\nu \neq k_\mu$, und ein *Weg,* wenn $\nu \neq \mu \Rightarrow x_\nu \neq x_\mu$. Die Zahl n der Kanten heißt die *Länge* des Kantenzuges bzw. Weges ($*$). Ein Weg der Länge 0 ist also eine einzelne Ecke. ($*$) heißt ein *Kreis* (der Länge n) oder genauer ein *n-Kreis*, gelegentlich auch *n-Eck*, wenn ($*$) geschlossen ist und $x_\nu \neq x_\mu$ für $1 \leqq \nu < \mu \leqq n$ gilt. (1-Kreise und 2-Kreise können nur bei echten Multigraphen auftreten, da Schlingen und Mehrfachkanten bei Graphen ja ausgeschlossen sind.) Ein *gerader* bzw. *ungerader Kreis* ist ein Kreis gerader bzw. ungerader Länge.

Ist ($*$) ein Weg, so sprechen wir genauer von einem x_1,x_{n+1}-Weg und sagen, ($*$) *verbindet* x_1, x_{n+1} o. ä.; x_1, x_{n+1} heißen die *Endpunkte* des Weges ($*$), alle übrigen x_i die *inneren Ecken* von ($*$). Ist W ein x,y-Weg, so setzen wir $\mathring{W} := W - x - y$. $\mathring{W}$ ist wiederum Weg, außer wenn $W = \langle xy \rangle$ gilt. Sind $A, B \subseteq G$ (oder auch $\subseteq E$) und ist W ein Weg in G, so heißt W ein *A,B-Weg,* wenn W Ecken $a \in E(A)$, $b \in E(B)$ verbindet und außer a, b nichts mit $A \cup B$ gemeinsam hat. Ist $A \subseteq G$ und hat W nur die Kante $k = ab$, so ist W demnach ein A,A-Weg genau dann, wenn $a \neq b$ in A liegen und A die Kante k nicht enthält.

Hat man eine Kantenfolge ($*$), so existiert zu je zwei x_ν, x_μ (mindestens) ein x_ν,x_μ-Weg in dem M-Graphen mit den Ecken x_i und den Kanten k_j; ist ($*$) speziell ein Weg W, so ist der in W enthaltene x_ν,x_μ-Weg eindeutig bestimmt, er werde durch W_{x_ν, x_μ} bezeichnet.

Daraus ergibt sich unschwer: Setzt man für $x, y \in E$ genau dann $x \sim y$, wenn in G ein x,y-Weg existiert, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation in E. Die durch die Äquivalenzklassen von $\sim$ aufgespannten Untergraphen von G heißen die (Zusammenhangs-) *Komponenten* von G. $\sigma(G)$ bezeichne die Zahl der Komponenten von G. G heißt *zusammenhängend* (kurz: *zh.*), wenn $\sigma(G) = 1$ ist.

Jede Komponente von G ist zh. — Ein Graph G ist zh. genau dann, wenn G sich nicht als Vereinigung zweier disjunkter nicht-leerer Graphen darstellen läßt (Beweis als Übung).

Für $x, y \in E$ definieren wir als *Abstand* $\delta_G(x, y)$ die kleinste Länge eines x,y-Weges in G, bzw. das Symbol ∞, falls kein x,y-Weg in G existiert. Für zh. G ist δ_G eine *Metrik auf E*. Unter der *n-ten Sphäre* (oder *Schicht*) um x, bezeichnet mit $D_n(x, G)$ oder kurz $D_n(x)$, verstehen wir die Menge der $y \in E$ mit $\delta_G(x, y) = n$. Jedes $y \in D_n(x)$ ($n \geqq 1$) ist zu mindestens einem $z \in D_{n-1}(x)$ benachbart, und die nicht-leeren der $D_n(x)$ zerlegen E, falls G zh. ist, in höchstens abzählbar viele disjunkte Klassen.

Für Teilgraphen, Eckenmengen oder Ecken A, B in G ist $\delta_G(A, B)$ das Minimum der $\delta_G(a, b)$ mit a aus A, b aus B. $\delta_G(A, B) = 0$ bedeutet, daß A, B eine Ecke gemeinsam haben, und $\delta_G(A, B) = 1$, daß A, B disjunkt sind, aber in G eine Kante von A nach B führt.

Als *Durchmesser* $d(G)$ eines Graphen G definiert man die Zahl $\max\limits_{x,y \in E} \delta_G(x, y)$ (bzw. ∞, falls dieses Maximum nicht existiert). Für $a \in E$ sei die *Exzentrizität* $\varepsilon_G(a) = \max\limits_{e \in E} \delta_G(a, e)$ (bzw. ∞, falls dieses Maximum nicht existiert). $\operatorname{Min}\limits_{e \in E} \varepsilon_G(e)$ heißt der *Radius* $r(G)$ von G; die Menge der $e \in E$ mit $\varepsilon_G(e) = r(G)$ heiße das *Zentrum* $Z(G)$ von G. Zum Beispiel besteht das Zentrum eines Weges W aus einer Ecke bzw. aus zwei benachbarten Ecken, je nachdem, ob $\varkappa(W)$ gerade oder ungerade ist.

Ist $\gamma_G(x) \leqq g < \infty$ für alle $x \in E$, so $|D_n(x)| \leqq g \cdot |D_{n-1}(x)|$ für alle n, woraus induktiv $|D_n(x)| \leqq g^n$ folgt. Ist $d(G) = s < \infty$, so also $\alpha \leqq \sum\limits_{n=0}^{s} g^n = \dfrac{g^{s+1} - 1}{g - 1}$.

Folgerung:

2.1. *Ist* $\alpha > \dfrac{g^{s+1} - 1}{g - 1}$, *so* $\gamma_G^{\max} > g$ *oder* $d(G) > s$.

Es bezeichne $l' = l'(G)$ die größte Länge eines Weges in einem endlichen zh. Graphen G. Nehmen wir $l'(G) < s$ an. (Dann ist auch $d(G) < s$, und nach (2.1) wird $\gamma_G^{\max}$ beliebig groß, wenn nur α hinreichend groß ist.) Es sei $t \geqq 2$ (ganz); wir suchen ein $W \subseteq G$, $W = \Theta$ oder einen Weg, so daß $\sigma(G - W) \geqq t$ gilt. Dazu führen wir folgendes Verfahren (V) durch:

Ist $\sigma(G) \geqq t$, so sind wir fertig. Andernfalls existiert eine Komponente G_0 von G mit $\alpha(G_0) \geqq \dfrac{\alpha}{t - 1}$, in der wir einen Weg $W \sqsubseteq G_0$ wählen, welcher von einem x_0 zu einer Ecke y_0 größten Grades g_0 führt. Man betrachte die Komponenten C_i von $G_0 - W_0$, die $N_G(y_0)$ treffen. Gibt es darunter $\geqq t$ verschiedene oder ist $G_0 = W_0$, so werde (V) abgebrochen; andernfalls kann unter den C_i ein G_1 mit $\alpha(G_1) \geqq \dfrac{g_0 - 1}{t - 1}$ bestimmt werden. — Man wähle nun $x_1 \in E(G_1) \cap N_G(y_0)$ sowie ein y_1 maximalen Grades g_1 in G_1, ferner einen x_1,y_1-Weg $W_1 \sqsubseteq G_1$. — Ist die Zahl der Komponenten C_i von $G_1 - W_1$ mit $C_i \cap N_G(y_1) \neq \emptyset$ gleich 0 oder $\geqq t$, so werde (V) abgebrochen; andernfalls bestimmen wir unter diesen C_i ein G_2 mit $\alpha(G_2) \geqq \dfrac{g_1 - 1}{t - 1}$, in dem wir $x_2 \in N_G(y_1)$ sowie y_2 maximalen Grades g_2 und einen x_2,y_2-Weg $W_2 \sqsubseteq G_2$ wählen. — In dieser Weise fahren wir fort. (V) muß nach $m \leqq s - 1$ Schritten abbrechen, da andernfalls die W_i zusammen mit den $x_i y_{i+1}$ einen Weg der Länge $\geqq s$ bildeten. Ist α hinreichend groß, so sind nach (2.1) $g_0 \geqq g_1 \geqq \cdots \geqq g_{m-1}$ beliebig groß; es muß dann $G_{m-1} \neq W_{m-1}$ und also $\sigma(G_{m-1} - W_{m-1}) \geqq t$ sein. Somit haben wir:

2.2. *Zu je zwei* $s, t \in \mathbb{N}$ *existiert ein* $f(s, t) \in \mathbb{N}$, *so daß aus* $\alpha(G) \geqq f(s, t)$ *folgt: G enthält entweder einen Weg der Länge* $\geqq s$ *oder aber einen Weg W mit* $\sigma(G - W) \geqq t$.

Weiter zeigen wir (vgl. Dirac [1]):

2.3. *Es sei W ein a,b-Weg* $\subseteq G$ *mit* $\varkappa(W) = s > 1$. *Ferner existiere ein Kreis C in G, der a, b enthält. Dann gibt es in G einen Kreis der Länge* $\geqq \sqrt{s}$.

Beweis. W zerfällt kantendisjunkt in nicht-triviale Teilwege $W_1, \ldots, W_t$, von denen jeder entweder $\subseteq C$ ist oder nur die Endpunkte mit C gemeinsam hat. Jedes W_i ist offenbar in einem Kreis von G enthalten. Ist $\alpha(C) \geqq \sqrt{s}$, so ist nichts weiter zu zeigen. Andernfalls ist $t < \sqrt{s}$, woraus wegen $t \cdot \max \varkappa(W_i) \geqq s$ folgt $\max \varkappa(W_i) \geqq s/t > \sqrt{s}$.—

Wir bringen noch einige grundlegende Resultate über unendliche Graphen.

2.4. *Es sei G zh. und $\alpha > \aleph_0$ regulär. Dann existiert $e \in E$ mit $\gamma_G(e) = \alpha$.*

Beweis. Es ist $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n(a)$ für irgendein $a \in E$. Wegen der Regularität von α existiert ein kleinstes $n \geqq 1$ mit $|D_n(a)| = \alpha$. Für $x \in D_{n-1}(a)$ sei $N_x = N_G(x) \cap D_n(a)$; $D_n(a)$ ist dann die Vereinigung der N_x. Wegen $|D_{n-1}(a)| < \alpha$ existiert also ein x mit $|N_x| = \alpha$, d. h. $\gamma_G(x) = \alpha$. —

Als Folgerung erhalten wir ein Resultat von Dushnik, das für $\aleph_1$ zuerst von Alexandroff-Urysohn bewiesen wurde (vgl. Dushnik [2]):

2.4′. *Es sei $\aleph_\nu$ reguläre Kardinalzahl $> \aleph_0$* und *ω_ν die Anfangszahl von $\aleph_\nu$. W_ν sei der durch ω_ν bestimmte Abschnitt der Ordnungszahlen (W_ν besteht also aus den Ordnungszahlen $\tau < \omega_\nu$). Es sei $f\colon W_\nu \to W_\nu$ eine Abbildung mit $f(\tau) < \tau$ für alle $\tau \neq 0$, $f(0) = 0$. Dann existiert $\tau_0 \in W_\nu$ mit $|f^{-1}(\tau_0)| = \aleph_\nu$.*

Beweis. Es sei G der Graph mit $E = W_\nu$ und den Kanten $\tau f(\tau)$, $\tau > 0$. G ist zh., da jede Folge $\tau, f(\tau), f^2(\tau), \ldots$ nach endlich vielen Schritten bei 0 endet. Nach (2.4) existiert $\tau \in W_\nu$ mit $\gamma_G(\tau) = \aleph_\nu$; es ist $N_G(\tau) - \{f(\tau)\} = f^{-1}(\tau)$. —

Ist G abzählbar und zh., so braucht keineswegs eine Ecke unendlichen Grades zu existieren. Beispiele sind der *einseitig unendliche Weg* (kurz *1-Weg*) sowie der *zweiseitig unendliche Weg* (kurz *2-Weg*); sie bestehen aus einer Folge von Ecken $e_1, e_2, e_3, \ldots$ bzw. $\ldots, e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \ldots$ und den Kanten $e_i e_{i+1}$. Graphen, in denen alle Ecken endlichen Grad haben, heißen *lokalfinit*. Ein 1-Weg hat genau eine Ecke vom Grade 1, seinen *Anfangspunkt*.

Man zeigt leicht durch Induktion über n:

2.5. *Ist G zh., lokalfinit und unendlich, so ist für beliebiges $a \in E$ jedes $D_n(a, G)$ endlich und nicht leer. Insbesondere also muß G abzählbar sein.*

2.6. *Ist G zh. und lokalfinit und $T \subseteq G$ endlich, so ist $\sigma(G - T) < \infty$.*
(Andernfalls müßten unendlich viele Kanten aus T herausführen.)

2.7. Satz von D. König. Ist *G unendlich, lokalfinit und zh., so existiert zu jedem $a \in E$ in G ein 1-Weg mit Anfangspunkt a.*

Beweis. W_n bezeichne in a beginnende Wege der Länge n. Wegen (2.5) ist für jedes n die Menge der W_n endlich und nicht leer. Ein W_n heiße ausgezeichnet, wenn für unendlich viele i ein $W_{n+i} \supset W_n$ existiert. Wir bestimmen nun eine Folge $W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots$ von sämtlich ausgezeichneten W_n. Es ist $W_0 = \{a\}$ ausgezeichnet. Ist W_n schon bestimmt, so existieren definitionsgemäß unendlich viele $W_{n+i} \supset W_n$; jedes dieser W_{n+i} enthält ein W_{n+1}. Unendlich viele dieser W_{n+i} müssen dasselbe W_{n+1} bestimmen, das demnach ausgezeichnet ist. — Die Vereinigung der so konstruierten W_n liefert dann einen in a beginnenden 1-Weg. —

Die im Beweis benutzte Methode ist ein exemplarisches Beispiel für die im sog. Unendlichkeitslemma von D. König ([K 3], Kap. 6) beschriebene Schlußweise und daher von prinzipiellem Interesse. Der Beweis wird noch etwas einfacher, wenn man wie folgt vorgeht:

Unter den endlich vielen Komponenten von $G - a$ muß eine unendliche vorkommen, etwa C_1; a_1 sei $\in N_G(a) \cap E(C_1)$. $C_1 - a_1$ hat eine unendliche Komponente C_2; a_2 sei $\in N_G(a_1) \cap E(C_2)$. In einer unendlichen Komponente C_3 und $C_2 - a_2$ wähle man $a_3 \in N_G(a_2)$. In dieser Weise fortfahrend, erhält man einen 1-Weg, der in a beginnt. —

Der Leser wende letztere Methode an, um die folgende Charakterisierung der Graphen die keinen 1-Weg enthalten, herzuleiten:

Eine unendliche Teilmenge U von $E(G)$ heiße *zersplittert*, wenn es ein endliches $T \subset G$ gibt derart, daß jede Komponente von $G - T$ nur endlich viele Elemente von U enthält (Halin [5]).

2.8. *Genau dann enthält G keinen 1-Weg, wenn es zu jedem unendlichen $U \subseteq E$ ein zersplittertes $U' \subseteq U$ gibt.*

Es ist klar, daß (2.7) eine unmittelbare Konsequenz von (2.8) ist.

§ 3. Eulersche Linien

Abbildung 6 zeigt schematisch einen Ausschnitt der Landkarte Königsbergs. Die eingezeichneten 7 Brücken über den Pregel sollten, so lautete das *Königsberger Brückenproblem*, in einem Rundweg (jede genau einmal) so überquert werden, daß der Spaziergänger zum Schluß wieder am Anfangspunkt seiner Wanderung ankommt. Euler [4] hat 1736 gezeigt, daß diese Aufgabe unlösbar ist. Er formalisierte das Problem, indem er jedem zusammenhängenden Landgebiet eine Ecke, jeder Brücke eine Kante eines M-Graphen zuordnete (es entsteht Abb. 7). In graphentheoretischer Fassung lautet

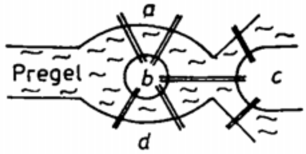

Abb. 6

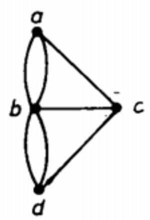

Abb. 7

das Problem dann allgemein: In welchen M-Graphen existiert ein geschlossener Kantenzug, der alle Ecken und Kanten enthält? Solch ein Kantenzug heiße eine *Eulersche Linie* des betreffenden M-Graphen. Existiert eine solche, so sprechen wir von einem *Eulerschen Graphen*. Die Lösung des genannten Problems wird durch den folgenden *Satz von* Euler gegeben:

3.1. *Ein endlicher M-Graph G hat eine Eulersche Linie genau dann, wenn G zh. und der Grad jeder Ecke von G gerade ist.*

Beweis. Ist $a_1k_1a_2 \ldots a_nk_na_{n+1}$, $a_1 = a_{n+1}$, eine Eulersche Linie von G, so ist natürlich G zh. Ferner ist der Grad von a_i gleich dem Doppelten der Anzahl von Indizes $\nu \in \mathbb{N}_n$ mit $a_i = a_\nu$. Umgekehrt sei G zh. und $\gamma_G(a) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ für alle $a \in E$. Es sei

$$a_1k_1a_2 \ldots a_nk_na_{n+1} \tag{$*$}$$

ein Kantenzug maximaler Länge n in G; o. B. d. A. $n \geqq 1$, da der Fall $\alpha = 1$ trivial ist. H bezeichne den M-Graphen mit den Ecken a_i und den Kanten k_i. Wäre $a_1 \neq a_{n+1}$, so

$\gamma_H(a_{n+1})$ ungerade, und man könnte (*) noch verlängern. (*) ist also geschlossen. G' entstehe aus G durch Weglassung von $k_1, \ldots, k_n$. Wäre (*) nicht Eulersche Linie in G, so gäbe es eine Komponente C von G' mit $\alpha(C) > 1$, in der natürlich auch jede Ecke geraden Grad hat; weil G zh. ist, kann C so gewählt werden, daß C mit H eine Ecke a_i gemeinsam hat. (**) sei ein maximaler Kantenzug in C durch a_i; auch (**) muß geschlossen sein. Ersetzt man a_i in (*) durch $a_i(**)\,a_i$, so erhält man einen echt größeren Kantenzug als (*), mit Widerspruch. —

Der Satz von Euler verallgemeinert sich leicht auf *gerichtete M-Graphen*. In einem solchen habe man eine Folge von Ecken und Kanten (*) $a_1k_1a_2k_2a_3 \ldots a_nk_na_{n+1}$, wo jedes k_i von a_i nach a_{i+1} gerichtet ist. (*) heißt *Kantenzug* bzw. *Bahn* (genauer: a_1, a_{n+1}-*Bahn*), wenn kein k_i bzw. kein a_i in (*) mehr als einmal auftritt. (*) heißt *Eulersche Linie* von G, wenn (*) Kantenzug mit $a_1 = a_{n+1}$ ist und die a_i alle Ecken, die k_i alle Kanten von G durchlaufen. — Ein gerichteter M-Graph heißt *zh.*, wenn der M-Graph, der entsteht, indem man von der Richtung der Kanten absieht, zh. ist. — Analog (3.1) zeigt man dann:

3.2. *Ein endlicher gerichteter M-Graph besitzt eine Eulersche Linie genau dann, wenn er zh. ist und in jeder Ecke a die Zahl der von a ausgehenden Kanten mit der Zahl der in a einmündenden Kanten übereinstimmt. (Dabei ist eine Schlinge bei a sowohl als von a ausgehende als auch bei a einmündende Kante zu zählen.)*

Ersetzt man in einem zh. M-Graphen jede Kante ab durch ein Paar gerichteter Kanten (a, b), (b, a), so erhält man einen D-M-Graphen, der die Voraussetzungen von (3.2) erfüllt. Also:

3.3. *Ist G ein endlicher zh. M-Graph, so gibt es eine geschlossene Kantenfolge* (*), *in der jede Kante von G genau zweimal auftritt, und zwar in jeder „Richtung" genau einmal (d.h., ist $k = ab$, so tritt in* (*) *einmal … akb …, das andere Mal … bka … auf).*

Bezüglich der Frage, wann ein endlicher M-Graph sich als (nicht geschlossener) Kantenzug durchlaufen oder allgemeiner als kantendisjunkte Vereinigung einer gegebenen Zahl von Kantenzügen schreiben läßt, vgl. die Übung 22 am Schluß dieses Kapitels.

Interessante und weitaus schwierigere Probleme ergeben sich, wenn man die vorstehenden Sätze auf unendliche (naturgemäß abzählbare) Graphen zu übertragen sucht. Ein *einseitig bzw. zweiseitig unendlicher Kantenzug* ist eine Folge der Form $a_1k_1a_2k_2a_3 \ldots$ bzw. $\ldots a_{-2}k_{-2}a_{-1}k_{-1}a_0k_0a_1a_2k_2a_3 \ldots$ wo die a_i Ecken, die k_i verschiedene Kanten mit den Endpunkten a_i, a_{i+1} sind. Erdös, Grünwald und Vaszonyi [3] haben für beide Typen unendlicher Kantenzüge diejenigen M-Graphen charakterisiert, die sich in der betreffenden Form durchlaufen lassen. (Beweise bei Ore [O 1], Theorem 3.2.1, 3.2.2.)

Nash-Williams [6] hat die M-Graphen bestimmt, die sich als kantendisjunkte Vereinigung einer gegebenen Zahl $m \in \mathbb{N}$ von zweiseitig unendlichen Kantenzügen darstellen lassen. Ein M-Graph G heiße *s-verzweigt*, wenn es ein endliches $T \subset E(G)$ gibt, so daß nach Weglassung von T der Restgraph in s unendliche Komponenten $C_1, \ldots, C_s$ zerfällt, jedoch kein solches T existiert, das eine Zerlegung in mehr als s unendliche Komponenten erzeugt. Gibt es ein solches $s < \infty$, so soll G *endlich verzweigt* heißen.

Ein Teilgraph von G, der als C_i in einer Zerlegung obiger Form auftritt, heiße ein *Stück* von G. C_i heiße *gerade* bzw. *ungerade*, wenn die Zahl der Kanten, die aus C_i hinausführen, gerade (oder ∞) bzw. ungerade ist. Zwei Stücke des endlich-verzweigten G heißen *äquivalent*, wenn sie ein Stück von G gemeinsam haben; eine Äquivalenzklasse von Stücken heiße eine *Schwinge* (wing) von G.

Es ist klar, daß für die Darstellbarkeit von G in der gewünschten Weise notwendig ist, daß in G keine Ecke ungeraden Grades existiert. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man zeigen, daß zwei äquivalente Stücke von G immer entweder beide gerade oder ungerade sind; daher darf man von geraden oder ungeraden Schwingen von G sprechen. Es bezeichne s_g bzw. s_u die Zahl der geraden bzw. ungeraden Schwingen. Dann lautet das Resultat von NASH-WILLIAMS:

3.4. *Für ein $m \in \mathbb{N}$ ist der M-Graph G darstellbar als kantendisjunkte Vereinigung von m, aber nicht weniger als m zweiseitig unendlichen Kantenzügen genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\varkappa = \alpha = \aleph_0$;
2. *G hat keine Ecke ungeraden Grades;*
3. *G ist endlich-verzweigt;*
4. *G hat keine endliche Komponente;*
5. $m = \frac{1}{2} s_u + s_g$. —

Das Problem der Zerlegung in eine gegebene endliche Zahl von kantendisjunkten Kantenzügen ohne Spezifierung (d. h., diese können endlich, einseitig oder zweiseitig unendlich sein) ist von B. ROTHSCHILD [9] behandelt worden. Bezüglich des Euler-Problems für unendliche gerichtete Graphen vgl. NASH-WILLIAMS [7].

Für die Anzahl der Eulerschen Linien in einem endlichen gerichteten Graphen haben VAN AARDENNE-EHRENFEST und DE BRUIJN [11] eine Formel angegeben; vgl. auch TUTTE [T 2] S. 41f.

Ein *Hamilton-Kreis* in einem Graphen G ist ein Kreis $\subseteq G$, der alle Ecken von G enthält; existiert ein solcher, so heißt G *Hamiltonsch*. Wiewohl die Begriffe Eulersche Linie und Hamilton-Kreis formal verwandt erscheinen, so ist doch die Charakterisierung der Hamiltonschen Graphen unvergleichlich viel schwieriger als die der Eulerschen; wir kommen darauf in Kapitel 5 zurück. Der Name „Hamilton-Kreis" leitet sich von einem Spiel her, das W. R. HAMILTON 1859 herausgegeben hat; die zu lösende Aufgabe lief darauf hinaus, in dem Dodekaedergraphen einen Hamilton-Kreis zu finden. Zur Übung zeige der Leser, daß die Graphen der platonischen Körper sämtlich Hamiltonsch sind.

§ 4. Homomorphismen

$G = (E, K)$, $G' = (E', K')$ seien Graphen. Eine surjektive Abbildung $f: E \to E'$ heißt ein *Homomorphismus von G auf G'*, wenn

1. $$xy \in K \Rightarrow \big(f(x) = f(y) \vee f(x)\, f(y) \in K'\big),$$
2. $$x'y' \in K' \Rightarrow \bigvee_{xy \in K} \big(f(x) = x' \wedge f(y) = y'\big).$$

Ist π eine beliebige Partition von E, so sei G/π der Graph, dessen Ecken die Klassen von π sind; zwei dieser Klassen sollen in G/π benachbart sein genau dann, wenn sie verschieden sind und in G (mindestens) eine Kante zwischen ihnen verläuft. Die kanonische Abbildung φ_π, die jedem $e \in E$ die e enthaltende Klasse von π zuordnet, ist dann ein Homomorphismus von G auf G/π.

Ist f irgendein Homomorphismus von G auf G', so bilden die $f^{-1}(x')$, $x' \in E'$, eine Partition π von E, deren Klassen vermöge

$$f_0: f^{-1}(x') \to x'$$

bijektiv auf E' bezogen sind. Nach Definition des Homomorphismus gilt

$$x'y' \in K' \Leftrightarrow \delta_G\big(f^{-1}(x'), f^{-1}(y')\big) = 1,$$

d. h., f_0 ist ein Isomorphismus zwischen G/π und G'. Das folgende Diagramm ist also kommutativ:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\varphi_\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ G/\pi \arrow[rr, "f_0"'] & & G' \end{tikzcd}$$

Wir sehen

4.1. *Man erhält, bis auf Isomorphie, alle homomorphen Bilder G' von G in der Form G/π, wo π irgendeine Partition von E ist.*

Ein Homomorphismus f von G auf G' heißt *kontraktiv* (f heißt dann kurz ein *c-Homomorphismus*), wenn alle $f^{-1}(x')$, $x' \in E'$, zh. Untergraphen von G aufspannen. Es gilt dann

4.2. *Es sei f eine surjektive Abbildung von E auf E'. Für $H' \sqsubseteq G'$ bezeichne $f^{-1}[H']$ den durch das Urbild von $E(H')$ aufgespannten Untergraphen von G. f ist dann und nur dann ein c-Homomorphismus von G auf G', wenn für alle $H' \sqsubseteq G'$ gilt*

$$H' \text{ zh.} \Leftrightarrow f^{-1}[H'] \text{ zh.}$$

(Beweis als Übung.)

Einen c-Homomorphismus eines Teilgraphen G_0 von G auf G' nennen wir auch einen *c-Homomorphismus aus* G auf G'; existiert ein solcher, so sagen wir, G sei *c-homomorph* zu G' und schreiben

$$G \succ G'.$$

Die Relation $\succ$ ist eine sinnvolle, anschaulich einprägsame Erweiterung der Teilgraph-Beziehung: $G \succ G'$ besagt einfach, daß sich in G disjunkte zh. Untergraphen, die den Ecken von G' bijektiv entsprechen, so finden lassen, daß benachbarten Ecken von G' auch benachbarte Untergraphen von G entsprechen (benachbart in dem Sinne, daß eine Kante in G von dem einen Untergraphen in den anderen führt).

Klar ist dann:

4.3. $\quad G \succ G' \Rightarrow \alpha \geqq \alpha', \quad \varkappa \geqq \varkappa'.$

Offenbar ist stets $G \succ G$, und man zeigt leicht

$$(G \succ G' \wedge G' \succ G'') \Rightarrow G \succ G''.$$

$\succ$ ist also eine Quasiordnung (d. h. reflexiv und transitiv). $\succ$ ist auch antisymmetrisch im folgenden Sinne: Ist G endlich und $G \succ G'$, $G' \succ G$, so folgt $G \simeq G'$. (Denn $G \succ G'$, $\varkappa = \varkappa'$, $\alpha = \alpha' < \infty \Rightarrow G \simeq G'$; Beweis als Übung.) Also:

4.4. $\succ$ *liefert in der Klasse der endlichen Graphen eine Teilordnung (sofern man isomorphe Graphen als gleich betrachtet).*

Zur Übung konstruiere man unendliche nicht-isomorphe Graphen G, G' mit $G \succ G'$, $G' \succ G$. Die Antisymmetrie von $\succ$ gilt also für unendliche Graphen nicht.

Ist $H \subseteq G$, so werde der durch *Identifizierung* von H hervorgehende Graph G/H wie folgt definiert: Man fügt zu $G - H$ eine neue Ecke $\dot{H}$ hinzu und verbindet $\dot{H}$ genau mit denjenigen Ecken von $G - H$ durch Kanten, die in G zu mindestens einer Ecke von H benachbart sind. (Man läßt also sozusagen H auf einen Punkt „zusammenschrumpfen".) Ist $k \in K$, so schreiben wir statt $G/\langle k\rangle$ einfach G/k und sagen, G/k geht aus G durch *Kontraktion der Kante* k hervor. Offenbar hat man

4.5. $\alpha(G/k) = \alpha(G) - 1$, $\varkappa(G/k) = \varkappa(G) - 1 - \Delta$, *wo* Δ *die Zahl der* k *enthaltenden Dreiecke von* G *bezeichnet.*

4.6. *Ist* $H \subseteq G$ *zh., so liefert* $x \to x$ *für* $x \in E(G - H)$, $h \to \dot{H}$ *für* $h \in E(H)$ *einen c-Homomorphismus von* G *auf* G/H.

Ist H endlich, so sieht man, indem man der Reihe nach alle Kanten von H kontrahiert, daß der c-Homomorphismus in (4.6) durch Hintereinanderausführung einer Folge von Kantenkontraktionen erhalten werden kann.

Es sei nun G endlich und $G \succ G'$ mit $E' = \{e_1, \ldots, e_s\}$. Dann existieren also disjunkte zh. $H_1, \ldots, H_s \sqsubseteq G$ mit $e_ie_j \in K' \Rightarrow \delta_G(H_i, H_j) = 1$. Indem man in G zuerst H_1 identifiziert, in G/H_1 sodann H_2 identifiziert, in $(G/H_1)/H_2$ dann H_3 identifiziert usf., erhält man schließlich einen Graphen, der einen zu G' isomorphen Teilgraphen besitzt. Die Identifizierung eines jeden H_i kann aber nach obigem durch eine Folge von Kantenkontraktionen erreicht werden. Also haben wir:

4.7. G, G' *seien endlich. Dann und nur dann ist* $G \succ G'$, *wenn* G *durch eine Folge von Kantenkontraktionen in einen Graphen übergeführt werden kann, der einen zu* G' *isomorphen Teilgraphen besitzt.*

Ist G ein Graph, so heißt jeder Graph, der aus G dadurch entsteht, daß man auf den Kanten von G neue Ecken (vom Grade 2) einführt, eine *Unterteilung* von G, bezeichnet durch G^{U}. (M. a. W.: Ein G^{U} entsteht aus G durch Ersetzung jeder Kante $k = xy$ von G durch einen x,y-Weg W_k (der auch wieder eine Kante sein kann), wobei $W_k \cap W_{k'}$ für $k \neq k'$ höchstens einen gemeinsamen Endpunkt von k, k' enthalten darf.) Enthält H einen zu einem G^{U} isomorphen Teilgraphen, so schreiben wir $H \succ_{\mathrm{u}} G$. Man zeigt leicht $H \succ_{\mathrm{u}} G \Rightarrow H \succ G$. („Rückgängigmachung" der Unterteilung W_{xy} von xy bedeutet offenbar Kontraktion aller Kanten von W_{xy} bis auf eine.) Natürlich ist auch die Relation $\succ_{\mathrm{u}}$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, wenn man isomorphe Graphen als gleich ansieht und sich auf endliche Graphen beschränkt. (Zur Übung konstruiere man dagegen unendliche nicht-isomorphe G, G' mit $G \succ_{\mathrm{u}} G'$, $G' \succ_{\mathrm{u}} G$.)

4.8. *Ist* $H \succ G$ *und* $\gamma_G^{\max} \leqq 3$, *so* $H \succ_{\mathrm{u}} G$.

Beweis. Wir wählen disjunkte zh. $Z_e \sqsubseteq H$ $(e \in E)$ mit $ee' \in K \Rightarrow \delta_H(Z_e, Z_{e'}) = 1$; für jedes $k = ee' \in K$ wählen wir ein $\bar{k} \in K(H)$, das von Z_e nach $Z_{e'}$ führt. In jedem Z_e liegen höchstens 3 Endpunkte solcher $\bar{k}$; sie können auch zusammenfallen. Sind in Z_e höchstens zwei verschiedene solche Endpunkte vorhanden, so können wir Z_e durch einen geeigneten Weg $T_e \subseteq Z_e$ ersetzen. Liegen in Z_e dagegen 3 verschiedene der genannten Endpunkte, so verbinde man zwei davon durch einen Weg W in Z_e und den dritten mit W durch einen kürzesten Weg $W' \subseteq Z_e$; es sei $T_e = W \cup W'$. Die T_e zusammen mit den $\bar{k}$ bilden dann offenbar ein G^{U}. —

Ein Homomorphismus f von G auf G' heiße *diskreter Homomorphismus*, kurz *d-Homomorphismus*, wenn für $xy \in K$ stets $f(x) \neq f(y)$ (d. h. $f(x)\, f(y) \in K'$) gilt; gleichbedeutend mit letzterem ist, daß $G[f^{-1}(x')]$ für jedes $x' \in E'$ kantenlos ist. Identifikation zweier nicht benachbarter Ecken in einem Graphen G kann als d-Homomorphismus gedeutet werden; jeder d-Homomorphismus eines endlichen G ist durch Hintereinanderausführung endlich vieler solcher „elementaren" d-Homomorphismen realisierbar.

Im Hinblick auf (4.7) kann daher der Begriff des d-Homomorphismus als Gegenstück zu dem des c-Homomorphismus aufgefaßt werden. Als Übungen zeige man:

4.9. *Hintereinanderausführung zweier d-Homomorphismen (sofern möglich) ergibt wieder einen d-Homomorphismus.*

4.10. *Jeder Homomorphismus kann realisiert werden, indem man zuerst einen c-Homomorphismus, sodann einen d-Homomorphismus anwendet.*

§ 5. Die Operation $*$. Paare Graphen

G, G' seien disjunkte Graphen. Mit $G * G'$ bezeichnen wir den Graphen $G \cup G' \cup K^*$, wo K^* die Menge aller Kanten ee' mit $e \in E$, $e' \in E'$ bedeute.

Ist $G \cap G' \neq \Theta$, so wählen wir disjunkte H, H' mit $G \simeq H$, $G' \simeq H'$ und setzen $G * G' = H * H'$. $G * G'$ ist also dann nur bis auf Isomorphie eindeutig definiert. Das führt aber nicht zu Schwierigkeiten, da wir uns i. w. nur für die Struktur von Graphen, kaum für die konkrete Realisierung interessieren.

Man zeigt sehr leicht, daß die Verknüpfung $*$ kommutativ und assoziativ ist und Θ als neutrales Element besitzt. Bei Verknüpfung von mehr als zwei Graphen durch $*$ kommt es also auf deren Reihenfolge oder Beklammerung nicht an. G heißt *$*$-prim*, wenn keine Zerlegung $G = G' * G''$ mit $G', G'' \neq \Theta$ existiert. Offenbar ist G $*$-prim genau dann, wenn das Komplement $\overline{G}$ zh. ist. Jedes endliche G besitzt eine eindeutige Darstellung $H_1 * \cdots * H_m$ mit $*$-primen H_i; diese sind gerade die Komplemente der Komponenten von $\overline{G}$ (Beweis als Übung). Entsprechendes gilt natürlich auch für unendliche G, wenn man nur die Verknüpfung $*$ auf unendliche Familien von Graphen ausdehnt, was ohne weiteres möglich ist, von uns im folgenden aber nicht benötigt wird.

Gemäß der Vereinbarung in § 1 fassen wir eine Menge auch auf als einen Graphen mit leerer Kantenmenge. Demnach ist ein Ausdruck $A_1 * \cdots * A_m$ auch dann erklärt, wenn gewisse der A_i Mengen (von Ecken) sind.

Einen kantenlosen Graphen mit α Ecken bezeichnen wir durch (α), auch einfach, in Verbindung mit $*$, durch α. $G * 1$ ist demnach der Graph, der aus G dadurch entsteht, daß man eine neue Ecke hinzunimmt und diese mit jeder Ecke von G durch eine Kante verbindet. Ist C ein Kreis, so bezeichnen wir $C * 1$ als ein *Rad*.

Ein Graph der Form $\alpha_1 * \cdots * \alpha_m$ ($\alpha_i \in \mathbb{N}$, $m \geqq 1$) heißt *simplexartig* oder, genauer, ein *vollständig m-partiter Graph*. Beispielsweise ist $2 * 2 * 2$ der Graph des Oktaeders. Der *m-dimensionale Oktaedergraph* ist $2 * 2 * \cdots * 2$ (mit m Faktoren).

Man zeigt leicht (Beweis als Übung):

5.1. *Folgende Aussagen über einen endlichen Graphen G sind äquivalent:*

(a) *G ist simplexartig;*
(b) *alle Komponenten von $\overline{G}$ sind Simplexe;*
(c) *„nicht benachbart" ist eine Äquivalenzrelation in E.*

Ein Graph G heißt *paar*, auch *bipartit*, wenn E sich in disjunkte Teilmengen A, B so zerlegen läßt, daß jedes $k \in K$ ein $a \in A$ mit einem $b \in B$ verbindet, was offenbar mit

$G \subseteq A * B$ gleichbedeutend ist. Das Paar A, B heißt dann eine Zweiteilung von G. Man überlegt sich unschwer, daß A, B eindeutig bestimmt sind genau dann, wenn G zh. ist. Jeder Graph $A * B$ (A, B Mengen) heißt ein *vollständiger paarer Graph*.

5.2. *G ist paar genau dann, wenn G keinen ungeraden Kreis enthält.*

Beweis. Ist $G \subseteq A * B$ paar und C ein Kreis in G, so müssen seine Ecken abwechselnd zu A und B gehören, was nur möglich ist, wenn $\alpha(C)$ gerade ist. Umgekehrt enthalte G keinen ungeraden Kreis. Offenbar bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, G als zh. anzunehmen. Wir wählen $a \in E$ beliebig und setzen $E_i = \{e \in E \mid \delta_G(a, e) \equiv i \pmod 2\}$ für $i = 1, 2$. E_1, E_2 bilden eine Zweiteilung von G. Andernfalls nämlich gäbe es $xy \in K$ mit x, y aus demselben E_i. Notwendig ist $\delta_G(a, x) = \delta_G(a, y)$, etwa $x, y \in D_n(a, G)$. W^x, W^y seien Wege der (minimalen) Länge n von a nach x bzw. y. Es sei m die größte Zahl mit $D = W^x \cap W^y \cap D_m(a, G) \neq \Theta$; es ist $0 \leqq m < n$. Für $z \in E(D)$ sind W^x_{zx}, W^y_{zy} Wege der Länge $n - m$, die nur z gemeinsam haben. $W^x_{zx} \cup W^y_{zy} \cup xy$ wäre dann aber ein ungerader Kreis. —

Ist C ein Kreis, so heißt jede Kante, die zwei Ecken von C verbindet, ohne zu $K(C)$ zu gehören, eine *Sehne* von C. Jede Sehne k zerlegt C auf natürliche Weise in zwei (k enthaltende) Kreise C_1, C_2 kleinerer Länge; ist C ungerade, so eins der C_i gerade, das andere ungerade. Wir schließen:

5.3. *Enthält G einen ungeraden Kreis, so enthält G auch einen ungeraden Kreis ohne Sehnen (der also Untergraph von G ist).*

5.4. $G \succ H \Leftrightarrow G * 1 \succ H * 1$.

Beweis. Die Implikation von links nach rechts ist trivial. Umgekehrt gelte $G * 1 \succ H * 1$ vermöge einer Abbildung φ; die nicht in G (bzw. H) enthaltene Ecke von $G * 1$ (bzw. $H * 1$) werde mit x (bzw. y) bezeichnet. Ist $x \notin \varphi^{-1}(E(H * 1))$ oder $x \in \varphi^{-1}(y)$, so ist klar, daß φ einen c-Homomorphismus aus G auf H vermittelt. Ist dagegen $x \in \varphi^{-1}(h)$, $h \in E(H)$, so kann man φ in einen c-Homomorphismus ψ aus $G * 1$ auf $H * 1$ derart abändern, daß $x \in \psi^{-1}(y)$ gilt; man braucht nur $\psi^{-1}(h) = \varphi^{-1}(y)$, $\psi^{-1}(y) = \{x\}$ zu setzen und im übrigen die $\varphi^{-1}(e)$ unverändert zu lassen. —

Übungen zu Kapitel 1

1. Ist G zh. und haben alle Ecken den Grad $\leqq 2$, so ist G ein endlicher Weg, ein Kreis, ein 1-Weg oder ein 2-Weg.
2. Ist G endlich und $\gamma_G^{\min} \geqq n \geqq 2$, so enthält G einen Kreis der Länge $\geqq n + 1$. (Man betrachte einen Weg W größter Länge; jeder Endpunkt von W ist nur zu Ecken von W benachbart.)
3. Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ bestimme man die größte Zahl $\varkappa$, so daß ein nicht-zh. Graph mit α Ecken und $\varkappa$ Kanten existiert.
4. Wie groß muß (für endliches G) $\delta_G^{\min}$ im Vergleich zu α sein, damit man sicher ist, daß G zh. ist?
5. Bestimme alle zh. Graphen, die die Gradsequenz $1, 2, 2, \ldots, 2, 3$ bzw. $2, 2, \ldots, 2, 3, 3$ bzw. $1, 2, 2, \ldots, 2, 3, 3, 3$ realisieren.
6. Ist $g_1, g_2, \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen $\geqq 2$, so existiert stets ein zh. abzählbarer Graph mit den Ecken $e_1, e_2, \ldots$, so daß $\gamma_G(e_i) = g_i$ für $i = 1, 2, \ldots$ gilt.
7. $(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $n > g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_n$ ist als Gradsequenz eines Graphen realisierbar genau dann, wenn $(g_2 - 1, g_3 - 1, \ldots, g_{g_1+1} - 1, g_{g_1+2}, \ldots, g_n)$ in dieser Weise realisierbar ist.
8. Ist G nicht zh., so $\overline{G}$ zh. und $\gamma_{\overline{G}}^{\max} \geqq \dfrac{\alpha}{2}$.

9. $d(G) \geqq 3 \Rightarrow d(\overline{G}) \leqq 3$.

10. Dann und nur dann existiert in G ein 1-Weg, wenn es in G eine unendliche absteigende Folge $Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \cdots$ von nicht-leeren, zh. Teilgraphen mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} Z_i = \Theta$ gibt.

11. Für zh. G gilt $r(G) \leqq d(G) \leqq 2r(G) \leqq \alpha - 1$.

12. Für je zwei $r, d \in \mathbb{N}$ mit $r \leqq d \leqq 2r$ konstruiere man einen zh. Graphen G mit $r(G) = r$, $d(G) = d$.

13. Die größtmögliche Kantenzahl $\varkappa$ eines Graphen G vom Radius $r = 1$ bzw. 2 mit α Ecken ist $\binom{\alpha}{2}$ bzw. $\left[\frac{\alpha(\alpha-2)}{2}\right]$. (Für beliebiges r hat VIZING [12] den betreffenden Wert $\varkappa$ bestimmt. Er ist $\frac{1}{2}(\alpha^2 - 4r\alpha + 5\alpha + 4r^2 - 6r)$ für $r \geqq 3$.)

14. G sei endlich, zh. Für $x, y \in E$ sei $\Delta(x, y)$ die größte Länge eines x,y-Weges $\subseteq G$. Δ ist eine Metrik auf E.

Ein Graph G heiße *selbstkomplementär*, wenn $G \simeq \overline{G}$ gilt (vgl. RINGEL [8], SACHS [10]).

15. Die selbstkomplementären Graphen mit $\leqq 5$ Ecken sind: der triviale Graph, der Weg der Länge 3, der 5-Kreis sowie der Graph, der aus einem Weg W der Länge 3 und einer weiteren Ecke, die zu den beiden inneren Ecken von W benachbart ist, besteht.

16. Jeder selbstkomplementäre Graph mit $\alpha \geqq 2$ ist zh. und vom Durchmesser 2 oder 3.

17. G endlich, selbstkomplementär $\Rightarrow \alpha \equiv 0$ oder 1 (mod 4).

18. Es existiert kein regulärer selbstkomplementärer Graph von gerader Ordnung.

19. Jeder selbstkomplementäre Graph mit $\geqq 6$ Ecken enthält ein Dreieck.

20. Jeder Graph G vom Durchmesser 2 mit $\alpha \geqq 3$, der kein $\beta * \beta'$ ist, enthält ein Dreieck oder ein Fünfeck.

21. Ein endlicher zh. Graph mit $\geqq 2$ Ecken ist Eulersch genau dann, wenn er die kantendisjunkte Vereinigung von Kreisen ist.

22. G sei endlich und enthalte $2s > 0$ Ecken ungeraden Grades (vgl. (1.2)). G ist als kantendisjunkte Vereinigung von s Wegen ohne gemeinsamen Endpunkt sowie von lauter Kreisen darstellbar. (Mit mehr oder weniger als s Wegen ist eine solche Darstellung nicht möglich.) Ist G zh., so ist G kantendisjunkte Vereinigung von s Kantenzügen, aber nicht von weniger als s Kantenzügen.

23. Man leite eine Formel für die Kantenzahl von $\alpha_1 * \cdots * \alpha_m$ her. Insbesondere zeige man $\varkappa(\alpha_1 * \cdots * \alpha_m) = \binom{m}{2}\alpha^2$, falls $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = \alpha$ gilt.

24. Bei gegebener Eckenzahl und bei gegebenem m hat $\alpha_1 * \cdots * \alpha_m$ größtmögliche Kantenzahl genau dann, wenn $|\alpha_i - \alpha_j| \leqq 1$ für alle $i, j = 1, \ldots, m$ gilt. Dieser extremale Graph ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

25. Je zwei längste Wege in einem endlichen zh. Graphen schneiden sich. (Dagegen braucht es keine Ecke zu geben, durch die alle längsten Wege gehen; vgl. WALTHER [13].)

26. $G \succ H \Rightarrow G * F \succ H * F$ (für jeden Graphen F). Inwieweit gilt hier die Umkehrung? (Vgl. (5.4).)

27. $G \succ S(3) \Leftrightarrow G$ enthält einen Kreis.

28. Ist G ein endlicher Graph, so existiert ein endlicher Graph, der regulär vom Grade $\gamma_G^{\max}$ ist und G als Untergraphen enthält.

29. Durch bessere Ausnützung der Beweismethode in (2.3) zeige man, daß sogar in G ein Kreis der Länge $\geqq \sqrt{2s}$ existieren muß. (Nach DIRAC [1] existiert sogar ein Kreis der Länge $\geqq 2\sqrt{s}$.)

30. Man verwandele den Beweis für (2.2) in einen Induktionsbeweis und gebe eine obere Schranke für $f(s, t)$ an.

Kapitel 2

Darstellungsformen für Graphen

Für die Entwicklung der Graphentheorie sind die verschiedenartigen Möglichkeiten, Graphen anschaulich oder an Modellen zu realisieren, von hoher Bedeutung gewesen; sowohl für die Richtung der Fragestellungen als auch für die Beweisideen waren die verschiedenen Darstellungsformen außerordentlich fruchtbar.

§ 1. Topologische Darstellung von Graphen

Es seien $\mathfrak{T}$ ein topologischer Raum (im folgenden fast immer ein $\mathbb{R}^n$ bzw. ein topologischer Unterraum des $\mathbb{R}^n$) sowie $\mathfrak{E}$ eine Menge von Punkten aus $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{K}$ eine Menge von Jorgan-Bögen[1]) in $\mathfrak{T}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Jedes $k \in \mathfrak{K}$ hat mit $\mathfrak{E}$ genau seine beiden Endpunkte gemeinsam.
2. Für verschiedene k, k' aus $\mathfrak{K}$ ist stets $k \cap k'$ entweder leer oder genau ein Punkt aus $\mathfrak{E}$ (der dann gemeinsamer Endpunkt von k und k' ist).

Durch $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{K}$ ist dann ein Graph $G(\mathfrak{E}, \mathfrak{K})$ mit der Eckenmenge $\mathfrak{E}$ bestimmt, wenn man für $e, e' \in E$ festsetzt

$$ee' \in K\big(G(\mathfrak{E}, \mathfrak{K})\big) \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} k \cap \mathfrak{E} = \{e, e'\}.$$

Wir nennen das geordnete Paar $(\mathfrak{E}, \mathfrak{K})$ einen *topologischen Graphen* in $\mathfrak{T}$ und die Elemente von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{K}$ seine Ecken bzw. Kanten. Ein beliebiger Graph H heißt in $\mathfrak{T}$ *einbettbar* (oder *darstellbar*), wenn es einen topologischen Graphen $(\mathfrak{E}, \mathfrak{K})$ in $\mathfrak{T}$ gibt, so daß $H \simeq G(\mathfrak{E}, \mathfrak{K})$ ist. $(\mathfrak{E}, \mathfrak{K})$ heißt in diesem Falle eine *Darstellung* oder *Realisierung* von H in $\mathfrak{T}$. Ist dabei speziell $\mathfrak{T}$ ein $\mathbb{R}^n$ und sind die $k \in \mathfrak{K}$ sämtlich Strecken, so sprechen wir von einer *geradlinigen Darstellung* von G.

Topologische Graphen des $\mathbb{R}^2$ heißen *ebene Graphen*; ein Graph G heißt *plättbar*, wenn G isomorph zu einem ebenen Graphen ist. Eine ausführlichere Behandlung der ebenen Graphen wird in Kapitel 7 folgen.

Ohne weiteres ist klar:

1.1. *Ist G darstellbar in $\mathfrak{T}$, so ist auch jeder Teilgraph von G und jede Unterteilung von G in $\mathfrak{T}$ darstellbar.*

---

[1]) Unter einem Jordan-Bogen verstehen wir ein homöomorphes Bild des Einheitsintervalles [0, 1] von $\mathbb{R}$. Die Bilder von 0 und 1 heißen die Endpunkte des betreffenden Jordan-Bogens.

Entsprechendes gilt für die c-homomorphen Bilder eines in $\mathfrak{T}$ darstellbaren G nur unter starken Einschränkungen über die Struktur von $\mathfrak{T}$. Ist der endliche Graph G durch einen topologischen Graphen $(\mathfrak{E}, \mathfrak{K})$ in einem $\mathbb{R}^n$ oder auch in einer Fläche (orientierbar oder auch nicht orientierbar) von einem bestimmten Geschlecht p dargestellt, so kann man um ein beliebiges $k_0 \in \mathfrak{K}$ einen „kleinen Schlauch" S legen, worunter wir folgendes verstehen wollen: Zu jedem Punkt P von k_0 bestimmen wir eine abgeschlossene Kugel (bzw. Zelle) S_P mit Mittelpunkt P, so daß alle nicht mit einem Endpunkt von k_0 inzidenten Kanten sowie die übrigen Ecken $\in \mathfrak{E}$ von S_P vermieden werden; S sei dann die Vereinigung dieser S_P. Jedes nach einem der Endpunkte von k_0 verlaufende $k \neq k_0$ aus $\mathfrak{K}$ trifft dann S in einem ersten Punkte P_k; indem man einen beliebigen inneren Punkt $\dot{k}_0$ von S durch Jordan-Bögen $\subseteq S$ mit den P_k so verbindet, daß je zwei von diesen nur $\dot{k}_0$ gemeinsam haben, erhält man offenbar eine topologische Darstellung des Graphen, der aus G durch Kontraktion der k_0 entsprechenden Kante entsteht. Wir haben also

1.2. *Ist das endliche G in $\mathbb{R}^n$ oder in einer (orientierbaren oder nichtorientierbaren) Fläche von irgendeinem Geschlecht p darstellbar, so ist auch jedes c-homomorphe Bild von G dort darstellbar.*

Hat man im $\mathbb{R}^3$ ein System $x_1, \ldots, x_n$ von n Punkten, von denen keine 4 in einer Ebene liegen, so kann man dieses zu einem entsprechenden System mit $n + 1$ Punkten erweitern, indem man irgendeinen Punkt x_{n+1} außerhalb der $\binom{n}{3}$ Ebenen, die durch die Tripel der Form x_i, x_j, x_k bestimmt werden, wählt. Keine zwei verschiedenen der Strecken $x_i x_j$ schneiden sich dann in einem inneren Punkt. Somit folgt induktiv über die Eckenzahl:

1.3. *Jeder endliche Graph läßt sich geradlinig im $\mathbb{R}^3$ darstellen.*

Hat man im $\mathbb{R}^3$ weniger als $\aleph$ Ebenen E_i $(i \in I)$, so gibt es immer einen Punkt, der zu keiner dieser Ebenen gehört.[1]) Mittels des Zornschen Lemmas kann man daher die letzte Überlegung ins Transfinite erweitern und erhält:

1.4. *Der vollständige Graph $S(\aleph)$ ist im $\mathbb{R}^3$ geradlinig darstellbar.*

Übungen

1. Man bestimme die im $\mathbb{R}^1$ darstellbaren Graphen.
2. Ist durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}$ ein topologischer Graph bestimmt, so ist auch die Vereinigung der $k \in \mathfrak{K}$ ein topologischer Raum $\mathfrak{T}$. Welche Graphen lassen sich in $\mathfrak{T}$ darstellen?
3. Man führe den angedeuteten Beweis für (1.4) genau durch.
4. Es sei $\mathfrak{E}$ die Menge der Punkte $x_t = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Man führe einen anderen Beweis von (1.4), indem man zeigt, daß keine 4 Punkte von $\mathfrak{E}$ in einer Ebene liegen.

§ 2. Darstellung durch Mengengraphen

Es sei $\mathfrak{E}$ eine Menge von sämtlich nicht-leeren Mengen. Verschiedene $S, T \in \mathfrak{E}$ sollen benachbart heißen genau dann, wenn $S \cap T \neq \emptyset$ gilt. Dadurch ist ein Graph mit der Eckenmenge $\mathfrak{E}$ definiert; er heiße der durch $\mathfrak{E}$ bestimmte *Mengengraph* $G_{\mathfrak{E}}$. Wir sprechen

[1]) Man wähle eine Ebene E, die von allen E_i verschieden ist. Dann kann keine Gerade in E, die von allen $E \cap E_i$ verschieden ist, ganz zur Vereinigung der E_i gehören.