WILHELM KÄMMERER

Einführung in mathematische Methoden der Kybernetik

Wilhelm Kämmerer

Einführung in mathematische Methoden der Kybernetik

2., berichtigte Auflage

Mit 206 Abbildungen und 17 Tabellen

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

1974

Erschienen im Akademie-Verlag, 108 Berlin, Leipziger Straße 3—4

Lizenznummer: 202 · 100/425/74
Einband und Schutzumschlag: Rolf Kunze
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Muntzer", 582 Bad Langensalza
Bestellnummer: 761 4202 (5846) · LSV 1095
Printed in GDR
EVP 38,—

Vorwort

Dieses Buch wendet sich an den breiten Kreis aller derer, die aus beruflichen Grunden oder aus eigenem Interesse gehalten sind, sich ernsthaft mit kybernetischen Fragen zu beschäftigen. Vielfach werden sie dabei feststellen, daß die auftretende Problematik qualitativer Natur ist und mittels der im Rahmen einer Allgemeinbildung erworbenen mathematischen Kenntnisse, die wesentlich quantitativ ausgerichtet sind, nicht behandelt werden kann Hierfur geeignete Methoden entstammen nun aber recht verschiedenartigen Zweigen der Mathematik Die Zielsetzung, sie in einem Band zusammenzutragen und damit leichter zuganglich zu machen, konnte bei der Breite der Kybernetik nur in einer Auswahl erfullt werden. So wurden Stoffgebiete, obwohl sie grundlegend fur die Kybernetik sind, nicht aufgenommen, wenn sie in der Literatur schon ausreichend und zuganglich behandelt vorlagen, wie z B die Regelungstheorie und die Theorie der linearen Optimierung

Das Buch ist vorwiegend als eine Einfuhrung gedacht, die keine speziellen Vorkenntnisse voraussetzt, wohl aber auf dem im Schwierigkeitsgrad ansteigenden Weg vom Leser konzentrierte Mitarbeit verlangt. Es bietet die wesentlichen Grundbegriffe und Methoden und ermoglicht an geeigneten Stellen daruber hinaus Einblick in die z. Z. anstehende Problematik. Dabei liegt das Ziel nicht so sehr darin, Fertigkeiten zu ubermitteln, als vielmehr Verstandnis zu wecken. Auch in Zukunft wird die spezielle mathematische Arbeit dem Mathematiker als Aufgabe zukommen Die Modellbildung dagegen als verbindende Brücke verlangt kollektive Arbeit und setzt voraus, daß auch der beteiligte Nichtmathematiker ein klares Urteilsvermogen uber die sich anbietenden mathematischen Moglichkeiten besitzt

Die Breite des angesprochenen Leserkreises macht eine gewisse Kompromißbereitschaft beim Leser notwendig: Der Anfanger sollte beim ersten Studium den einzelnen Kapiteln soweit folgen, wie es seinen Interessen entspricht Zu einem spateren Zeitpunkt wird er, wenn bei ihm der Wunsch dazu vorliegt, zu großerer Abstraktion und Allgemeinheit vordringen und, wie der fachlich mit der Materie Vertrautere, seine Aufmerksamkeit mehr dem Ende der einzelnen Kapitel zuwenden.

Meinem fruheren Oberassistenten, Herrn Dr. Michael Gössel, der einige Kapitel des Buches durchsah, danke ich fur eine Reihe wertvoller Anregungen. Mein besonderer Dank gilt Frau Inge-Dorothea d'Ambly, die mit Verstandnis und bewahrter Sorgfalt das Manuskript gestaltete.

Jena, im September 1971

Wilhelm Kämmerer

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1

Kapitel I: **Algebraische Grundlagen, Systeme**

2. Mengen und Teilmengen, Mengenalgebra 7
3. Produktmenge, Relation und Abbildung — Das formale System und seine konstruktive Beschreibung 20
4. Autonomes System, Isomorphie, Homomorphie, Modell 30
5. Systeme mit Eingang. Inputsysteme 35
6. MEALY- und MOORE-Automat, Zustandsminimierung 44

Kapitel II: **BOOLEsche Funktionen, diskrete Netze**

7. BOOLEsche Funktionen 55
8. BOOLEsche Algebra. 63
9. Minimierung BOOLEscher Funktionen 69
10. Schaltnetze 76
11. Schaltwerke. 84
12. Der digitale Automat als black box 94
13. Digitale Simulationsmodelle 104
14. Datenstrukturen. 119

Kapitel III: **Wahrscheinlichkeitsautomaten**

15. Wahrscheinlichkeit. 127
16. Erzeugung von Zufallsprozessen auf Rechenautomaten 138
17. Matrizen 146
18. Wahrscheinlichkeitsautomat 154

Kapitel IV: **Lineare Automaten**

19. Systemalgebra. 161
20. Der lineare Automat und seine Reduktion 171
21. Das Realisierungsproblem fur lineare Automaten 187
22. Das Realisierungsproblem fur lineare Systeme bei diskretem und bei kontinuierlichem Zeitablauf 194

Kapitel V: **Optimierung, Lernstrukturen**

23. Iterative Methoden der Optimierung 209
24. Nullsummenspiele 215
25. Darstellung BOOLEscher Funktionen durch Schwellenwertelemente . 225

26. Trainingsverfahren zur Separierung linear separierbarer BOOLEscher Funktionen . . . 230
27. Lernstrukturen zur Zeichenerkennung . . . 242
28. Selbstlernende Strukturen . . . 252

Kapitel VI: **Information, Entropie, Kanal, Nachricht**

29. Begriff der Information und der Entropie . . . 261
30. Verbundene Nachrichtenquellen . . . 267
31. Die Eindeutigkeit des Ausdrucks fur die Entropie . . . 272
32. Kanal und Kanalkapazitat . . . 275
33. Nachrichtenquellen mit unterschiedlichen Symbollangen und Zwischensymboleinfluß . . . 284
34. Nachrichtenvorrat . . . 290

Kapitel VII: **Kodierung**

35. Kodierung und Dekodierung . . . 301
36. Kodierungstheorem und Kodierungsverfahren . . . 312
37. Das Haupttheorem der Informationstheorie . . . 325
38. Storungsgeschutzte Kodierung durch Gruppenkodes . . . 335
39. Zyklische Kodes . . . 357
40. Kommunikationstheorie . . . 369

Kapitel VIII: **Kontinuierliche Informationstheorie**

41. Verallgemeinerung des Entropiebegriffs auf kontinuierliche Signale 375
42. Darstellung kontinuierlicher Signale . . . 386
43. Abtasttheorem im Zeitbereich . . . 397
44. Kapazitat eines kontinuierlichen Kanals . . . 404

Kapitel IX: **Algorithmen**

45. Algorithmen . . . 409
46. TURING-Maschine . . . 414
47. Universal-Algorithmus und Grenzen der Algorithmierbarkeit . . . 418
48. Moderne Algorithmenbegriffe im Rahmen der elektronischen Datenverarbeitung . . . 423

Literaturverzeichnis . . . 435

Sachverzeichnis . . . 439

1. Einleitung

Die Kybernetik ist eine in unseren Tagen entstandene Wissenschaft; sie hat sich gegenuber zahlreichen Widerstanden durchsetzen konnen. Wenn eine neue Lehre auftritt und den Anspruch erhebt, als Wissenschaft anerkannt zu werden, wird ihren Vertretern die Frage nach den Abgrenzungen gegenuber bestehenden wissenschaftlichen Bereichen gestellt. Im allgemeinen wird dabei eine Abgrenzung im Hinblick auf die Objekte erwartet, auf die die neue Lehre ihre Aufmerksamkeit zu richten beabsichtigt, wobei auch den Besonderheiten der Methoden, mit denen sie ihre Erkenntnisse zu gewinnen anstrebt, gebuhrende Bedeutung beizumessen ist; so entspricht es der herkommlichen Weise.

Nun stoßt der Versuch, in diesem Sinn eine Definition fur das anzugeben, was das Wesen der Kybernetik ist, bekanntlich auf eigentumliche Schwierigkeiten, da neben den Nachrichtentechnikern u. a. die Regelungstechniker, die Biologen, die Neurologen und die Psychologen auftreten, um die von Kybernetikern evtl. anzugebenden Objekte als zu ihrem Bereich gehorig in Anspruch zu nehmen Aus dieser Situation wurde der Kybernetik von mancher Seite her zwar nicht der wissenschaftliche Charakter abgesprochen — dazu waren die mit ihren Methoden zu gewinnenden Einsichten schon zu bedeutend —, sie wurde aber in die Rolle einer „Brucke zwischen den Wissenschaften" verwiesen.

Diese Schwierigkeit, zu einer Definition auf Grund des Forschungsgegenstandes zu gelangen, tritt aber nicht bei der Kybernetik allein auf; auch wohlbekannte Wissenschaften, wie z. B. die Physik, lassen bei der angenommenen Breite und Tiefe nicht mehr eine Definition zur Abgrenzung gegenuber anderen Naturwissenschaften auf der Basis einer Frage nach den von ihnen zur Untersuchung herangezogenen Objekten zu. Unabgeschlossenheit ist eben eine natürliche Folge des Wachstumsprozesses und ist allen Wissenschaften eigen, die eine Fortentwicklung aufweisen. Das Eigentumliche ist nun, daß es beim Vorliegen einer speziellen Problematik im allgemeinen ohne Schwierigkeiten gelingt zu entscheiden, welchem wissenschaftlichen Bereich der betreffende Fall zuzuordnen ist.

Daß dies trotz Fehlens abgrenzender Definitionen moglich ist, liegt daran, daß jede Wissenschaft ihre Erkenntnisse auf Grund der Begriffe gewinnt, die in dem eigens durch sie entwickelten Begriffssystem enthalten sind. Die Bedeutung des spezifischen Begriffssystems kommt auch in der Tatsache zum Ausdruck, daß eine Wissenschaft sich nur insofern weiterzuentwickeln vermag, als sie ihr Begriffssystem fortentwickeln kann. Zur Charakterisierung einer solchen Wissenschaft gibt die Angabe ihres Begriffssystems mehr Aussage als die ihres Sachgebietes [39].

Die wesentlichen Begriffe der Kybernetik gehen zurück auf die Aufnahme und Übertragung von Nachrichten, wobei als zentraler Begriff die Information steht, weiter auf die Verarbeitung von Nachrichten, wie sie z. B. in Rechenautomaten vonstatten geht, wobei der Begriff des Algorithmus wesentlich ist, und schließlich auf Steuer- und Regelungssysteme, deren Wirken auf einer Verarbeitung von Informationen basiert und die als wichtigsten Begriff den der Rückführung aufweisen. Entscheidend ist, daß dabei die auftretenden Probleme losgelöst von den speziellen Realisierungen der Systeme, in deren Zusammenhang sie auftreten, behandelt werden. Aus den realen Systemen unserer Umwelt werden durch Abstraktion und gedankliche Verarbeitung abstrakte Strukturen gewonnen, wir wollen von kybernetischen Systemen sprechen und führen repräsentativ für sie die abstrakten Automaten an. Es liegt auf der Hand, daß sich für die Beschreibung kybernetischer Systeme und zu ihrer Behandlung Sprachen und Kalküle mathematischen Charakters anbieten ebenso daß die wesentliche Bedeutung der kybernetischen Systeme für die Praxis darin liegt, daß sie Funktionsmodelle für die in unserer Umwelt existierenden Systeme darzustellen vermögen.

Der im Rahmen der Kybernetik zu kybernetischen Systemen führende schöpferische Prozeß kann analog etwa zur Entwicklung der Geometrie gesehen werden, bei der aus realen Objekten der Vermessungspraxis die abstrakten Strukturen wie Punkt, Gerade, Dreieck, Ebene usw. erwuchsen und damit die für die Geometrie charakteristischen Begriffe gewonnen wurden.

Diese Analogie läßt sich aber noch weiter verfolgen: Die Geometrie ist keineswegs bei den durch Abstraktion gewonnenen Begriffen stehen geblieben, sie hat zu Erweiterungen gegriffen, denen zunächst keine Realität in der Umwelt entsprach, indem sie beispielsweise die nichteuklidische Geometrie oder mehrdimensionale Räume mit und ohne Metrik schuf. Ein ähnlicher Prozeß der Erweiterung zeichnet sich auch bei der Kybernetik ab, so beispielsweise, wenn der Begriff des partiellen Automaten geschaffen wird, d. h. eines Automaten, dessen Verhalten nicht für alle Eingangswerte bzw Zustände definiert ist. Einem solchen Automaten kommt in unserer Umwelt keine Existenz zu, da jedes reale System auf jeden Eingang irgendwie reagiert, und sei es auch nur durch die „Reaktion“, daß nichts geschieht. Und doch kommt diesem kybernetischen System „partieller Automat“ praktische Bedeutung zu, da sich aus ihm durch theoretische Betrachtungen wesentliche Hinweise gewinnen lassen, wie ein Konstrukteur vorzugehen hat, um einen Automaten aufwandmäßig optimal zu gestalten, wenn dessen Verhalten bei bestimmten Eingangswerten nicht vorgeschrieben ist.

So treten als Objekte der Kybernetik neben den realen Gebilden unserer Umwelt, die schon Untersuchungsgegenstand anderer Wissenschaften sind — insbesondere der Physik und der Technik, der Chemie, Biologie, Neurologie, Psychologie, der Pädagogik und der Ökonomie —, abstrakte Objekte spezifisch für die Kybernetik auf, die ihre Existenz nur im menschlichen Bewußtsein haben und durch Abstraktion und Erweiterung gewonnen werden, eben die kybernetischen Systeme. Damit zeichnet sich eine Dreiteilung der Aufgaben ab, mit denen sich die Kybernetik zu beschäftigen hat:

1. Untersuchung der Prozesse der Aufnahme, der Übertragung und der Verarbeitung von Informationen in realen Systemen technischer, organischer oder organisatorischer Struktur, losgelöst von ihrer speziellen Realisierung.

2. Untersuchung der unter 1. gewonnenen Strukturen und ihre Erweiterung ohne Frage nach einer Realität mit dem Ziel, allgemeine Einsichten in die Verhaltensweise kybernetischer Systeme zu gewinnen.

3. Anwendung der unter 2. gewonnenen allgemein wissenschaftlichen Erkenntnisse über Strukturen und Verhaltensweisen, sei es mit Ziel, auf diese Weise im Sinn von Modellvorstellungen und Hypothesen zum besseren Verständnis existierender Organismen oder organisatorischer Systeme zu gelangen, sei es, um technische Systeme oder organisatorische Formen mit gewünschten Eigenschaften konstruieren zu können.

Der zweite Problemkreis umfaßt die Theorie kybernetischer Systeme und hat ausgesprochen mathematischen Charakter. Die entsprechenden Untersuchungen verlaufen in teilweise sehr speziellen Disziplinen der Mathematik und setzen daher tiefgründige Kenntnisse dieser Bereiche voraus. Sie werden somit im allgemeinen den Mathematikern vorbehalten sein.

Im Rahmen der beiden anderen Problemkreise sind Verbindungen zwischen den abstrakten und den realen Systemen herzustellen. Daher spielen in die Arbeitsmethoden weitgehend Übersetzungsprozesse ein, die Wege zwischen den Begriffen des betreffenden wissenschaftlichen Fachbereichs und dem kybernetischen Begriffssystem bahnen und so überhaupt eine Kooperation der beteiligten Wissenschaftler ermöglichen. Voraussetzung einer optimalen Zusammenarbeit ist, daß der Fachwissenschaftler, etwa der Biologe oder der Neurologe, soweit die mathematische Sprache versteht, daß er abschätzen kann, wie weit mathematische Methoden, deren Durchführung er im allgemeinen dem Mathematiker überlassen wird, bei seinen fachspezifischen Problemen von Nutzen sein können. Er muß über die Voraussetzungen und über die Tragweite bestimmter mathematischer Methoden wenigstens global soweit unterrichtet sein, daß er bei einer Kooperation die in seinem Fachbereich für den Außenstehenden oft verdeckt liegenden Möglichkeiten zur Realisierung gewisser Voraussetzungen oder zur Bildung gewisser Ansätze erkennen und aufweisen kann.

Aber auch der Mathematiker muß, wenn er wertvoller Partner in einer solchen Zusammenarbeit sein will, über sein Fachgebiet hinauswachsen und sich die Begriffe des anderen Fachgebietes soweit aneignen, daß Gespräche möglich werden, aus denen heraus er zu erkennen vermag, ob — und gegebenenfalls welche — mathematischen Methoden sich einsetzen lassen, welche Angaben er benötigt, damit die Aufgabe vollständig bestimmt ist, insbesondere aber auch in welcher Richtung Ergebnisse seiner Arbeit erwartet werden.

Zur Zeit gibt es noch nicht genug Literatur, die es dem Wissenschaftler des einen Gebietes erleichtert, den Zugang zu den notwendigen Informationen über das andere zu finden. Es ist Anliegen des vorliegenden Buches, diese Lücke teilweise auszufüllen. Dabei ist sich der Autor darüber im klaren, daß ihm als Mathematiker dieses Ziel nur bedingt erreichbar ist. So wird dieses Buch wohl mehr ein Helfer für die sein können, die Zugang zu dem bei kybernetischer Denk- und Arbeitsweise notwendigen Verständnis für mathematische Methoden suchen.

Die Kybernetik stellt auf weite Sicht sehr reale technische Fortschritte in Aussicht, die in das Leben jedes Menschen verändernd eingreifen werden. Darüber hinaus wird sie wesentlich daran beteiligt sein, uns Aufschluß über die Funktionen unseres Nervensystems und Gehirns zu geben, dieser äußerst komplexen Struktur, die unsere höchsten Lebensfunktionen, insbesondere unser Denken ermöglicht. Sie gibt damit Auseinandersetzungen ein neues Gesicht, die sich seit Menschengedenken um die Frage nach Existenz und Wesen dessen bewegen, was unter die Begriffe ,,Geist", ,,Bewußtsein" und ,,Seele" fällt. So bietet die Kybernetik auch dem Philosophen eine neue Basis, von der das Grundproblem von ,,Körper und Seele" behandelt werden kann und behandelt werden muß.

Es ist verständlich, daß diese Wissenschaft das Interesse breiter Kreise verdient. Andererseits schließt ihre Kompliziertheit eine Behandlung mit populärwissenschaftlichen Simplifikationen von vornherein aus. Insofern verlangt das vorliegende Buch vom Leser die Bereitschaft zu einer geistigen Anstrengung, das Gelesene zu überdenken und sich anzueignen.

Darüber hinaus muß der Leser zu einer inneren Einstellung bereit sein, die frei von Vorurteilen und Voreingenommenheit ist. Auch wenn hier die Kybernetik aus der Sicht der Naturwissenschaften und der Mathematik dargelegt wird, werden sich doch gelegentlich Fragen aufdrängen, die an überkommene Vorstellungen rütteln.

Die Geschichte der Naturwissenschaften ist eine Geschichte der Desillusionierung [71]. Der Urmensch verstand seine Umwelt ,,menschlich", er schuf sich eine Götterwelt nach seinem Vorbild und seinen Wertmaßstäben. Seine Vorstellungen von dem Geschehen in einer Umwelt, die ihn einschließt, sind menschlich ergreifend; sie sind heute noch anregende Motive für den Künstler. Sie sind aber ohne Voraussagemöglichkeit für das künftige Geschehen. Wenn man das einzige in unserer heutigen Welt tragfähige Motiv unseres Handelns und damit auch einer modernen Ethik akzeptiert, nämlich die Tendenz des Überlebens der Art Mensch, so wird man sich rationeller Modelle der Außenwelt, Modelle mit Voraussagemöglichkeiten bedienen müssen.

Die Auffassung von der Sonderstellung der Erde als Mittelpunkt der Welt mußte der Kopernikanischen Lehre weichen, die Sonderstellung des Organischen fiel mit der 1828 von F. WOHLER gefundenen Harnstoffsynthese. Von den Froschschenkel-Versuchen GALVANIS nahm die physikalische Interpretierbarkeit der Empfindungswelt des Menschen ihren Ausgang, als man die Fortpflanzung von Reizen als elektrochemischen Vorgang zu erklaren vermochte und ihre Geschwindigkeit zu messen verstand. Dieser Prozeß der Ernuchterung geht weiter, er macht auch nicht vor den geistigen Funktionen halt. Aufnahme, Übertragung, Verarbeitung und Speicherung von Informationen sind Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen geworden. Menschliche Denk- und Lernprozesse finden stufenweise Analogien bei maschinellen Prozessen.

Den erkennbaren Wandel in den Auffassungen sollte man nicht allzu sehr dem Einfluß der Rechentechnik zuschreiben [84]. Gerade die Mediziner haben die Erfahrung machen konnen, daß die Annahme, die Vorgange im lebenden Organismus unterlagen Naturgesetzen, dadurch immer wieder bestatigt wurde, daß die Anwendung sorgfaltigster wissenschaftlicher Untersuchungsmethoden ihr Wissen vermehrte. Ein Organ nach dem anderen und eine Körperfunktion nach der anderen wurde dem Bereich des physikalisch Unbekannten und Unerklarbaren entrissen. Auch die Arbeit des Gehirns beginnt in dieser Weise von den Neurologen schrittweise erhellt zu werden.

Gewiß, Gehirn und elektronische digitale Rechenmaschine, als die beiden extremen Realisierungen kybernetischer Systeme sind in ihrem Bau in keiner Weise vergleichbar. Sie zeigen zwar viele gleichlaufende Funktionen. Kann dies aber ausreichend sein, um erwarten zu durfen, daß eine gewinnbringende Befruchtung beider Gebiete, der Neurologie und der Computertechnik, moglich ist?

Man sollte die Bauunterschiede der beiden realen Systeme ebenso wenig uberschatzen wie ihre funktionalen Gemeinsamkeiten. Beide sind Realisierungen vergleichbarer kybernetischer Systeme. Die Kybernetik ist der Pfeiler, von dem aus Brucken zu den verschiedenen Fachwissenschaften fuhren; sie bahnt so Verbindungen an zwischen Wissenschaften, die aus einer heute nicht mehr vertretbaren Tradition heraus vielfach noch in ihrem Wesen als kontrar angesehen werden.

Mit der Entwicklung der modernen Technik drangen mathematische Begriffe in die damit ,,exakten“ Charakter annehmenden Naturwissenschaften, wurden mathematische Methoden — insbesondere der Analysis — hier unentbehrliche Hilfsmittel; in analoger Weise vollzieht sich mit der Entwicklung der Kybernetik ein Eindringen mathematischer Denk- und Arbeitsweisen — insbesondere digitaler Natur — in zahlreiche weitere Wissenschaften und eröffnet diesen neue Wege.

Zwingt uns die standig wachsende Flut neuer Erkenntnisse zu immer weiter zu treibenden Spezialisierungen, so bietet sich demgegenuber in den Denkmethoden der Kybernetik eine Aussicht, von unserer Umwelt wieder ein Bild unter universellen Gesichtspunkten zu gewinnen.

Algebraische Grundlagen, Systeme — I

2. Mengen und Teilmengen, Mengenalgebra

Bei der Behandlung eines Problems werden Objekte in mehr oder weniger großer Anzahl und von unterschiedlicher Natur in den Kreis der Betrachtungen einzubeziehen sein. Dabei werden sich aus der Aufgabensituation heraus gewisse Prinzipien anbieten, die es nahe legen, einzelne, voneinander verschiedene Objekte in bestimmter Weise zu vereinigen, etwa nach einem gemeinsamen Merkmal hinsichtlich der Beschaffenheit, der Zugehorigkeit, der Funktion usw.

Eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten nach gewissen Gemeinsamkeiten wird in der Mathematik als *Menge* bezeichnet, die in einer Menge vereinigten Objekte als *Elemente* der Menge.

So bilden beispielsweise die im Alphabet der deutschen Schrift enthaltenen Buchstaben eine Menge; jeder Buchstabe des Alphabets ist Element dieser Menge. Das Alphabet ist eine geordnete Darbietung der Menge von Buchstaben. Man vergegenwartige sich demgegenuber die Bedeutung von „eine Menge“ in der Umgangssprache im Sinn von „viele“ etwa an dem Satz: „Diese Druckseite enthalt eine Menge von Buchstaben.“

Mengen können auf unterschiedliche Art definiert sein. So kann in bestimmten Fallen eine geschlossene Definition erfolgen. Im obigen Beispiel war dies moglich, da ein entsprechender Sammelbegriff „Alphabet“ schon existiert. In anderen Fallen kann eine Eigenschaft, die allen Elementen der zu definierenden Menge und nur diesen zukommt, zur Festlegung der Menge verwendet werden. Beispiele hierfur sind die Menge der geraden Zahlen, die Menge der auf einer gegebenen Strecke liegenden Punkte, die Menge der Menschen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt in einer bestimmten Stadt wohnen, die Menge der Enzyme, die an einem bestimmten bakteriellen Stoffwechselprozeß (Metabolismus) beteiligt sind usw. Auch die Angabe eines Konstruktionsverfahrens kann zur geschlossenen Definition einer Menge dienen. Als Beispiel sei die Menge der FIBONACCIschen Zahlen[1]) genannt; hier lassen sich die Elemente der Menge als Glieder einer Zahlenfolge gewinnen. Ausgehend von der Ziffer 1 fur das erste und ebenso für das zweite Glied, werde ein Glied der Folge jeweils durch Addition der beiden vorhergehenden Glieder gebildet:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots .$$

[1]) LEONARDO FIBONACCI, italienischer Mathematiker, 1175–1250.

In anderen Fallen wird zur Definition einer Menge die listenmaßige Aufzahlung aller Elemente der Menge verwendet werden. So wird beispielsweise bei einer Lotterie die Menge der Gewinnummern primar zwar durch die Festlegung des Ausspielungsprozesses definiert, sekundar fur den praktischen Umgang mit dieser Menge, etwa bei der Gewinnauszahlung, aber die vollstandige Aufzählung ihrer Gewinnummern in einer Gewinnliste herangezogen.

Schließlich wird eine Menge auch dadurch definiert werden konnen, daß man angibt, wie ihre Elemente aus den Elementen schon bekannter Mengen zu gewinnen sind. Die dabei eine Rolle spielenden Operationen werden Gegenstand weiterer Betrachtungen im Rahmen der Mengenalgebra sein.

Zur mathematischen Darstellung einer Menge gibt man z. B. die Liste ihrer Elemente an, wobei man die Liste in — meist geschweiften — Klammern einschließt und die Elemente innerhalb der Liste durch Kommas trennt. So stellt

$$\mathfrak{A} = \{a, b, c\}$$

die aus den Elementen a, b und c bestehende und mit $\mathfrak{A}$ bezeichnete Menge dar.

Um auszudrücken, daß ein bestimmtes Objekt Element einer bestimmten Menge ist, findet das Symbol

$\in$ (gelesen: ,,ist Element von“)

Verwendung. So gilt z. B. fur die obige Menge

$$b \in \mathfrak{A}\,.$$

$d \notin \mathfrak{A}$ ist die mathematische Formulierung, daß das Objekt d nicht Element der Menge $\mathfrak{A}$ ist.

Die Verwendung des ,,Bindungsstriches“ $|$ ermoglicht die Darstellung einer Menge durch Angaben der besonderen Eigenschaften ihrer Elemente. So stellt

$$\mathfrak{X} = \{x | 5 \leqq x \leqq 10\}$$

die Menge aller reellen Zahlen zwischen 5 und 10 einschließlich der Grenzen dar, wobei zum Ausdruck kommt, daß als Symbol für ein Element dieser mit $\mathfrak{X}$ bezeichneten Menge der Buchstabe x benutzt werden soll. Die Menge der Fibonaccischen Zahlen kann damit durch

$$\mathfrak{F} = \{z_i | i \in \mathfrak{N};\, z_1 = z_2 = 1;\, z_i = z_{i-1} + z_{i-2}\}$$

dargestellt werden, wobei $\mathfrak{N}$ die Menge der naturlichen Zahlen ist.

Je nach der Anzahl der Elemente spricht man von einer endlichen oder einer unendlichen Menge. Wahrend eine endliche Menge stets diskret ist, können unendliche Mengen diskreter oder kontinuierlicher Natur sein.

Die Menge der Primzahlen unter 100 ist eine endliche diskrete Menge. Beispiele für unendliche Mengen diskreter Natur bieten die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge der echten gemeinen Bruche, die Menge der Gitterpunkte einer ebenen Gitterstruktur usw. Unendliche Mengen kontinuierlicher Natur finden wir beispielsweise in der Menge der Zahlen zwischen Null und Eins, in der Menge der auf einer Strecke liegenden Punkte, in der Menge der im Innern eines Quadrates liegenden Punkte usw.

Bei endlichen Mengen liegt es nahe, zu ihrer Klassifizierung die Anzahl der in einer Menge enthaltenen Elemente heranzuziehen. Im Rahmen eines solchen Verfahrens sind zwei endliche Mengen als äquivalent anzusehen und damit derselben Klasse zuzuteilen, wenn der auf jede der beiden Klassen angewendete Zählprozeß zum gleichen Resultat führt. Bei unendlichen Mengen verliert dieser Prozeß des Zählens aber jede Bedeutung. Hier setzt eine für die Mathematik charakteristische Verfahrensweise ein. An Stelle des ursprünglichen und nur im engeren Bereich anwendbaren Verfahrens wird ein anderes im breiteren Bereich tragfähiges Verfahren gesetzt, das im engeren Bereich zum gleichen Ergebnis wie das ursprüngliche Verfahren führt.

In der vorliegenden Situation läßt sich die angestrebte Erweiterung eines Äquivalenzbegriffs zur Klassifizierung auch unendlicher Mengen unter Verwendung des Begriffs *Mächtigkeit* einer Menge erreichen. Das seitherige Verfahren bestand darin, die Anzahlgleichheit durch den Vergleich der Ergebnisse zweier Zählprozesse zu erfassen. An seine Stelle setzen wir nun ein Verfahren, daß die „Gleichmächtigkeit" zweier Mengen erfassen läßt.

Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, wenn eine gegenseitig eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen beider Mengen möglich ist.

Es ist leicht ersichtlich, daß bei endlichen Mengen beide Verfahren das gleiche leisten. Gleichheit bzw. Ungleichheit der beiden Zählprozesse und Möglichkeit bzw. Unmöglichkeit einer gegenseitig eindeutigen (= eineindeutigen) Paarbildung sind hier gleichwertige Aussagen. Anzahl der Elemente und Mächtigkeit sind hier synonym.

Das auf Gleichmächtigkeit basierende Verfahren läßt aber auch für unendliche Mengen Aussagen und damit Klassifizierungen zu. Wir ziehen zunächst die Menge der natürlichen Zahlen als die sich unmittelbar anbietende unendliche Menge zum Vergleich heran und sagen, eine unendliche Menge sei *abzählbar*, wenn sie gleichmächtig mit der Menge der natürlichen Zahlen ist. Es ist klar, daß der Menge der natürlichen Zahlen diese Eigenschaft, abzählbar zu sein, zukommt. Man überzeugt sich leicht, daß diese Eigenschaft auch der Menge der geraden Zahlen, der Menge der Primzahlen, der Menge der Gitterpunkte in der Ebene und damit zugleich auch der Menge der ganzen Zahlenpaare usw. zuzusprechen ist. Die Paarbildung kann in diesen Fällen wie folgt geschehen:

Menge der natürlichen Zahlen	1 2 3 4 5 . . . n . . .
Menge der geraden Zahlen	2 4 6 8 10 . . . $2n$ . . .

Menge der natürlichen Zahlen	1 2 3 4 5 6 . . .
Menge der Primzahlen	1 2 3 5 7 11 . . .

Menge der natürlichen Zahlen	1	2	3	4	5	6	... 10 ...
Menge der ganzen Zahlenpaare (Abb. 2.1)	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(−1,1)	(−1,0)	... (2, −10) ...

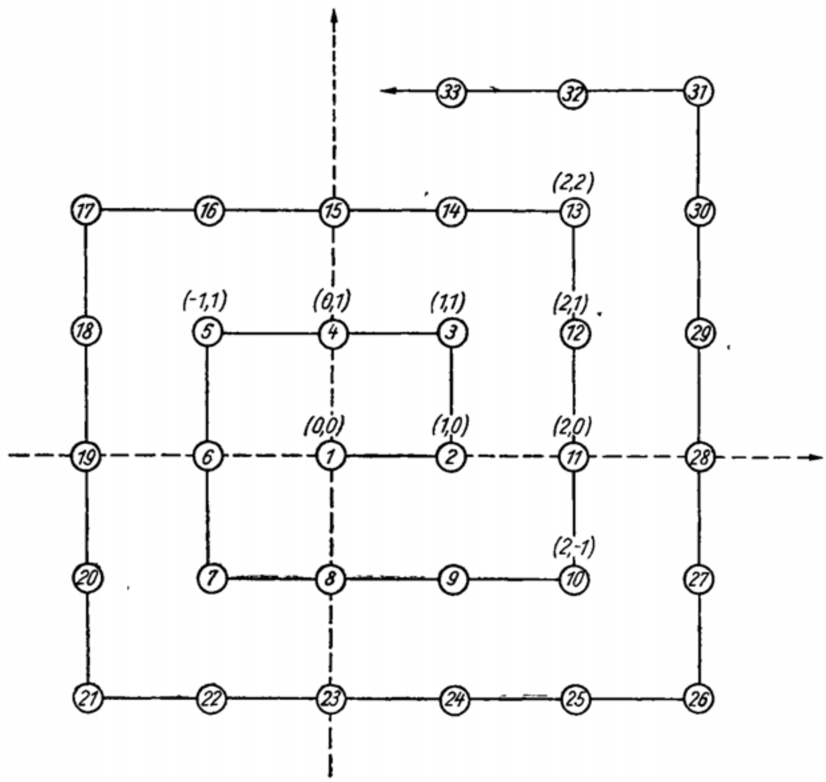

Abb. 2.1. Gitterstruktur in der Ebene
Abzählbarkeit der Gitterpunkte

Daß auch die Menge der echten Brüche abzählbar ist, läßt sich durch eine „Auffädelung" der Gitterpunkte erkennen, die als Ausschnitt aus der Gitterstruktur in der Ebene in Abb. 2.2 dargestellt sind. Die Zahlenpaare des gewählten Ausschnitts haben die Eigenschaft, daß jeweils die erste Zahl kleiner als die zweite Zahl ist. Faßt man die erste Zahl jedes Paares als Zähler, die zweite Zahl als Nenner auf, so gewinnt man auf diese Weise alle echten Brüche. Die „Auffädelung" kann dann etwa so erfolgen, daß die Summe aus Zähler und Nenner eines Bruches als erstes Ordnungsprinzip, die Größe des Zählers als zweites verwendet wird.

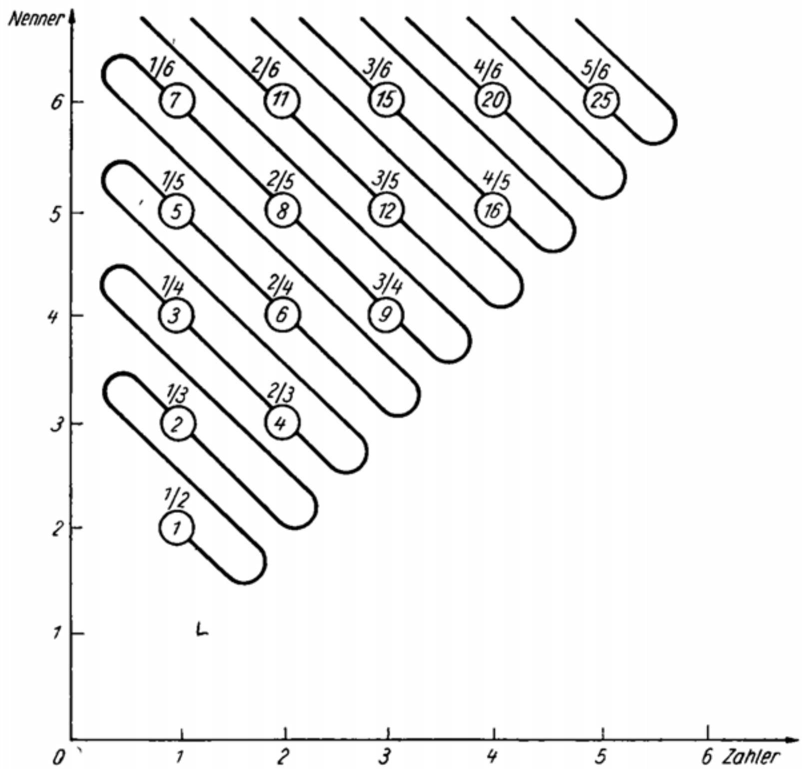

Abb. 2.2. Abzählbarkeit der echten Brüche

Menge der nat. Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Menge der echten Brüche	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{5}$	...
Summe aus Zähler und Nenner	3	4	5		6			7			8		

Die Einführung des Begriffs einer abzählbar unendlichen Menge ist nur dann sinnvoll, wenn wir auch unendliche Mengen aufweisen können, denen diese Eigenschaft nicht zukommt. Als Beispiel einer *nichtabzählbaren Menge* führen wir die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 an. Zur Darstellung dieser Zahlen werden unendliche Dezimalbrüche herangezogen. Dabei seien endliche Dezimalbrüche, um eine einheitliche Darstellung zu erhalten, durch unendliche ersetzt, so beispielsweise 0,3 durch 0,2999 ...

Der Beweis, daß die Menge der echten Dezimalbruche nichtabzahlbar ist, wird indirekt gefuhrt: Es wird gezeigt, daß die Annahme, diese Menge sei abzählbar, auf Widerspruch fuhrt.

Die Annahme, die Menge der echten Dezimalbruche sei abzahlbar, bedeutet, daß eine gegenseitige eindeutige Zuordnung der naturlichen Zahlen und der echten Dezimalbruche moglich ist, oder mit anderen Worten, daß man eine Liste aufstellen kann, in der jeder echte Dezimalbruch unter einer bestimmten nur ihm zukommenden Nummer enthalten ist. Eine solche Liste liege nun vor:

Nummer in der Liste	der dieser Nummer zugeordnete echte Dezimalbruch						
1	0,	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}	...
2	0,	z_{21}	z_{22}	z_{23}	z_{24}	z_{25}	...
3	0,	z_{31}	z_{32}	z_{33}	z_{34}	z_{35}	...
.	.	.	.	.	.	.	...
.	.	.	.	.	.	.	...
.	.	.	.	.	.	.	...
n	0,	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{n4}	z_{n5}	...
.	.	.	.	.	.	.	...
.	.	.	.	.	.	.	...
.	.	.	.	.	.	.	...

Darin bedeutet z_{ik} mit $i, k \in \mathfrak{N}$ die Ziffer, die in dem Dezimalbruch der i-ten Zeile an k-ter Stelle nach dem Komma steht. Wahrend die Indizes jede natürliche Zahl annehmen können, gilt

$$z_{ik} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} .$$

Beispielsweise bedeutet $z_{123,259}$ das im Dezimalbruch der 123-ten Zeile an der 259-ten Stelle hinter dem Komma stehende Symbol, also eine der zehn Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Wir konstruieren nun einen echten Dezimalbruch wie folgt: An die erste Stelle nach dem Komma setzen wir eine Ziffer, die verschieden ist von der Ziffer, die im ersten Dezimalbruch der Liste an der ersten Stelle nach dem Komma steht. Damit ist gesichert, daß der zu konstruierende Dezimalbruch sich von dem in der Liste als erster aufgefuhrten Dezimalbruch unterscheidet. Wahlt man nun fur die zweite Stelle eine Ziffer, die sich von der Ziffer unterscheidet, die an der zweiten Stelle des zweiten Dezimalbruchs der Liste steht, so ist der zu konstruierende Dezimalbruch auch verschieden von dem Dezimalbruch der zweiten Zeile. Entsprechend verfahren wir bei den weiteren Stellen. In mathematischer Schreibweise setzen wir den zu konstruierenden Dezimalbruch in der Form

$$0, z'_{11}\, z'_{22}\, z'_{33} \ldots z'_{nn} \ldots$$

an.

Darin bedeuten $z_{11}, z_{22}, z_{33}, \ldots, z_{nn}, \ldots$ die in der Liste als „Diagonalglieder“ auftretenden Ziffern; durch den Akzent wird zum Ausdruck gebracht, daß die Ziffer zu der in der Liste an der entsprechenden Stelle stehenden Ziffer unterschiedlich gewahlt werden soll.

Für den so konstruierten Dezimalbruch ist gesichert, daß er sich von jedem in der Liste stehenden Dezimalbruch unterscheidet. Ist namlich n die Nummer irgendeiner Zeile der Liste, so enthalt der dort angeordnete Dezimalbruch an der n-ten Stelle — dies ist die „Diagonalstelle“ — die Ziffer, die wir durch das Symbol z_{nn} bezeichnet haben. Der konstruierte Dezimalbruch enthält aber an der n-ten Stelle z'_{nn}, d. h. eine von z_{nn} abweichende Ziffer. Zwei Dezimalbrüche, die an einer bestimmten Stelle nach dem Komma unterschiedliche Ziffern tragen, sind aber verschieden. Diese Überlegung gilt für jede Zeilennummer. Der konstruierte echte Dezimalbruch kann somit nicht in der Liste enthalten sein. Damit liegt ein Widerspruch zur Annahme vor: Die Annahme, daß die Menge der echten Dezimalbruche abzahlbar sei, kann somit nicht richtig sein.

Die Menge der zwischen 0 und 1 liegenden Zahlen hat daher eine andere Mächtigkeit als die Menge der naturlichen Zahlen. Aus der bekannten Darstellung der reellen Zahlen auf einer Zahlengeraden und speziell der Zahlen zwischen 0 und 1 auf einer Strecke von der Lange Eins ist zu entnehmen, daß die Menge der auf der Einheitsstrecke liegenden Punkte — sie bilden ein Kontinuum — und die Menge der echten Dezimalbruche die gleiche Mächtigkeit besitzen; man spricht von der *Mächtigkeit des Kontinuums* (Abb. 2.3).

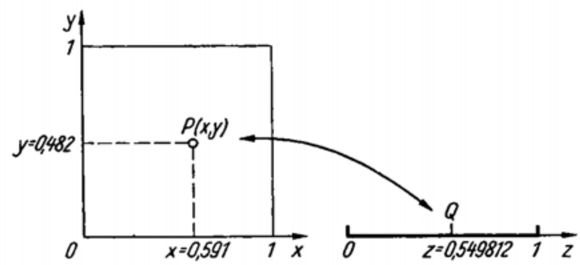

Abb 2.3. Die Punktmenge im Inneren des Einheitsquadrates und die Punktmenge auf der Einheitsstrecke haben gleiche Machtigkeit.
P: $x = 0{,}591\ldots$ Q: $z = 0{,}549812\ldots$
$y = 0{,}482\ldots$

Auch die Menge der im Innern eines Quadrates liegenden Punkte hat die gleiche Machtigkeit. Man erkennt dies, wenn man davon ausgeht, daß jeder Punkt im Innern eines Einheitsquadrates durch das Paar seiner beiden Koordinaten, also durch ein aus zwei echten Dezimalbrüchen bestehendes Paar festgelegt werden kann.

Die beiden Dezimalbrüche mögen die Form

$$0,\, x_1\, x_2\, x_3 \ldots$$
$$0,\, y_1\, y_2\, y_3 \ldots$$

besitzen. Dann kann aber eine gegenseitige eindeutige Zuordnung zwischen der Menge der Punkte im Innern des Einheitsquadrates und der Menge der echten Dezimalbrüche erreicht werden, so beispielsweise durch die Form

$$0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \ldots ;$$

Damit liegt eine aufsteigende Folge von Machtigkeiten vor: Die Mächtigkeiten endlicher Mengen 0, 1, 2, 3, ..., die Machtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen (Abzählbarkeit), die Machtigkeit des Kontinuums.

Erwähnt sei hier nur, daß man in dieser Folge fortschreitend zu jeder Mächtigkeit eine Menge mit größerer Mächtigkeit konstruieren kann.

Ein weiterer Begriff ist der der *Teilmenge*.

> Die Menge $\mathfrak{A}$ heißt Teilmenge der Menge $\mathfrak{B}$, wenn jedes Element von $\mathfrak{A}$ auch Element von $\mathfrak{B}$ ist.

So ist beispielsweise die Menge der durch 6 ohne Rest teilbaren Zahlen Teilmenge der geraden Zahlen. Demgegenuber ist die Menge der Primzahlen nicht Teilmenge der ungeraden Zahlen; gibt es doch ein Element der ersten Menge, das nicht der zweiten Menge angehort, nämlich die Zahl 2.

Aus der Definition der Teilmenge folgt, daß jede Menge zu sich selbst Teilmenge ist. Man hat daher in Verscharfung noch den weiteren Begriff der „echten Teilmenge" geschaffen.

> $\mathfrak{A}$ ist echte Teilmenge von $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A}$ Teilmenge von $\mathfrak{B}$ ist und wenigstens ein Element von $\mathfrak{B}$ existiert, das nicht zu $\mathfrak{A}$ gehört.

Dem entsprechend unterscheidet auch die Symbolik zwischen

$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ für die Beziehung „echte Teilmenge sein"

und

$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ für „Teilmenge sein".

Man spricht auch von einer Inklusion. Die Relation „Teilmenge sein" ist nicht symmetrisch, d. h., wenn die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in der Relation $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ stehen, so stehen sie im allgemeinen nicht in der Relation $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Die Relation „Teilmenge sein" kann daher gelegentlich dazu verwendet werden, die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen.

> Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und zugleich $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, so gilt
> $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Die Relation „Teilmenge sein" ist transitiv:

> Aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ folgt $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$.

Bei mathematischen Aussagen ist es oft wesentlich, daß eine Behauptung für alle Objekte eines Bereichs ausgesprochen wird, in anderen Fallen, daß die Existenz von mindestens einem Objekt aus einem gewissen Bereich mit einer bestimmten Eigenschaft gefordert wird. Um beides formalisieren zu können, hat man die Zeichen

$\forall\, x$ (gelesen: „für jedes x")

und

$\exists\, x$ (gelesen: „es gibt ein x, für das ...")

eingeführt. Man spricht von dem A-Quantor bzw. dem E-Quantor. Unter Verwendung des A-Quantors läßt sich die obige Definition der Teilmenge wie folgt formalisieren:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \underset{\mathrm{Df}}{=} \forall\, a\,(a \in \mathfrak{A} \rightarrow a \in \mathfrak{B})\,.$$

„$\mathfrak{A}$ ist Teilmenge von $\mathfrak{B}$ nach Definition genau dann, wenn für jedes a gilt: Ist a Element von $\mathfrak{A}$, so folgt, a ist Element von $\mathfrak{B}$." Entsprechend gestattet der $\exists$-Quantor die folgende Niederschrift für die Definition der echten Teilmenge.

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \exists\, b\,(b \in \mathfrak{B} \text{ und } b \notin \mathfrak{A})\,.$$

„$\mathfrak{A}$ ist echte Teilmenge von $\mathfrak{B}$ nach Definition genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ Teilmenge von $\mathfrak{B}$ ist und es ein b gibt, für das gilt: b ist Element von $\mathfrak{B}$ und ist nicht Element von $\mathfrak{A}$."

Wir führen nun den Begriff der *Komplementmenge* ein.

> Ist $\mathfrak{A}$ Teilmenge von $\mathfrak{B}$, so bilden alle Elemente von $\mathfrak{B}$, die nicht zu $\mathfrak{A}$ gehören, die Komplementmenge von $\mathfrak{A}$ relativ zu $\mathfrak{B}$.

Wir schreiben für die Komplementmenge von $\mathfrak{A}$ relativ zu $\mathfrak{B}$ $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}$, oft auch nur $\overline{\mathfrak{A}}$, wenn sich aus dem Zusammenhang ergibt, bezüglich welcher Menge die Komplementbildung zu verstehen ist. Es gilt der Satz:

> *Die Komplementmenge einer Komplementmenge ist die ursprüngliche Menge.*

Abb. 2.4 veranschaulicht diesen Sachverhalt an Punktmengen. Wir betrachten den Sachverhalt noch etwas weiter, indem wir noch eine dritte Menge hinzunehmen. Zu diesem Zweck betrachten wir ein Beispiel, nämlich die Menge der Vögel, in der die Menge der Gänse und die Menge der Hausgänse als Teilmengen enthalten sind; die Komplementbildung nehmen wir dabei relativ zur Menge der Vögel vor (Abb. 2.5). Dann gilt der Satz:

> *Beim Übergang zu den Komplementmengen kehren sich die Relationen „Teilmenge sein" bzw. „echte Teilmenge sein" um.*

Aus $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ folgt $\overline{\mathfrak{B}} \subset \overline{\mathfrak{A}}$, aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ folgt $\overline{\mathfrak{B}} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}$.

Ein Beispiel, das zeigt, wie auf der Basis von Teilmengen-Beziehungen unter Verwendung des Komplementes logische Schlüsse zustande kommen können,

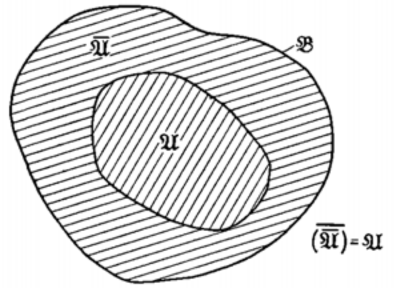

Abb. 2.4. Komplementmenge

$\mathfrak{A}$ = Menge der Hausganse,
$\mathfrak{B}$ = Menge der Ganse,
$\overline{\mathfrak{A}}$ = Menge der Ganse, die keine Hausganse sind, d. i. Menge der Wildganse,
$\overline{(\overline{\mathfrak{A}})}$ = Menge der Ganse, die nicht $\overline{\mathfrak{A}}$ angehoren, d. h., die keine Wildganse sind, d. i. Menge der Hausganse,
$\overline{(\overline{\mathfrak{A}})} = \mathfrak{A}$

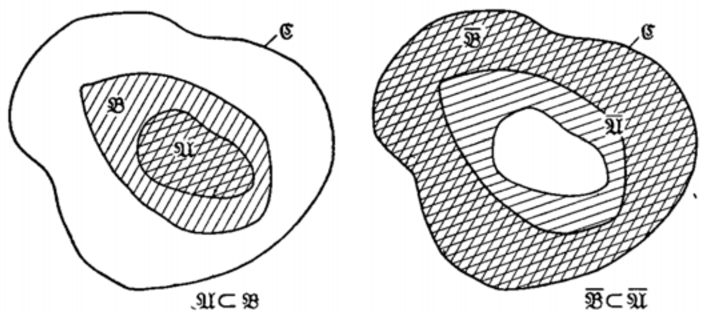

Abb. 2.5. Komplement und Inklusion

$\mathfrak{A}$ = Menge der Hausgànse,
$\mathfrak{B}$ = Menge der Ganse,
$\mathfrak{C}$ = Menge der Vogel

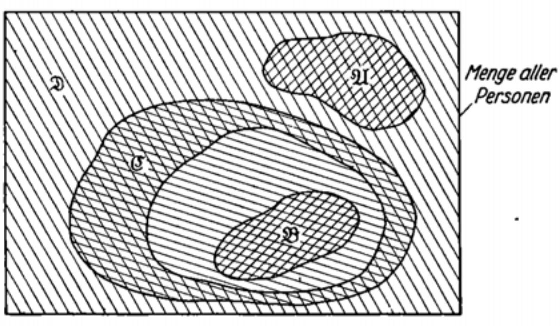

Abb. 2.6. Zum Beispiel von Lewis Carroll (Erläuterungen im Text)

gibt Lewis Carroll[1]) in einer scherzhaften Fassung. Er führt vier Mengen von Personen ein: (Abb. 2.6)

$\mathfrak{A}$ sei die Menge der Personen, die ein Krokodil zu bändigen verstehen,
$\mathfrak{B}$ sei die Menge aller Babys,
$\mathfrak{C}$ sei die Menge der Personen, denen man keine besondere Anerkennung zukommen läßt

und $\mathfrak{D}$ sei die Menge der Personen, die logisch zu handeln verstehen.

Hinsichtlich der in diesen Mengen enthaltenen Personen bestehen folgende Aussagen:

1. „Babys sind unlogisch“. Da diese Aussage für alle Babys gilt, läßt sich aus ihr eine Aussage für die Menge $\mathfrak{B}$ gewinnen. Anderseits bedeutet, eine unlogische Person zu sein, der Komplementmenge der Menge der logisch handelnden Personen anzugehören: Jedes Element von $\mathfrak{B}$ ist Element von $\overline{\mathfrak{D}}$.

$$(1)\quad \mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{D}}\,.$$

2. „Niemandem wird Anerkennung versagt, der ein Krokodil zu bändigen versteht“ ist eine Aussage für jede Person der Menge $\mathfrak{A}$, die diese in Beziehung zur Menge $\mathfrak{C}$ stellt.

$$(2)\quad \mathfrak{A} \subset \overline{\mathfrak{C}}\,.$$

3. „Unlogische Personen erhalten keine Anerkennung“ setzt das Komplement der Menge $\mathfrak{D}$ in Beziehung zur Menge $\mathfrak{C}$.

$$(3)\quad \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{C}\,.$$

Durch Komplementbildung lassen sich drei weitere Teilmengen-Beziehungen gewinnen:

$$(4)\quad \mathfrak{D} \subset \overline{\mathfrak{B}}\,.$$

$$(5)\quad \mathfrak{C} \subset \overline{\mathfrak{A}}\,.$$

$$(6)\quad \overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D}\,.$$

Die Transitivität der Teilmengen-Relation (Inklusion) führt dann zu den folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{B} \overset{(1)}{\subset} \overline{\mathfrak{D}} \overset{(3)}{\subset} \mathfrak{C} \overset{(5)}{\subset} \overline{\mathfrak{A}}\,, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{A}}\,.$$

„Ein Baby kann kein Krokodil bändigen“.

$$\mathfrak{A} \overset{(2)}{\subset} \overline{\mathfrak{C}} \overset{(6)}{\subset} \mathfrak{D} \overset{(4)}{\subset} \overline{\mathfrak{B}}\,, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{A} \subset \overline{\mathfrak{B}}\,.$$

„Ein Krokodilbändiger ist kein Baby“.

$$\overline{\mathfrak{D}} \overset{(3)}{\subset} \mathfrak{C} \overset{(5)}{\subset} \overline{\mathfrak{A}}\,, \quad \text{d. h.} \quad \overline{\mathfrak{D}} \subset \overline{\mathfrak{A}}\,.$$

[1]) Lewis Carroll (Ch. L. Dodgson), englischer Mathematiker, 1832—1898.

„Eine unlogisch handelnde Person ist kein Krokodilbandiger“.

$$\overline{\mathfrak{C}} \overset{(6)}{\subset} \mathfrak{D} \overset{(4)}{\subset} \overline{\mathfrak{B}}\,, \quad \text{d. h.} \quad \overline{\mathfrak{C}} \subset \overline{\mathfrak{B}}\,.$$

„Eine hochangesehene Person ist kein Baby“.

Man uberzeuge sich, daß die Punktmengen der Abb 2 6 den vorliegenden Relationen entsprechen.

In der Komplementbildung haben wir eine erste Operation der *Mengenalgebra* eingefuhrt, durch die auf Grund gegebener Mengen eine weitere Menge bestimmt werden kann. Wir betrachten nun weitere Operationen, die es ermöglichen, aus gegebenen Mengen neue Mengen zu definieren.

Unter der *Vereinigungsmenge* der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man die Menge aller Elemente, die wenigstens einer der beiden Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ angehoren (Symbol $\cup$).

Vereinigungsmenge von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (Abb. 2.7)

$$\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \in \mathfrak{A} \text{ oder } x \in \mathfrak{B}\}\,.$$

Unter der *Schnittmenge* (auch Durchschnitt) der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man die Menge aller Elemente, die beiden Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zugleich angehoren (Symbol $\cap$).

Schnittmenge von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (Abb. 2.8)

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \in \mathfrak{A} \text{ und } x \in \mathfrak{B}\}\,.$$

Unter der *Differenz* der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man die Menge aller der Elemente von $\mathfrak{A}$, die nicht Elemente von $\mathfrak{B}$ sind.

Differenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (Abb. 2.9)

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \in \mathfrak{A} \text{ und } x \notin \mathfrak{B}\}\,.$$

Die Operationen Vereinigung und Durchschnitt genugen den Gesetzen

der Kommutativitat,
der Assoziativitat
und der Distributivitat.

Wir kommen darauf im Rahmen der Booleschen Algebra zuruck.

Zwei Mengen, deren Durchschnitt leer ist, heißen *disjunkt* oder zueinander fremd.

Ist eine Menge $\mathfrak{A}$ als Vereinigung von (endlich oder unendlich vielen) disjunkten, d. h. paarweise fremden, Teilmengen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ darstellbar, so spricht man von einer *Zerlegung* der Menge $\mathfrak{A}$. Fur das Vorhandensein einer Zerlegung mussen also zwei Bedingungen erfullt sein:

1. $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \ldots = \mathfrak{A}$ (Vollstandigkeit).
2. $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_j = \emptyset$ [1]) für alle i und j mit $i \neq j$ (paarweise disjunkt).

Diese Bedingungen sichern, daß jedes Element von $\mathfrak{A}$ einer und nur einer Teilmenge $\mathfrak{B}_i$ angehort. Der Begriff der Zerlegung spielt bei Systembetrachtungen eine wichtige Rolle.

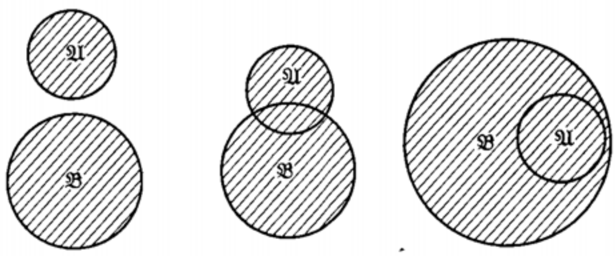

Abb. 2.7. Vereinigungsmenge $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ schraffiert (drei typische Falle)

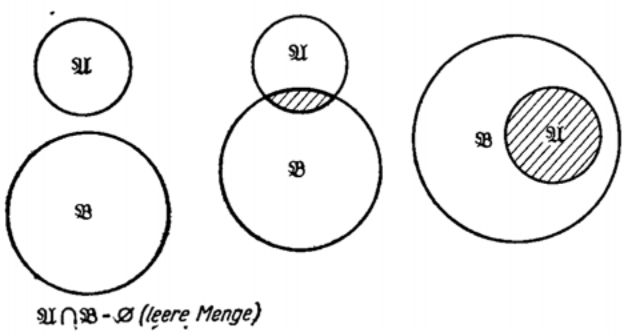

Abb. 2.8. Schnittmenge $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ schraffiert (drei typische Falle)

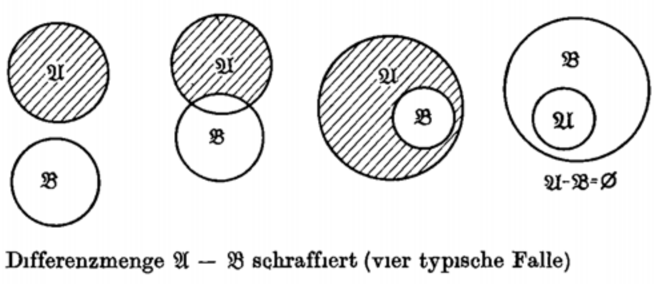

Abb. 2.9. Differenzmenge $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ schraffiert (vier typische Falle)

[1]) $\emptyset$ ist das Zeichen fur „leere Menge", d. h. fur eine Menge, die kein Element enthalt.

Die Operationen der Mengenalgebra ermoglichen die Erfassung auch komplexer Gebietsstrukturen (Abb. 2.10).

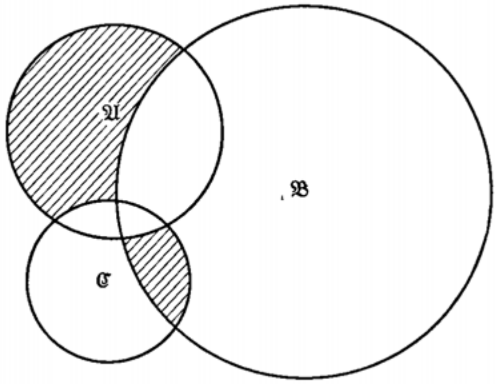

Abb. 2.10. Darstellung von Gebietsstrukturen
schraffierter Bereich: $(\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{B}} \cap \overline{\mathfrak{C}}) \cup (\overline{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$

3. Produktmenge, Relation und Abbildung — Das formale System und seine konstruktive Beschreibung

Bei der Untersuchung irgendwelcher Umwelterscheinungen, bei der Bildung der Theorie oder eines Modells spielen im allgemeinen verschiedene Objektmengen eine Rolle. Die dabei in Erscheinung tretenden Beziehungen lassen Elemente aus verschiedenen Mengen in gegenseitige Verbindungen treten, sei es zu Paaren oder zu Tripeln oder allgemein zu n-Tupeln, wie man eine geordnete Zusammenstellung von n Objekten bezeichnet. Hierbei erweist es sich als vorteilhaft, über den mathematischen Begriff Produktmenge — in der Technik spricht man oft von Verbundmenge — zu verfugen.

Unter der *Produktmenge* zweier Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man die Menge aller geordneten Paare aus je einem Element der Menge $\mathfrak{A}$ und der Menge $\mathfrak{B}$. Man schreibt fur die Produktmenge aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} .$$

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{(a, b) | a \in \mathfrak{A} \text{ und } b \in \mathfrak{B}\} .$$

In entsprechender Weise definiert man die Produktmenge aus n Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ durch

$$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in \mathfrak{A}_1 \text{ und } a_2 \in \mathfrak{A}_2 \text{ und } \ldots \text{ und } a_n \in \mathfrak{A}_n\} .$$

Dabei kann bei der Bildung einer Produktmenge eine Menge auch mehrmals

Die Operationen der Mengenalgebra ermoglichen die Erfassung auch komplexer Gebietsstrukturen (Abb. 2.10).

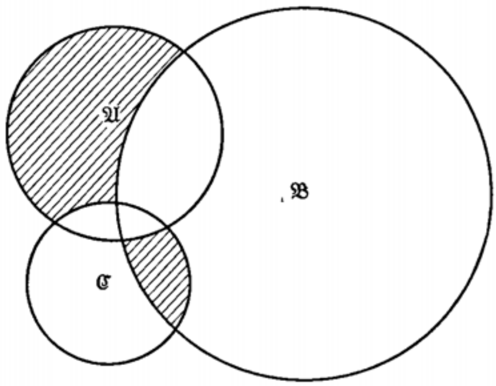

Abb. 2.10. Darstellung von Gebietsstrukturen
schraffierter Bereich: $(\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{B}} \cap \overline{\mathfrak{C}}) \cup (\overline{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$

3. Produktmenge, Relation und Abbildung — Das formale System und seine konstruktive Beschreibung

Bei der Untersuchung irgendwelcher Umwelterscheinungen, bei der Bildung der Theorie oder eines Modells spielen im allgemeinen verschiedene Objektmengen eine Rolle. Die dabei in Erscheinung tretenden Beziehungen lassen Elemente aus verschiedenen Mengen in gegenseitige Verbindungen treten, sei es zu Paaren oder zu Tripeln oder allgemein zu n-Tupeln, wie man eine geordnete Zusammenstellung von n Objekten bezeichnet. Hierbei erweist es sich als vorteilhaft, über den mathematischen Begriff Produktmenge — in der Technik spricht man oft von Verbundmenge — zu verfugen.

Unter der *Produktmenge* zweier Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man die Menge aller geordneten Paare aus je einem Element der Menge $\mathfrak{A}$ und der Menge $\mathfrak{B}$. Man schreibt fur die Produktmenge aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$.

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{(a, b) | a \in \mathfrak{A} \text{ und } b \in \mathfrak{B}\} .$$

In entsprechender Weise definiert man die Produktmenge aus n Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ durch

$$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in \mathfrak{A}_1 \text{ und } a_2 \in \mathfrak{A}_2 \text{ und } \ldots \text{ und } a_n \in \mathfrak{A}_n\} .$$

Dabei kann bei der Bildung einer Produktmenge eine Menge auch mehrmals auftreten, so z. B. bei der Bildung der Menge, die aus allen geordneten Paaren natürlicher Zahlen besteht,

$$\mathfrak{N}\times\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^2 = \{(x, y) | x \in \mathfrak{N} \text{ und } y \in \mathfrak{N}\}$$

mit beispielsweise $(7,3) \in \mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$.

Betrachten wir als einfaches Beispiel einer an einem Umweltereignis durchgeführten Untersuchung Messungen an einer Diode; im Rahmen abstrahierender Überlegungen mögen sich für das Experiment zwei Eigenschaften A_1 und A_2 anbieten, nämlich Spannung und Stromstärke. Die experimentellen Gegebenheiten legen für A_1 und für A_2 je eine Menge von Werten fest, die angenommen werden können; notwendigerweise sind beide Mengen infolge der beschränkten Meßgenauigkeit diskreter Natur. Jede Messung führt in ihrem Ergebnis zu der Erfassung eines geordneten Paares von Werten, nämlich je eines Spannungs- und eines Stromstärkewertes. So können beispielsweise die Wertemengen

$$V_1 = \{-10, -2, 1, 2, 5\} ,$$
$$V_2 = \{-1, -0{,}2, 10, 20, 50\}$$

zur Verfügung stehen und als Ergebnisse der einzelnen Messungen die Paare

$$s_1 = (-10, -1) , \quad s_2 = (-2, -0{,}2) , \quad s_3 = (1, 10) ,$$
$$s_4 = (2, 20) , \quad s_5 = (5, 50)$$

auftreten. Das Ergebnis des Experiments ist dann die Menge dieser Paare

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} .$$

Wir sprechen auch vom System S.

In dieser Menge von Paaren treten nicht alle möglichen Paare auf, S ist eine Teilmenge der Produktmenge aus V_1 und V_2.

$$S \subseteq V_1 \times V_2 .$$

An dieser Stelle bietet sich ein weiterer mathematischer Begriff an, nämlich der der *Relation*.

> Man spricht von einer n-stelligen Relation R zwischen den Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$, wenn R eine Teilmenge der Produktmenge aus $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ ist.
>
> $$R \subset \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n .$$

Beispiele. 1. Es sei $\mathfrak{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Dann stellt

$$R = \{(x, y) | x \in \mathfrak{N} \text{ und } y \in \mathfrak{N} \text{ und } x < y\}$$

eine zweistellige Relation (Binärrelation) in $\mathfrak{N}$ dar. Ihr genügen beispielsweise die Paare

$(2, 3)$, $(3, 7)$, $(5, 6)$ usw., nicht aber

$(2, 2)$, $(7, 3)$, $(6, 5)$ usw.

2. Eine dreistellige Relation in der Menge der naturlichen Zahlen stellt

$$R = \{(x, y, z) | x \in \mathfrak{N} \text{ und } y \in \mathfrak{N} \text{ und } z \in \mathfrak{N} \text{ und } x < y = z\}$$

dar. Tripel, die ihr genügen, sind beispielsweise

$$(2, 3, 3)\,, \quad (5, 11, 11) \quad \text{usw.}$$

Ist $R \subset X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y und ist $(x, y) \in R$, so pflegt man auch zu schreiben

$x\,R\,y$, gelesen· „x steht in R-Relation zu y".

3. Greifen wir auf das obige Beispiel der Untersuchung an einer Diode zuruck: Das als Ergebnis des Experiments gewonnene System S,

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}\,,$$

stellt eine Relation zwischen Spannung und Stromstarke dar (Abb. 3.1).

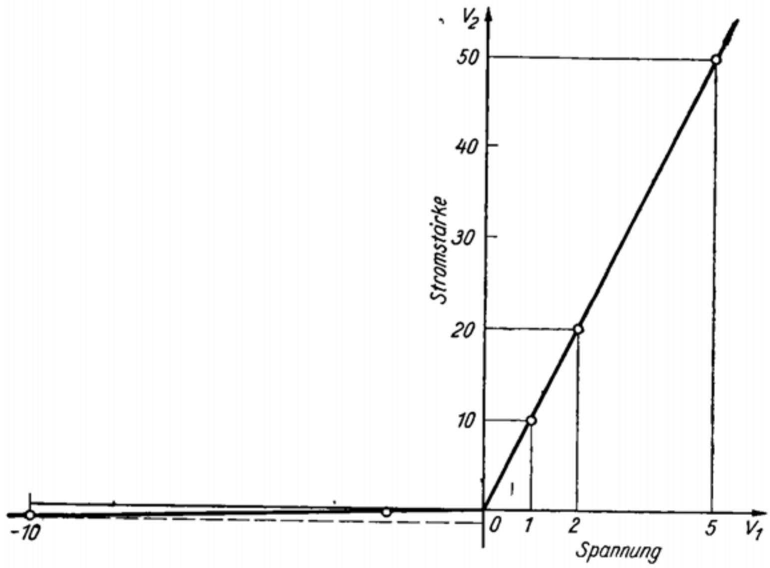

Abb. 3.1. Messungen an einer Diode

Eine zweistellige Relation in X heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie den folgenden drei Forderungen genugt:

1. $(\forall\, x)_X\, (x\,R\,x)$, [1])
2. $(\forall\, x)_X\, (\forall\, y)_Y\, (x\,R\,y \to y\,R\,x)$,
3. $(\forall\, x)_X\, (\forall\, y)_Y\, (\forall\, z)_Z\, (x\,R\,y$ und $y\,R\,z \to x\,R\,z)$.

Die erste Forderung verlangt, daß jedes Element von X zu sich selbst in dieser Relation steht. In diesem Fall ist die Relation *reflexiv.* Die zweite Bedingung

[1]) Steht als Abkurzung fur die ausfuhrlichere Notierung

$$\forall\, x \in X \to x\,R\,x\,.$$

fordert, daß die Relation *symmetrisch* ist. Ist die dritte Bedingung erfüllt, so ist die Relation *transitiv*. Beispielsweise ist die in der Menge der Dreiecke in der Ebene definierte Relation „ist kongruent zu" eine Äquivalenzrelation; denn sie erfullt die drei obigen Forderungen

Die in einer Menge von aufgestellten Wachposten definierte Relation „steht in Rufweite von" hat zwar die Eigenschaft der Reflexivitat und (bei bestimmten physikalischen Eigenschaften) der Symmetrie, aber nicht die der Transitivitat (Abb. 3.2).

Die in $Q = \{a, b, c, d\}$ durch

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$$

definierte Binarrelation ist eine Äquivalenzrelation. Daß Reflexivität und Symmetrie vorliegen, ist sofort zu erkennen. Die transitive Eigenschaft ergibt sich aus der Tatsache, daß mit (a, b) und (b, c) auch (a, c) mit (a, c) und (c, b) auch (a, b) und schließlich mit (b, c) und (c, a) auch (b, a) Elemente der Teilmenge $R \subset Q \times Q$ sind.

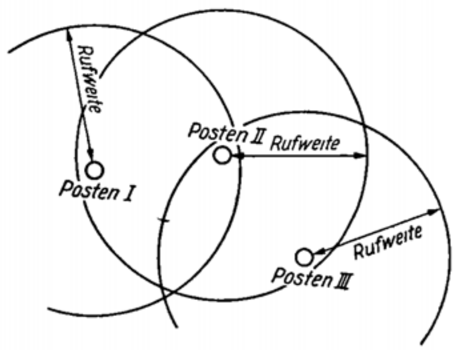

Abb. 3.2. Die Relation. . . . steht in Rufweite von . . . als Beispiel einer nichttransitiven Relation

Es sei R eine Äquivalenzrelation in X. Dann gibt R Veranlassung zu einer Zerlegung von X in zueinander fremde Teilmengen — man spricht von *Äquivalenzklassen* —, so daß jedes Element von X in einer und nur einer Klasse zu liegen kommt.

So wird im obigen Beispiel $Q = \{a, b, c, d\}$ in die Äquivalenzklassen $[a, b, c]$ und $[d]$ zerlegt.

Ist eine Relation symmetrisch und transitiv, so ist sie auch reflexiv Denn aus der Relation aRb folgt wegen der Symmetrie bRa und infolge der geforderten Transitivitat dann auch aRa. Mit anderen Worten: Es gibt keine nichtreflexive, symmetrische und transitive Relation, wenn alle Elemente der Menge in Relation stehen.

Sind R_1 und R_2 zwei Binarrelationen in X, so definieren wir die aus R_1 und R_2 *zusammengesetzte Relation* $(R_1 R_2)$ durch

$$x\,(R_1\,R_2)\,y \underset{\mathrm{Df}}{=} (\exists\, z)_X\,(x\,R_1\,z \text{ und } z\,R_2\,y)\,.$$

Beispiel: R_1 sei die Relation „ist Bruder von“,

R_2 die Relation „ist Elternteil von“.

Dann bedeutet $(R_1 R_2)$ die Relation „ist Onkel von“ (Abb. 3.3).

Man kann die *Systemtheorie* dadurch zu charakterisieren versuchen, daß man zu ihr gehorige und schon weitgehend entwickelte spezielle Zweige aufzahlt, wie Theorie der Steuerung und Regelung, Automatentheorie, Informationstheorie, Algorithmentheorie, Spieltheorie usw. Ein anderer allgemeiner Zugang zur Systemtheorie geht uber ihre Definition als Theorie formaler, d. h. hier mathematischer Modelle von realen oder gedanklichen Systemen.

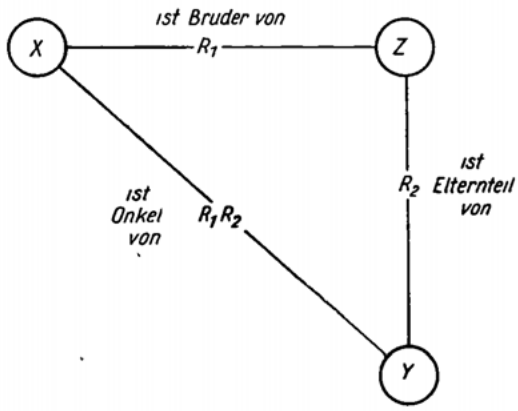

Abb. 3.3. Beispiel einer zusammengesetzten Relation

Dabei zeigt das Studium von Umwelterscheinungen zwei Aspekte, einen nichtformalen Aspekt, bei dem Begriffe wie Bedeutung, Interpretation, Objektivitat, Bewertung usw. eine Rolle spielen, und einen formalen Aspekt, bei dem es um die Erfassung von Formen (Strukturen) geht, in denen die Beziehungen zwischen den Eigenschaften in Erscheinung treten. Die weiteren Betrachtungen beziehen sich nur auf den formalen Aspekt. Sie gehen von zwei Axiomen aus:

1. Eine Theorie über ein Umweltereignis (Phänomen) basiert stets auf einem Bild; dieses Bild werde *Modell* genannt

2. Alle formalen Aspekte eines Modells konnen mathematisch durch Relationen dargeboten werden, ohne daß dabei zusatzliche Einschrankungen eingefuhrt werden mussen. Die Gesamtheit der dabei auftretenden Relationen werde *System* genannt.

Im Rahmen der Naturwissenschaften besteht eine Theorie aus einer Menge von Aussagen über das Phanomen, das unter Beobachtung steht. Dabei treten in den Aussagen Namen und Funktoren auf. Die Namen beinhalten dabei bestimmte Objekte oder Eigenschaften (Attribute), die dem jeweiligen Objekt zukommen, oder Formen (Werte), unter denen eine bestimmte Eigenschaft auftritt. Die Funktoren stellen Beziehungen zwischen Großen dar, die durch Namen gekennzeichnet sind. Wir betrachten die sich im Rahmen der Systemtheorie abspielenden Vorgange eingehender:

a) *Bildung eines formalen Systems*

α) Es werden fur das Phanomen, auf das sich die betreffende Untersuchung bezieht, die Attribute $A_1, \ldots, A_n$ ausgewahlt, die beobachtet werden sollen.

β) Fur jedes dieser Attribute A_i wird eine Menge V_i von Werten als Bereich festgelegt.

γ) Die als Ergebnis eines Experiments auftretende Kombination wird als n-Tupel notiert.

δ) Durch Zusammenfassung aller n-Tupel wird das formale System S als Relation gewonnen.

$$S \subset V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n .$$

Beispiel 1. Wachstumszyklus der Hydra (Sußwasserpolyp-Nesseltier) [50]

α) Attribute, die beobachtet werden sollen:

A_1 — Nahrung,
A_2 — Sauerstoffzufuhr,
A_3 — Temperatur,
A_4 — Tageslänge,
A_5 — Zustand des Organismus.

β) Festlegung der Wertemengen fur $A_1, \ldots, A_5$.

A_1: $V_1 = \{v_{11}, v_{12}\}$ — v_{11} = Nahrung ausreichend, v_{12} = Nahrung unzureichend

A_2: $V_2 = \{v_{21}, v_{22}\}$ — v_{21} = O_2-Zufuhr ausreichend, v_{22} = O_2-Zufuhr unzureichend

A_3: $V_3 = \{v_{31}, v_{32}, v_{33}\}$ — v_{31} = Unter-, v_{32} = Normal-, v_{33} = Über- } Temperatur

A_4: $V_4 = \{v_{41}, v_{42}, v_{43}\}$ — v_{41} = kurze, v_{42} = mittlere, v_{43} = lange } Tageslänge

A_5: $V_5 = \{v_{51}, v_{52}, v_{53}, v_{54}\}$ — v_{51} = Individuum tot, v_{52} = Reproduktion ungeschlechtl., v_{53} = weibliches Individuum, v_{54} = männliches Individuum.

γ) Jedes Experiment liefert ein Quintupel

$$s_r = \{v_{1\,i_r}, v_{2\,j_r}, v_{3\,k_r}, v_{4\,l_r}, v_{5\,m_r}\}, \quad r = 1, 2, \ldots, N \quad \text{mit}$$
$$i_r, j_r \in \{1, 2\},$$
$$k_r, l_r \in \{1, 2, 3\},$$
$$m_r \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

δ) $S = \{s_1, \ldots, s_N\}$,
$S \subset V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_5$.

Beispiel 2. Modell fur die Steuerung der Atmung [50]

α) Großen: CO_2-Konzentration

A_1 — in den Lungenbläschen,
A_2 — bei der Einatmung,
A_3 — bei der Ausatmung,
A_4 — im venosen Blutstrom,
A_5 — im arteriellen Blutstrom.

β) Alle Großen sind Zeitfunktionen uber das Experimentierintervall

$$T = \{t | t_1 \leqq t \leqq t_2\} ,$$
$$V_i = \{v_i | v_i = x_i(t) ; t \in T\} \qquad \text{fur} \quad i = 1, 2, \ldots, 5 .$$

γ) $$s = \bigl(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)\bigr) .$$

δ) $$S \subset V \times V \times V \times V \times V .$$

b) *Gewinnung einer konstruktiven Beschreibung des formalen Systems*

Damit das nun in Form von Relationen vorliegende System anwendbar ist, strebt man im allgemeinen eine konstruktive Beschreibung in dem Sinn an, daß die Werte einzelner Attribute aus den Werten der ubrigen Attribute gewonnen werden können; man spricht von einer Input-Output-Spezifikation. Insbesondere bei numerischen Relationen geschieht eine solche konstruktive Beschreibung vielfach mittels Gleichungen bzw. Differentialgleichungen.

Das oben behandelte System ,,Diode" (Abb. 3.1) legt eine Beschreibung in Gleichungsform nahe:

$$v_2 = \begin{cases} 10\, v_1 & \text{fur } v_1 \geqq 0 , \\ 0.1\, v_1 & \text{für } v_1 \leqq 0 . \end{cases}$$

Eine konstruktive Input-Output-Beschreibung fur das Modell ,,Steuerung der Atmung" kann durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dx_1}{dt} = k_1 \, (k_2 \, x_2 + x_4 - x_3 - x_5)$$

mit den Konstanten k_1 und k_2 erfolgen.

Bei nichtnumerischen Problemen greift man zum Kalkul der mehrwertigen Logik, zu Algorithmen und zur Simulation auf Rechenmaschinen.

Nicht immer wird eine Beschreibung eines Systems in Input-Output-Form angemessen sein. Eine großere Einsicht in die sich im Rahmen des Systems abspielenden Prozesse kann u. U. dadurch gewonnen werden, daß man das System als ein ,,zielsuchendes" System beschreibt (teleologische Beschreibung). Tragend treten dabei Begriffe wie Anpassung, Steuerung und Ruckfuhrung auf.

So kann beispielsweise das System zum Phanomen der Reflexion und Brechung von Strahlen sehr effektiv durch das Extremalprinzip der ,,kurzesten Zeit" beschrieben werden. Gerade komplexe biologische Prozesse durften sich wohl nur teleologisch beschreiben lassen, wobei sich die Prozesse vielfach auf mehreren Ebenen verteilt mit mehreren Zielsetzungen abspielen. Im allgemeinen sind für ein und dasselbe System Beschreibungen in verschiedenen Formen moglich.

Man unterscheidet daher das aus einer Modellvorstellung gewonnene System und die gewahlte Beschreibung des Systems.

Um bei einem nichtnumerischen System zu einer anschaulichen Beschreibung zu gelangen, kann man zu einer graphischen Darstellung greifen. Endliche, abzahlbar unendliche Mengen und Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums lassen sich eineindeutig durch Punktmengen reprasentieren. Eine zwischen zwei solchen Mengen bestehende Relation laßt sich dann dadurch darstellen, daß man die Punkte eines Elementepaares, das der Relation genügt, jeweils durch einen Pfeil (= gerichtete Kante) verbindet. Die Gesamtheit der so zustande kommenden Pfeile läßt sich im Sinn einer *Abbildung* interpretieren. Alle Punkte, von denen Pfeile ausgehen, bilden die Originalmenge, alle Punkte, in die Pfeile einmünden, die Bildmenge. Von besonderem Interesse sind eindeutige Abbildungen: jedem Punkt der Originalmenge ist eindeutig ein Punkt der Bildmenge zugeordnet.

Wir betrachten das folgende Beispiel.

Ausgehend von den Mengen

$$\mathfrak{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l\} ,$$
$$\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

sei das System S durch die Relation

$$S = \big((a, \alpha), (b, \alpha), (c, \beta), (d, \alpha), (e, \beta), (f, \gamma), (g, \gamma), (h, \beta), (i, \gamma), (k, \gamma), (l, \gamma)\big)$$

gegeben. Abb. 3.4 gibt eine Beschreibung des Systems durch Abbildung. Da hier nicht jedes Element der Bildmenge $\mathcal{A}$ als Bildpunkt eines Punktes der Originalmenge $\mathfrak{A}$ auftritt, spricht man von einer Abbildung der Menge $\mathfrak{A}$ *in* die Menge $\mathcal{A}$.

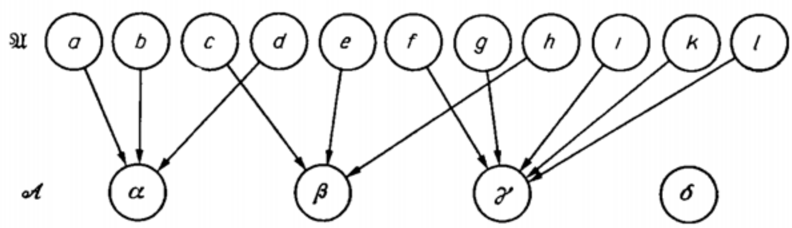

Abb. 3.4. Darstellung eines Systems durch Abbildung
Abbildung von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{A}$

Die Abb. 3.5 zeigt (eindeutige) Abbildung einer Menge $\mathfrak{B}$ *auf* eine Menge $\mathfrak{C}$; hier ist jedes Element der Bildmenge Bild mindestens eines Originalpunktes.

Eineindeutig (= umkehrbar eindeutig) heißt eine Abbildung, wenn jedem Originalpunkt eindeutig ein Bildpunkt und jedem Bildpunkt eindeutig ein Originalpunkt zugeordnet ist (Abb. 3.6).

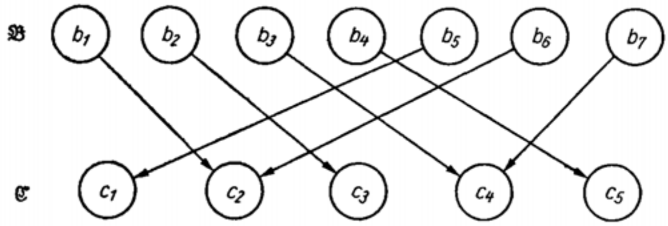

Abb. 3.5. Abbildung von 𝔅 auf ℭ

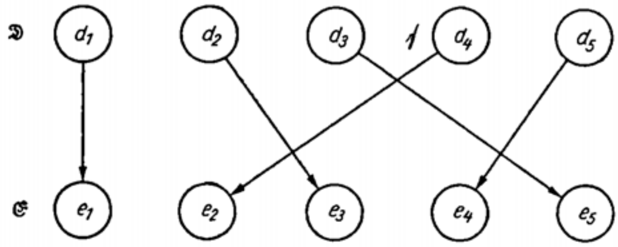

Abb. 3.6. Beispiel einer eineindeutigen Abbildung

So wie bei einer Produktmenge die beiden Mengen identisch sein können, so kann auch eine Abbildung in bzw. auf sich selbst erfolgen. Ist $\mathfrak{A}$ wieder die obige Menge

$$\mathfrak{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l\} \ ,$$

so ist durch die folgende Untermenge R von $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, b), (g, c), (h, i), (i, k), (k, i), (l, k)\}$$

eine bestimmte zweistellige Relation R und damit ein bestimmtes System S festgelegt. Dieses kann auch durch Abbildung beschrieben werden (Abb. 3.7).

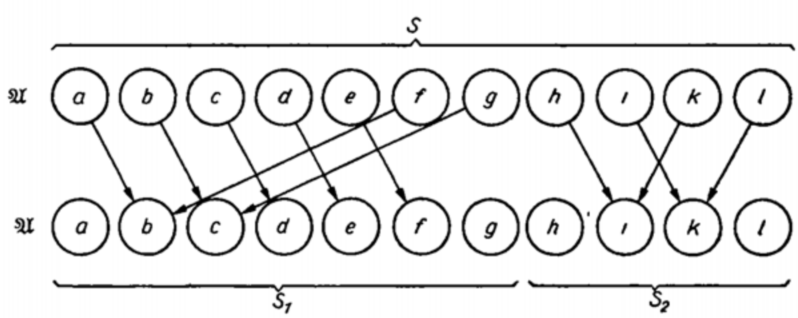

Abb. 3.7. Beispiel eines Systems $S \subset \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ mit Teilsystemen S_1 und S_2

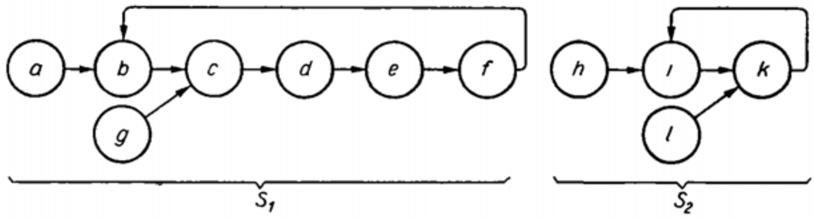

Abb. 3.8. Abgeschlossenes dynamisches System

Wie man aus dieser Beschreibung des Systems $S \subset \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ leicht entnimmt, kann man es als einen aus zwei Teilsystemen bestehenden Komplex ansehen. Das eine Teilsystem S_1 spielt sich gemaß einer Relation R_1 in $\mathfrak{A}^* \times \mathfrak{A}^*$ ab mit

$$\mathfrak{A}^* = \{a, b, c, d, e, f, g\} ,$$

das zweite Teilsystem S_2 gemaß einer Relation R_2
in $\mathfrak{A}^{**} \times \mathfrak{A}^{**}$ mit

$$\mathfrak{A}^{**} = \{h, i, k, l\} .$$

Hat die Relation R die Bedeutung einer Nachfolger-Beziehung, so wird man zur Beschreibung des entsprechenden Konsekutivprozesses des abgeschlossenen dynamischen Systems S eine graphische Darstellung nach Abb. 3.8 heranziehen.

Auch hier ist zu erkennen, daß eine aus zwei Teilsystemen bestehende Struktur vorliegt.

Abschließend geben wir mit Abb. 3.9 eine schematische Darstellung der Systemtheorie im Rahmen einer Fachwissenschaft.

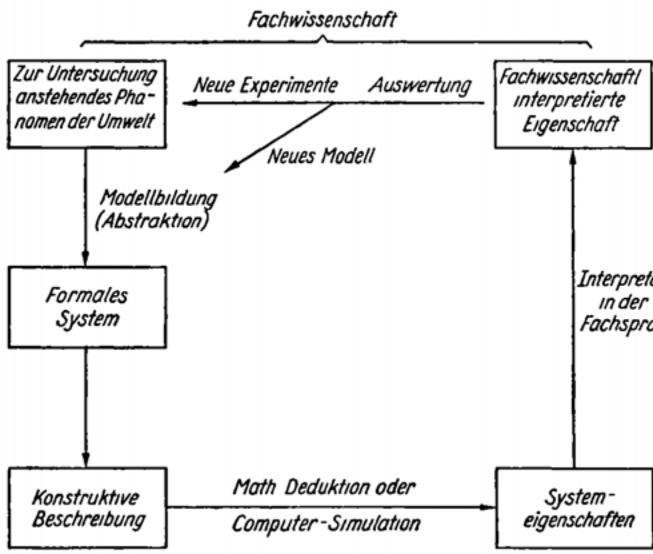

Abb. 3.9. Allgemeines Schema der Systemtheorie im Rahmen einer Fachwissenschaft

Bei der Schaffung einer Theorie uber ein Umweltereignis steht zu Anfang ein Wechselspiel zwischen experimenteller Tatigkeit und abstrahierender Modellbildung. Daraus resultiert ein formales System in Form von gewonnenen Relationen. Um dieses formale System und damit die zugrunde liegende Modellvorstellung hinsichtlich ausreichender Übereinstimmung mit der Umwelt prüfen zu konnen, muß das formale System durch eine konstruktive Beschreibung in eine zur Anwendung geeignete Form gebracht werden. Sodann können durch Methoden der mathematischen Deduktion oder durch Simulation auf einem Rechenautomaten die Eigenschaften erfaßt werden, die dem formalen System eigen sind. Erst die Interpretation dieser Eigenschaften in der spezifischen Sprache der betreffenden Fachwissenschaft ermoglicht eine Auswertung, die durch gezielte Experimente an dem interessierenden Phänomen Bestatigung oder Ablehnung fur das gewählte Modell zu gewinnen sucht. Daraus kann die Notwendigkeit resultieren, das ursprüngliche Modell zu korrigieren und mit einem weiteren Durchlauf den iterativen Prozeß der Problemlösung fortzusetzen.

4. Autonomes System. Isomorphie, Homomorphie, Modell

Im vorigen Abschnitt haben wir eine eindeutige Abbildung einer Menge in sich als Beschreibung eines abgeschlossenen dynamischen determinierten Systems interpretiert. Die Elemente der Menge wurden dabei als die möglichen Zustande des Systems gedeutet. Das System ist im allgemeinen nicht in einem statischen Gleichgewicht, es zeigt dynamisches Verhalten: Im zeitlichen Ablauf treten Veranderungen hinsichtlich seines Zustands auf. Diese Zustandsanderungen werden hier als diskret angesetzt; sie treten ohne äußeren Einfluß auf und folgen einander in Zeitintervallen, die dem System eigen sind. Man spricht von einem abgeschlossenen oder autonomen System. Daruber hinaus wird das System als determiniert bezeichnet; dies bedeutet, daß der Folgeprozeß eindeutig abläuft.

Wir wollen nun automone Systeme hinsichtlich eines evtl. vollstandigen oder auch teilweisen Gleichverhaltens betrachten. Dabei sind wir nicht an irgendwelchen Bedeutungen interessiert, die den Zustanden zukommen, noch an den Bezeichnungen, durch die die Zustande identifiziert werden; auch die Längen der Zeitintervalle, mit denen die einzelnen Zustande aufeinander folgen, sehen wir als unwesentlich an. Unsere Aufmerksamkeit richtet sich allein auf die Folge der Zustande.

Wir betrachten zunächst zwei abgeschlossene Systeme, die in diesem Sinn vollständiges Gleichverhalten zeigen, und definieren:

> Zwei abgeschlossene Systeme sind zueinander isomorph, wenn eine umkehrbar eindeutige Abbildung (Transformation) beider Zustandsmengen möglich ist, so daß mit der Zuordnung zweier Zustände auch deren Folgezustände einander zugeordnet sind (Abb. 4.1).

Bei der Schaffung einer Theorie uber ein Umweltereignis steht zu Anfang ein Wechselspiel zwischen experimenteller Tatigkeit und abstrahierender Modellbildung. Daraus resultiert ein formales System in Form von gewonnenen Relationen. Um dieses formale System und damit die zugrunde liegende Modellvorstellung hinsichtlich ausreichender Übereinstimmung mit der Umwelt prüfen zu konnen, muß das formale System durch eine konstruktive Beschreibung in eine zur Anwendung geeignete Form gebracht werden. Sodann können durch Methoden der mathematischen Deduktion oder durch Simulation auf einem Rechenautomaten die Eigenschaften erfaßt werden, die dem formalen System eigen sind. Erst die Interpretation dieser Eigenschaften in der spezifischen Sprache der betreffenden Fachwissenschaft ermoglicht eine Auswertung, die durch gezielte Experimente an dem interessierenden Phänomen Bestatigung oder Ablehnung fur das gewählte Modell zu gewinnen sucht. Daraus kann die Notwendigkeit resultieren, das ursprüngliche Modell zu korrigieren und mit einem weiteren Durchlauf den iterativen Prozeß der Problemlösung fortzusetzen.

4. Autonomes System. Isomorphie, Homomorphie, Modell

Im vorigen Abschnitt haben wir eine eindeutige Abbildung einer Menge in sich als Beschreibung eines abgeschlossenen dynamischen determinierten Systems interpretiert. Die Elemente der Menge wurden dabei als die möglichen Zustande des Systems gedeutet. Das System ist im allgemeinen nicht in einem statischen Gleichgewicht, es zeigt dynamisches Verhalten: Im zeitlichen Ablauf treten Veranderungen hinsichtlich seines Zustands auf. Diese Zustandsanderungen werden hier als diskret angesetzt; sie treten ohne äußeren Einfluß auf und folgen einander in Zeitintervallen, die dem System eigen sind. Man spricht von einem abgeschlossenen oder autonomen System. Daruber hinaus wird das System als determiniert bezeichnet; dies bedeutet, daß der Folgeprozeß eindeutig abläuft.

Wir wollen nun automone Systeme hinsichtlich eines evtl. vollstandigen oder auch teilweisen Gleichverhaltens betrachten. Dabei sind wir nicht an irgendwelchen Bedeutungen interessiert, die den Zustanden zukommen, noch an den Bezeichnungen, durch die die Zustande identifiziert werden; auch die Längen der Zeitintervalle, mit denen die einzelnen Zustande aufeinander folgen, sehen wir als unwesentlich an. Unsere Aufmerksamkeit richtet sich allein auf die Folge der Zustande.

Wir betrachten zunächst zwei abgeschlossene Systeme, die in diesem Sinn vollständiges Gleichverhalten zeigen, und definieren:

> Zwei abgeschlossene Systeme sind zueinander isomorph, wenn eine umkehrbar eindeutige Abbildung (Transformation) beider Zustandsmengen möglich ist, so daß mit der Zuordnung zweier Zustände auch deren Folgezustände einander zugeordnet sind (Abb. 4.1).

Um zu sichern, daß durch eine eineindeutige Abbildung der beiden Zustandsmengen mit der Zuordnung zweier Zustände auch paarweise die Folgezustände für alle Stufen einander zugeordnet werden, ist notwendig und hinreichend, daß dabei die definierende Relation des einen Systems in die definierende Relation des anderen Systems übergeführt wird.

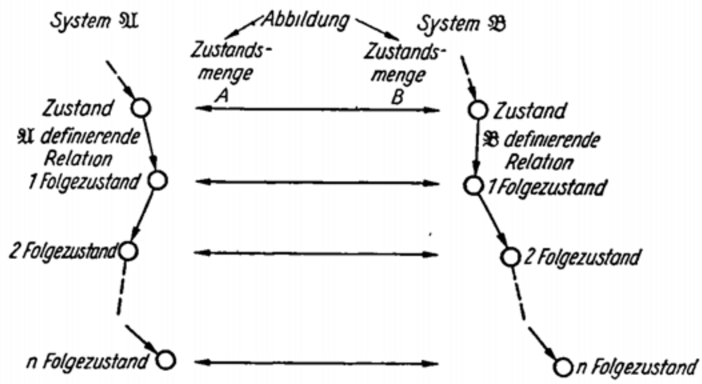

Abb. 4.1. Isomorphe Abbildung

Abb. 4.2 gibt ein Beispiel für zwei zueinander isomorphe Systeme; Abb. 4.3 bietet ein Gegenbeispiel; eine isomorphe Abbildung kann es hier nicht geben, da das erste System einen Zustand enthält, der zu sich selbst Folgezustand und somit stationärer Zustand ist, das zweite System dagegen keinen solchen Zustand besitzt.

Wir lassen jetzt die Forderung, daß die Transformation umkehrbar sei, fallen und definieren:

> Läßt sich die Zustandsmenge eines abgeschlossenen Systems eindeutig auf die Zustandsmenge eines anderen abgeschlossenen Systems

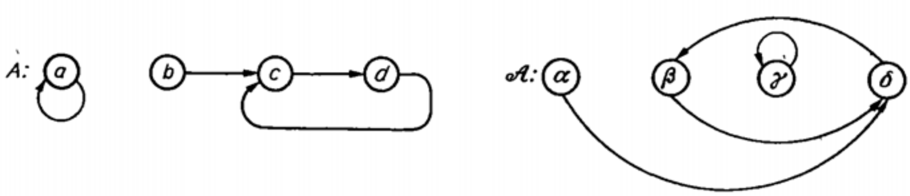

Abb. 4.2. Beispiel einer isomorphen Abbildung

$$A: \frac{a\ b\ c\ d}{a\ c\ d\ c} \qquad A': \frac{\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta}{\delta\ \delta\ \gamma\ \beta}$$

umkehrbar eindeutige Transformation

$a \leftrightarrow \gamma$
$b \leftrightarrow \alpha$
$c \leftrightarrow \delta$
$d \leftrightarrow \beta$

abbilden, so daß mit der Zuordnung zweier Zustande auch deren Folgezustande zugeordnet sind, so spricht man von einer *homomorphen* Abbildung.

Abb. 4.3. Beispiel zweier autonomer Systeme, zwischen denen keine isomorphe Abbildung existiert

$A: \dfrac{a\ b\ c\ d}{a\ c\ d\ c} \qquad A': \dfrac{\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta}{\delta\ \delta\ \alpha\ \beta}$

Abb. 4.4 gibt ein Beispiel fur eine homomorphe Abbildung. Die vermittelnde Abbildung ist eindeutig, aber nicht umkehrbar eindeutig. Sie transformiert die das System S_1 definierende Relation

$$\frac{a\ b\ c\ d\ e}{e\ b\ a\ b\ e} \quad \text{in} \quad \frac{K\ M\ L\ K\ M}{M\ M\ K\ M\ M}, \ \text{d. h. in} \ \frac{K\ M\ L}{M\ M\ K}.$$

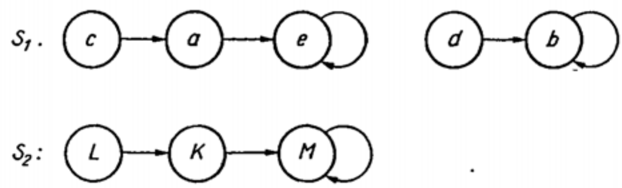

Abb. 4.4. Beispiel einer homomorphen Abbildung

$S_1: \dfrac{a\ b\ c\ d\ e}{e\ b\ a\ b\ e} \qquad S_2: \dfrac{K\ M\ L}{M\ M\ K}$

$a \to K$
$b \to M$
$c \to L$
$d \to K$
$e \to M$

Vereinigt man anderseits die Zustände von S_1 miteinander, die gleichen Zuständе von S_2 zugeordnet werden, so entsteht eine Vereinfachung von S_1, die zu S_2 isomorph ist.

$$S_1': \begin{aligned} (a, d) &= a' \\ (b, e) &= b' \\ c &= c' \end{aligned} \qquad \frac{a'\ b'\ c'}{b'\ b'\ a'}$$

isomorphe Abbildung

S_1'	S_2
a'	K
b'	M
c'	L

Man beachte aber, daß nicht jede Vereinfachung im Sinne einer Vereinigung von Zuständen wieder zu einem abgeschlossenen determinierten System führt.

Vereinigen wir beispielsweise im obigen System S_1

$$(a, b, c) = P$$

und

$$(d, e) = Q\,,$$

so entsteht aus der Nachfolgerelation von S_1 die Relation

$$\frac{P\;P\;Q\;Q}{Q\;P\;P\;Q}$$

Ein Beobachter, der das System S_1 unter verschiedenen Anfangsbedingungen beobachtet, aber nur P und Q unterscheiden kann, würde im Lauf seiner Experimente zu den folgenden Beobachtungsreihen kommen:

$$P \to P \to P \to P \to P \to P \to \ldots$$
$$P \to P \to Q \to Q \to Q \to Q \to \ldots$$
$$P \to Q \to Q \to Q \to Q \to Q \to \ldots$$
$$Q \to Q \to Q \to Q \to Q \to Q \to \ldots$$
$$Q \to P \to P \to P \to P \to P \to \ldots$$

Wenn er nach wie vor an seiner Hypothese festhielte, daß ein determiniertes System vorliege, so müßte er aus seinen Ergebnissen schließen, daß es drei unterschiedliche Zustände P_1, P_2, P_3 und zwei unterschiedliche Zustände Q_1, Q_2 geben müsse, die er allerdings bis dahin nur aus der Reihe ihrer Folgezustände unterscheiden konnte

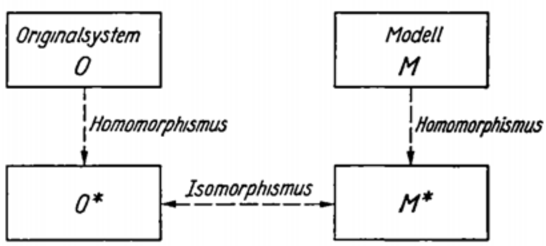

Abb. 4.5. Modell

Eng mit dem Begriff des Homomorphismus hängt der Begriff des Modells zusammen. Wir definieren:

> M heiße *Modell* des Originalsystems O, wenn es zu M ein homomorphes System M^* und zu O ein homomorphes System O^* gibt, so daß M^* und O^* zueinander isomorph sind (Abb. 4.5).

Man beachte, daß es im allgemeinen nur ein Teilverhalten des Originalsystems ist, das durch Untersuchungen am Modell erfaßt werden kann, und daß nicht jedes Verhalten, das am Modell festgestellt wird, auch im Originalsystem vorhanden sein muß. Wir betrachten ein Beispiel (Abb. 4.6).

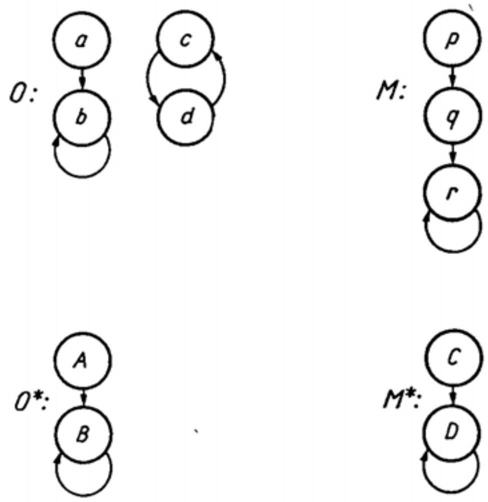

Abb. 4.6. Originalsystem und Modell

$O: \frac{a \; b \; c \; d}{b \; b \; d \; c}$ $\qquad M: \frac{p \; q \; r}{q \; r \; r}$

homomorphe Abbildung

$a \to A$
$b \to B$
$c \to B$
$d \to B$

homomorphe Abbildung

$p \to C$
$q \to D$
$r \to D$

$O^*: \frac{A \; B}{B \; B}$ $\qquad M^*: \frac{C \; D}{D \; D}$

isomorphe Abbildung

$A \leftrightarrow C$
$B \leftrightarrow D$

Man kann die Vereinfachungen unter Beibehaltung eines Systemcharakters noch weiter treiben:

$A \to R \qquad C \to S$

$B \to R \qquad D \to S$

$O^{**}: \frac{R}{R} \qquad M^{**}: \frac{S}{S}$

O^{**} ist isomorph zu M^{**}.

Damit erreicht die Modellbildung ihren niedrigsten Grad: Originalsystem und Modell haben nur noch in einem Verhalten Übereinstimmung, nämlich in der Existenz.

Die Eigenschaften eines Modells sind teils unmittelbare Folgen der am Originalsystem erfaßten experimentellen Daten, auf Grund derer das Modell geschaffen wurde, oder sind willkurlicher Natur. Ein Modell, das nur Eigenschaften der ersten Art besitzt, heißt minimales Modell. Ein minimales Modell ist isomorph zu einem homomorphen Abbild des Originalsystems. Alle Versuchsergebnisse an einem minimalen Modell haben Realitat am Originalsystem, wenn man dieses einer bestimmten Abstraktion unterwirft.

5. Systeme mit Eingang. Input-Systeme

Ein System werde als eine Relation

$$S \subset V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$$

eingeführt.

Wir wollen nun annehmen, daß die an dieser Relation beteiligten Größen zwei zusammengesetzte Objekte beinhalten, die bei dem zur Untersuchung anstehenden Phänomen als Eingang und Ausgang fungieren. Wir betrachten somit ein sogenanntes Input-Output-System:

$$S \subset X \times Y \,.$$

Es ist durch das Experiment nichts darüber bekannt, wie der betrachtete Zusammenhang zustande kommt. Abb. 5.1 charakterisiert diese Situation als *black box*.

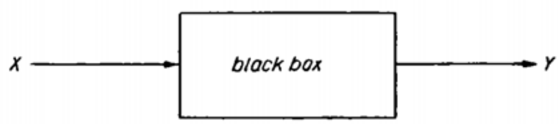

Abb. 5.1. Input-Output-System als black box

Liegt dabei der Fall vor, daß auf eine bestimmte Eingangskonfiguration X eine bestimmte Ausgangskonfiguration Y auftritt, und zwar unabhängig von dem, was zuvor als „Vorgeschichte" eingegeben wurde, so spricht man von einem *kombinatorischen System*. Eine solche eindeutige Zuordnung bildet ein Steuersystem. Mit dem Fall diskreter Ein- und Ausgangsgrößen (z. B. Schalter- und Gluhlampenfeld) werden wir uns im Rahmen kombinatorischer Schaltkreise noch ausführlich zu beschaftigen haben. Dabei steht als wesentliche Frage, wie die Schalterverbindungen im Innern der black box durchzuführen sind, um das gewünschte Schalter-Lichter-Muster zu realisieren.

Wir wenden uns nun Systemen zu, bei denen die Ausgangsgröße nicht von dem momentanen Wert der Eingangsgroße allein bestimmt wird, bei denen vielmehr die Vorgeschichte einspielt.

Die Eigenschaften eines Modells sind teils unmittelbare Folgen der am Originalsystem erfaßten experimentellen Daten, auf Grund derer das Modell geschaffen wurde, oder sind willkurlicher Natur. Ein Modell, das nur Eigenschaften der ersten Art besitzt, heißt minimales Modell. Ein minimales Modell ist isomorph zu einem homomorphen Abbild des Originalsystems. Alle Versuchsergebnisse an einem minimalen Modell haben Realitat am Originalsystem, wenn man dieses einer bestimmten Abstraktion unterwirft.

5. Systeme mit Eingang. Input-Systeme

Ein System werde als eine Relation

$$S \subset V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$$

eingeführt.

Wir wollen nun annehmen, daß die an dieser Relation beteiligten Größen zwei zusammengesetzte Objekte beinhalten, die bei dem zur Untersuchung anstehenden Phänomen als Eingang und Ausgang fungieren. Wir betrachten somit ein sogenanntes Input-Output-System:

$$S \subset X \times Y .$$

Es ist durch das Experiment nichts darüber bekannt, wie der betrachtete Zusammenhang zustande kommt. Abb. 5.1 charakterisiert diese Situation als *black box*.

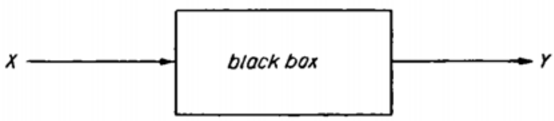

Abb. 5.1. Input-Output-System als black box

Liegt dabei der Fall vor, daß auf eine bestimmte Eingangskonfiguration X eine bestimmte Ausgangskonfiguration Y auftritt, und zwar unabhängig von dem, was zuvor als „Vorgeschichte" eingegeben wurde, so spricht man von einem *kombinatorischen System.* Eine solche eindeutige Zuordnung bildet ein Steuersystem. Mit dem Fall diskreter Ein- und Ausgangsgrößen (z. B. Schalter- und Gluhlampenfeld) werden wir uns im Rahmen kombinatorischer Schaltkreise noch ausführlich zu beschaftigen haben. Dabei steht als wesentliche Frage, wie die Schalterverbindungen im Innern der black box durchzuführen sind, um das gewünschte Schalter-Lichter-Muster zu realisieren.

Wir wenden uns nun Systemen zu, bei denen die Ausgangsgröße nicht von dem momentanen Wert der Eingangsgroße allein bestimmt wird, bei denen vielmehr die Vorgeschichte einspielt.

Bei kontinuierlichen Systemen beschränken wir uns auf die sogenannten *linearen Systeme*: Die Werte der als Zeitfunktion zu betrachtenden Eingangsgröße summieren sich in ihrer Einwirkung auf, wobei den zeitlich weiter zurückliegenden Werten ein ihrer geringeren Aktualität entsprechend geringeres Gewicht beigemessen wird. Dieser zeitabhängige Gewichtsfaktor beschreibt das System als black box. Er enthält nur die durch das Experiment erfaßbaren Beziehungen zwischen Eingang und Ausgang.

Bilden die Eingangs- und Ausgangsgrößen Vektoren, so haben die entsprechenden Zeitfunktionen vektoriellen Charakter, als Gewicht tritt eine Matrix auf:

$$\mathfrak{y}(t) = \int_0^t \mathfrak{W}\,(t-\tau)\cdot\mathfrak{x}(\tau)\,d\tau\,.$$

Eine „Realisierung" eines durch eine solche Input-Output-Beziehung charakterisierten Systems muß der Abhängigkeit des Systemgeschehens von der Vorgeschichte durch eine geeignete Struktur innerhalb des „schwarzen Kastens" Rechnung tragen, wobei sie einen weiteren als „Zustand" zu interpretierenden Vektor einführt. Mathematisch bedeutet eine solche Realisierung, der Input-Output-Beziehung eine gleichwertige Beschreibung in Form eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gegenüberzustellen, wobei als Variable Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgröße auftreten. Um dabei eine Realisierung im Sinne eines minimalen Systems zu erreichen, ist für den Zustandsraum eine möglichst niedrige Dimensionszahl anzustreben. Die Behandlung dieses allgemeinen Problems übersteigt den für dieses Werk gesetzten Rahmen. Der interessierte Leser wird auf die Originalliteratur verwiesen [26, 33, 34].

Wir behandeln nur den einfachsten Fall, daß ein eindimensionaler Zustandsraum ausreicht.

Ist z die Zustandsvariable, dann ist durch

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -a\cdot z + b\cdot x\,, \\ y = c\cdot z \end{cases}$$

die Realisierung eines linearen Systems gegeben. Der Lösungsansatz

$$z = e^{-at}\cdot\varphi(t)$$

liefert für φ die Differentialgleichung

$$e^{-at}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = b\cdot x\,,$$

d. h.

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{+a\tau}\cdot b\cdot x(\tau)\,d\tau$$

und somit

$$z = \int_0^t e^{-a(t-\tau)}\cdot b\cdot x(\tau)\,d\tau\,.$$

Setzt man

$$W\,(t-\tau) = e^{-a(t-\tau)}\cdot c\cdot b\,,$$

so ergibt sich als Input-Output-Beschreibung

$$y(t) = \int_0^t W(t - \tau) \cdot x(\tau)\, d\tau .$$

Umgekehrt gilt, daß jedes System, das als black box durch ein

$$W(t - \tau) = C\, e^{-a(t-\tau)}$$

beschrieben wird, eine Realisierung in einem eindimensionalen Zustandsraum besitzt.

Wir gehen nun zu diskreten Systemen über, bei denen sich auf die gleiche Eingangsgroße je nach der Vorgeschichte eine unterschiedliche Ausgangsgröße einstellt. Wenn man berechtigt ist, an der Hypothese eines determinierten Systems feszuhalten, so wird man dieser scheinbaren Verletzung des Kausalitätsgesetzes dadurch begegnen, daß man dem System einen jeweils von der Vorgeschichte abhangigen „Zustand" beimißt, der zusammen mit der Eingangsgroße den Ausgang bestimmt. Dabei kann in einfachen Fallen die „Vorgeschichte" in den speziellen Prämissen der Versuchsausfuhrung liegen, so z. B. bei physiologischen Phanomenen in der Wahl der individuellen Versuchstiere. Eine allgemeinere Vorstellung wird sogar die Veranderlichkeit des Zustandes im Ablauf des Experimentes in Betracht ziehen. Wird somit der Ausgang eines Experimentes nicht mehr als eindeutige Funktion des Eingangs allein betrachtet, sondern als eine eindeutige Funktion zweier Argumente, namlich des Eingangs und des Zustandes, so wird daruber hinaus auch der Zustand als veränderlich angesehen und als Funktion ebenfalls des Eingangs und des vorhergehenden Zustandes angesetzt. So treten zur Beschreibung eines solchen *sequentiellen Systems* (abstrakten Automaten) zwei zweistellige Funktionen auf, die Ergebnis- und die Überfuhrungsfunktion. Das System ist durch drei diskrete endliche Mengen, namlich durch

$\mathfrak{X} = \{x\}$, die *Menge der Eingangswerte,*

$\mathfrak{Y} = \{y\}$, die *Menge der Ausgangswerte,*

$\mathfrak{Z} = \{z\}$, die *Menge der Zustande,*

und durch zwei Abbildungen, namlich durch die Überfuhrungsfunktion

$$f\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$$

und durch die Ergebnisfunktion

$$g\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y} .$$

sowie durch die Angabe eines *initialen Zustandes*

$$z_0 \in \mathfrak{Z}$$

bestimmt.

$$S = (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, f, g, z_0) .$$

Den sequentiellen Ablauf fugen wir in dieses mathematische Modell durch die folgende Interpretation der beiden Abbildungen ein:

$$\begin{cases} z_{t+1} := f(x_t, z_t) , \\ y_{t+1} := g(x, z) . \end{cases}$$

Dieser Interpretation liegt die Vorstellung eines Zeitablaufs in diskreten Schritten $0, 1, 2, \ldots, t, t+1, \ldots$ zugrunde. Der zu einem bestimmten Zeitpunkt t anstehende Eingangswert x_t bestimmt zusammen mit dem vorhandenen Zustand z_t einerseits den Zustand z_{t+1} zu dem folgenden Zeitpunkt, anderseits (praktisch) zeitlos den Ausgang y_t. Die Abb. 5.2 zeigt an einem Schema diese Zusammenhange. Ein Beispiel diene zur Erläuterung.

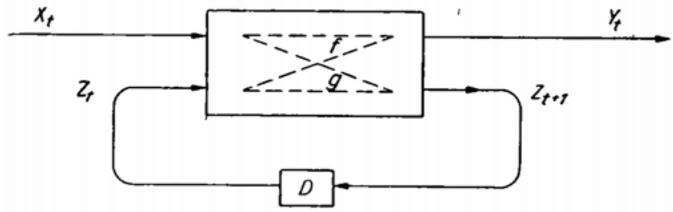

Abb. 5.2. Schema eines Automatenmodells von HUFFMAN
$x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$, $z \in \mathfrak{Z}$,
$z_{t+1} := f(x_t, z_t)$,
$y_t := g(x_t, z_t)$,
D-Verzogerung um einen Takt

Es sei

$\mathfrak{X} = \{\alpha, \beta\}$ die Menge der Eingangswerte,
$\mathfrak{Y} = \{0, 1\}$ die Menge der Ausgangswerte
und $\mathfrak{Z} = \{a, b, c, d\}$ die Menge der Zustande.

Die Überführungsfunktion sei durch

	a	b	c	d
α	a	c	d	a
β	b	d	c	c

und die Ergebnisfunktion durch

	a	b	c	d
α	0	1	1	0
β	1	0	1	0

gegeben. Abb. 5.3 zeigt den entsprechenden Zustandsgraphen.

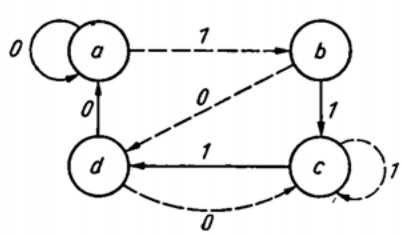

Abb. 5.3. Zustandsgraph (Erlauterung im Text)
$\longrightarrow \alpha$; $- - \rightarrow \beta$