Die Elemente

der

analytischen und ebenen

Trigonometrie.

Zunächst für das Bedürfniß zum Offizierexamen
in der Königl. Preußischen Armee bearbeitet

und

mit vielen Uebungsbeispielen versehen

von

Friedrich von Didron,

Premier-Lieutenant im Leib-Infanterie-Regiment und Lehrer
an der Kadettenanstalt zu Berlin.

Mit zwei Steintafeln.

Berlin.

Gedruckt und verlegt bei G. Reimer.

1834.

Vorwort.

Seit einer Reihe von Jahren an Militairbildungs-Anstalten, und überhaupt mit dem Unterrichte junger Leute beschäftigt, ist mir immer mehr und mehr die Ueberzeugung geworden, wie nützlich es für letztere sei, Lehrbücher zu besitzen, welche einzelne Disciplinen irgend einer Wissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf Anwendung, innerhalb der Grenzen abhandeln, die ihnen zunächst für gewisse Lebenszwecke abgesteckt worden sind.

In diesem Sinne bearbeitete ich schon früher die Grundlehren der Gleichungen, Reihen und Logarithmen (Magdeburg, bei Rubach) für die Bedürfnisse eines Elementarexamens, und offerire auch jetzt den Aspiranten hierzu eine — wie ich wünsche faßliche — Darstellung der ebenen Trigonometrie.

Niemand wird aber die Schwierigkeiten verkennen, die sich mir in Beziehung auf die Entwickelung ihrer Grundprincipien darboten. Die Ansicht, nach welcher dieser Lehrzweig ein zwischen Analysis und Geometrie schwankendes, keiner von beiden recht eigentlich angehörendes Zwitterwesen sei, darf wohl längst schon als dahin berichtigt angenommen werden, daß er ein sich rein auf Analysis basirendes, sonst aber völlig selbstständiges Erzeugniß ist, unabhängig von der Geometrie und von dem Begriffe des Dreiecks aufgefaßt, wohl aber auf Bestimmung von Raumgrößen angewendet werden kann. Wenn es nun allerdings als sachgemäß erscheint, eine selbstständige Theorie auch gleich von Hause aus als eine solche darzustellen, sie auf ihre wirkliche Basis zu erbauen, und es ihrer Geschichte zu überlassen, darzuthun auf welchem Wege sie sich zur Selbstständigkeit emporschwang, so ist doch auf der anderen Seite — und besonders im vorliegenden Falle — wohl zu berücksichtigen, ob jene höhere Ansicht nicht schon Kenntnisse oder wenigstens ein Combinationsvermögen voraussetzt, das bei den Individuen, für welche vorgetragen wird, nicht füglich anzunehmen ist. Die Entwickelung der bekannten goniometrischen unendlichen Reihen, oder die der ihnen gleichen endlichen Potenzausdrücke, welche in der Analysis unter den Namen Sinus und Cosinus eingeführt werden, schien mir daher aus dem eben angeführten Grunde nicht rathsam, und da auch die Anwendung der trigonometrischen Lehren innerhalb der hier festgestellten Grenzen durchaus nicht gefährdet wird, ob der Operirende das, was er braucht, nur für seinen Zweck genügend, oder im weitesten Umfange kennt, so zog ich es vor, die hier sich ergebende Lücke unausgefüllt zu lassen, und jene transscendenten Functionen unmittelbar in ihrer speziellen Erscheinung als Quotienten der mit derselben Einheit gemessenen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks darzustellen.

Hierbei konnte ich aber nicht unterlassen, in den Anmerkungen des ersten Abschnittes die endlichen analytischen Formen für Sinus und Cosinus aufzustellen, und dem Schüler als bloße Uebung in der Behandlung von Potenzen mit negativen und imaginairen Exponenten die Aufgabe vorzulegen, sich zu überzeugen, ob sie alle die Eigenschaften hätten, die er auf einem anderen Wege, als diesen Functionen eigenthümlich, kennen gelernt hat.

Ich habe aber für den Hauptgang des Unterrichtes, so weit es sich thun ließ, die rechnende Ableitungsart der trigonometrischen Sätze gewählt, indem sich mir diese — auch abgesehen von größerer Allgemeinheit, Consequenz und Kürze — durch die Erfahrung als zweckmäßiger, und mehr das Abstraktionsvermögen des Schülers ausbildend, zeigte. Zugleich habe ich indessen nicht umhin gekonnt, nebenbei die nöthigen Grundbegriffe mit Hülfe der geometrischen Figur zu verdeutlichen, um auch den mehr an empirische Anschauungen gewöhnten Anfängern zugänglich zu sein, da überdies letztere Methode höchstens nur enger begrenzte, nicht aber unrichtige Begriffe erzeugt.

Ob mir eine zweckmäßige Zusammenstellung des Nothwendigen, und eine klare Deduction gelungen sind, bleibt dem nachsichtigen Urtheile Sachverständiger überlassen.

Berlin, im Juni 1834.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

Einleitung.

1.

Man unterscheidet in den höheren Theilen der Mathematik überhaupt zwei Arten von Größen: beständige oder constante und veränderliche oder variable Größen. Erstere sind solche, die in einer und derselben Rechnung einen unveränderlich bestimmten Werth haben, während letztere so gedacht werden, daß sie jeden beliebigen Werth annehmen können. Man bezeichnet die beständigen Größen gewöhnlich durch die ersten Buchstaben a, b, c ...; die veränderlichen aber durch die letzten Buchstaben x, y, z ... des Alphabetes.

Unter Function versteht man eine Zusammensetzung aus veränderlichen und beständigen Größen, mittelst der bekannten arithmetischen Operationen, und wenn dieser Ausdruck irgend einem andern gleich gesetzt wird, so sagt man, dieser sei eine Function der in in dem ersteren vorkommenden Veränderlichen.

Hat man z. B.

$$\frac{ax+bx^2}{cx-d}=y,$$

so nennt man y eine Function von x, und da aus dieser Gleichung auch hervorgeht

$$-\frac{a-cy}{2b}\pm\sqrt{\left(\frac{(a-cy)^2}{4b^2}-\frac{d}{b}y\right)}=x,$$

so ist ebenfalls umgekehrt x eine Function von y. Leicht ist nun einzusehen, daß mit jeder Veränderung von x auch eine Veränderung von y statt finden muß, während bei jeder Veränderung von y sich auch x verändert, indem a, b, c, d als constante Größen denselben Werth behalten. Es ergiebt sich also der Begriff der nothwendigen Abhängigkeit der Größen, die Functionen von einander sein sollen. Denkt man sich nun irgend einen Zahlenwerth, der mit einem Winkel in solcher Beziehung steht, daß mit jeder Veränderung des Winkels auch eine bestimmte Veränderung dieses Zahlenwerthes statt findet, so begreift man leicht, daß dieser Zahlenwerth eine Function des Winkels genannt werden kann. Solche besondere Zahlenwerthe führen den Namen trigonometrische Functionen.

2.

Die analytische Trigonometrie oder die Goniometrie ist die Lehre dieser trigonometrischen Functionen. Sie findet ihre Anwendung in der Geometrie, und wird dann zur ebenen und sphärischen Trigonometrie. Die ebene Trigonometrie ist die Wissenschaft, welche aus drei in Zahlen gegebenen Stücken eines ebenen Dreiecks die übrigen durch Rechnung zu finden lehrt. Die Seiten des Dreiecks sind in Längenmaßen, die Winkel in Gradmaßen gegeben.

Gewöhnlich pflegt man in obiger Erklärung noch zu sagen, daß die gegebenen Stücke solche sein müssen, durch welche das Dreieck bestimmt ist; es scheint dieser Zusatz aber überflüssig, da ja bei jeder Aufgabe eine Untersuchung der statt findenden Bedingungen vorausgehen muß, nach welcher denn in jedem speciellen Falle anzugeben ist, ob das verlangte Resultat bestimmt oder unbestimmt gefunden wird. Wären z. B. die drei gegebenen Stücke die drei Winkel eines Dreiecks, so wird jene Untersuchung schon ermitteln, daß sich unendlich viele Resultate ergeben müssen.

3.

Man könnte hier die Frage aufwerfen, wozu es denn nöthig war, eine neue rechnende Disciplin einzuführen, da ja schon die ebene Geometrie lehrt, wie durch Construction die fehlenden Dreieckstücke zu finden sind. Hierauf diene zur Antwort, daß die unendlich größere Genauigkeit und Schärfe der Rechnung, verglichen mit der durch Construction erreichbaren die Ursache davon ist. Der gewandteste Zeichner kann z. B. beim Einsetzen der Zirkelspitze in einen Punkt einen Fehler von 0,5^{IV} (Scrupel) machen; beim Einsetzen der andern Zirkelspitze ist derselbe Fehler möglich, wo denn die abgenommene Entfernung mit der gemessenen schon um 1^{IV} differirt. Beim Auftragen dieser Linie auf eine andere Ebene kann sich dieser Fehler wieder verdoppeln, wird also zu 2^{IV} oder zu 0,2'''. Nimmt man z. B. auf einem Plane, der $\frac{1}{25000}$ der Wirklichkeit ist, und wo 0,2''' = 50' sind, eine Linie ab, so sieht man leicht, wie bedeutend ein solcher Constructionsfehler werden kann. Diesem Uebelstande ist nun die Rechnung weit weniger unterworfen, weil man bei ihr die Genauigkeit bis zu einer Grenze treiben kann, die für keine Praxis etwas zu wünschen übrig läßt.

4.

Nach dem Worte Trigonometrie sollte man schließen, daß ihre Anwendung nur bei der dreiseitigen Figur statt finden könnte, allein bald überzeugt man sich, daß dieselbe weit allgemeiner ist. Jede beliebige Menge von Punkten in einer Ebene läßt sich durch gerade Linien so zu Dreiecken verbinden, daß jeder Punkt selbst als Winkelspitze irgend eines Dreiecks gedacht werden kann. Die Erklärung der Trigonometrie sollte demgemäß weit umfassender sein. Man könnte sagen: sie lehrt, wenn von irgend einer Menge von Punkten in derselben Ebene die Lage einiger gegeben ist, die Lage der andern zu bestimmen; auch hier bliebe es dann der Untersuchung der gegebenen Bedingungen anheimgestellt zu ermitteln, ob die gegebenen Punkte und ihre Relationen zu einander genügen, um die Bestimmung der fehlenden zu bewerkstelligen. So springt also leicht in die Augen, daß die gefundenen Gesetze der Trigonometrie auch dazu dienen können, complicirtere Figuren (Polygone) zu berechnen, und in der Anwendung hierzu erhält die Trigonometrie den Namen: Polygonometrie.

5.

Man pflegt die Sätze der Trigonometrie auf zwiefache Weise von einander abzuleiten: entweder dadurch, daß man die in No. 1. erwähnten Winkelfunctionen selbst als geometrische Bilder (gerade Linien) einführt, und nun auf einem gemischten, theils construirenden, theils rechnenden Wege die Folge und Richtigkeit der Sätze darthut; oder dadurch, daß man jene Functionen rein als Zahlformen (ganz von aller geometrischen Ansicht abstrahirend) betrachtet, und nun mittelst bloß analytischer Operationen zu den behaupteten oder zu findenden Wahrheiten gelangt. Man kann die erstere Methode: die lineare; die letztere: die analytische Methode der Trigonometrie nennen. Die lineare Methode findet man häufiger (doch jetzt schon weniger als früher) in den Elementarbüchern angewendet, und sie dürfte auch in der That dann und für das Individuum leichter faßlich sein, bei dem der frühere arithmetische Theil der Mathematik weniger und unvollständiger durchgeführt ist; im Gegenfalle aber läßt sich mit Gewißheit annehmen, daß die analytische Behandlung (ganz abgesehen von ihrer viel größeren Allgemeinheit in Beziehung auf Formeln, und namentlich auf die Vorzeichnung derselben) in kürzerer Zeit zum Ziele führt. Wir werden in nachfolgenden Elementen den Schüler mit beiden Methoden bekannt zu machen suchen, obgleich die analytische stets vorwalten soll.

6.

Wenn in einem Dreiecke Seiten und Winkel in ein Verhältniß zu einander ständen, d. h. wenn man aus den Seiten auf die Winkel, und umgekehrt, schließen könnte, so würde die Trigonometrie um vieles leichter und einfacher sein. Allein Linien und Winkel sind völlig heterogene Dinge, und daher niemals mit einander vergleichbar. Dies veranlaßte schon die Mathematiker der frühesten Zeiten (Griechen und vorzüglich Araber), an Stelle der Winkel etwas anderes einzuführen, was auf das bestimmteste von ihnen abhängig ist, und in ein Verhältniß mit den Seiten gebracht werden kann. In Bezug auf seine Abhängigkeit vom Winkel nannte man es Function desselben, und weil es durch gerade Linien repräsentirt war, auch trigonometrische Hülfslinien. Historisch steht fest, daß man zuerst diese trigonometrischen Functionen als Linien definirte, und unter dieser Gestalt ihre Relationen zu einander und ihre sonstigen Eigenschaften kennen lernte. Als späterhin die Analysis begründet und ausgebildet wurde, war es ihr Geschäft, allgemeine Zahlformen aufzufinden, welche alle die Eigenschaften besäßen, die von den trigonometrischen Linien bekannt geworden waren. Man stand also auf den Schultern der linearen Trigonometrie, und konnte von diesem Standtpunkte aus, mit den mannigfachen Hülfsmitteln des Calcüls versehen, leicht die Begriffe verallgemeinern und den vermehrten Anforderungen genügend machen. Aus diesem allen ergab sich aber, daß die trigonometrischen Linien nur specielle Erscheinungen der analytischen Functionen sind.

Erster Abschnitt.

Allgemeine trigonometrische Begriffe; Entwickelung und Relationen der Grundformeln.

§. 1. Willkührlicher Satz.

Unter α soll ein für allemal ein spitzer Winkel verstanden sein. Mit π bezeichnen wir den gestreckten Winkel von 180°, oder die halbe Peripherie für den Radius $= 1$. Hieraus folgt, daß ein stumpfer aber concaver Winkel durch $\pi - \alpha$, oder durch $\frac{1}{2}\pi + \alpha$; ein convexer Winkel endlich durch $\pi + \alpha$, $\frac{3}{2}\pi - \alpha$, $\frac{3}{2}\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$ ausgedrückt ist.

§. 2. Erklärung.

Alle rechtwinkligen Dreiecke, in welchen der Winkel α enthalten ist, sind nach geometrischen Sätzen ähnlich, lassen sich demnach in die Lage der Figur 1. bringen, und es folgt nun aus der Gleichheit der Verhältnisse

$$AB:BC = AD:DE = AF:FG \text{ u. s. w.}$$

die Gleichheit der Quotienten

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF},$$

so wie aus der Gleichheit der Verhältnisse

$$AB:AC = AD:AE = AF:AG$$

die der Quotienten

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF},$$

nachdem man vorher sämmtliche Seiten mit einer und derselben Einheit gemessen, und durch Zahlen ausgedrückt hat.

Für einen gegebenen Winkel α ist also stets ein solcher Quotient mitgegeben, der Winkel selbst mag sich vorfinden, wo er will, und umgekehrt: für einen solchen gegebebenen Quotienten ist stets ein bestimmter Winkel zu finden. Den ersteren Quotienten, also den Zahlenwerth der Gegencathete, dividirt durch den Zahlenwerth der Hypothenuse nennt man den Sinus des Winkels α; den letzteren Quotienten aber, also den Zahlenwerth der anliegenden Cathete, dividirt durch den Zahlenwerth der Hypothenuse: den Cosinus des Winkels α; beide Quotienten bezüglich durch

$$\sin\alpha \text{ und } \cos\alpha$$

bezeichnend.

§. 3. Zusätze.

I. Aus dieser Erklärung ergiebt sich einfach, daß, weil in allen den Quotienten die Nenner größer als die Zähler sind, die Sinus und Cosinus eines Winkels α nur den Werth eines echten Bruches haben können, oder daß sie stets kleiner als 1 sein müssen.

II. Da es ganz beliebig ist, nach welcher Einheit man beide Seiten mißt, so kann man auch die Hypothenuse selbst als die Einheit betrachten, und dann in den beiden Catheten unmittelbar die Repräsentanten der eben definirten Functionen erblicken. Hierbei ist aber wohl zu bemerken, daß auch selbst in diesem Falle es nicht die Linien sind, denen der Name Sinus und Cosinus beigelegt wird, sondern daß sie nur die Träger von Zahlenwerthen sind, die in ihrer Abhängigkeit vom Winkel α als Functionen desselben bezeichnet werden.

III. In welcher Art die Abhängigkeit der eben kennen gelernten Functionen vom Winkel statt findet, ergiebt sich, wenn man sich bei unveränderter Hypothenuse denselben fallend und wachsend denkt. Je größer α ist (versteht sich, ihn als spitzen Winkel stets innerhalb seiner Grenzen von 0 bis 1 gedacht), desto größer ist seine Gegencathete, desto größer also der Zähler des Sinusquotienten, und mithin desto größer der Sinus selbst. Für den Cosinus kehrt sich dies Verhältniß gerade um, und man findet, daß dieser sein Minimum erreicht hat, wenn der Winkel bis zum Maximo angewachsen ist. Denkt man sich einen solchen Winkel α an und für sich, ohne Beziehung zu irgend einem andern dastehend, so fällt in die Augen, daß beide Functionen desselben positive Zahlen sein müssen, d. h. solche Zahlen, die als Resultat der Operation $a - b$ angesehen werden können, wenn man nur $a > b$ angenommen hat.

IV. Vergleicht man die Quotienten Sinus und Cosinus α in ihrer Beziehung zum Complementswinkel von α, nämlich zum Winkel β, so ersieht man leicht, daß

$$\sin\alpha = \cos\beta$$

und $\cos\alpha = \sin\beta$ ist.

§. 4. Lehrsatz.

Es ist allemal das Quadrat des Sinus von α plus dem Quadrate seines Cosinus, der Eins gleich, oder die Gleichung:

$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1\ ^*)$$

ist eine identische.

Beweis. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist in Fig. 2., wenn $\angle C$ = einem Rechten:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

*) Eigentlich müßte man $(\sin\alpha)^2$ und $(\cos\alpha)^2$ schreiben, und wir wollen daher annehmen, daß diese Formen gemeint sind, wenn man die oben stehenden findet. Hin und wieder findet man auch $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ geschrieben, allein diese Schreibart ist durchaus nicht motivirt. Sie stammt von den französischen Mathematikern her.

Hieraus folgt
$$\frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = 1$$
oder
$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1.$$

§. 5. Zusatz.

Aus dem Lehrsatze des vorigen Paragraphen ergiebt sich unmittelbar die Lösung der Aufgabe, den Sinus von α durch den Cosinus, und umgekehrt, den Cosinus von α durch den Sinus auszudrücken. Man hat dann:
$$\sin\alpha = \pm\sqrt{(1 - \cos\alpha^2)} \text{ und}$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}.$$
Ob in diesen Ausdrücken der positive oder der negative Werth der Wurzel genommen werden muß, entscheidet sich in jedem besondern Falle, so viel aber steht fest, daß für ein und dasselbe α nur ein und derselbe Werth genommen werden darf, d. h. beide Functionen sind positiv, oder beide negativ, nicht aber eine positiv und die andere negativ.

Anmerkung. Die einfache Definition der beiden Functionen Sinus und Cosinus eines Winkels α als Quotienten der Gegencathete und anliegenden Cathete, dividirt durch die Hypothenuse, ist in neuerer Zeit allgemein angenommen worden, und alle, vielleicht im ersten Augenblick anders klingende Erklärungen, kommen dennoch auf diese zurück. Wenn z. B. Professor von Münchow unter dem Cosinus eines Winkels die Zahl versteht, mit welcher die Länge BA des Schenkels eines spitzen Winkels ABC multiplizirt werden muß, um ihre senkrechte Projection BC auf dem andern Schenkel zu erhalten, so sieht man augenblicklich ein, daß diese Zahl eben nur der von uns als Cosinus ABC definirte Quotient sein kann, denn es ist nur
$$AB \cdot \frac{BC}{AB} = BC.$$
Solche Erklärungen sind demnach nur in den Worten, nicht aber in der Sache verschieden, und nöthigen späterhin oft zu größeren Weitläuftigkeiten. So ist denn auch nach demselben Verfasser, der Sinus eines Winkels α die Zahl, deren Quadrat mit dem Quadrate des Cosi-

nus (Projectionsfactors) addirt, die Eins erzeugt. Hiernach erfährt man allerdings schon bei der Definition, daß der Sinus eines Winkels $= 0$ sein muß, wenn der Cosinus desselben $= 1$ ist, und umgekehrt.

Um die Schüler in der Behandlung complizirter Potenzformen zu üben, kann man ihnen folgende Aufgabe stellen: Nehmen wir an, daß der Quotient

$$\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

dem Sinus von α, und der Quotient

$$\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2}$$

dem Cosinus von α gleich sei, werden beide Formen auch der Eigenschaft des Sinus und Cosinus eines Winkels genügen, nämlich der, daß ihre Quadrate addirt $= 1$ sind?

§. 6. Lehrsatz.

Ist außer α auch noch β als spitzer Winkel angenommen, so ist stets:

I. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$ und

II. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$.

Beweis für I. Denkt man sich zwei spitze Winkel $ABC = \alpha$ und $CBD = \beta$ wie in Fig. 3. zusammengesetzt, so daß $\angle ABD = \alpha + \beta$ ist, und zieht nun von A aus die Senkrechte AF auf BD, so ist der Quotient $\frac{AF}{AB} = \sin(\alpha + \beta)$. Zieht man von A aus AC senkrecht auf BC, von C aus CD senkrecht auf BD, und durch C die CE parallel mit BD, welche demnach senkrecht auf AF steht, so hat man $\triangle AEC \sim \triangle GBF$ und also $\angle EAC = \angle GBF = \beta$. Nun ist

$$AF = AE + EF,$$

aber

$$EF = CD,$$

also

$$AF = AE + CD.$$

Bestimmt man nun die Stücke AE und CD, so erhält man

$$\frac{AE}{AC} = \cos\beta, \quad \text{also} \quad AE = AC \cdot \cos\beta.$$

Es ist aber analog dem vorigen

$$\frac{AC}{AB} = \sin\alpha, \quad \text{also} \quad AC = AB \cdot \sin\alpha$$

und

$$AE = AB \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta.$$

Ferner ist

$$\frac{CD}{BC} = \sin\beta, \quad \text{also} \quad CD = BC \cdot \sin\beta,$$

aber

$$\frac{BC}{AB} = \cos\alpha, \quad \text{also} \quad BC = AB \cdot \cos\alpha$$

und

$$CD = AB \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

demnach

$$AE + CD = AF = AB \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta + AB \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

endlich

$$\frac{AF}{AB} = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

w. z. b. w.

Beweis für II. Es ist

$$\frac{BF}{AB} = \cos(\alpha+\beta),$$

aber

$$BF = BD - FD = BD - CE.$$

Leicht sieht man jetzt, daß

$$BD = BC \cdot \cos\beta,$$

daß

$$BC = AB \cdot \cos\alpha,$$

und daß demnach

$$BD = AB \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \text{ ist.}$$

Ebenso ist

$$CE = AC \cdot \sin\beta,$$

aber

$$AC = AB \cdot \sin\alpha,$$

also

$$CE = AB . \sin\alpha . \sin\beta$$

und

$$BD - CE = BF = AB . \cos\alpha . \cos\beta - AB . \sin\alpha . \sin\beta,$$

endlich

$$\frac{BF}{AB} = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta,$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Wir mußten bei diesem Lehrsatze die beschränkende Bedingung vorausschicken, daß unter α und β spitze Winkel gedacht seien, eben weil wir in diesen Elementen für Sinus und Cosinus keine anderen Definitionen geben konnten, als es geschehen ist, d. h. keine anderen Definitionen als solche, die nur diese Functionen von Hause aus für spitze Winkel zulassen. Wollte man sich der Potenzausdrücke

$$\sin\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ und } \cos\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2}$$

bedienen, die als trigonometrische Functionen, von allen geometrischen Ansichten abstrahirend, aufgestellt werden, so bedurfte es jener Beschränkung nicht, indem diese Formen für jeden Werth von α *), reell oder imaginär, eine Bedeutung haben.

Dem Schüler kann hier die Aufgabe gestellt werden, ob diese Ausdrücke auch der eben bewiesenen Behauptung entsprechen, vorausgesetzt, daß auch

$$\sin\beta = \frac{e^{\beta\sqrt{-1}} - e^{-\beta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ und } \cos\beta = \frac{e^{\beta\sqrt{-1}} + e^{-\beta\sqrt{-1}}}{2}$$

ist. Er wird dann z. B. für den ersten Fall des vorigen Lehrsatzes auf die Form

$$\frac{e^{(\alpha+\beta)\sqrt{-1}} - e^{-(\alpha+\beta)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

kommen, und muß natürlich aus ihr folgern, daß sie

$$= \sin(\alpha+\beta)$$

ist.

*) Es werde hier noch einmal in Erinnerung gebracht, daß bei diesen Gleichungen das α links den Winkel, das α rechts aber die Zahl der Länge des zwischen den Schenkeln des Winkels α beschriebenen Bogens bedeutet.