Die Ausgleichungsrechnung

nach der Methode der kleinsten Quadrate

und ihre spezielle Anwendung auf die Geodäsie

nebst einem Anhange von Beispielen

von

Richard Ahrens

Kgl. Landmesser

Mit 13 Figuren

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1906

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig-R.

Inhaltsverzeichnis.

Abschnitt A.

Einführung.

Abschnitt B.

Ausgleichung direkter Beobachtungen.

Abschnitt C.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Abschnitt D.

Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

Abschnitt E.

Aufgaben.

I. Kapitel.

Aufgaben über vermittelnde Beobachtungen.

II. Kapitel.

Ausgleichung von Aufgaben nach bedingten Beobachtungen.

Abschnitt A.

§ 1. Einleitung.

Alle unsere Messungen sind mit kleinen Fehlern behaftet, die teils der Unvollkommenheit der zu ihrer Beobachtung benutzten Instrumente, teils der Unvollkommenheit der Sinne des Beobachters, teils anderen unberechenbaren Einflüssen zuzuschreiben sind. Diese Fehler, welche das Resultat unserer Beobachtungen gesetzlos beeinflussen, so daß es bald mehr bald weniger, bald nach der einen, bald nach der anderen Seite von dem wahren Werte der Beobachtung abweicht, nennen wir unregelmäßige, auch zufällige Fehler.

Wohl davon zu unterscheiden sind jene regelmäßigen oder konstanten Fehler, die unter gleichen Umständen in gleicher Weise die Messungsergebnisse in demselben Sinne beeinflussen, die jedoch, wenn sie auch durch die Art der Messung nicht ganz beseitigt werden können, in ihrer Ursache und Wirkung erkennbar sind und sich in jedem Falle berechnen lassen.

Die Ausgleichungsrechnung beschäftigt sich ausschließlich mit den Fehlern der ersten Gattung, nicht aber mit den konstanten oder gar groben Fehlern. Letztere müssen vielmehr ganz der Beobachtung fern bleiben, jene durch geeignete Messungsmethoden fortgeschafft, berechnet und bei dem Endresultat in Rücksicht gezogen werden.

Im folgenden sollen nur Beobachtungen in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen werden, die frei von konstanten Fehlern sind, und es soll derjenige Fehler resp. Verbesserung berechnet werden, der die größte Wahrscheinlichkeit hat, das Resultat der Wahrheit am nächsten zu bringen.

Diese Aufgabe zu lösen ist Gegenstand der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, wie sie von ihrem Entdecker Gauß im Jahre 1795 resp. 1809 genannt wurde.

§ 2. Prinzip der Ausgleichung.

Durch einmaliges Beobachten einer Größe sind wir noch nicht klar, ob und welchen Fehler wir begangen haben. Erst wenn wir die Beobachtung häufiger machen, haben wir eine Vorstellung von dem Fehler und seiner Größe. Haben wir z. B. in einem Dreieck zwei Winkel gemessen, den dritten aber durch Rechnung bestimmt, so bleiben wir im unklaren über den begangenen Fehler. Erst die Messung des dritten Winkels gibt uns durch die Differenz der gemessenen und der theoretischen Winkelsumme Aufschluß über den begangenen Fehler. Aus diesem Grunde müssen wir also bei der Ausgleichung immer mehr Beobachtungen haben, als zur einmaligen Bestimmung der auszugleichenden Größe notwendig sind.

Durch die überschüssigen Beobachtungen werden wir, da sie nicht übereinstimmen, auf das Vorhandensein von Fehlern aufmerksam gemacht. Da aber jede Beobachtung die Wahrscheinlichkeit für sich hat, der wahren Größe sehr nahe zu kommen, so ist klar, daß wir aus den mit zufälligen Fehlern behafteten Beobachtungen nicht die streng richtigen Werte finden, sondern die günstigsten, d. h. solche, die der Wahrheit sehr nahe kommen.

Um zu diesen Näherungswerten zu gelangen, müssen wir jeder Beobachtung eine Verbesserung zulegen, so daß alle verbesserten Werte übereinstimmen oder als Teile eines Ganzen dieses Ganze in der richtigen Weise ergeben. Gleichzeitig entspricht es aber auch dem Verstande, möglichst wenig an den Beobachtungen zu ändern, und somit stellen wir den Hauptsatz auf:

„Die Summe der Quadrate der Verbesserungen soll ein Minimum sein.“

Bezeichnen wir mit l_1 l_2 l_3 die verschiedenen Beobachtungen, mit x den Wert, der die größte Wahrscheinlichkeit hat, der richtige zu sein, mit v_1 v_2 v_3 . . . die jeder Beobachtung zukommende Verbesserung, so lassen sich die letzteren herleiten aus:

$$v_1 = x - l_1$$
$$v_2 = x - l_2$$
$$v_3 = x - l_3 .$$

Es besteht nun die Bedingung, daß die Summe der Quadrate der Verbesserungen ein Minimum sein soll; also:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots$$

ein Minimum, oder durch Einführung der obigen Werte für v

$$(x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + (x - l_3)^2 + \dots = [v\,v]$$

ein Minimum.

Hieraus läßt sich durch Behandlung nach dem Taylorschen Lehrsatze von den Maxima und Minima der günstigste Wert herleiten, wie weiter unten gezeigt wird. Zum besseren Verständnis sei noch gesagt, daß

mit $[v]$ die Summe $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$,

mit $[a]$ die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$,

überhaupt mit allen von einer eckigen Klammer umschlossenen Ausdrücken die Summe gleichartiger, nur in der Ordnungszahl verschiedener Ausdrücke bezeichnet wird.

§ 3. Die verschiedenen Arten von Fehlern.

Der Durchschnittsfehler D ist der Quotient aus der absoluten Summe der wahren Fehler ε dividiert durch ihre Anzahl. Z. B. seien bei der Messung einer Linie folgende wahren Fehler unterlaufen:

$$0{,}01\,m \quad 0{,}03\,m \quad 0{,}05\,m \quad 0{,}06\,m \quad 0{,}08\,m ,$$

so ist der Durchschnittsfehler

$$D = \frac{0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}08}{5} = \frac{23}{5} = 0{,}046\,m .$$

Der mittlere Fehler ist die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der wahren Fehler einer Beobachtungsart dividiert durch ihre Anzahl:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} ; \qquad m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}} .$$

Auf voriges Beispiel angewendet ergibt sich

$$m^2 = \frac{0{,}0001 + 0{,}0009 + 0{,}0025 + 0{,}0036 + 0{,}0064}{5}$$

$$= \frac{0{,}0135}{5} = 0{,}0027\,,$$

$$m = \pm\, 0{,}05\,.$$

Dieser Fehler heißt auch die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittel.

Den wahrscheinlichen Fehler erhält man, wenn man alle bei einer Messung überhaupt möglichen wahren Fehler ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen der Größe nach ordnet und denjenigen herausgreift, der von den übrigen ebenso oft überschritten, als nicht erreicht wird. Aus folgender Fehlerreihe: 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 ist der wahrscheinliche Fehler 2,5, da dieser von den ersten Fehlern zehnmal nicht erreicht, von den anderen zehnmal überschritten wird.

Sind die wahren Fehler unendlich und folgen sie dem Gaußschen Fehlergesetz, so ist der wahrscheinliche Fehler $W = 0{,}6745\, m$ und der Durchschnittsfehler $D = 0{,}8000\, m$, wo m den mittleren Fehler bezeichnet.

§ 4. Ausgleichungsaufgaben.

Die Aufgaben, bei denen die Methode der kleinsten Quadrate angewendet wird, sind sehr mannigfaltig, und wir gliedern sie in folgende drei Abteilungen:

1. Ausgleichung direkter Beobachtungen: Die unbekannten Größen sind untereinander unabhängig und unmittelbar beobachtet. Jede Größe kann für sich allein behandelt werden.

2. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen: Die auszugleichenden Größen, die zwar unabhängig voneinander sind, können nur im Zusammenhange mit anderen Größen, also mittelbar beobachtet werden.

3. Ausgleichung bedingter Beobachtungen: Die gesuchten Größen, die unmittelbar beobachtet werden, müssen gewissen Bedingungen genügen, wie z. B. die Winkel in einem Viereck 360^0 ergeben müssen.

Abschnitt B.

Ausgleichung direkter Beobachtungen.

§ 1. Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Zur Beurteilung der Genauigkeit von Messungen ist es notwendig zu wissen, wie sich die mittleren Fehler der Einzelbeobachtungen auf ganze Aufnahmen fortpflanzen.

a) Angenommen, es sei

1. $x = a \cdot l$, wo x der günstigste Wert aus einer Reihe von Beobachtungen, l der einer einzelnen Beobachtung, a ein beliebiger Koeffizient ist.

Ferner:

2. $X = a \cdot L$, wo $X =$ wahrer Wert der Unbekannten, $L =$ wahrer Wert der Beobachtung ist.

Subtrahieren wir 1 von 2, so ist

3. $X - x = a(L - l)$. Die erste Größe $X - x$ stellt demnach den wahren Fehler der Ausgleichungsgröße, die zweite $L - l$ den wahren Fehler der Beobachtung dar, die wir mit ε_x bzw. ε bezeichnen. Wir erhalten also:

4. $\varepsilon_x = a \cdot \varepsilon$. Nehmen wir die Beobachtung als das arithmetische Mittel verschiedener direkter Beobachtungen an, so ist:

$$\varepsilon_x^2 = \frac{\varepsilon_x'^2 + \varepsilon_x''^2 + \varepsilon_x'''^2 + \dots}{n} = \frac{a^2\,\varepsilon'^2 + a^2\,\varepsilon''^2 + a^2\,\varepsilon'''^2 + \dots}{n}$$

$$= \frac{a^2(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + \dots)}{n},$$

$$\varepsilon_x^2 = a^2\,\frac{[\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + \dots]}{n}.$$

Die ε sollen dieselben sein, so ist also, wenn wir zum mittleren Fehler übergehen:

$$m_x^2 = a^2 \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = a^2 m^2 \,,$$

$$m_x = \pm a m \,.$$

b) Eine Größe x setze sich zusammen aus den beiden beobachteten Größen l_1 und l_2, also:

$$x = l_1 + l_2$$

Es sei ferner, wie oben:

$$X = L_1 + L_2$$

Durch Subtraktion erhalten wir:

$$X - x = L_1 - l_1 + L_2 - l_2$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \,.$$

Jede beobachtete Größe l_1 und l_2 sei wiederum das Mittel aus mehreren Beobachtungen $l_1' \, l_1'' \, l_1'''$ resp. $l_2' \, l_2'' \, l_2''' \ldots$, so daß ε_x sich bildet aus $\varepsilon_x' \, \varepsilon_x'' \, \varepsilon_x'''$ usw. Es ist dann:

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$$
$$\varepsilon_x'' = \varepsilon_1'' + \varepsilon_2''$$
$$\varepsilon_x''' = \varepsilon_1''' + \varepsilon_2''' \quad \text{usw.}$$

Addieren wir diese Gleichungen, so ist:

$$\varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x''' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_1''' + \varepsilon_2''' \,.$$

Vernachlässigen wir zur Bequemlichkeit die dritte Beobachtung und gehen ins Quadrat über, so erhalten wir:

$$\varepsilon_x'^2 + \varepsilon_x''^2 = \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_2'^2 + \varepsilon_1''^2 + \varepsilon_2''^2 + 2(\varepsilon_1' \varepsilon_2' + \varepsilon_1'' \varepsilon_2'' + \ldots) \,.$$

Da nun alle ε gleich wahrscheinlich positiv oder negativ sind, also kein Grund vorliegt, warum in der Reihe der Produkte die positiven oder negativen Größen überwiegen sollen, so sind die Durchschnittswerte der letzten zwei Glieder $= 0$. Daraus folgt:

$$\frac{\varepsilon_x'^2 + \varepsilon_x''^2}{n} = \frac{\varepsilon_1'^2 + \varepsilon_2'^2}{n} + \frac{\varepsilon_1''^2 + \varepsilon_2''^2}{n}$$

oder

$$m_x^2 = m_1^2 + m_2^2 \,.$$

B e i s p i e l zu a): Der Winkel α hat den mittleren Fehler $\pm 6''$. In einer Rechnung gebraucht man den Winkel 2α; wie groß ist der mittlere Fehler von 2α?

Also $x = 2\alpha$.

$$m_x^2 = a^2 \cdot m_\alpha^2 = 4 \cdot 36 = 144\,; \quad m_\alpha = \pm 12 \,.$$

Beispiel zu b): Eine Länge a setzt sich zusammen aus den beiden anderen Längen $b = 6{,}431 \pm 0{,}005$ und $c = 4{,}856 \pm 0{,}003$. Welches ist der Wert von a, wenn $a = b + c$ ist, und welches ist der mittlere Fehler?

$$m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 = 25 + 9 = 34\,. \qquad m_a = \pm 5{,}8\,.$$

Also ist $a = 11{,}287 \pm 0{,}006$.

Anmerkung: Ebenso gibt der mittlere Fehler für eine Größe, die sich aus der Differenz zweier anderen herleitet:

$$m_x^2 = m_1^2 + m_2^2\,.$$

c) An der Hand der vorigen Ableitungen möge der Leser sich selbst den mittleren Fehler von

$$x = a_0 + a_1\, l_1 + a_2\, l_2 + a_3\, l_3 + \ldots$$

ableiten.

Durch Subtraktion $X - x$ fällt a_0 fort und wir erhalten zum Schluß:

$$m_x^2 = a_1^2\, m_1^2 + a_2^2\, m_2^2 + a_3^2\, m_3^2 + \ldots$$

Beispiel: Eine Länge x wurde in vier Abschnitten gemessen und zwar:

$$\begin{array}{lll} l_1 = (235{,}47 \pm 0{,}07)\,m & \text{(Meter)} & \text{viermal} \\ l_2 = (125{,}68 \pm 0{,}04)\,m & & \text{dreimal} \\ l_3 = (\ \ 40{,}75 \pm 0{,}02)\,m & & \text{zweimal} \\ l_4 = (\ \ 18{,}87 \pm 0{,}01)\,m & & \text{einmal}\,. \end{array}$$

Es ist

$$x = 4\,l_1 + 3\,l_2 + 2\,l_3 + l_4 = 420{,}77\,m\,,$$

$$m_x^2 = 16\,m_1^2 + 9\,m_2^2 + 4\,m_3^2 + m_4^2 = 909\,,$$

$$m_x = \pm 30\,.$$

Also ist

$$x = (420{,}77 \pm 0{,}30)\,m\,.$$

§ 2. Einfaches arithmetisches Mittel.

Eine Größe sei n mal gleich genau und unabhängig gemessen, und es haben sich dabei folgende Resultate ergeben:

$$l_1\ l_2\ l_3\ \ldots\ l_n\,.$$

Es soll der günstigste Wert x dieser Größen selbst und der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung wie auch der des günstigsten Wertes gesucht werden. Nach § 2 der Einleitung ist:

$$\begin{aligned} v_1 &= -l_1 + x \\ v_2 &= -l_2 + x \\ v_3 &= -l_3 + x \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_n &= -l_n + x\,. \end{aligned}$$

Neben diesen Fehlergleichungen besteht noch die Bedingung:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots\; v_n^2$$

ein Minimum.

Setzen wir die vorstehenden Werte von v in die Bedingungsgleichung ein, so ist:

$$(-l_1 + x)^2 + (-l_2 + x)^2 + (-l_3 + x)^2 + \ldots (-l_n + x)^2$$

ein Minimum. Um diese Bedingung zu lösen, setzen wir den ersten Differentialquotienten dieser Funktion von x gleich Null.

$$0 = \varphi(x) = (-l_1 + x)^2 + (-l_2 + x)^2 + \ldots (-l_n + x)^2\,,$$

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 0 = 2(-l_1 + x) + 2(-l_2 + x) + \ldots 2(-l_n + x)$$

oder $$l_1 + l_2 + \ldots l_n = n\,x\,.$$

Daraus ist $$x = \frac{l_1 + l_2 + \ldots l_n}{n} = \frac{[l]}{n}\,,$$

d. h. der günstigste Wert ist das arithmetische Mittel.

Durch Einsetzen des so gefundenen x in die obigen Verbesserungsgleichungen kann man die einzelnen v bilden, wobei eine Rechenprobe gefunden wird durch die Bedingung $[v] = 0$, die man durch Addition der Verbesserungsgleichungen erhält. Es ergibt sich:

$$[v] = n \cdot x - [l] = 0\,.$$

Eine Kontrolle liegt insofern darin, daß die Summe der positiven v gleich der Summe der negativen Verbesserungen ist.