

SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 1061

GETRIEBELEHRE

von

DIPL.-ING. P. GRODZINSKI †

I

GEOMETRISCHE GRUNDLAGEN

Dritte, neubearbeitete Auflage

von

DIPL.-ING. GISBERT LECHNER

Mit 131 Figuren



WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp

BERLIN 1960

©

Copyright 1960 by Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35. — Alle Rechte, einschl. der Rechte der Herstellung von Photokopien und Mikrofilmen, von der Verlagshandlung vorbehalten. — Archiv-Nr. 11 10 61. — Satz und Druck: Deutsche Zentraldruckerei AG., Berlin SW 61, Dessauer Str. 6/7. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Schrifttum	4
Einleitung	7

Bewegungsgeometrie

(Bahnen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ebener Systeme)

1. Ebene Bewegung eines Punktes	10
1.1. Geradlinige Bewegung eines Punktes	10
1.2. Zusammensetzung geradliniger Bewegungen	19
1.3. Krummlinige Bewegungen eines Punktes	23
2. Ebene Bewegung zweier Ebenen	26
2.1. Schiebung und Drehung	31
2.2. Momentanpol zweier sich beliebig bewegender Ebenen	26
2.3. Beschleunigungspol	40
2.4. Wendekreis und Wechselkreis	43
2.5. Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes einer Bahn nach Hartmann	48
2.6. Zusammenhang zwischen der Krümmung der Bahn und der Krümmung der Polbahnen	49
3. Ebene Bewegung dreier Ebenen	53
3.1. Allgemeines	53
3.2. Zwei Schiebungen gegen die feste Ebene	54
3.3. Schiebung und Drehung um einen festen Punkt	55
3.4. Drehung zweier Ebenen gegen eine dritte um feste Punkte	56
3.5. Beliebige Bewegung dreier Ebenen	60
3.6. Coriolis-Beschleunigung	63
4. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von Kurbel- getrieben	66
4.1. Allgemeines	66
4.2. Gelenkviereck (Bogenschubkurbel oder Kurbelschwinge, Doppelkurbel, Doppelschwinge)	66
4.3. Geradschubkurbel	80
4.4. Kurbelschleifen	86
4.5. Bogenschleifen- und Kreuzschleifengetriebe	94
5. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von Kurven- getrieben	97
5.1. Kurvenschub mit ablaufender Rolle	97
5.2. Kurvenscheiben mit ablaufender Rolle	98
5.3. Kurvenscheiben mit plattenartigem Eingriffsglied	101
5.4. Untersuchung eines Nockens einer Hochofengebläsemaschine	102

Geometrische Zusammenhänge		Seite
1.	Beweglichkeit und Zwanglaufbedingungen	106
2.	Konstruktion von Gelenkgetrieben	111
2.1.	Allgemeines	111
2.2.	Beweglichkeit und Totlagen	112
2.3.	Bogenschubkurbel oder Kurbelschwinge	114
2.4.	Doppelkurbel	118
2.5.	Doppelschwinge	118
2.6.	Sonderfälle	119
3.	Koppelbewegungen	121
4.	Konstruktion von Kurvengetrieben	129
4.1.	Grundlagen	129
4.2.	Verwendete Bezeichnungen	132
4.3.	Bewegungsgesetze	133
4.4.	Ermittlung des Grundkreishalbmessers	141
4.5.	Konstruktion der Kurvenscheiben	147
4.6.	Beispiel zum Entwurf einer Kurvenscheibe	148
4.7.	Kurvenscheiben mit kreisförmiger Begrenzung	151
5.	Grundgesetze der Verzahnung	153
6.	Wälzhebeltriebe	157
	Stichwortverzeichnis	163

Schrifttum

(chronologisch geordnet)

1. R. Willis, Principles of Mechanism, 1. Ausg. 1841, 2. Ausg. London, 1870.
2. F. Reuleaux, Theoretische Kinematik, I. Teil, Braunschweig, 1875.
3. F. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Theorie der Getriebe, Hamburg-Leipzig, 1883.
4. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig, 1888.
5. F. Reuleaux, Theoretische Kinematik, II. Teil, Braunschweig, 1900.

6. C. W. MacCord, Velocity Diagrams, their construction and their Uses, New York, London, 1901.
7. H. Polster, Kinematik, Sammlung Göschen, 1912, 2. Auflage 1920.
8. W. Hartmann, Die Maschinengetriebe, Berlin, 1913.
9. M. Grübler, Getriebelehre, Berlin, 1917.
10. A. W. Klein, Kinematics of Machinery, New York, London, 1917.
11. Christmann-Baer, Grundzüge der Kinematik, 2. Auflage, Berlin, 1922.
12. F. Wittenbauer, Graphische Dynamik, Berlin, 1923.
13. Ausschuss für wirtschaftliche Fertigung AWF-Getriebeblätter, Berlin, 1922—1944.
14. R. Beyer, Einführung in die Kinematik, Leipzig, 1928.
15. AWF-Getriebe- und -Getriebemodelle, Bd. I. Berlin, 1928, Bd. II. Berlin, 1929.
16. Jahr-Knechtel, Grundzüge der Getriebelehre, I. Band, Leipzig, 1930. Dritter Neudruck, Leipzig 1949.
17. H. J. Knab, Getriebelehre, 2. Auflage, Nürnberg, 1930.
18. R. Beyer, Technische Kinematik, Leipzig, 1931.
19. K. Rauh, Praktische Getriebelehre, I. Band, Berlin, 1931. 2. Aufl., Berlin 1951.
20. M. Mack, Geometrie der Getriebe, Berlin, 1931.
21. Th. Poeschl, Einführung in die ebene Getriebelehre, Berlin, 1932.
22. K. Federhofer, Graphische Kinematik und Kinetostatik. Berlin, 1932.
23. R. Müller, Einführung in die ebene Getriebelehre, Berlin, 1932.
24. P. Grodzinski, Getriebelehre, Bd. II, Sammlung Göschen, 1933.
25. Jahr-Knechtel, Grundzüge der Getriebelehre, Bd. II, Leipzig, 1938.
26. K. Rauh, Praktische Getriebelehre, Bd. II, Berlin, 1939.
27. W. Steeds, Mechanism and the Kinematics of Machines, London, 1940.
28. R. Franke, Vom Aufbau der Getriebe, Bd. I, Die Entwicklungslehre der Getriebe, 1. Aufl. 1943, 2. Aufl. 1948.

29. P. Grodzinski, A practical Theory of Mechanisms, Manchester, 1947.
30. R. Kraus, Grundlagen der Getriebelehre, Hannover, Wolfenbüttel 1949.
31. K. Hain und W. Meyer zur Capellen, Kinematik. FIAT Review of German Science 1939—1946 (Naturforschung und Medizin in Deutschland), Bd. 7: Angewandte Mathematik, Teil V.
32. O. Kraemer, Getriebelehre. Eine Auswahl für Studium und Praxis, Karlsruhe, 1950.
33. K. H. Sieker, Einfache Getriebe, Bd. 15 der Lehrbücher der Feinwerktechnik, Leipzig, 1950.
34. R. Franke, Vom Aufbau der Getriebe, Bd. II. Die Baulehre der Getriebe, Düsseldorf, 1951.
35. K. Federhofer, Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers, Teil I—III, Wien 1950, 1951.
36. R. Kraus, Getriebelehre, Berlin 1951.
37. K. Hain, Angewandte Getriebelehre, Hannover 1952.
38. R. Beyer, Kinematische Getriebesynthese, Berlin 1953.
39. AWF-VDMA-VDI-Getriebehefte und Getriebeblätter, Berlin 1955—1958.
40. R. Beyer, Kinematisch-getriebeanalytisches Praktikum, Berlin 1958.
41. R. Beyer, Kinematisch-getriebedynamisches Praktikum, Berlin 1960.

In den vorstehend angegebenen Werken finden sich zum Teil umfangreichere Literaturhinweise, insbesondere auch über Zeitschriftenaufsätze. Zahlreiche Werke, insbesondere 2, 4, 5 und 8 sind vergriffen. Die unter 13 und 39 angeführten Getriebeblätter sind eine Zusammenstellung von in der Praxis angewandten Getrieben und der hierfür notwendigen Konstruktionen. Die Sammlung wird laufend ergänzt. Einzelne Abbildungen wurden mit Erlaubnis des AWF dieser wichtigen Sammlung entnommen.

Einleitung

Die Getriebelehre oder Zwanglauflehre¹⁾ macht Gebrauch von grundlegenden Lehren der Geometrie, der Mechanik und selbstverständlich auch, soweit dies erforderlich ist, der Festigkeitslehre und der Thermodynamik.

Vor allem kann die Getriebelehre des *geometrischen Aufbaues* nicht entraten, denn ein Getriebe wird überhaupt nur dann praktisch ausgeführt werden können, wenn die verschiedenen Stellungen oder Lagen seiner Glieder geometrisch möglich sind. Eine bestimmte Bewegung (vollständiger Umlauf einer Kurbel) wird nur bei entsprechender Wahl von Größe und Lage der davon beeinflussten Getriebeglieder möglich sein.

Die Getriebe und ihre Glieder müssen nicht nur in bestimmter Weise beweglich sein, sondern diese Bewegungen müssen auch innerhalb bestimmter Zeitabschnitte ausgeführt werden.

Während die Geometrie nur mit dem Begriff des Raumes arbeitet, berücksichtigt die *Bewegungsgeometrie* noch den Begriff der Zeit. Man kann sie also als die Wissenschaft bezeichnen, die den räumlichen und den zeitlichen Verlauf der Bewegungen erforscht. Während die Mechanik, insbesondere Kinetik oder Dynamik, zu Raum und Zeit noch den Begriff der Masse hinzunimmt, kann man die Bewegungsgeometrie als eine erweiterte Geometrie ansehen. Die Bewegungsgeometrie hatte im Laufe ihrer Entwicklung eine Reihe von Aufgaben zu lösen, und ihre Ent-

¹⁾ In wissenschaftlichem Sinne nennt man die Bewegungsgeometrie (Phoronomie) auch Kinematik (von *κίνημα* Bewegung), leider versteht man in technischen Kreisen unter „Kinematik“ auch die körperliche Ausbildung der die Bewegung ausführenden Körper. Um eine klare Unterscheidung zu finden, soll das Wort „Kinematik“ möglichst vermieden werden; die reine Bewegungslehre soll Bewegungsgeometrie, die Lehre der körperlichen „Ausbildung“ von Bewegungsvorgängen soll „Getriebelehre“ oder Zwanglauflehre genannt werden.

wicklung kann heute noch nicht als abgeschlossen angesehen werden. Seit geraumer Zeit stehen Verfahren zur Verfügung, um Geschwindigkeiten und Beschleunigungen (und Kräfte) an beliebigen Bewegungen zu untersuchen. Ein Ausschnitt aus diesem Gebiet wird im ersten Teil dieser Arbeit unter „Bewegungsgeometrie“ gegeben (Getriebeanalyse). Weitgehendste Anwendung wird von graphischen Verfahren gemacht, die von W. Hartmann, R. Mollier und anderen in hoher Vollkommenheit entwickelt wurden. Diese Verfahren sind weit anschaulicher als rechnerische Verfahren, die zum Teil noch im Ausland angewandt werden und die nur für bestimmte Getriebe mit geometrisch einfachen Beziehungen geeignet sind.

Es sei betont, daß diese Verfahren lediglich ermöglichen, ein in seinen wesentlichen Abmessungen gegebenes Getriebe zu untersuchen, bezüglich der in einzelnen Teilen auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, um danach die Teile werkstoffgerecht auszuwählen und zu bemessen. Damit sind gleichzeitig die Hilfsmittel an die Hand gegeben, um gewisse Verbesserungen hinsichtlich Abmessungen und Lage der Getriebeglieder zu geben, ohne jedoch den gegebenen getrieblichen Zusammenhang zu ändern. Die Verfahren erlauben auch verschiedene Getriebe für den gleichen Zweck miteinander zu vergleichen und dann die beste Lösung zu wählen.

Im zweiten Teil wird Gebrauch von rein geometrischen Verfahren zum Aufbau von Getrieben gemacht. Die sogenannte *Zahlensynthese*, erstmalig von M. Grübler angewandt, hat durch die Hand von K. Kutzbach und R. Kraus in Deutschland und A. W. Klein in Amerika eine wesentliche Weiterentwicklung erfahren.

Ein weiterer Zweig der Bewegungsgeometrie, die *Maßsynthese*, kann hier nur ganz kurz gestreift werden. Aus den nahezu vergessenen Arbeiten von L. Burmester und R. Müller ist sie von H. Alt, R. Beyer, W. Lichtenheldt, K. Hain wesentlich weiterentwickelt worden. Noch heute

wird die Bedeutung dieser Lehren von vielen Ingenieuren nicht voll verstanden. Es ist dies ein Zweig, der noch stark im Aufbau begriffen ist und noch der engsten Zusammenarbeit mit dem Maschineningenieur bedarf, um einwandfreie Getriebe zu entwickeln.

Die so entwickelten Methoden erlauben, bestimmte Forderungen aufzustellen und danach ein Getriebe zu finden, das diesen Forderungen genügt. Beispielsweise können zwei und mehr Stellungen eines Gliedes gegeben sein, und es sind die Aufhängepunkte zu finden, die es zur Koppel eines Gelenkvierecks macht, dessen feste Gelenkpunkte oder dessen Kurbellänge gegeben sind. Es muß jedoch vor der falschen Auffassung gewarnt werden, daß die Maßsynthese ermöglicht, *eine Getriebeform* zu finden. Die mögliche Getriebeform: Gelenkviereck, Gelenksechseck usw. muß jedoch bereits vorher festliegen, da nur dann die geometrischen Hilfsmittel zweckmäßig anwendbar sind.

Diese Überlegungen zeigen anschaulich, daß nur durch gemeinsame Anwendung der verschiedenen Grundverfahren der Getriebelehre der vom Maschineningenieur erwartete brauchbare Entwurf eines Getriebes entsteht. Beispielsweise dürften die Grundüberlegungen rein anschaulicher Natur sein, um einen geeigneten Getriebetyp zu finden (siehe Bd. II: Angewandte Getriebelehre), die den gestellten Bedingungen genügt. Die folgende Aufgabe wäre Anwendung der Zahlensynthese, ob das beabsichtigte Getriebe die für den Zweck geringste Zahl von Gelenken und Gliedern hat, und ob gleichwertige Getriebe bestehen. Der nächste Schritt wäre Anwendung der Maßsynthese, um die geeigneten Abmessungen des Getriebes zu ermitteln, woraufhin dann die analytischen Verfahren angewandt werden, um Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aufzufinden und das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhalten festzulegen. Daraufhin ist dann das Getriebe mit Rücksicht auf die Maschine konstruktiv zu entwickeln. Das Getriebe mag dann schwer mit der Form des ersten

Entwurfes in Einklang zu bringen sein. Der geschilderte Werdegang ist nur beispielsweise gegeben, da häufig wesentliche Abweichungen in der Reihenfolge notwendig sein werden, beispielsweise, wenn bestimmte Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen gegeben sind.

Die Reihenfolge der Behandlung in diesem Bändchen ist von didaktischen Gründen bestimmt.

Bewegungsgeometrie

(Bahnen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ebener Systeme)

1. Ebene Bewegung eines Punktes

1.1 Geradlinige Bewegung eines Punktes

Weg. Die gerade Linie fg (Bild 1) sei die Bahn eines Punktes A . Punkt O ist ein willkürlich gewählter Punkt auf dieser Bahn, der als Bezugspunkt für die Bewegung von A dienen soll. Die Lage von A auf der Geraden fg ist durch den Abstand $OA = s$ bestimmt. Um die Lage des Punktes A rechts oder links von O unterscheiden zu können, legen wir fest, daß $OA = s$ rechts von O ein positives, links von O ein negatives Vorzeichen erhält.



Bild 1. Geradlinige Bewegung eines Punktes vom Stillstand O .

Die Bewegung des Punktes A auf fg ist eindeutig bestimmt, sobald man zu jeder Zeit t die jeweilige Entfernung $OA = s$ kennt.

Um eine bestimmte Geschwindigkeit v aus dem Ruhezustand zu erreichen, muß ein Punkt vorerst eine bestimmte Beschleunigung p haben. Umgekehrt, um von einer Geschwindigkeit v zur Ruhe gebracht zu werden, muß dem Punkt eine negative Beschleunigung oder Verzögerung erteilt werden.

Dieser Zusammenhang kann nun durch Versuche ermittelt oder durch eine mathematische Beziehung zwischen s und t gegeben sein. Man drückt dies so aus, daß s eine Funktion von t ist, in Zeichen

$$s = f(t). \quad (1)$$

$f(t)$ bedeutet eine an sich willkürliche Funktion der Zeit, die jedoch stetig und eindeutig sein muß.

Um die Bewegung des Punktes A zu veranschaulichen, benutzt man eine graphische Darstellung, und zwar trägt man über der Zeit t als Abszisse den Weg s als Ordinate auf. Man erhält so das **Zeit - Weg - Schaubild** (ts -Schaubild, Bild 3).

Bild 3 gilt für den allgemeinen Fall (Bild 2), daß die Bewegung nicht im Ursprung O , sondern bei einem Punkte A_0 beginnt, wobei $OA_0 = s_0 = f(t_0)$.

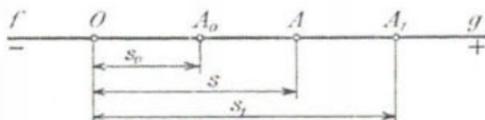


Bild 2. Geradlinige Bewegung eines Punktes, nach dem bereits ein bestimmter Weg s_0 zurückgelegt ist.

Geschwindigkeit. Um die Art des Bewegungsverlaufs zu kennzeichnen, benutzt man allgemein den Begriff der *Geschwindigkeit*. Man versteht hierunter die *Wegänderung in der Zeiteinheit*. In Bild 3 ergibt sich die Geschwindigkeit v des Punktes A zur Zeit t als Verhältnis des kleinen Wegabschnitts ds zu dem entsprechenden Zeitabschnitt dt . Werden die Abschnitte ds

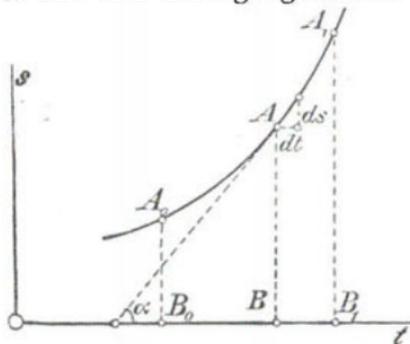


Bild 3. Zeit-Weg-Schaubild für eine beliebige Bewegung; die jeweilige Geschwindigkeit ist durch die Neigung der Tangente gegeben.

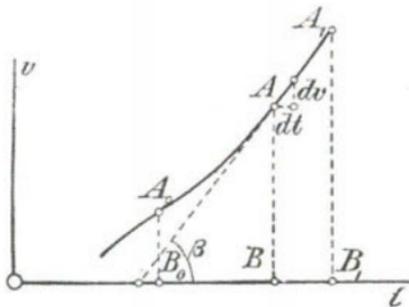


Bild 4. Zeit-Geschwindigkeits-Schaubild für beliebige Bewegung; die jeweilige Beschleunigung ist durch die Neigung der Tangente gegeben.

und dt unendlich klein, so erhält man

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t). \quad (2)$$

Aus der Differentialrechnung ist bekannt (s. auch Bild 3), daß $v = \operatorname{tg} \alpha$, d. h. die jeweilige Geschwindigkeit entspricht der Tangente an die Zeit-Wegkurve.

Trägt man die jeweilige Geschwindigkeit v graphisch über der Zeit t auf, so erhält man als weiteres kennzeichnendes Bild des Bewegungsverlaufes das Zeit-Geschwindigkeitsschaubild (tv -Schaubild, Bild 4). Aus der Beziehung Gl. 2) erhalten wir

$$ds = v \cdot dt;$$

zwischen den Zeiten $t = t_0$ und $t = t_1$ ergibt sich durch Integration $s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v \cdot dt$, d. h. der in diesem Zeitabschnitt zurückgelegte Weg. Er wird im tv -Schaubild dargestellt durch die Fläche $A_0A_1B_1B_0$.

Durch Auftragen der Geschwindigkeit v über dem Weg s erhält man das Weg-Geschwindigkeitsschaubild (sv -Schaubild), das (s. weiter unten) für den Beschleunigungsverlauf wichtig ist.

Beschleunigung. Ändert sich die Geschwindigkeit v der Bewegung mit der Zeit, so ist es für die Beurteilung des Bewegungsvorganges (insbesondere auch für das dynamische Verhalten) notwendig, die Geschwindigkeitsänderung während der Zeiteinheit zu erfassen. Unter der Beschleunigung p des Punktes A zur Zeit t versteht man das

Verhältnis der kleinen Geschwindigkeitsänderung dv zu dem entsprechenden Zeitabschnitt dt . Werden die Abschnitte dv und dt unendlich klein, so erhält man

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t). \quad (3)$$

Aus Bild 4 erkennt man, daß $p = \operatorname{tg} \beta$. Graphisch über der Zeit aufgetragen ergibt sich das tp -Schaubild (Bild 5). Man kann p auch aus dem sv -Schaubild erhalten, und zwar ist

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \quad (4)$$

also nur abhängig von v und s . Im Schaubild (Bild 6) ist die Subnormale

$$\begin{aligned} BC &= v \cdot \operatorname{tg} \gamma = \\ &= v \cdot \frac{dv}{ds} = p. \end{aligned}$$

Aus dem Zeit-Beschleunigungs-Schaubild (tp -Schaubild, Bild 5) läßt sich auch umgekehrt die Geschwindigkeit v ableiten. Aus der Beziehung Gl. (3) erhalten wir

$$dv = p \cdot dt.$$

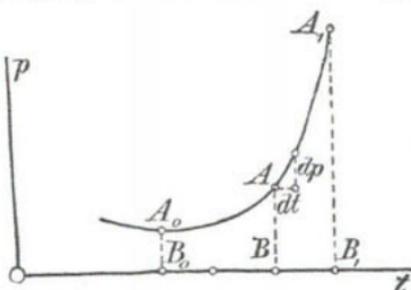


Bild 5. Zeit-Beschleunigungs-Schaubild für beliebige Bewegungen; die in einem bestimmten Zeitabschnitt erzielte Geschwindigkeit ist durch die unterhalb der Kurve liegende Fläche gegeben.

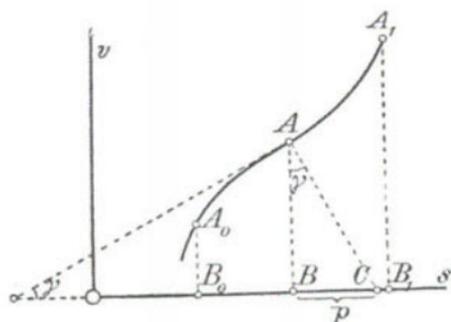


Bild 6. Weg-Geschwindigkeits-Schaubild. Die Subnormale ergibt die Beschleunigung.

Zwischen den Zeiten $t = t_0$ und $t = t_1$ ergibt sich durch Integration $v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} p \cdot dt$, d. h. die in diesem Zeitabschnitt aufgetretene Geschwindigkeitszunahme. Sie wird am tp -Schaubild dargestellt durch die Fläche $A_0A_1B_1B_0$.

Die Tangente an die Kurve (Bild 5) gibt die Änderung der Beschleunigung mit der Zeit: $\frac{dp}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$. Im allgemeinen werden höhere Ableitungen als $p = \frac{d^2s}{dt^2}$ nicht berücksichtigt. P. Melchior hat vorgeschlagen, die Ableitung von p , d. h. $\frac{dp}{dt}$, als Ruck zu bezeichnen.

Sonderfälle. Gleichförmige Bewegung ist eine Bewegung, bei der in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden, also

$$v = \text{konst}; p = 0; s = v \cdot t.$$

Gleichförmig beschleunigte Bewegung ist eine Bewegung, bei der die Beschleunigung stets gleichbleibt. Aus $p = \text{konst.}$ folgert

$$v = p \cdot t \text{ und } s = \frac{p}{2} \cdot t^2 \text{ (Beispiel: freier Fall).}$$

Die Beziehungen, die zwischen Höchst- und Kleinstwerten von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung einer beliebigen Bewegung bestehen, werden aus Bild 7 klar. Hat die Wegkurve s einen Höchst- oder Kleinstwert (analytische Bedingung $\frac{ds}{dt} = 0$), so ist nach $v = \frac{ds}{dt}$ v ebenfalls 0. Man erkennt in Bild 7, daß zu Beginn der Bewegung und an ihrem Ende s eine horizontale Tangente aufweist, ebenso in der Mitte der Bewegung. Die Geschwindigkeit erreicht ihre Höchstwerte, wenn die Wegkurve eine Wendetangente aufweist, d. h. wenn sie ihre Richtung ändert. Ähnliche Beziehungen bestehen zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung. Für $v = 0$ hat ent-

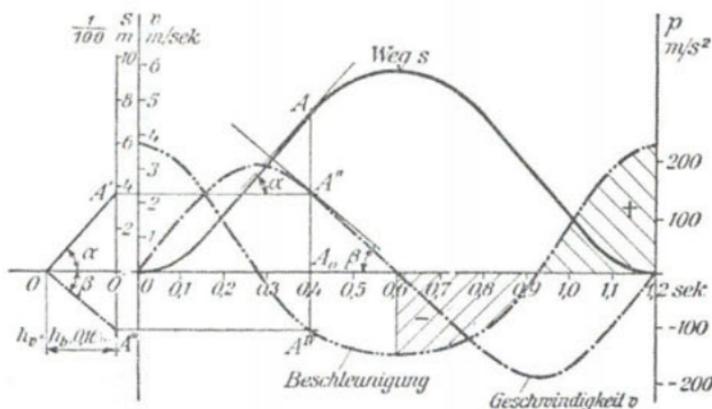


Bild 7. Zeit-Weg-, Zeit-Geschwindigkeits- und Zeit-Beschleunigungs-Schaubild für ein Kreuzschleifenge triebe; harmonische Bewegung, graphische Ermittlung.

sprechend $p = \frac{dv}{dt} = 0$ die Beschleunigung p Höchst- oder Kleinstwerte, andererseits ist $p = 0$ für die Höchst- und Kleinstwerte von v .

Beispiel: Harmonische Schwingung (Kreuzschleifenbewegung Bild 73 und 74, S. 96). Eine Kurbel dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und treibt am Halbmesser a einen Schieber. Sein Abstand von der Mittelstellung ist gegeben durch $s = a \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \omega t$, seine Geschwindigkeit ist $v = -\frac{ds}{dt} = a \cdot \omega \cdot \sin \omega t$, seine Beschleunigung

$$b = \frac{dv}{dt} = -a \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 s.$$

Die größte Auslenkung des Schiebers ist $s = \pm a$, mit $v = 0$ und $b_{\max} = \pm \omega^2 a$, d. h. die größte Beschleunigung ergibt sich in den Endstellungen. Die größte Geschwindigkeit des Schiebers ergibt sich für $s = a/2$, wobei auch die Beschleunigung 0 ist.

Einheiten. In der Bewegungslehre treten nur zwei Grundeinheiten auf, nämlich die der Länge und die der

Zeit; alle übrigen Einheiten, wie die der Geschwindigkeit und Beschleunigung, sind hierauf zu beziehen.

Längen und Wege werden in der Technik in mm, cm, m und km gemessen, Zeiten in min, sek, Stunden, neuerdings auch häufiger in $\frac{\text{min}}{100}$. Aus der Begriffsbestimmung der Geschwindigkeit erhalten wir dann das Maß für die Geschwindigkeit z. B. in cm/sek; m/sek; m/min; km/St. Am üblichsten ist das Maß m/sek, das auch im folgenden ausschließlich angewandt wird.

Zur zeichnerischen Darstellung der Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ist es notwendig, den *Zeichenmaßstab* so zu wählen, daß wir ein möglichst anschauliches Bild der Bewegung erhalten. Wir können für die einzelnen Werte an sich beliebige Maßstäbe wählen, nur muß der durch die Bewegung gegebene Zusammenhang gewahrt bleiben. Gerade das Umrechnen der Maßstäbe bereitet dem Anfänger erhebliche Schwierigkeiten, weshalb hierauf etwas näher eingegangen sei.

<i>Maß der Zeichnung</i>	<i>wirkliches Maß</i>
Wegmaßstab 1 cm	$\hat{=} a$ m
Zeitmaßstab 1 cm	$\hat{=} T$ sek
Geschwindigkeitsmaßstab 1 cm ..	$\hat{=} \beta = \frac{a}{T \cdot h_v}$ m/sek
Beschleunigungsmaßstab	
1 cm $\hat{=} \gamma =$	$\frac{\beta}{T \cdot h_b} = \frac{a}{h_b \cdot h_v \cdot T^2}$ m/sek ² .

Hierin sind a , T , h_v und h_b beliebig wählbare Größen. Man erkennt, daß, wenn diese 4 Größen gewählt sind, die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsmaßstäbe bestimmt sind. Näheres über die Bedeutung von h_v und h_b weiter unten. Ein Beispiel (Bild 7, Bewegungsvorgang eines Kreuzschleifengetriebes) mag den Zusammenhang

näher klären. Dieser Darstellung sind folgende Maßstäbe zugrunde gelegt, und zwar wurden $h_v = h_b = 0,16$ gewählt.

Wegmaßstab 1 cm $\hat{=} \alpha = 0,02$ m

Zeitmaßstab 1 cm $\hat{=} T = 0,1$ sek

Geschwindigkeitsmaßstab 1 cm $\hat{=} \beta = \frac{0,02}{0,1 \cdot 0,16} = 1,25$ m/sek

Beschleunigungsmaßstab 1 cm $\hat{=} \gamma = \frac{1,25}{0,1 \cdot 0,16} = 78$ m/sek².

Liest man in der Zeichnung z. B. eine Höchstgeschwindigkeit von 2,5 cm ab, so bedeutet das $v_{\max} = 1,25 \cdot 2,5 = 3,125$ m/sek. Bei jeder zeichnerischen Darstellung mache man sich zuerst die Größe der Maßstäbe klar und trage sie in die Zeichnung ein, damit keine Verwechslungen entstehen können.

Graphische Ermittlung. Ist eine der Funktionen $s = f(t)$, $v = f_v(t)$, $p = f_p(t)$ gegeben oder durch ein beliebiges Verfahren ermittelt, so können die entsprechenden Wege, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen durch graphische Differentiation und Integration auf Grund der Gleichungen 1—4 ermittelt werden.

Graphische Differentiation. In Bild 7 sei vorerst nur die Wegkurve s über der Zeit t gegeben. Die Geschwindigkeit v des Punktes A, der den Weg A_0A zurückgelegt hat, finden wir aus der Beziehung $v = tg \alpha$. Wir konstruieren ein Poldreieck über $OO' = h_v^{1)}$ und ziehen OA' parallel zur Tangente in A. $O'A'$ ist dann die graphisch ermittelte Geschwindigkeit v des Punktes A. Auf diese Weise lassen sich für alle Punkte der Wegkurve A die zugehörigen Geschwindigkeiten ermitteln, und man trägt die Geschwindigkeitskurve v über der Zeit t ein. Die Beschleunigung p

1) Bei der graphischen Differentiation bzw. Integration ist h_v bzw. h_b im Zeitmaßstab abzutragen.

des Punktes A finden wir durch ein gleiches Verfahren, indem wir die Tangenten an den Punkt A'' der Geschwindigkeitskurve anlegen und in einem beliebigen Poldreieck über $OO' = h_b$ eine Parallele zur Kurventangente ziehen; die Strecke $O'A''$ ist dann die gesuchte Beschleunigung $p = \operatorname{tg} \beta$ des Punktes A . Durch Ziehen mehrerer Tangenten an v ermittelt man so Einzelwerte der Beschleunigungskurve.

Die Beschleunigung p läßt sich ebenfalls graphisch nach dem Subnormalenverfahren (s. S. 13) bei gegebener s -Kurve ermitteln. Der Beschleunigungsmaßstab ist hier $1 \text{ cm} \hat{=} \frac{\beta^2}{a} \text{ m/sek}^2$. Die graphische Ermittlung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen setzt eine genaue Konstruktion der Kurventangenten voraus (hierfür empfiehlt sich die Anwendung eines kleinen Spiegels, den man in Richtung der Kurvennormalen so lange dreht, bis das sichtbare Kurvenstück mit seinem Spiegelbild zusammenfällt). *Wegen der Ungenauigkeiten der Tangentenkonstruktion ist eine zweimalige graphische Differentiation nicht zu empfehlen*; dies ist auch im allgemeinen nicht notwendig, da entweder das Bewegungsgesetz als Funktion gegeben ist oder durch ein Getriebe verkörpert wird, dessen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen vektoriell ermittelt werden können (siehe weiter unten).

Durch *graphische Integration* kann bei gegebener Geschwindigkeitskurve die Wegkurve und bei gegebener Beschleunigungskurve die Geschwindigkeitskurve ermittelt werden. Man wendet das Tangentenverfahren nach Bild 7 umgekehrt an (Bild 8). Die einzelnen Ordinaten der v -Kurve werden auf die Achse in O' übertragen und die Endpunkte mit dem Pol O verbunden. Um einen stetigen Verlauf der s -Kurve zu sichern, sind zwischen die Ordinaten O bis 6 Hilfsordinaten a bis f so zu legen, daß die oberen und unteren schraffierten Flächen jedes Feldes gleich groß werden. Zu den Polstrahlen durch O sind nun Parallelen zu ziehen. Die erste entspricht dem Polstrahl O

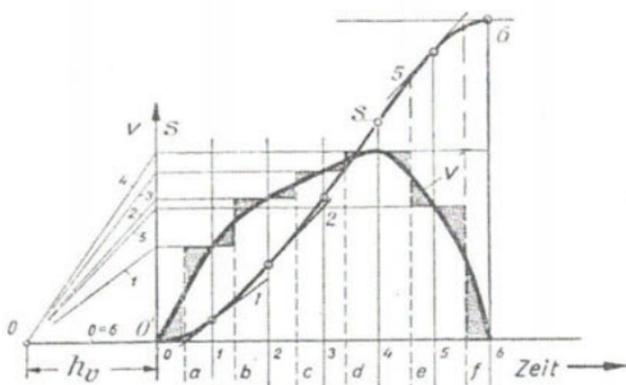


Bild 8. Graphische Integration einer Zeit-Wegkurve aus einer gegebenen Zeit-Geschwindigkeitskurve.

und geht durch O , die zweite ist parallel zu Polstrahl 1 und schneidet O in a , die dritte ist parallel zu Polstrahl 1 und schneidet die zweite Parallele auf Ordinate b usw. Der so entstandene Linienzug umhüllt die Wegkurve bzw. bei gegebener Beschleunigung die Geschwindigkeitskurve.

Ein anderes Verfahren ist, die Fläche unter der Geschwindigkeitskurve zu integrieren. Man teilt die Fläche in eine Anzahl paralleler Streifen und mißt diese aus.

1.2 Zusammensetzung geradliniger Bewegungen

Wege. Führt ein Punkt gleichzeitig zwei Bewegungen aus, z. B. ein Segelboot, das stromabwärts fährt und gleichzeitig vom Wind getrieben wird, so ergibt sich der tatsächlich zurückgelegte Weg durch Aneinandersetzen der in jeder der beiden Weg-

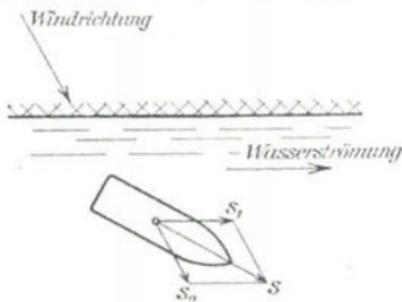


Bild 9. Parallelogramm der Wege am Beispiel eines Segelbootes, ausgesetzt der Wasserströmung und dem Windtriebe.

richtungen s_1 und s_2 zurückgelegten Wege unter Berücksichtigung der richtigen Wegrichtungen (Bild 9).

Man nennt das entstehende Bild das *Parallelogramm der Bewegungen* (Bild 10a) und erkennt, daß es gleich ist, ob man zum Punkte A_2 auf dem Weg AA_1A_2 (Bild 10b) oder AA'_1A_2 (Bild 10c) gelangt. Ist der Winkel zwischen s_1 und s_2 bekannt, so kann man s aus s_1 und s_2 nach dem

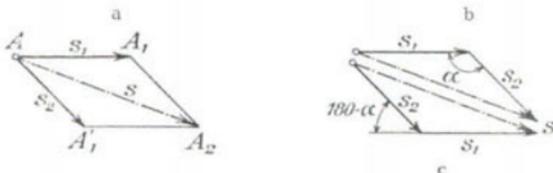


Bild 10 a—c. Zusammensetzung von Wegen.

Cosinussatz der Trigonometrie berechnen:

$$s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \cos \alpha}. \quad (5)$$

Da man aber in der Bewegungslehre (und auch in anderen Zweigen der Mechanik) mit *zeichnerisch gegebenen* Größen zu tun hat, wendet man das Verfahren der geometrischen Addition (oder Subtraktion) an und schreibt an Stelle Gleichung (5)¹⁾

$$s = s_1 \leftrightarrow s_2, \quad (5a)$$

wobei das Zeichen \leftrightarrow die Summe von einer gewöhnlichen algebraischen Summe unterscheidet. Die geometrische Summe $s_1 \leftrightarrow s_2$ wird zur algebraischen Summe, wenn die Wege s_1 und s_2 gleiche Richtung haben, wenn also $\alpha = 180^\circ$. Da es gleich ist, auf welchem Wege man zu A_2 gelangt, ist auch bei der geometrischen Addition die Reihenfolge der Summanden gleich, also $s = s_2 \leftrightarrow s_1$.

Umgekehrt kann man auch jede Bewegung in Komponenten zerlegen, z. B. nach Koordinatenachsen. So er-

1) Von der eigentlichen Vektorrechnung soll in diesem Bändchen kein Gebrauch gemacht werden. Die Schreibweise \rightarrow und \leftrightarrow ist von M. Tolle in Regelung der Kraftmaschinen zuerst 1905 eingeführt worden.