SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 226/226a

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

von

DR. JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN
Honorarprofessor an der Universität Tübingen

ERSTER TEIL

VON DEN ANFÄNGEN BIS ZUM AUFTRETEN VON FERMAT UND DESCARTES

2., verbesserte und vermehrte Auflage

WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
Berlin 1963

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende Bände:

I: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes
(Band 226/226a)

II: Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden
(Band 875)

III: Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur Französischen Revolution
(Band 882)

 — Archiv-Nr. 77 10 639. — Satz und Druck: Mercedes-Druck, Berlin 61. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Diese zweite Auflage ist gegenüber der ersten vor allem durch Anpassen der Abschnitte über die Mathematik der Babylonier, über die Entdeckung des Irrationalen, über die Mathematik der Muslime und der Chinesen an den gegenwärtigen Forschungsstand und durch Einfügen eines Abschnittes über die Mathematik der alten Byzantiner verändert; dazu treten kleinere Einschiebungen und die Ergänzung der Register. Das Ziel der ersten Auflage, eine gedrängte Gesamtübersicht über die Mathematikgeschichte mit bewußter Betonung der sachlichen Probleme und streifender Behandlung der Nachbargebiete zu geben, ist unverändert festgehalten; das nunmehr ausführlicher gehaltene Sachverzeichnis will bei der Suche nach Einzelheiten dienlich sein.

Mein herzlichster Dank gilt den Helfern bei der Durchsicht der Korrekturen, Frl. Studienreferendarin Helga Bertram, Herrn Oberschulrat Dr. Siegfried Heller, Frau Studienassessorin Friedl Kneser, Herrn Professor Johann Niessner und Herrn Dr. Christoph Scriba und nicht zuletzt dem Verlag, der in so liebenswürdiger Weise auf alle meine Anregungen eingegangen ist.

Ichenhausen, im Herbst 1962

Jos. E. Hofmann

Geschichte der Mathematik

Allgemeiner Überblick

Das mathematische Denken hat sich zur heutigen formalen Geschlossenheit und inhaltlichen Vielgestalt nicht plötzlich, sondern in jahrtausendelanger mühevoller Entwicklung erhoben. Am Anfang stehen rezeptartige Rechenvorschriften und handwerkliche Konstruktionsanweisungen, zu denen sich merkwürdige teils abergläubische, teils mystisch-religiöse Vorstellungen und eigentümliches Brauchtum gesellen. Allgemeinere systematische Gesichtspunkte zeigen sich bei den PYTHAGOREERN (5. Jahrh. v. Chr.), klare Einsichten in das Wesen, die Bedeutung und die Tragweite des beweisenden Verfahrens im Zusammenhang mit der Entdeckung des Irrationalen bei den unteritalischen GRIECHEN (um 400 v. Chr.). Um diese Zeit löst sich die Mathematik als selbständiger Wissenszweig von der griechischen Philosophie ab, bleibt jedoch mit ihr durch die Art der theoretischen Geisteshaltung aufs innigste verbunden. Trotz der mangelnden Symbolik und der Ablehnung direkter infinitesimaler Methoden stellt die Mathematik der hellenistischen Hochblüte (3. Jahrh. v. Chr.) ein in sich geschlossenes Wissenschaftssystem von hohem Wert dar. Sie ist reine Geisteswissenschaft und hat mit der gleichzeitigen Naturwissenschaft, die um qualitative Deutungen auf Grund des äußeren Erscheinungsbildes ringt, nur wenig zu tun; auch die technischen Anwendungsmöglichkeiten werden kaum genutzt.

Mit der Einfügung der Diadochen-Staaten in das römische Reich (Griechenland 197, Syrien 64, Ägypten

31 v. Chr.) tritt auf weltanschaulichem Gebiet die Stoa, auf philosophischem der kosmopolitische Eklektizismus in den Vordergrund; das Interesse an der theoretischen Mathematik ist im Schwinden und kann auch durch die Wiederbelebungsversuche der NEUPYTHAGOREER und NEUPLATONIKER (3. Jahrh. n. Chr.) nicht mehr in früherem Maße geweckt werden. Die junge Kirche lehnt die theoretische Fachmathematik wegen deren Bindung an die Philosophie zunächst als typisch heidnische Wissenschaft ab und will anfangs nur die unumgänglich nötigen praktischen Methoden gelten lassen; die letzten NEUPLATONIKER fassen das gesamte ihnen zugängliche mathematische Wissen in Sammelwerken und Ausgaben zusammen. Nebenher entwickeln sich die ersten brauchbaren Ansätze einer symbolischen Algebra (4.—6. Jahrh.).

Durch die Teilung von 395 wird die kulturelle Einheit des bis dahin völlig zweisprachigen Reiches bedroht; durch den Zusammenbruch des Westreiches (476) geht dem von germanischen Völkern überfluteten Abendland die Kenntnis des Griechischen verloren, ohne daß die Hauptwerke der hellenistischen Philosophie und Mathematik ins Lateinische übersetzt worden wären, so daß ein neuer Anfang auf primitiver Grundlage gemacht werden muß. Im Ostreich hält sich die wissenschaftliche Tradition noch lange; von hier fließt griechisches Wissen nach Mesopotamien, Persien und Indien, wird mit dort vorhandenen eigenen Ansätzen verknüpft und führt zum Ziffernrechnen und zur Ausgestaltung der Trigonometrie (wohl seit dem 5. Jahrh.). Nach Aufrichtung (Heǧra 622) und Sicherung des Kalifats nehmen die MUSLIME das mathematische Können der Griechen und Inder in vorzüglichen Übersetzungen auf (9. Jahrh.), führen es geschickt fort und geben es (seit dem 12. Jahrh.) an das christliche Abendland weiter, wo gleichzeitig auch lateinische Übersetzungen aus griechischen Vorlagen angefertigt werden. Die Diskussionen der SCHOLASTIKER um das Unendliche und das Kontinuum (seit dem 12. Jahrh.) und die symbolhafte und rechnerische Veranschaulichung von Eigenschaften und ihren Veränderungen (seit dem 14. Jahrh.) bereiten den Boden für das Wiederaufleben des mathematischen Interesses, das zunächst der Übersetzung (15. Jahrh.), dann der Wiedergabe der stückweise wieder auftauchenden griechischen Originale (16. Jahrh.), schließlich der selbständigen Weiterbildung des Gewonnenen gilt. Gleichzeitig formt sich mit der Wendung zur quantitativen Naturforschung und technischen Nutzbarmachung ein auf mathematisch-naturwissenschaftlicher Grundlage beruhendes Weltbild, das durch den konsequenten Übergang zur infinitesimalen Betrachtungsweise, zum Funktionsbegriff und zu einer symbolischen Begriffsschrift entscheidende Züge erhält (17. Jahrh.).

Die unerhörten Erfolge der nunmehr auf allen Gebieten der exakten Naturforschung verwendeten neuen Verfahren führen zu außerordentlicher Ausdehnung des mathematisch erfaßbaren Wissensstoffes (18. Jahrh.), verleiten jedoch zu ungebührlicher Nachlässigkeit hinsichtlich methodisch einwandfreier Begründung der anzuwendenden Ansätze. Erst im 19. Jahrh. klärt sich das vordem in reicher Fülle Gewonnene ab, wird systematisch zusammengefaßt, algorithmisch vereinheitlicht und mit immer anspruchsvoller werdender Präzision dargestellt, die in der modernen axiomatisierenden Grundlagenforschung und in der Wendung zur Logistik mündet. Jetzt erst wird der ernsthafte Versuch gemacht, die Mathematik als geschichtliche Einheit zu erfassen und nicht nur vom biographischen Standpunkt aus, sondern nach ihrem Inhalt an Problemen und Ideen zu behandeln und in ihrer Wechselbeziehung mit den anderen kulturschaffenden Faktoren der einzelnen Epochen verstehen zu lernen.

Zur Einführung

G. Loria: *Guida allo studio della storia delle matematiche*, Mailand 1916, [2]1946.
G. A. Miller: *Historical introduction to mathematical literature*, New York 1916.
G. Sarton: *The study of the history of mathematics*, Cambridge (Mass.) 1936, [2]New York 1957.
D. E. Smith: *A source book in mathematics*, New York 1929, [2]1959.

Bio-Bibliographisches

J. C. Poggendorff: *Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, Leipzig seit 1863.

Geschichte der Mathematik

R. Cl. Archibald: *Outline of the history of mathematics*, Lancaster 1932, Oberlin (Ohio) [2]1934, [3]1936, [4]1939, [5]1941, [6]1949.
O. Becker-J. E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik*, Bonn 1951, frz. Paris 1956.
Fl. Cajori: *A history of mathematics*, New York [1]1894, [2]1919, [3]1922.
M. Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig I: [1]1880, [2]1894, [3]1907; II: [1]1892, [2]1899/1900; III: [1]1898, [2]1900 bis 1901; IV: 1908 (veraltet).
S. Günther-H. Wieleitner: *Geschichte der Mathematik*, Leipzig/Berlin I 1908; II_1 1911, II_2 1921.
G. Loria: *Storia delle matematiche*, Turin I 1929, II 1931, III 1933, [2]Mailand 1950.
K. A. Rybnikov: *Geschichte der Mathem.* I (russ.), Moskau 1960.
D. E. Smith: *History of mathematics*, Boston/London 1923, 1925, [2]1928, 1930, [3]1951/53, [4]New York 1958.
D. J. Struik: *A concise history of mathematics*, New York 1948 (2 Bände), dtsch. Berlin 1961.
H. Wieleitner: *Geschichte der Mathematik*, Leipzig 1922/23 (Samml. Göschen 226, 875); Neudruck 1939; spanisch von C. M. Brunet, Barcelona 1928, 1932.
H. Wieleitner: *Geschichte d. Math. v. Descartes bis zur Mitte des 19. Jh.*, Moskau 1960 (russ. Wiedergabe d. Mathematikgesch. 1911/21 und 1923, Sammlg. Göschen 875).
H. G. Zeuthen: *Geschichte d. Math. im Altertum u. Mittelalter*, dän. Kopenhagen 1893, [2]1949 (m. Ergänzungen v. O. Neugebauer); dtsch. Kopenhagen 1896, frz. Paris 1902, russ. Moskau-Leningrad 1938.
Mathematisches Wörterbuch d. Dtsch. Akad. d. Wiss., ed. J. Naas-H. L. Schmid, Berlin-Leipzig-Stuttgart 1961.

Geschichte der Elementarmathematik

Fl. Cajori: *A history of elementary mathematics*, New York [1]1896, [2]1917, [3]1930; russ. von I. U. Timtschenko, Odessa 1910.
E. Bortolotti in *Enciclopedia matematica elementare e complem.* III_2, Mailand 1950.
J. Tropfke: *Geschichte der Elementarmathematik*, Leipzig 1902 / 1903 (2 Bände), [2]Berlin 1921 / 1924 (7 Bände), [3]1930/40 (die ersten vier Bände).

Zur Kulturgeschichte

C. Barbagallo: *Storia delle scienze*, Mailand 1925.
W. C. Dampier-Wetham: *A history of science and its relation with philosophy and religion*, Cambridge [1]1929, [2]1930, [3]1940.
F. Enriques: *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna 1938.
J. Perès: *Les sciences exactes*, Paris 1930.
G. Sarton: *A guide to the history of science*, Waltham 1952; *Introduction to the history of science*, Baltimore I 1927, II 1931, III_1 1947, III_2 1948.
J. T. Shotwell: *An introduction to the history of history*, New York 1922.
Handbuch der Kulturgeschichte ed. H. Kindermann, Potsdam 1934.

Einige Zeitschriften
mit mathematikgeschichtlichen Beiträgen:

Bulletino di bibliografia e di storia delle sc. mat. e fis., ed. B. Boncompagni, Rom 1868 – 1887
Zeitschrift f. Math. u. Physik, literar.-hist. Abtlg., ed. M. Cantor, Leipzig 1875 – 1900.
Abhandlungen z. Gesch. d. math. Wiss., ed. M. Cantor, Leipzig 1877 – 1918.
Bibliotheca mathematica, ed. G. Eneström, Stockholm / Berlin / Paris [1]1884 – 1886; [2]1887 – 1899; Leipzig [3]1900 – 1914.
Archiv f. Gesch. d. Math., d. Naturwiss. u. d. Technik, Leipzig 1909 – 1931,
Isis, An internat. review, devoted to the hist. of science, begr. v. G. Sarton, Cambridge (Mass.), seit 1913.
Archivio di storia della scienza, begr. v. A. Mieli, Rom seit 1919, seit 1927 als *Archeion*, seit 1947 als *Archives internat. d'hist. d. sciences*, Paris.
Quellen u. Studien z. Geschichte d. Math., Astronomie u. Physik, Abt. A: Quellen, Berlin 1930 – 1937; Abt. B: Studien, Berlin 1931 bis 1938. Hgg. v. O. Neugebauer u. a.
Scripta mathematica, New York seit 1932.
Osiris, Commentationes de scientiarum et eruditionis historia rationeque, begr. v. G. Sarton, Brügge seit 1936.
Revue d'histoire des sciences, Paris seit 1947.
Trudy inst. istorii estestv., Moskau-Leningrad seit 1947 (russ.).
Istoriko-matematičeskije issledovanija, Moskau-Leningrad, seit 1948 (russ.).
Centaurus, International magazine of the hist. of sc. and medicine, Kopenhagen seit 1950.
Trudy inst. istorii estestv. techn.; Moskau seit 1954 (russ.).
Voprosy istorii estestv. techn., Moskau seit 1956 (russ.).
Physis, Rivista di storia della scienza, Florenz seit 1959.
NTM, Zeitschrift f. Gesch. d. Naturwiss., Techn. u. Medizin, Leipzig seit 1960.
Archive for history of exact sciences, ed. C. Truesdell, Berlin/Göttingen/Heidelberg seit 1960.
Boethius, Texte u. Abhdl. z. Gesch. d. exakten Wissensch., ed. J. E. Hofmann, Fr. Klemm, B. Sticker, Wiesbaden seit 1962.

Referierorgane

Jahrbuch über die Fortschritte d. Math., gegr. v. C. Orthmann - F. Müller, Berlin 1868 – 1944.
Mitteilungen z. Gesch. d. Medizin, d. Naturwiss. u. d. Technik, gegr. v. K. Sudhoff - S. Günther, Leipzig 1901 – 1943, neubegr. v. R. Zaunick, Leipzig seit 1961.
Zentralblatt f. Mathematik u. ihre Grenzgebiete, Berlin seit 1931.
Mathematical reviews, Providence, R. I., seit 1939.
Außerdem regelmäßig wissenschaftsgeschichtliche Bibliographien in *Isis*.

I. Abschnitt

Vorgriechische Mathematik

1. Aus der Vorgeschichte

Schon dort, wo uns die Arbeit des Prähistorikers nähere Einzelheiten über die Kultur der Steinzeit erschlossen hat, stoßen wir auf ausgeprägtes mathematisches Können. Bauten und Grabanlagen, die Zierate auf Waffen und Werkzeugen, auf Gebrauchs- und Schmuckgegenständen, vor allem aber die Töpferware, das Flechtwerk und die Webereierzeugnisse verraten uns Formensinn und hochstehende handwerkliche Vertrautheit mit den geometrischen Grundtatsachen. Den nur kärglich erhaltenen Inschriften stehen wir zumeist noch hilflos gegenüber. Gelegentlich wissen wir, daß es sich um Daten oder Inventare handelt, und können regelmäßig wiederkehrende Zeichen als Ziffern deuten. Gemeingut ist die Kenntnis des gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecks, des Quadrats, des Rechtecks, des Kreises und des in ihn gelegten regelmäßigen Sechsecks, der Kugel, des Zylinders, des Quaders, des Würfels, des regelmäßigen Vierflachs und Achtflachs und dergleichen mehr. Feines Gefühl für Symmetrieeigenschaften verrät sich bei der schmückenden Ausfüllung von Flächen durch geometrische Ornamente, die entweder in unbeschränkt fortsetzbaren Streifen oder in kreisförmig sich schließenden Gebilden angeordnet sind.

Die einfachsten Zahlen werden wie Eigenschaften behandelt und gelegentlich in unmittelbare Beziehung zu den gezählten Gegenständen gebracht, so daß den nämlichen Anzahlen verschiedene Zeichen zugeordnet sind (konkrete Zahlen). Im allgemeinen wird die reihende Schreibweise bevorzugt; schon sehr früh finden sich Obereinheiten, doch wird die Stufung nicht allzu weit getrieben und häufig durchbrochen. Bei den indogermanischen Völkerschaften herrscht eine gewisse Neigung zum Verdoppeln und Vervierfachen vor, bei den Kelten spielt das Zwanzigfache eine große Rolle. Auch dezimale Stufungen treten auf, vor allem die Fünferbündelung und die Kennzeichnung einer Zahl durch Hinaufzählen zu einer höhergelegenen Schwelle. (Für alle diese Bezeichnungsweisen und für die fortgesetzte Einführung neuer Individualzeichen für Zahlen — gelegentlich in starker Abweichung vom Zahlwort — finden sich Beispiele bei den Völkern mit bereits ausgeprägter Hochkultur und schriftlicher Tradition.) Im ganzen zeigt sich eine gewisse, jedoch nicht allzu weitgehende Verwandtschaft der Neolithiker mit den Überlieferungen und dem Brauchtum der heute noch vorhandenen spärlichen Überreste unberührter Naturvölker, denen freilich die geistige Formkraft gefehlt hat, Stammeltern echter Kulturvölker zu werden.

Dort, wo uns entzifferbare schriftliche Überreste erhalten sind, stoßen wir auf die rezeptartige Behandlung praktischer Aufgaben, wie sie sich bei der Abgrenzung von Feldern, bei Errichtung von Vorratsräumen, Dämmen usw. ergeben. Am Anfang stehen die genauen Regeln für Rechteck, Dreieck und Quader, bei den übrigen Gebilden hilft man sich zunächst durch Näherungen, exakte Vorschriften folgen erst später. Im Zusammenhang mit der Verwendung von Maßen, Münzen und Gewichten werden Umrechnungen zwischen einer Einheit und ihren Untereinheiten nötig. Damit ist der Einführung von Brüchen vorgearbeitet, deren einfachste überall eine individuelle Behandlung erfahren haben. Ferner finden wir Proportionen an ähnlichen Figuren. Die sich langsam formenden staatlichen Verhältnisse zwingen zur Verwendung größerer Zahlen. Die wechselnden Jahreszeiten, die in schwer übersehbarer Form mit den Lichtgestalten des Mondes zusammenhängen, führen auf das schwierige Kalenderproblem, das von den einzelnen Völkergruppen auf gänzlich verschiedenen Wegen angegriffen und zumeist eng mit religiösen Vorstellungen verbunden wird.

Zur Kulturgeschichte der Steinzeit

K. Breysig: *Die Geschichte der Menschheit* I, Breslau 1936.
R. Furon: *Manuel de préhistoire générale*, Paris [1]1939, [2]1943.
L. Lévy-Bruhl: *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*, Paris [8]1928, deutsch Wien [2]1926.
O. Menghin: *Weltgeschichte d. Steinzeit*, Wien 1931.
M. P. Nilson: *Primitive timereckoning*, Lund 1920.
Reallexikon der Vorgeschichte, ed. M. Ebert, Berlin 1924/32.
K. Vogel: *Vorgriechische Mathematik* I: *Vorgeschichte u. Ägypten*, Hannover/Paderborn 1958.

Zur Entwicklung der Zahlen

E. Fettweis: *Das Rechnen der Naturvölker*, Leipzig 1927.
J. C. Gregory: *The nature of number*, London 1919.
F. A. Willers: *Zahlzeichen und Rechnen im Wandel der Zeit*, Berlin/Leipzig 1950.
I. J. Depman: *Geschichte des Rechnens*, Moskau 1959 (russ.).
E. Löffler: *Ziffern und Ziffernsysteme*, Leipzig [1]1912, [2]1918/19 (2 Bändchen), [3]1928.
K. Menninger: *Zahlwort und Ziffer* = *Aus der Kulturgeschichte der Zahlen*, Breslau 1934, [2]Göttingen 1957/1958 (2 Bde.).

2. Die Babylonier (2000—200)

Die uns überlieferten ziemlich zahlreichen Keilschrifttäfelchen mathematischen Inhaltes entstammen größtenteils dem Mündungsgebiet des Euphrat und Tigris und reichen zeitlich vom 2. Jahrtausend bis zum 2. Jahrhundert v. Chr. Sie geben im wesentlichen Gedankengut der Sumerer wieder, die um 3500 für ihre vorzugsweise aus einsilbigen Wörtern bestehende agglutinierende (= anleimende) Sprache eine Bilderschrift verwenden und diese später durch Stilisierung zur Keilschrift umformen, deren Grundzeichen vermittels eines dreikantigen Schreibstifts in weichen Ton eingedrückt werden. In kriegerischer Auseinandersetzung mit den immer weiter vordringenden semitischen Akkadern (seit 2500) mehr und mehr zurückgedrängt und seit 2000 fast völlig entmachtet, behalten die Sumerer trotzdem die kulturelle Führung. Ihre Schrift dient jetzt teils ideographisch (als Bilderschrift), teils syllabisch (als Silbenschrift) zur Darstellung des flektierenden Akkadischen. Das Zahlensystem der uns vorliegenden Texte beruht auf der reihenden Nebeneinanderstellung von keilförmigen Einern (𒁹) und hakenförmigen Zehnern (𒌋), mittels derer die Zahlen von 1 bis 59 dargestellt werden. Die Zahl 60 wird wieder durch (𒁹) bezeichnet, das Weitere rein positionell in einem Sexagesimalsystem ausgedrückt, worin jedoch der Stellenwert der einzelnen Ziffern nicht festgelegt wird. Ein inneres Lückenzeichen ist erst seit etwa 600 verbürgt. Für die Brüche $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$ und $^5/_6$ sind eigene Zahlwörter und Individualzeichen vorhanden. Das System ist wohl durch Verbindung der älteren zum Teil rein dezimalen (semitischen) Maß-, Gewichts- und Münzbezeichnungen mit einer Zwölferteilung entstanden. In ihm wird die Addition durch Reihung, die Subtraktion durch ein eigenes Zeichen angedeutet, das auch zur Darstellung von Zahlen unterhalb größerer Rundzahlen Verwendung findet. In astronomischen Texten stehen Angaben, die als Gegenüberstellung positiver und negativer Zahlen gedeutet werden können. Wahrscheinlich dient ein Rechenbrett zum Festhalten von Hilfsergebnissen.

In Reziprokentabellen werden alle sich zu 60 (oder einer Potenz davon) ergänzenden ganzzahligen Faktorpaare zusammengestellt und um die Anfangswerte $^1/_2$ und $^2/_3$ vermehrt. Später (3. Jahrh.) finden sich ausgedehnte Tafeln, die durch systematisch fortgesetzte Teilung mit 2, 3 und 5 aus der Normaltabelle (Aufzählung aller ganzen Faktoren unter 60, die Teiler von 60^n sein können) hervorgehen. Dazu treten Multiplikationstabellen, worin die einstelligen Zahlen und reinen Zehner unter 60 mit den ersten 20 Zahlen und den nachfolgenden Zehnern vervielfacht werden; dies dient auch zur Vervielfachung von Stammbrüchen. Da die Einheit im Positionssystem unbestimmt ist, läßt sich das (ausschließlich verwendete) Rechnen mit sexagesimal aufgehenden Brüchen völlig in ganzen Zahlen ausführen. Innerhalb dieses Bereiches sind sich die Babylonier über das Wesen des allgemeinen Bruches klar. Sie besitzen weiterhin Tabellen von Quadratzahlen, von aufgehenden Quadrat- und Kubikwurzeln (Grundzahlen 9, 16, 100, 225), von aufgehenden Bruchpotenzen (Grundzahl 16) und von Hochzahlen der ersten Zweierpotenzen, ferner von $n^3 + n^2$. Außerdem gibt es Tafeln rechtwinkliger Pythagoreischer Dreiecke, die vermittels der Reziprokentafeln aus $x = \frac{1}{2}(t-1/t)$, $y=1$, $z=\frac{1}{2}(t+1/t)$ konstruiert werden, unter t eine *reguläre* Zahl (hat nur Primteiler 2, 3, 5) oder den Quotienten $u:v$ zweier regulärer Zahlen verstanden (der nach Übergang zu passenden sexagesimalen Untereinheiten wiederum regulär wird). In diesem Fall ist die Konstruktionsvorschrift gleichwertig mit $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$. Dazu treten reguläre Näherungswerte für reziproke Irregulärzahlen. Da die direkte Berechnung der Kehrwerte von $2^n \cdot 5^3$ für größere ganze n unhandlich ist, wird sie nach Wahl passender Zahlen a, b vermittels der Formel: $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} : \left(\frac{1}{a} \cdot b + 1\right)$ verkürzt.

Großen Raum nehmen Aufgaben aus dem praktischen Leben ein. Hier erscheint der Schluß von der Einheit auf die Mehrheit und seine Umkehrung, außerdem eine Fülle spezieller Methoden zur Behandlung eingekleideter und auch rein arithmetischer Aufgaben. Zu ihrer Lösung dienen einerseits Tabellen, andererseits heuristische Verfahren, ferner der falsche Ansatz (Bestimmung kennzeichnender Proportionalitätsfaktoren) und die Einführung von Hilfsunbekannten. Infolge der eigenartigen ideographischen Bezeichnungen sind die Rechenanweisungen sprachlich beinahe unübersetzbar und zeigen daher gewisse Verwandtschaft mit der formelmäßigen algebraischen Wiedergabe. Behandelt werden lineare Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, ferner quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten, bei denen im Fall einer einzigen positiven Lösung die quadratische Ergänzung auftritt, während im Fall von zwei positiven Lösungen auf das System $x + y = a$, $xy = b$ reduziert wird. Sehr häufig sind quadratische Probleme mit zwei oder mehreren Unbekannten. Bei der Lösung spielt die immer wiederkehrende Identität

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$$

eine große Rolle. Hierher gehört auch das isoliert auftretende unbestimmte Problem $x^2 + 22^1/_2 = y^2$ (Lösung: $x = 2^1/_4$, $y = 5^1/_4$), ohne Herleitung, wohl durch

Hinzunahme von $y = x + 3$ behandelt. Kubische Gleichungen werden auf die Tabelle $x^3 + x^2 = a$ reduziert, Beispiele für höhere Gleichungen lassen sich auf quadratische zurückführen. Arithmetische Reihen werden im Zusammenhang mit Verteilungsaufgaben auf Grund geometrischer Hilfsbetrachtungen summiert; Entsprechendes gilt auch für die Quadratsummenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}(1 + 2n) \cdot \sum_{k=1}^{n} k$$

und für die Konstruktion geometrischer Folgen. Außerdem werden Zinseszinsaufgaben (Jahreszins 20%) gelöst; ferner findet sich eine interessante Amortisationsaufgabe.

Die zahlreichen Flächenberechnungen (Quadrat, Rechteck, rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck, Trapez, allgemeines Viereck usw.) sind aus der Praxis des Feldmessers hervorgegangen, die Bestimmung von Rauminhalten (Würfel, Quader, Prisma, Damm, Graben) aus der des Bautechnikers. Die Neigung von Seitenflächen gegen die waagerechte Grundfläche wird aus dem Rücksprung bei fester Höhe bestimmt, der Rauminhalt des (geraden quadratischen) Pyramidenstumpfs mit der Grundkante a, der Deckkante b und der Höhe h gemäß

$$h\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\}.$$

Erst aus den Texten von Susa geht hervor, daß die Babylonier auch hohe theoretische Kenntnisse auf geometrischem Gebiet besaßen. Zwar fehlt ihnen eine

Fachbezeichnung für den Winkel, aber sie können Waagerechte und Senkrechte benennen und konstruieren, wissen um die rationale Vergrößerung und Verkleinerung von Figuren (Ähnlichkeitsmaßstab an Strecken und Flächen), kennen den Satz vom Ergänzungsparallelogramm an der Rechtecksfigur und den (hieraus herleitbaren) PYTHAGOREISCHEN Lehrsatz; ferner drücken sie die Diagonale d eines gleichschenkligen Trapezes (Schenkel a, Parallelseiten b, c) unter Verwendung des PYTHAGOREISCHEN Lehrsatzes vermittels $d^2 = a^2 + bc$ aus. Dieser *Trapezsatz* ist gleichwertig mit dem Cosinussatz der ebenen Trigonometrie und erlaubt den Aufbau einer winkelfreien Geometrie, die das ganze Gebiet der Elementargeometrie (mit Zirkel und Lineal) umfaßt. Dabei treten an Stelle der Proportionensätze Produktbeziehungen, die aus dem Satz vom Ergänzungsparallelogramm folgen.

Sind a, b $(a > b)$ die in regulären Zahlen gemessenen Seiten eines Rechtecks mit der Diagonalen d, dann ist

$$a + \frac{b^2}{2a+b} < d < a + \frac{b^2}{2a}$$

und

$$d - \frac{b^2}{2d-b} < a < d - \frac{b^2}{2d}.$$

Diese Ungleichungen werden schrittweise zur Annäherung von $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $a = \sqrt{d^2 - b^2}$ durch rationale Zahlen verwendet. Die obere Schranke kann auch als arithmetisches Mittel von a und d^2/a bzw. von d und a^2/d aufgefaßt werden und läßt sich daher für reguläre a bzw. d vermittels der Reziprokentafel verhältnismäßig einfach berechnen. Das Ergebnis zeigt Verwandtschaft mit der Konstruktion PYTHAGOREISCHER Zahlen aus regulären Hilfszahlen t. Die Parallele b zu den Parallelseiten a, c eines rechtwinkligen Trapezes, die dessen Fläche halbiert, folgt aus

$$b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2.$$

Aus PYTHAGOREISCHEN Zahlentripeln werden a, b, c sogar ganzzahlig hergestellt. Außerdem werden vermittels

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3x+4y}{5}\right)^2 + \left(\frac{4x-3y}{5}\right)^2$$ aus einem bekannten PYTHAGOREISCHEN Zahlentripel neue gewonnen, die nicht durch reguläre Hilfszahlen t herstellbar sind.

Höhepunkt ist die Anwendung des Trapezsatzes zur Herstellung kennzeichnender Gleichungen für regelmäßige Vielecke, erschließbar aus den Näherungswerten für die Halbmesser der ein- und umbeschriebenen Kreise und der Fläche aus der gegebenen Seite 1 am Fünf-, Sechs- und Siebeneck. Mit diesen Näherungswerten hängt wohl auch der Näherungswert $\pi = 3^1/_8$ zusammen, der neben dem viel ungenaueren $\pi = 3$ auftritt. Ferner wird der Segmentpfeil am Kreis aus dem Durchmesser und der abschließenden Sehne bestimmt, außerdem die Fläche des Sektors eines konzentrischen Kreisrings (Brunnenaufgabe), der Rauminhalt des Zylinders und des Kegelstumpfs, schließlich der anschaulich leicht ermittelbare Inhalt von Figuren, die aus Kreisbögen in verschiedener Lage zusammengesetzt sind.

Wir haben die mathematischen Leistungen einer wohlausgebildeten und anscheinend weitverzweigten

Schule vor uns, der es keineswegs an tieferen Einsichten fehlt. Ihre Meister können wir noch nicht beim Namen nennen; ihr Wissen ist bisher nur aus Aufgabensammlungen und gelegentlichen rezeptartigen Anweisungen bekannt, beides wohl auf die damals übliche Form der Unterweisung der höheren Verwaltungsbeamten abgestellt. Das reichhaltige Material gibt uns einen interessanten Einblick in die formale Höhe der babylonischen Mathematik, die in Berührung mit den Nachbarvölkern (Ägyptern, Griechen, Indern) anregend weitergewirkt hat.

Zur babylonischen Mathematik

O. Neugebauer: *Mathematische Keilschrifttexte*, Berlin 1934/37 in Quellen u. Studien A 3.
O. Neugebauer-A. Sachs: *Mathematical cuneiform texts*, New Haven 1945.
Textes mathématiques de Suse, ed. E. M. Bruins-M. Rutten, Paris 1961.
O. Neugebauer: *Vorgriechische Mathematik*, Berlin 1934.
A. Rey: *La science Orientale avant les Grecs*, Paris 1942.
E. M. Bruins: *Fontes matheseos*, Leiden 1953.
K. Vogel: *Vorgriechische Mathematik II: D. Mathematik d. Babylonier*, Hannover/Paderborn 1959.
F. Thureau-Dangin: *Textes mathématiques Babyloniens*, Leiden 1938.
F. Thureau-Dangin: *Esquisse d'une histoire du système sexagesimal*, Paris 1932, engl. von S. Gandz in Osiris 7, 1939.
B. L. van der Waerden: *Ontwakende wetenschap*, Groningen 1950, engl. Groningen 1954, ²New York 1961, dtsch. Basel/Stuttgart 1956, russ. Moskau 1959.
O. Neugebauer: *The exact sciences in antiquity*, Kopenhagen 1951, ²Providence, R. I. 1957.

Zur Kulturgeschichte Mesopotamiens

C. Bezold: *Ninive und Babylon*, Bielefeld/Leipzig ⁴1926.
E. Ebeling-B. Meißner: *Reallexikon der Assyriologie*, Berlin, seit 1928.
A. Jeremias: *Handbuch der altorientalischen Geisteskultur*, Berlin ²1929.
Ch. Fossey: *Manuel d'Assyriologie*, Paris 1904, ²1926.
B. Meißner: *Babylonien und Assyrien*, Heidelberg 1921/25.
M. L. Mallowan-J. Gr. Hose: *Prehistoric Assyria*, Oxford 1935.
G. R. Meyer: *Durch vier Jahrtausende altvorderasiatischer Kultur*, Staatl. Museen Berlin 1956.

3. Die Ägypter (2000–500)

Wir kennen aus ganz Ägypten eine sehr große Anzahl von Inschriften in der hieroglyphischen Bilderschrift (seit dem 4. Jahrtausend v. Chr.), deren Zeichen anfangs (größtenteils dreikonsonantige) Wörter, später nur mehr Buchstaben bedeuten und zur phonetischen (= lautbeschreibenden) Ergänzung der mehrkonsonantigen Wörter herangezogen werden. Häufig ist die Art des dargestellten Wortes durch ein am Ende stehendes Determinativ (= Begriffsbezeichnung) gekennzeichnet. Geschrieben werden nur die Konsonanten, so daß uns die Lautwerte der dem Semitischen nahestehenden Sprache unbekannt sind. Aus der nur repräsentativ verwendeten hieroglyphischen Darstellung, in der die Kalligraphie wichtiger als die Orthographie ist, hat sich (schon im 3. Jahrtausend) die vermittels eines gespaltenen Rohrs in Tusche auf Papyrus niedergeschriebene hieratische Kursive entwickelt, schließlich durch fortwährend weitergehende Abkürzung und Verschleifung die demotische. Die Einführung eines Kalenders unter Einteilung des Jahres in 12 Monate zu je 30 Tagen und Zuschaltung von 5 Festtagen und die Aufrichtung vollendet ausgeführter Kolossalbauten, wie der Pyramiden (seit etwa 2900 v. Chr.), lassen uns neben der hochentwickelten Technik auch gute mathematische Anlagen vermuten. Leider sind unsere diesbezüglichen Kenntnisse auf wenige Sammlungen von Musterbeispielen für die Praxis der höheren Verwaltungsbeamten beschränkt. Darunter sind besonders wichtig der *Moskauer Papyrus*, die *Lederrolle* und vor allem der *Papyrus Rhind*, von AHMÔSE im 17. Jahrhundert unter Rückverweis auf das 19. Jahrhundert geschrieben.

Das Zahlensystem der hieroglyphischen Texte wird rein dezimal auf reihender Grundlage dargeboten; in den Texten zur Zeit größter Machtentfaltung bilden sich Individualzeichen der Stufen bis zu 10^7, deren höchste mit dem Rückfall in kleinere Verhältnisse wieder verschwinden. Gerechnet wird mit unterstützenden Zahlgesten, die in die Terminologie eingedrungen sind; im Kopf ermittelte Ergebnisse werden auf dem Rechenbrett festgehalten, auf dem man wohl auch zu addieren und zu subtrahieren versteht. Multipliziert wird durch Verwendung fortgesetzter Verdoppelung unter Beiziehung von Verzehnfachungen, das Dividieren beruht auf der probenden Umkehrung des im einzelnen geschickt durchgeführten Multiplikationsverfahrens. Von den anfangs bestehenden Individualzeichen für $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$ und $^3/_4$ halten sich später nur die für $^1/_2$ und $^2/_3$; unmittelbar lassen sich nur Stammbrüche schreiben. Die übrigen Brüche sind „stumm"; sie werden als Stammbruchsummen dargestellt. Das Bruchrechnen gelingt unter Einführung gewisser Hilfszahlen, die mit dem Übergang zu Hauptnennern zusammenhängen; dabei wird — gemäß dem dyadischen Charakter der ägyptischen Multiplikation — die systematische Darstellung von $2/n$ als Stammbruchsumme in ganz bestimmter, tabellarisch festgehaltener konventioneller Form benutzt.

Die angeführten Beispielsammlungen beziehen sich auf Wirtschaftstexte, bei denen nach festen Regeln gerechnet wird; zumeist erscheint nach Feststellung des Ergebnisses eine probende Nachrechnung. Es handelt sich um eingekleidete lineare Aufgaben, um arithmetische und vielleicht auch um geometrische Reihen. Der Inhalt des quadratischen Pyramidenstumpfes erscheint in der Form $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$; bei der Darstellung von Böschungen tritt wiederum der Rücksprung auf. Die Baumeister verwenden bei ihren

Entwürfen die Darstellung durch Risse und legen zu Einteilungszwecken quadratische Netze an. Für den Kreis ist die Näherung $\frac{\pi}{4} \approx \left(\frac{8}{9}\right)^2$ überliefert, vielleicht durch ausgleichende Umwandlung des Achtelkreises in ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck entstanden; der gewonnene Näherungswert wird auch zur Bestimmung des Inhaltes und der Oberfläche des Zylinders verwendet. Die ebenfalls auftretende babylonische Näherung $\pi \approx 3$ könnte auf dem Wege über Palästina nach Ägypten gekommen sein.

Ob man auf Grund des allzu geringen Materials ein abschließendes Bild über die ägyptische Mathematik gewinnen kann, steht dahin. Auch die Ägypter haben den allgemeinen Bruchbegriff erfaßt. Die formalen Ansätze sind nicht so geschickt entwickelt wie bei den Babyloniern, bei denen die sprachliche Überschiebung zur Einführung der ideographischen Darstellung drängte; die Art der probenden Rechnungswiederholung bei den Ägyptern zielt bereits in Richtung des beweisenden Verfahrens.

Zur ägyptischen Mathematik

Papyrus Rhind: Faksimile des *British Museum*, London 1898; auch deutsch ed. A. Eisenlohr, Leipzig 1877, [2]1891 (veraltet); ed. T. E. Peet, London 1923; ed. A. B. Chace, H. P. Manning, R. Cl Archibald, Oberlin (Ohio) 1927, 1929.

Moskauer Papyrus: ed. W. W. Struve-B. A. Turajeff, Berlin 1930 in Quellen und Studien A 1.

Lederrolle des *British Museum:* ed. S. R. K. Glanville, London 1927 im Journ. of Egypt. Archeol. 13.

O. Gillain: *L'arithmétique au Moyen Empire*, Brüssel 1927.

O. Neugebauer: *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, Berlin 1926.

O. Neugebauer: *Vorgriechische Mathematik*, Berlin 1934.

Th. E. Peet: *Mathematics in ancient Egypt*, Manchester 1931.

A. Rey: *La science Orientale avant les Grecs*, Paris 1942.

K. Sethe: *Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern*, Straßburg 1916.

K. Vogel: *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, München 1929.

K. Vogel: *Vorgriechische Mathematik I: Vorgeschichte u. Ägypten*, Hannover/Paderborn 1958.

B. L. van der Waerden: *Ontwakende wetenschap*, Groningen 1950 u. ö.

O. Neugebauer: *The exact sciences in antiquity*, Kopenhagen 1951 u. ö.

Zur Kulturgeschichte Ägyptens

J. H. Breasted: *Geschichte Ägyptens*, Wien [2]1936.
A. Erman: *Die Literatur der Ägypter*, Leipzig 1923.
G. Möller: *Hieratische Paläographie*, Leipzig 1927.

4. Inder, Chinesen, Maya (3000—500)

Über die frühesten mathematischen Leistungen der INDER sind wir bisher nur sehr unvollkommen unterrichtet; vielleicht bringen die Ausgrabungen in Mohenjo-daro (Industal, etwa 3000 v. Chr.) neue Aufschlüsse. Greifbares enthalten erst die *Sulba-sûtras* (seit dem 8. Jahrh. v. Chr.) — rein praktisch gehaltene Anweisungen über Sakralgeometrie bei der Konstruktion von Opferaltären. Wir kennen nicht die Originale, sondern nur sehr späte kommentierte Ausgaben (um 300 n. Chr.). Sie enthalten über das Übliche hinaus geometrische Flächenverwandlungen vermittels des Satzes vom Ergänzungsparallelogramm, den PYTHAGOREISCHEN Lehrsatz, Beispiele für rationale rechtwinklige Dreiecke und die Vereinigung einer ungeraden Zahl gleicher Quadrate unter Benutzung von

$$n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Bei Ähnlichkeitsaufgaben treten rein quadratische Gleichungen auf, die auch im irrationalen Fall behandelt werden. Ergebnisse wie

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$$

verraten uns die Methode: wiederholte Anwendung des babylonischen Verfahrens (geometrisch-arithmetische Mittelbildung). Die Kreisquadratur wird vermittels

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \approx \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8}\right)$$

geleistet, die Quadratzirkulatur vermittels

$$\sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx \frac{2+\sqrt{2}}{3}$$

(beides wiederhergestellt). In der Problemstellung ergeben sich manche gemeinsame Züge mit den Babyloniern, nicht aber in der Ausführung. Ob irgendwelche Zusammenhänge mit den Vorderasiaten und Ägyptern bestehen, ist bisher ungeklärt.

Unsicher sind auch unsere Kenntnisse vom frühesten mathematischen Wissen der Chinesen. Schon um 1100 v. Chr. begegnet uns die Annäherung $\pi \approx 3$, das Pythagoreische Dreieck 3, 4, 5, die Höhenbestimmung aus der Schattenlänge (Keimling der Trigonometrie), die Behandlung einfacher Bewegungsaufgaben, der falsche Ansatz zur Auflösung linearer Gleichungen und die Unterscheidung mehrerer Unbekannter durch Farben. Das 3^2-zellige magische Quadrat gehört ebenso wie die Kennzeichnung der 8 Himmelsrichtungen durch Kombination der Zeichen ——— (männlich) und — — (weiblich) zu Dreien in das Gebiet der in China wohlausgebildeten Zahlensymbolik. Auf das 6. Jahrh. wird die Zahlendarstellung durch Knotenschnüre und durch die sog. Bambusziffern (Einer: 𝍠, 𝍡, 𝍢, 𝍣, 𝍤, 𝍥, 𝍦, 𝍧, 𝍨; Zehner: —,

=, ≡, ≣, ≣; ⊥, ⊥, ⊥, ⊥; Hunderter wie die Einer usw.) angesetzt.

Von den amerikanischen Hochkulturen der Frühzeit wissen wir fast nichts mehr; nur über das Zahlenschreibsystem der MAYA (3. Jahrtausend v. Chr.) sind wir unterrichtet. Die Zahlen unter 20 werden aus Punkten (Einer) und Strichen (Fünfer) zusammengesetzt; dann erscheint ein Positionssystem mit Nullzeichen, dessen Stufen $1, 20, 18 \cdot 20 = 360, 360 \cdot 20 = 7200$ usw. sind. Das System hängt zusammen mit der Einteilung des Jahres in 18 Monate zu je 20 Tagen, zu denen fünf als unheilbringend angesehene Schalttage hinzutreten. Dieses System ist mit einer Wocheneinteilung von je 13 Tagen kombiniert. Genauere Einzelheiten über die Art der Rechnungsführung stehen noch aus.

Die bisher geschilderte Gesamtlage läßt erkennen, daß hinter den geübten rein praktischen Methoden eine Fülle von theoretischen Möglichkeiten steht; diese entdeckt und dadurch die Mathematik zu einer echten Wissenschaft gemacht zu haben, ist das unvergängliche Verdienst der GRIECHEN.

Mohenjo-daro

E. Mackay: *The Indus civilization*, London 1935.

E. Mackay: *Excavations at Mohenjo-Daro*, Delhi 1938.

J. Marshall: *Mohenjo-Daro and the Indus civilization*, London 1931.

Indien

B. Datta: *The science of the Sulba*, Calcutta 1932.

B. Datta-A. N. Singh: *History of Hindu mathematics*, Lahore 1935, 1938 (nicht ganz zuverlässig).

G. R. Kaye: *Indian Mathematicse* Calcutta/Simla 1915 (zum Teil überholt).

G. Thibaut: *The Sulba-Sûtras*, Calcutta 1875 im Journ. Asiat. soc. Bengal. 44.

China

Y. Mikami: *The development of mathematics in China and Japan*, Leipzig 1913, Nachdruck New York 1962.

Maya

S. G. Morley: *An introduction to the study of the Maya-Hieroglyphs*, Washington 1915.

S. G. Morley: *The inscriptions of Petén*, Washington 1938.

S. G. Morley: *The civilization of Maya*, California (USA) 1946, spanisch v. A. Recinos, Mexico 1947.

H. J. Spinden: *Ancient civilizations of Mexico and Central America*, New York [3]1928.

J. E. Thompson: *Maya arithmetic*, Carnegie Inst. 528, Washington 1941.

L. Satterthwaite: *Concepts and structures of Maja calendrical arithmetics*, Philadelphia 1947.

II. Abschnitt

Die Griechen (etwa 800 v. bis 600 n. Chr.)

1. Anfänge mathematischen Denkens (800—400)

Über die ältesten mathematischen Kenntnisse der Griechen wissen wir fast nichts; fest steht, daß sie nirgends über das damals allgemein Übliche hinausgingen. Wie weit der Einfluß der Ägypter (über die kretisch-mykenische Kultur) und der Vorderasiaten (über die Pflanzstädte am Rande der Ägäis) reicht, ist noch ungeklärt.

Die Herodianischen Ziffern (dekadische Stufeneinheiten |, Δ, H, X, M in Verbindung mit den Fünferbündeln Γ, 𐅄, ΓH usw.) sind die Anfangsbuchstaben der zugehörigen Zahlworte. Sie treten uns auf attischen Inschriften des 6. bis 1. Jahrh. entgegen, werden reihend verwendet und dienen zur Kennzeichnung der Spalten am Rechenbrett. Seit dem 5. Jahrh. sind auch die Milesischen Buchstabenziffern nachweisbar: hier sind den $3 \cdot 9$ Einern, Zehnern und Hundertern die 24 gebräuchlichen Buchstaben des griechischen Alphabets unter Zwischenschaltung von 3 älteren Formen (Vau, Koppa, Sampi) zugeordnet. Später werden Tausender durch einen tiefgestellten Strich vor der Buchstabenziffer bezeichnet, Stammbrüche durch einen Akzent hinter dem Nenner; außerdem finden sich Individualzeichen für $^1/_2$ und $^2/_3$. Über das Rechnen mit diesen Zahlen sind wir aus gelegentlichen Beispielen in den nachklassischen Schriften, aus Papyrusfunden und aus byzantinischen Darstellungen des 13. und 14. Jahrh. unterrichtet.

Thales von Milet (624 ?—548 ?) war anscheinend mit der babylonischen Mathematik wohlvertraut. Ihm mag die zusätzliche Einführung des Winkelbegriffs gehören. Auch PYTHAGORAS von Samos (580 ?—500 ?) wird bedeutendes mathematisches Einzelwissen gehabt haben. Innerhalb der esoterischen Gemeinschaft der älteren PYTHAGOREER, einer aristokratisch eingestellten politisch-religiösen Vereinigung (Blütezeit um 500), finden wir neben phantasievollen Zahlenspekulationen auch die ersten Anfänge einer wissenschaftlichen Zahlenlehre: Die ganzen Zahlen werden in gerade und ungerade geschieden, Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen treten auf, die Quadratzahlen werden als Summen der ersten aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen erkannt, die Dreieckzahlen als Summen der ersten aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Die Einheit gilt noch nicht als Zahl, wohl aber als Quelle und Ursprung aller Zahlen, die durch wiederholtes Setzen der Einheit entstehen.

Die wissenschaftliche Mathematik beginnt wohl erst mit ANAXAGORAS von Klazomenai (500 ?—428 ?), der feststellt, daß es im Kleinen kein Kleinstes, sondern nur ein Kleineres gibt, und entsprechend im Großen. Im Fragment des HIPPOKRATES von Chios über die Quadratur der Kreismöndchen (440 ?) ist die Schlußweise bereits weitgehend systematisiert. Hinter den Einzelausführungen scheint das freilich nirgends klar ausgesprochene Zwischenwertprinzip zu stecken, wonach eine Eigenschaft — hier die Quadrierbarkeit der Kreismöndchen —, die für einige Sonderfälle feststeht, als allgemeingültig angesehen werden soll. Dies würde in gute Übereinstimmung mit der Auffassung des DEMOKRIT von Abdera (460 ?—370 ?) zu bringen sein, der den stofflichen Atomismus lehrte und den Inhalt der Pyramide und des Kegels (vielleicht durch Schichtenzerlegung) auffand, jedoch nicht streng erweisen konnte. DEMOKRIT, dem die allen Griechen gemeinsame Leidenschaft für Musikalisches Anreiz zu musiktheoretischen Studien wurde, mag den Wohlklang eines Tonintervalls in Beziehung gesetzt haben zu den in einfachsten ganzzahligen Verhältnissen stehenden Saitenlängen am steggeteilten Monochord. Diese Auffassung spiegelt die stark rationalistisch gefärbte Grundhaltung der damaligen Naturphilosophen wieder, die schließlich zur Überzeugung führt, die ganze Zahl lasse sich als das Maß aller Dinge ansehen. Sie kommt unter anderem im *Kanon* des POLYKLET von Sikyon (440 ?) zum Ausdruck, ebenso deutlich im etwas jüngeren Weltsystem des PHILOLAOS von Tarent († 390 ?) und der damit zusammenhängenden Lehre von der Sphärenharmonie, schließlich im Glauben an die periodische Wiederkehr alles Lebendigen (Seelenwanderung).

Quellenkunde

Real-Enzyklopädie der klassischen Altertumswissenschaft, ed. A. Pauly, Stuttgart [1]1839/52, [2]seit 1864; dann ed. G. Wissowa, Stuttgart seit 1894, weitergeführt von W. Kroll-K. Witte.

Einleitung in die Altertumswissenschaft, ed. A. Gercke-E. Norden, Leipzig/Berlin 1910/12, [2]1912/14, [3]und weitere Auflagen seit 1921.

Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft, ed. I. Müller, Nördlingen/München, [1]seit 1885, [7]seit 1912.

Wissenschaft und Philosophie

P. Brunet-A. Mieli: *Histoire des sciences, Antiquité*, Paris 1935.

J. Burnet, *Early Greek philosophy*, London [1]1892, [2]1914, [3]1920, deutsch von E. Schenkl, Leipzig [2]1913.

F. Enriques-G. Santillana: *Storia del pensiero scientifico*, Bologna 1932.

W. A. Heidel: *The heroic age of science*, Baltimore 1933.

G. Loria: *Le scienze esatte nell' Antica Grecia*, Mailand 1895, [2]1914.

M. R. Cohen-J. E. Drabkin: *A source book in Greek science*, New York 1948.

A. Mieli: *La Scienza Greca*, Florenz 1916.

A. Rey: *La science grecque*, Paris 1933/46 (3 Bände).

Fr. Überweg: *Die Philosophie des Altertums*, Berlin [1]1862; ed. K. Praechter [10]1909, [11]1919, [12]1926.

Ed. Zeller: *Die Philosophie der Griechen*, [1]Tübingen 1844/52, [2]Tübingen/Leipzig 1859/68, [3]und weitere Auflagen Leipzig seit 1879; ed. W. Nestle, [5]1923. I_1 ital. v. R. Mondolfo, Florenz 1932.