

S a m m l u n g G ö s c h e n B a n d 2 5 6

**Sammlung
von Aufgaben und Beispielen zur
Analytischen Geometrie der Ebene**

mit den vollständigen Lösungen

Von

Dr. Robert Haußner

weiland o. ö. Professor der Mathematik an der
Universität Jena

Mit 22 Figuren im Text

Neudruck



W a l t e r d e G r u y t e r & C o .

vormals G. J. Göschel'sche Verlagshandlung . J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung . Georg Reimer . Karl J. Trubner . Veit & Comp.

Berlin 1949

**Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten**

Archiv-Nr. 110 256 / Gen.-Nr. 11.380

Druckhaus E. Heckendorff, Berlin SO 36 / ISCS 114 / 5000. 7, 49

Printed in Germany

Inhalt.

	Seite
1. Abschnitt. Punkte und Strecken.	
§ 1. Punkte und Strecken auf einer Geraden. Teilverhältnisse.....	5
§ 2. Punkte und Strecken in der Ebene. Flächeninhalte.....	7
2. Abschnitt. Die gerade Linie.	
§ 3. Punkt und Gerade, sowie mehrere Gerade in Parallelkoordinaten ...	12
§ 4. Strahlenbüschel und Drseleckssätze	16
§ 5. Die Gerade in Polarkoordinaten	21
§ 6. Die Gerade als geometrischer Ort	22
3. Abschnitt. Die Kegelschnitte im allgemeinen.	
§ 7. Ableitung von Eigenschaften aus der allgemeinen Gleichung	27
§ 8. Projektive und affine Transformation	36
4. Abschnitt. Der Kreis.	
§ 9. Kreis und Gerade. Tangente	38
§ 10. Pol und Polare	44
§ 11. Behandlung des Kreises mit Polarkoordinaten	45
§ 12. Der Kreis als geometrischer Ort	46
§ 13. Mehrere Kreise. Kreisbüschel	51
§ 14. Potenzlinie. Potenzpunkt	53
§ 15. Transformation durch reziproke Radien	56
5. Abschnitt. Ellipse, Hyperbel und Parabel.	
§ 16. Gleichungen, Mittelpunkte und Durchmesser. Tangenten, Asymptoten und Polaren	62
§ 17. Brennpunkte. Konfokale Kegelschnitte	85
§ 18. Kegelschnitte in Polarkoordinaten	91
§ 19. Geometrische Örter	93
§ 20. Konstruktionsaufgaben	110
§ 21. Kegelschnittbüschel	112
§ 22. Auflösung von Gleichungen 2. bis 4. Grades durch Kegelschnitte....	122
6. Abschnitt. Linienkoordinaten. Dualität.	
§ 23. Punktgleichungen	124
§ 24. Kegelschnitte in Linienkoordinaten	127
§ 25. Duale Sätze	136

I. Abschnitt.

Punkte und Strecken.

§ 1. Punkte und Strecken auf einer Geraden. Teilverhältnisse.

1. Es sollen auf einer Geraden mit gegebenem Nullpunkte und gegebener positiver Richtung die Punkte konstruiert werden, deren Koordinaten durch die Gleichungen:

$$x = \frac{ab}{c}, \quad x = \frac{a^2 + b^2}{c}, \quad x = \sqrt{a^2 - b^2};$$

$$x^2 + ax = 0, \quad x^2 - (a + b)x + ab = 0, \\ x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

gegeben sind, wo a, b, c gegebene gerichtete Strecken bezeichnen. Werden a, b, c durch positive oder negative Zahlen (z. B. $a = 5, b = -4, c = 7$) gegeben, so muß noch die Längeneinheit gegeben sein¹).

Lösungen der drei letzten Aufgaben: $0, -a; a, b; a + b, a - b$.

2. Bezeichnet man die durch die Gleichung

$$3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$$

gegebenen Punkte in beliebiger Reihenfolge mit P_1, P_2, P_3 , so sollen ihre Koordinaten und die Strecken $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_1}$ der Länge und Richtung nach berechnet werden. Wie lautet die obige Gleichung, wenn der Punkt 1 als neuer Nullpunkt genommen wird?

$$\text{Lösung: } -1, 3, \frac{1}{3}; 4, -\frac{8}{3}, -\frac{4}{8}; 3x'^3 + 2x'^2 - 12x' - 8 = 0.$$

Stets muß $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_1} = 0$ sein.

3. Sind P_1, P_2, P_3, P_4 beliebige Punkte einer Geraden, so soll bewiesen werden, daß

¹) Es ist zweckmäßig, zu den Zahlenbeispielen die Figuren zu zeichnen; bei rechtwinkligen Koordinaten ist es nützlich, quadriertes, sog. Millimeterpapier zu verwenden.

$$\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \overrightarrow{P_2P_4} = \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_3P_4} + \overrightarrow{P_1P_4} \cdot \overrightarrow{P_2P_3} \quad \text{ist.}$$

4. Der Wert eines Doppelverhältnisses bleibt ungeändert, wenn entweder die Elemente eines jeden Paares unter sich oder die beiden Paare miteinander vertauscht werden:

$$(P_1P_2P_3P_4) = (P_2P_1P_4P_3) = (P_3P_4P_1P_2) = (P_4P_3P_2P_1).$$

5. Der Wert eines Doppelverhältnisses geht in den reziproken über durch Vertauschung der Elemente eines Paares untereinander:

$$(P_1P_2P_4P_3) = 1 : (P_1P_2P_3P_4).$$

Beweis von (4) und (5) durch direkte Ausrechnung.

6. Die Werte zweier Doppelverhältnisse ergänzen sich zu 1, wenn das eine aus dem andern entweder durch Vertauschung der beiden inneren oder der beiden äußeren Verhältnisse hervorgeht:

$$(P_1P_2P_3P_4) + (P_1P_3P_2P_4) = (P_1P_2P_3P_4) + (P_4P_2P_3P_1) = 1.$$

Beweis mit Hilfe von (3).

7. Es soll gezeigt werden, daß vier Elemente $4! = 24$ Doppelverhältnisse liefern, die sich in Gruppen zu je vier mit gleichem Werte anordnen lassen. Ist $(P_1P_2P_3P_4) = \nu$, so sind

die 6 Werte aller Doppelverhältnisse $\nu, \frac{1}{\nu}, 1 - \nu, \frac{1}{1 - \nu},$

$1 - \frac{1}{\nu} = \frac{\nu - 1}{\nu}, \frac{\nu}{\nu - 1}.$ Für $\nu = -1$ (harmonische Elemente) ergeben sich drei Gruppen von je acht Doppelverhältnissen mit den Werten $-1, 2, \frac{1}{2}.$

8. Die Koordinaten dreier in gerader Linie liegender Punkte P_1, P_2, P_3 sind $x_1, x_2, x_3.$ Es soll die Koordinate des vierten harmonischen Punktes P_4 berechnet werden, wenn der erste und der dritte einander zugeordnet sind.

Lösung: Aus $(P_1P_3P_2P_4) = -1$ folgt

$$x_4 = \frac{2x_1x_3 - x_2(x_1 + x_3)}{x_1 + x_3 - 2x_2}.$$

9. Welche Doppelverhältnisse liefern die Punkte P_q ($q = 1, 2, 3, 4$) mit den Koordinaten $x_q = \xi^q$? Wann sind vier solcher Punkte harmonische?

Lösung: Ist wieder $(P_1 P_2 P_3 P_4) = \nu$, so erhält man die Werte $\frac{(\xi + 1)^2}{\xi^2 + \xi + 1}$, $\frac{-\xi}{\xi^2 + \xi + 1}$, $\frac{\xi}{(\xi + 1)^2}$ und ihre dreireziproken Werte. Aus $(\xi + 1)^2 = \nu (\xi^2 + \xi + 1)$ ergeben sich reelle Werte von ξ nur für $0 < \nu < \frac{4}{3}$. Für $\nu = \frac{1}{2}$ wird $\xi = \xi_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ und dann

die Strecke $P_1 P_4$ durch P_2 und P_3 harmonisch geteilt; je nachdem $\xi = \xi_1$ oder ξ_2 gewählt wird, liegt P_3 oder P_2 zwischen P_1 und P_4 .

10. Es gibt unendlich viele Systeme von vier harmonischen Punkten einer Geraden, die zu dem Punkte mit der Koordinate ξ harmonisch liegen.

Lösung: Sind a und b zwei beliebige, aber ungleiche Zahlen, so sind die Koordinaten von vier solchen Punkten $\xi - b$, $\xi - a$, $\xi + a$, $\xi + b$, und man erhält $a : b = -3 \pm \sqrt{8}$.

11. Ordnet man die Punkte einer Geraden einander paarweise so zu, daß dem Punkte P mit der Koordinate x der Punkt Q mit der Koordinate $\frac{ax + b}{cx + d}$, wo $ad - bc \neq 0$ ist,

entspricht, so ist das Doppelverhältnis von vier Punkten P gleich dem der ihnen zugeordneten Punkte Q .

Beweis durch Ausrechnung von $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$.

§ 2. Punkte und Strecken in der Ebene. Flächeninhalte.

12. Von einem Parallelogramm sind die Koordinaten der Ecken P_1, P_2, P_3 gegeben; es sollen die von P_4 berechnet werden (w beliebig).

Lösung: $x_4 = x_1 + x_3 - x_2$, $y_4 = y_1 + y_3 - y_2$.

13. Ein regelmäßiges n -Eck liegt so, daß sein Mittelpunkt nach O und eine seiner Ecken auf die X -Achse fällt. Welches sind die rechtwinkligen Koordinaten seiner sämtlichen Eckpunkte, wenn s die Seitenlänge des n -Ecks ist?

Zahlenbeispiel: $n = 6$.

Lösung: Bezeichnet man die auf der X-Achse liegende Ecke mit P_1 , die übrigen in positivem Drehsinne mit $P_2, \dots, P_n$, so findet man für den Radius R_n des dem n -Eck umschriebenen Kreises:

$$R_n = \frac{s}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \text{ und } x_{\varrho+1} = R_n \cdot \cos \frac{2\varrho\pi}{n}, y_{\varrho+1} = R_n \cdot \sin \frac{2\varrho\pi}{n} \text{ für}$$

$\varrho = 0, 1, \dots, n-1$. Also für $n=6: R_6 = s$, und für

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c} \varrho=0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_{\varrho}=s & \frac{s}{2} & -\frac{s}{2} & -s & -\frac{s}{2} & \frac{s}{2} \\ y_{\varrho}=0 & \frac{s}{2}\sqrt{3} & \frac{s}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{s}{2}\sqrt{3} & \frac{s}{2}\sqrt{3} \end{array}$$

Entsprechend der Projektionsformel ist $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$.

14. Für die vorige Aufgabe sind die Polarkoordinaten der Eckpunkte anzugeben, wenn der Pol mit dem Mittelpunkt des n -Ecks und die Polarachse mit der positiven X-Achse zusammenfällt.

Lösung: Bezeichnen $r_{\varrho}, \vartheta_{\varrho}$ die Polarkoordinaten der Eckpunkte, so ist $r_{\varrho} = R_n, \vartheta_{\varrho} = \frac{2\varrho\pi}{n}$.

15. Die Aufgabe (13) ist für ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem zu lösen, für das $P_0(x_0, y_0)$ der Nullpunkt ist und dessen X-Achse mit dem Radius $\overrightarrow{OP_1}$ den Winkel α einschließt.

Lösung: Man benutze die Transformationsformeln [A, § 10, 7, II]¹⁾ und die oben gefundenen Resultate für rechtwinklige Koordinaten:

$$x_{\varrho+1} \cdot \sin w = x_0 + R_n \sin \left(w - \alpha - \frac{2\varrho\pi}{n} \right),$$

$$y_{\varrho+1} \cdot \sin w = y_0 + R_n \sin \left(\alpha + \frac{2\varrho\pi}{n} \right).$$

16. Die Aufgabe (13) soll für das schiefwinklige Koordinatensystem mit $w = \frac{2\pi}{n}$, dessen Nullpunkt und X-Achse mit

¹⁾ Die Zitate in dieser Form [A, § ...] beziehen sich auf Haußner, Analytische Geometrie der Ebene (Samml. Göschen Bd. 65).

dem des ursprünglichen rechtwinkligen Systems zusammenfallen, gelöst werden.

Lösung:

$$x_{\varrho+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = R_n \cdot \sin (1 - \varrho) \frac{2\pi}{n},$$

$$y_{\varrho+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = R_n \cdot \sin \frac{2\varrho\pi}{n}.$$

17. Gib für die Punkte mit den Polarkordinaten

$$\begin{array}{l} r = 2 \mid 5 \mid 4 \mid 3,25 \mid \sqrt{2} \\ \vartheta = 30^\circ \mid 45^\circ \mid 300^\circ \mid 90^\circ \mid 45^\circ \end{array}$$

die Parallelkoordinaten an für $w = 90^\circ$ und für $w = 45^\circ$.

Lösung: $w = 90^\circ$:

$$\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \mid \frac{5}{2}\sqrt{2} \mid 2 \mid 0 \mid 1 \\ y = 1 \mid \frac{5}{2}\sqrt{2} \mid -2\sqrt{3} \mid 3,25 \mid 1 \end{array}$$

$w = 45^\circ$:

$$\begin{array}{l} x = 3\sqrt{3}-1 \mid 0 \mid 2(\sqrt{3}+1) \mid -3,25 \mid 0 \\ y = 2\sqrt{2} \mid 5 \mid -2\sqrt{6} \mid 3,25\sqrt{2} \mid \sqrt{2} \end{array}$$

18. Gib die Polarkordinaten an für die Punkte mit den Parallelkoordinaten:

$$\begin{array}{l} x = 3\sqrt{2} \mid -1 \mid 15 \mid -7 \mid 0 \mid -3 \\ y = 3\sqrt{2} \mid \sqrt{3} \mid -8 \mid -24 \mid 4 \mid 0 \end{array}$$

für $w = 90^\circ$ und $w = 60^\circ$.

Lösungen: $w = 90^\circ$:

$$\begin{array}{l} r = 6 \mid 2 \mid 17 \mid 25 \mid 4 \mid 3 \\ \vartheta = 45^\circ \mid 120^\circ \mid 331^\circ 56' \mid 253^\circ 44' \mid 90^\circ \mid 180^\circ; \end{array}$$

$w = 60^\circ$:

$$\begin{array}{l} r = 3\sqrt{6} \mid \sqrt{4-\sqrt{3}} \mid 13 \mid \sqrt{793} \mid 4 \mid 3 \\ \vartheta = 30^\circ \mid 94^\circ 59' \mid 327^\circ 48' \mid 227^\circ 34' \mid 60^\circ \mid 180^\circ. \end{array}$$

19. Die Koordinaten x_ϱ, y_ϱ der Ecken P_1, P_2, P_3 eines Dreiecks sind

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_1 = 2, y_1 = -3 & \text{b) } x_1 = -5, y_1 = 17 \\ x_2 = 8, y_2 = 5 & x_2 = 11, y_2 = 3 \\ x_3 = 14, y_3 = 11 & x_3 = 3, y_3 = 15. \end{array}$$

Wie lang sind die Seiten des Dreiecks, welche Koordinaten haben ihre Halbierungspunkte und der Schwerpunkt des

Dreiecks? Ferner sollen die Winkel $\vartheta_3, \vartheta_1, \vartheta_2$ bestimmt werden, welche die positive X -Achse mit den Seiten $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_1}$ einschließt, und schließlich der Flächeninhalt des Dreiecks $\overrightarrow{P_1P_2P_3}$. Die Aufgaben sollen I. für $w = \frac{\pi}{2}$, II. für $w = \frac{\pi}{4}$ durchgeführt werden.

Lösung:

	a_I	b_I	a_{II}	b_{II}
P_1P_2 :	10	$\sqrt{452}$	$2\sqrt{25 + 12\sqrt{2}}$	$2\sqrt{113 - 56\sqrt{2}}$
P_2P_3 :	$\sqrt{72}$	$\sqrt{208}$	$6\sqrt{2 + \sqrt{2}}$	$4\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$
P_3P_1 :	$\sqrt{340}$	$\sqrt{68}$	$2\sqrt{85 + 42\sqrt{2}}$	$2\sqrt{17 - 4\sqrt{2}}$

Halbierungspunkte:

	a	b
M_3 von P_1P_2 :	5, 1	3, 10
M_1 „ P_2P_3 :	11, 8	7, 9
M_2 „ P_3P_1 :	8, 4	-1, 16.

Der Schwerpunkt $S(\xi, \eta)$ teilt jede Mitteltransversale so, daß $\overrightarrow{M_eS} : \overrightarrow{SP_e} = 1 : 2$ ist:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \quad \text{a) } \xi = 8, \quad \eta = 4\frac{1}{3};$$

$$\text{b) } \xi = 3, \quad \eta = 11\frac{2}{3}.$$

	a_I	b_I	a_{II}	b_{II}
$\sin \vartheta_3$:	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{\sqrt{113}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{25 + 12\sqrt{2}}}$	$\frac{-7}{\sqrt{226 - 112\sqrt{2}}}$
$\sin \vartheta_1$:	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$	$\frac{3}{\sqrt{26 - 12\sqrt{2}}}$
$\sin \vartheta_2$:	$\frac{7}{\sqrt{85}}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$\frac{7}{\sqrt{170 + 84\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{34 - 8\sqrt{2}}}$

Die Winkel selbst gehören den Quadranten an:

ϑ_3 :	1	4	1	4
ϑ_1 :	1	2	1	1
ϑ_2 :	3	2	3	2

Flächeninhalt:

— 6	40	— $3\sqrt{2}$	$20\sqrt{2}$.
-----	----	---------------	----------------

20. Von einer Strecke P_1P_2 sind die Koordinaten $x_1 = 7$, $y_1 = 2$ des Punktes P_1 und $x = 2$, $y = -1$ des Punktes P gegeben, der die Strecke im Verhältnis $\kappa = \pm 5 : 3$ teilt. Welche Koordinaten hat der Endpunkt P_2 für die beiden Werte von κ ? Welchen Wert hat w in den Aufgaben 20 bis 25?

Lösung:

$$x_2 = \frac{(\kappa + 1)x - x_1}{\kappa}, \quad y_2 = \frac{(\kappa + 1)y - y_1}{\kappa}$$

$\kappa = +\frac{5}{3}$: $x_2 = 15$, $y_2 = -2\frac{4}{5}$; $\kappa = -\frac{5}{3}$: $x_2 = 9$, $y_2 = +\frac{4}{5}$.

21. Die Strecke P_1P_2 werde über ihre beiden Endpunkte hinaus je um ihr λ -faches verlängert. Es sind die Koordinaten der Endpunkte der Verlängerungen zu bestimmen.

Lösung:

$$\begin{aligned} & (1 + \lambda)x_1 - \lambda x_2, \quad (1 + \lambda)y_1 - \lambda y_2 \\ \text{und} \quad & (1 + \lambda)x_2 - \lambda x_1, \quad (1 + \lambda)y_2 - \lambda y_1. \end{aligned}$$

22. Von einem Dreiecke sind die Koordinaten der Ecken $P_1(-7, -1)$, $P_2(-2, -9)$ und diejenigen $\xi = 0$, $\eta = 0$ seines Schwerpunktes gegeben. Welche Koordinaten hat die dritte Ecke P_3 ?

Lösung: $x_3 = 3\xi - x_1 - x_2 = 9$, $y_3 = 3\eta - y_1 - y_2 = 10$.

23. Von einem Viereck $P_1P_2P_3P_4$ sind die Koordinaten x_ρ, y_ρ ($\rho = 1, \dots, 4$) der Ecken gegeben. Die Seiten werden der Reihe nach in Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , die Diagonalen in Q_5 und Q_6 halbiert. Es soll bewiesen werden, daß die Halbierungspunkte von Q_1Q_3, Q_2Q_4 und Q_5Q_6 zusammenfallen.

Lösung: $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}.$

Wenn man das Viereck samt seinen Diagonalen als Projektion eines Tetraeders betrachtet, so folgt aus dem Resultate, daß sich die drei Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenkanten — das sind solche, die keine Tetraederecke gemeinsam haben — in einem Punkte, dem Schwerpunkte des Tetraeders schneiden.

24. Von einem Fünfeck $P_1P_2 \dots P_5$ sind die Koordinaten der Ecken (x_1, y_1) usf. gegeben. Die Seiten sind der Reihe nach in $Q_1, Q_2, \dots, Q_5$ halbiert. Der Halbierungspunkt M der Strecke Q_1Q_3 wird mit P_5 verbunden und P_5M durch S im

Verhältnis 4 : 1 geteilt. Es sollen die Koordinaten ξ, η von S berechnet werden.

Was ist der Fall, wenn man $Q_2 Q_4$ für $Q_1 Q_3$ und P_1 für P_5 nimmt?

Lösung:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}, \quad \eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5}.$$

25. Halbiert man die Seiten eines beliebigen Sechsecks $P_1 \dots P_6$ der Reihe nach in $Q_1, \dots, Q_6$, so soll bewiesen werden, daß die beiden Dreiecke $Q_1 Q_3 Q_5$ und $Q_2 Q_4 Q_6$ denselben Schwerpunkt

$$\xi = \frac{x_1 + \dots + x_6}{6}, \quad \eta = \frac{y_1 + \dots + y_6}{6} \text{ haben.}$$

26. Für welches Parallelkoordinatensystem liegt der Punkt $P(2\frac{5}{18}, 3\frac{1}{6})$ gleichweit von dem Nullpunkte und von den Punkten $P_1(6, 2), P_2(3, 7)$ entfernt? Flächeninhalt der Dreiecke $\overrightarrow{OPP_1}, \overrightarrow{OPP_2}$?

Lösung: $w = 90^\circ$

$$\overrightarrow{OPP_1} = -\frac{65}{9}, \quad \overrightarrow{OPP_2} = \frac{403}{36}.$$

II. Abschnitt.

Die gerade Linie.

§ 3. Punkt und Gerade, sowie mehrere Gerade in Parallelkoordinaten.

27. Den Richtungswinkel für jede der folgenden Geraden zu bestimmen:

- a) $y = -x + 5$, b) $y = -\frac{1}{2}x + 12$, c) $8x + 15y = 21$,
 d) $x \cos 70^\circ + y \sin 70^\circ - 12 = 0$, e) $7x - 12y + 18 = 0$
 (für $w = \frac{\pi}{2}$ bei a) bis d) und $w = \frac{2\pi}{5}$ bei e)).

Lösung: a) 135° , b) $153^\circ 26' 6''$, c) $151^\circ 55' 40''$, d) 160° ,
 e) $22^\circ 58' 7''$.

28. Welche Gleichung hat die Gerade durch den Punkt P_1 , die den Winkel α mit der $+X$ -Achse einschließt, für

a) $P_1(8, 3), \alpha = 60^\circ, w = 90^\circ$, b) $P_1(3, 0), \alpha = 135^\circ, w = 45^\circ$?

Lösung: a) $y - 3 = \sqrt{3}(x - 8)$ b) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(x - 3)$
oder oder

$$x = 8 + \frac{1}{2}l, y = 3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}l \quad x = 3 - \sqrt{2} \cdot l, y = l$$

29. Die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte P_1 und P_2 anzugeben (w beliebig!)

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 3 \end{cases} \begin{vmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{a_1 + a_2}{2} \\ \frac{b_1 + b_2}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 8 & a_1 \\ 3 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2a_2 - a_1 \\ 2b_2 - b_1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x - 2y &= -1; \\ 3x - 8y &= 0; \end{aligned}$$

$$b_1 x + (2a - a_1)y = 2ab_1;$$

$$(b_1 - b_2)x - (a_1 - a_2)y + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

30. Es soll die Beziehung a) zwischen Réaumur- und Celsiusgraden und ebenso b) zwischen Réaumur- und Fahrenheit- und c) zwischen Celsius- und Fahrenheitgraden durch eine Gleichung ausgedrückt werden, indem man dabei die gegebene Réaumur- bzw. Celsiusgradzahl als Abszisse- und die gesuchte Celsius- oder Fahrenheitgradzahl als Ordinate eines rechtwinkligen Koordinatensystems betrachtet.

Lösung: a) $y = \frac{5}{4}x$; b) $y = \frac{9}{4}x + 32$; c) $y = \frac{9}{5}x + 32$.

Anmerkung: Zeichnet man die durch diese Gleichungen dargestellten geraden Linien auf quadriertes Papier (Millimeterpapier) auf, so hat man eine graphische Tafel, an welcher man ohne weiteres die Anzahl Grade einer Skala ablesen kann, welche einer Anzahl Grade einer andern Skala entsprechen.

31. Welches sind die Linienkoordinaten und die Achsenabschnitte der Geraden in (28) und (29)?

Lösung:

$$m = 8 - \sqrt{3}, \quad n = 3 - 8\sqrt{3}; \quad u = -\frac{8 + \sqrt{3}}{61}, \quad v = \frac{3 + 8\sqrt{3}}{183}$$

$$m = 3, \quad n = \frac{3}{2}\sqrt{2}; \quad u = -\frac{1}{3}, \quad v = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$$

$$m = -1, \quad n = \frac{1}{2}; \quad u = 1, \quad v = -2$$

$$m = 0, \quad n = 0; \quad u = \infty, \quad v = \infty$$

$$m = 2a = -\frac{1}{u}, \quad n = \frac{2ab_1}{2a - a_1} = -\frac{1}{v}$$

$$m = -\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1 - b_2} = -\frac{1}{u}, \quad n = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2} = -\frac{1}{v}.$$

32. Die Geraden der Aufgabe (28) sollen in die Normalform übergeführt werden.

$$\text{Lösung: } \kappa = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 330^\circ, \quad p = 4\sqrt{3} - \frac{3}{2};$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = 45^\circ, \quad p = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

33. Durch den Punkt $P_3(5, 1)$ eine Gerade zu ziehen, welche die Strecke zwischen den Punkten $P_1(2, 7)$ und $P_2(4, -3)$ im Verhältnis $\lambda : 1$ teilt. Was ergibt sich, wenn $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ ist?

$$\text{Lösung: (w beliebig)} \quad y - 1 = \frac{4\lambda - 6}{3 + \lambda}(x - 5).$$

$$\lambda = 0 \quad \text{gibt } y = -2x + 11, \text{ geht durch } 2|7;$$

$$\lambda = \infty \quad \text{,, } y = 4x - 19, \quad \text{,, } \quad \text{,, } \quad 4|-3;$$

$$\lambda = 1 \quad \text{,, } y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2};$$

$$\lambda = -1 \quad \text{,, } y = -5x + 26, \quad || P_1P_2.$$

34. Welchen Abstand p_0 hat der Punkt P_0 von der Geraden $Ax + By + C = 0$ in den folgenden Beispielen, wenn a) $w = 90^\circ$, b) $w = 60^\circ$ ist?

$$(2, 7), 3x + 4y - 14 = 0 \mid (0, 7), y = 5x + 3$$

$$\mid (3, 3), 15x - 8y + 13 = 0.$$

$$\text{Lösung: a) } p_0 = -4 \quad \left| -\frac{4}{\sqrt{26}} \right| \quad 2$$

$$\text{b) } p_0 = -\frac{10}{13}\sqrt{39} \quad \left| -\frac{2\sqrt{93}}{31} \right| \quad \frac{17}{409}\sqrt{1227}.$$

35. Wie groß ist der Abstand d der parallelen Geraden g_1 und g_2 voneinander?

$$g_1: 7x + 24y + 10 = 0 \mid 12x - 5y - 29 = 0$$

$$g_2: 7x + 24y - 35 = 0 \mid 12x - 5y - 16 = 0.$$

Lösung: Bezeichnen p_1, p_2 die Längen der von O auf g_1, g_2 gefällteten Lote und γ_1, γ_2 die Winkel, die sie mit der $+X$ -Achse einschließen, so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_2 + \pi & \gamma_1 &= \gamma_2 \\ d &= p_1 + p_2 = 1,8 & d &= p_1 - p_2 = 1. \end{aligned}$$

36. Die Gleichung einer Geraden durch den Punkt P_1 zu bestimmen, die senkrecht zur Geraden g ist, I. für $w = 90^\circ$, II. für beliebiges w .

$$\begin{array}{l} P_1 : (5, 6) \\ g : 7x + 4y = 12 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} (a, 2b) \\ (a+b)x + (a-b)y = c. \\ (a-b)x - (a+b)y \\ \quad \quad \quad = a^2 - 3ab - 2b^2 \end{array} \right.$$

Lösung: I. $4x - 7y = -22$

II. $(7 \cos w - 4)x + (7 - 4 \cos w)y - 22 - 11 \cos w = 0$ |

$$\left(b - a \operatorname{tg}^2 \frac{w}{2} \right) x + \left(b + a \operatorname{tg}^2 \frac{w}{2} \right) y + a(a - 2b) \operatorname{tg}^2 \frac{w}{2} - b(a + 2b) = 0.$$

37. Welche Koordinaten besitzt der Schnittpunkt der Geraden $7x + 3y = 14a + 3b$ und $2x - 5y = 4a - 5b$?

Lösung: $x_s = 2a, \quad y_s = b.$

38. Liegt jedes der folgenden Punktetripel P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden, und welche Gleichung hat zutreffenden Falles diese Gerade?

a) $P_1(6, 6), \quad P_2(3, 5), \quad P_3(-6, 2);$
 b) $P_1(7, 10), \quad P_2(-4, 7), \quad P_3(0, 8).$

Lösung: Liegen die drei Punkte auf einer Geraden, so hat das Dreieck $P_1P_2P_3$ den Flächeninhalt 0, was für die Punkte des Tripels a) der Fall ist, während das Dreieck des Tripels b) den Flächeninhalt $-\frac{1}{2}$ besitzt. Die Gerade des ersten Tripels hat die Gleichung $x - 3y + 12 = 0$.

39. Welche Beziehung muß zwischen den Konstanten a, b, c der Gleichung $ax + by + c = 0$ bestehen, damit die dadurch dargestellte Gerade g die Strecke zwischen den Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ im Verhältnis $\lambda : 1$ teilt?

Lösung: $ax_1 + by_1 + c + \lambda(ax_2 + by_2 + c) = 0.$

40. Die beiden Punkte P_1 und P_2 der Geraden $2y - x - 1 = 0$ haben die Abszissen $x_1 = 1$ und $x_2 = 6$. Zwei weitere Punkte