SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 1113/1113a

DIFFERENTIALGEOMETRIE

von

DR. PHIL. KARL STRUBECKER
o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe

I

KURVENTHEORIE
DER EBENE UND DES RAUMES

Zweite, erweiterte Auflage
Mit 45 Figuren

WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
BERLIN 1964

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende drei Bände:

I:	Kurventheorie der Ebene und des Raumes	(Band 1113/1113a)
II:	Theorie der Flächenmetrik	(Band 1179/1179a)
III:	Theorie der Flächenkrümmung	(Band 1180/1180a)

 — Archiv-Nr. 7712647 — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin 30. — Printed in Germany.

Inhalt

Literaturverzeichnis

Das folgende Literaturverzeichnis berücksichtigt nur die deutschsprachigen Lehrbücher der Differentialgeometrie. Fremdsprachliche Literatur ist in den Bänden II und III angegeben.

1. Luigi Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Deutsch von Max Lucat, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1910.
2. Ludwig Bieberbach, Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1932.
3. Wilhelm Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I (Elementare Differentialgeometrie), 4. Aufl., Berlin 1945.
4. Wilhelm Blaschke – Hans Reichardt, Einführung in die Differentialgeometrie, 2. Aufl., Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960.
5. Ernesto Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, Deutsch von Gerhard Kowalewski, Leipzig 1901.
6. Adalbert Duschek-Walter Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie, Band I (Kurven und Flächen im euklidischen Raum), Leipzig und Berlin 1930.
7. Wolfgang Haack, Elementare Differentialgeometrie, Basel und Stuttgart 1955.
8. Václav Hlavatý, Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, Deutsch von Max Pinl, Groningen-Batavia 1939.
9. Johannes Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1913.
10. Viktor und Karl Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen I (Krümmung der Raumkurven und Flächen), 4. Aufl., Berlin und Leipzig 1931.
11. Erwin Kreyszig, Differentialgeometrie, Leipzig 1957.
12. Max Lagally – Walter Franz, Vorlesungen über Vektor-Rechnung, 5. Aufl., Leipzig 1956.
13. Detlef Laugwitz, Differentialgeometrie, Stuttgart 1960.
14. Richard von Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Leipzig 1908.
15. Georg Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Band I (Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume), 3. Aufl., Berlin und Leipzig 1923.
16. Wilhelm Schell, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, 3. Aufl., bearbeitet von Erich Salkowski, Leipzig und Berlin 1914.

Formelverweise: (I) und (II) bedeuten Abschnitt I (Ebene Kurven) bzw. II (Raumkurven). — (I. 12) bedeutet Kapitel 12 aus Abschnitt I und (I. 12. 4) die Formel 4 darin. — (10. 3) bedeutet Kapitel 10, Formel 3 des laufenden Abschnittes, und (5) bedeutet Formel 5 des laufenden Kapitels. — (4. Bem. 2) bedeutet Bemerkung 2 in Kapitel 4 des laufenden Abschnittes und (4. Beisp. 2) das Beispiel 2 darin.

Einleitung

Die elementare Differentialgeometrie untersucht jene differentiellen Eigenschaften der Kurven und Flächen, die Bewegungen gegenüber unveränderlich (invariant) sind, d. h. sie handelt von bewegungsinvarianten lokalen Eigenschaften der Kurven und Flächen. In den letzten Jahrzehnten interessiert neben dem Verhalten dieser Gebilde „im Kleinen" auch ihr Verhalten „im Großen", wobei das Augenmerk auf die Gesamterstreckung der Kurven und Flächen gerichtet ist. In diesem ersten Bändchen soll zunächst die Differentialgeometrie der ebenen Kurven, anschließend die vielseitigere Theorie der Raumkurven behandelt werden.

I. Theorie der ebenen Kurven

1. Ebene Vektorrechnung. Die nach Euklid benannte elementare Geometrie der Ebene studiert jene Eigenschaften ebener Figuren, die bei der dreigliedrigen stetigen Gruppe der ebenen Bewegungen

$$\begin{aligned} X &= a + x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ Y &= b + x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \tag{1.1}$$

invariant sind. Mit (x, y) sind dabei Punktkoordinaten in einem positiven cartesischen Koordinatensystem bezeichnet, die meist als reelle, gelegentlich auch als komplexe Zahlen angenommen werden.

Zwei (geordnete) Punkte $P(x_p, y_p)$ und $Q(x_q, y_q)$ bestimmen durch ihre Koordinatendifferenzen $x = x_q - x_p$ und $y = y_q - y_p$ einen Vektor

$$\mathfrak{x} = \overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p,\ y_q - y_p) = (x, y)\ , \tag{1.2}$$

der geometrisch durch die vom Anfangspunkt P zum Endpunkt Q gerichtete Strecke $\overrightarrow{PQ}$ dargestellt werden kann. Wir nennen x, y die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{x}$.

Ist $P = Q$, so entsteht der Nullvektor $\mathfrak{o} = (0,0)$, dessen beide Koordinaten Null sind.

Vektoren $\mathfrak{x} = (x, y)$, $\mathfrak{x}' = (x', y')$, die durch Parallelverschiebung auseinander entstehen, heißen gleich: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$; entsprechende Koordinaten sind dann gleich: $x = x'$, $y = y'$.

Die Addition von Vektoren erfolgt geometrisch nach der Parallelogrammregel, rechnerisch durch Addition gleichnamiger Koordinaten. Die beiden Vektoren $\mathfrak{x}' = (x', y')$ und $\mathfrak{x}'' = (x'', y'')$ haben daher als Summe

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'' \tag{1.3}$$

den Vektor $\mathfrak{x} = (x, y)$ mit den Koordinaten

$$x = x' + x'', \quad y = y' + y''.$$

Die Addition von Vektoren ist

1) kommutativ: $\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}'' + \mathfrak{x}'$,

2) assoziativ: $(\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'') + \mathfrak{x}''' = \mathfrak{x}' + (\mathfrak{x}'' + \mathfrak{x}''')$.

Ein Vektor $\mathfrak{x} = (x, y)$ wird mit einer Zahl λ multipliziert, indem man seine Koordinaten mit λ multipliziert: $\lambda\mathfrak{x} = (\lambda x, \lambda y)$. Geometrisch bedeutet dies eine Streckung des Vektors $\mathfrak{x}$ aus seinem Anfangspunkt mit dem Modul λ. Je nachdem $\lambda > 0$ oder $\lambda < 0$ ist, haben dabei die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\lambda\,\mathfrak{x}$ dieselbe oder entgegengesetzte Richtung.

Damit ist zu $\mathfrak{x}''$ insbesondere der gegengleiche Vektor $-\mathfrak{x}'' = -1 \cdot \mathfrak{x}''$ erklärt und somit auch die Vektordifferenz $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''$.

Man bezeichnet Vektoren $\mathfrak{p} = (x_p, y_p)$, $\mathfrak{q} = (x_q, y_q)$ die (mit ihrem Anfangspunkt) im Nullpunkt $O\,(0, 0)$ angeheftet sind, als Ortsvektoren ihrer Endpunkte $P\,(x_p, y_p)$, $Q\,(x_q, y_q)$. Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist dann darstellbar als die Differenz $\overrightarrow{PQ} = \mathfrak{q} - \mathfrak{p}$, d. h. „Ortsvektor des Endpunktes Q minus Ortsvektor des Anfangspunktes P“.

Man unterscheidet in der ebenen Vektorrechnung zwei Produktbildungen aus Vektoren.

1. Das innere Produkt $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}')$ der Vektoren $\mathfrak{x} = (x, y)$ und $\mathfrak{x}' = (x', y')$ ist erklärt als die Zahl

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}') = \mathfrak{x}\mathfrak{x}' = xx' + yy'. \tag{1.4}$$

2. Das äußere Produkt $[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}']$ ist erklärt als die Zahl (Determinante)

$$[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'] = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y. \tag{1.5}$$

Das innere Produkt ist kommutativ:

(1.6) $$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}') = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x})\,,$$

das äußere Produkt ist alternierend:

(1.7) $$[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'] = -[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}]\,.$$

Beide Produkte sind linear in den Vektoren, d. h., es ist

(1.8) $$(\lambda\mathfrak{x}, \lambda'\mathfrak{x}') = \lambda\,\lambda'(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'), \quad [\lambda\mathfrak{x}, \lambda'\mathfrak{x}'] = \lambda\,\lambda'\,[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'],$$

und sie verhalten sich distributiv gegenüber der Vektoraddition:

(1.9) $$(\mathfrak{x}(\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'')) = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}') + (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}''), [\mathfrak{x}(\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'')] = [\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'] + [\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'']\,.$$

Für das Außenprodukt gelten die bekannten Determinantenregeln. Insbesondere ist dann und nur dann $[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'] = 0$, wenn entweder wenigstens einer der beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{x}'$ Nullvektor ist, oder wenn die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ proportional sind: $\mathfrak{x}' = \lambda\mathfrak{x}$.

Das Außenprodukt bleibt ferner ungeändert, wenn man zu einem der Vektoren ein beliebiges Vielfaches des anderen addiert:

(1.10) $$[\mathfrak{x} + \lambda'\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'] = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}' + \lambda\mathfrak{x}] = [\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}']\,.$$

Als Grassmannsche Ergänzung $|\,\mathfrak{x}$ des Vektors $\mathfrak{x} = (x, y)$ bezeichnet man den Vektor $|\,\mathfrak{x} = (-y, x)$, der aus $\mathfrak{x}$ durch eine positive Viertelschwenkung entsteht. Dann ist $||\,\mathfrak{x} = -\mathfrak{x}$. Mit Hilfe des Ergänzungsvektors kann jedes Innenprodukt als Außenprodukt geschrieben werden und umgekehrt; es ist nämlich

(1.11) $$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}') = \begin{vmatrix} x & y \\ -y' & x' \end{vmatrix} = [\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{x}'].$$

Es folgt daraus, daß dann und nur dann $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}') = 0$ ist, wenn entweder wenigstens einer der Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ Nullvektor ist, oder wenn die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ orthogonal sind: $|\,\mathfrak{x}' = \lambda\mathfrak{x}$.

Aus dem inneren Produkt $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}')$ entsteht für $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}$ das innere Quadrat des Vektors $\mathfrak{x} = (x, y)$

(1.12) $$\mathfrak{x}^2 = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = x^2 + y^2\,,$$

das geometrisch sein Längenquadrat $|\,\mathfrak{x}\,|^2$ (Quadrat seines Betrages $|\,\mathfrak{x}\,|$) darstellt.

Im Reellen ist dann und nur dann

$$|\,\mathfrak{x}\,|^2 = \mathfrak{x}^2 = x^2 + y^2 = 0\,,$$

wenn $x = y = 0$, d. h. $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ der Nullvektor ist.

Im Komplexen, d. h. wenn wir komplexe Geometrie treiben und auch Punkte und Vektoren mit komplexen Koordinaten zulassen, gibt es vom Nullvektor verschiedene Vektoren mit der

Länge Null, die man als **isotrope Vektoren** (Vektoren **isotroper Richtung**) bezeichnet. Sie zerfallen in zwei Scharen. Aus der Annahme $x^2 + y^2 = 0$ folgt nämlich $y^2 = -x^2$, also $y = \pm ix$. In der Ebene sind also die Vektoren

$$\mathfrak{i}_+ = \lambda(1, i) \text{ und } \mathfrak{i}_- = \lambda(1, -i) \quad (\lambda \neq 0), \tag{1.13}$$

und nur sie, **isotrop**. Die zu ihnen parallelen (komplexen) Geraden

$$x + iy = c_1 \text{ und } x - iy = c_2 \tag{1.14}$$

sind die **isotropen Geraden** der Ebene. Ihre (zueinander konjugiert-komplexen) Richtungen bestimmen auf der Ferngeraden die beiden zueinander konjugiert-komplexen **Ponceletschen absoluten Punkte** der Ebene, welche allen Kreisen gemeinsam sind. Während irgend zwei eigentliche Punkte P, Q einer isotropen Geraden voneinander stets den Abstand Null haben, ist der Abstand eines eigentlichen Punktes von einem absoluten Punkt unbestimmt.

Die absoluten Punkte sind die Doppelpunkte der auf der Ferngeraden durch alle Rechtwinkelinvolutionen ausgeschnittenen **absoluten Involution**. Es folgt, daß **isotrope Richtungen** und Vektoren auch durch die Eigenschaft gekennzeichnet sind, **zu sich selbst normal** zu sein.

Eine **geometrische Deutung** des Innenproduktes und Außenproduktes zweier reeller Vektoren geben die Formeln

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}') = |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{x}'| \cos\varphi, \quad [\mathfrak{x}\mathfrak{x}'] = |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{x}'| \sin\varphi, \tag{1.15}$$

wobei φ den **Winkel** der beiden Vektoren bedeutet.

Man bestätigt dann leicht die **Identität von Lagrange**:

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{x}']^2 = \mathfrak{x}^2\mathfrak{x}'^2 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x}')^2. \tag{1.16}$$

2. Darstellung ebener Kurven. Die Differentialgeometrie bedient sich zur analytischen Beschreibung der ebenen Kurven zumeist der sogenannten **Parameterdarstellung**. Sind die cartesischen Koordinaten x, y des Punktes $P(x, y)$ als reelle eindeutige Funktionen eines reellen Parameters t gegeben:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{2.1}$$

die nicht beide konstant und in einem gemeinsamen Existenzintervall J $(t_a \leqq t \leqq t_b)$ stetig sind, so beschreibt der Punkt

$P(x, y)$ den Bogen $\widehat{AB}$ einer reellen stetigen ebenen Kurve k. Man nennt die Formeln (1) die Parameterdarstellung dieses stetigen Kurvenbogens k.

Bemerkung 1: Unter diese Definition der stetigen Kurven fallen überraschenderweise auch noch die eigenartigen, nach ihrem Entdecker Giuseppe Peano (1890) benannten Peanokurven, welche ganze (abgeschlossene) Flächenstücke F der Ebene ausfüllen, wobei zwar jedem Punkte t des Intervalls J genau ein Punkt $P(x(t), y(t))$ der Peanokurve F entspricht, während umgekehrt jedem Punkte von F mindestens ein Punkt von J (d. h. ein oder mehrere Punkte) entspricht. Die durch den Parameter t hervorgerufene (stetige!) Abbildung des Intervalls $J(t)$ auf die Peanokurve $F(x(t), y(t))$ ist also nur in einer Richtung (von J nach F) eindeutig.

Eine stetige, aber nur in einer Richtung eindeutige Abbildung kann also ein eindimensionales Intervall J in eine mehrdimensionale Figur (z. B. in eine zweidimensionale Quadratfläche) verwandeln.

Übrigens reicht auch die Eineindeutigkeit der Abbildung allein nicht aus, um diese Abbildung dimensionserhaltend zu machen. Eine eineindeutige Abbildung (1) der Punkte t von J auf die Punkte $P(x(t), y(t))$ kann nämlich unstetig sein, d. h., benachbarte Punkte t, t' von J können in nicht benachbarte Punkte P, P' verwandelt werden.

Um solche weder den anschaulichen Vorstellungen einer Kurve noch den Zweckmäßigkeiten der Differentialgeometrie entsprechenden Figuren wie Peanokurven auszuschließen, verlangen wir, daß die Abbildung (1) zwischen den Stellen t der Parameterstrecke J und den Punkten P des stetigen Kurvenbogens $\widehat{AB}$ stetig und umkehrbar eindeutig sei. Die so entstehenden Kurven (1), d. h. die stetigen und umkehrbar eindeutigen Bilder einer Strecke J bezeichnet man nach Camille Jordan (1893) als Jordansche Kurvenbogen.

Es soll dabei erlaubt sein, daß den beiden Endpunkten t_a und t_b der Strecke J derselbe Punkt der Kurve k entspricht. In diesem Sonderfalle heißt die stetige Kurve (1) eine geschlossene Jordankurve.

Der Begriff der Jordanbogen oder Jordankurven muß jedoch in der Differentialgeometrie noch weiter eingeschränkt werden. Es gibt z. B. Jordanbogen, die nicht streckbar (nicht rektifizierbar) sind, d. h. für die sich eine Bogenlänge auf sinnvolle Art nicht definieren läßt. Ebenso zeigt sich, daß eine Jordankurve (1) nicht einmal notwendig Tangenten haben muß, nämlich dann nicht, wenn die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ in J zwar stetig, aber nirgends differenzierbar sind. Die Existenz solcher Funktionen wurde zuerst von Bernhard Bolzano (um 1840) und später von Karl Weierstraß (um 1860) entdeckt.

Man verlangt daher in der Differentialgeometrie von dem Jordanbogen, daß er **glatt** sei; diese Forderung bedeutet geometrisch: daß der Bogen in jedem Punkte eine bestimmte stetig veränderliche Tangente habe, oder analytisch: daß die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ im abgeschlossenen Intervall J stetige Ableitungen nach t haben, die überdies in J nirgends gleichzeitig verschwinden. Jeder Parameter t, für den die Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ stetig und nirgends gleichzeitig Null sind, heißt ein **zulässiger Parameter** des glatten Kurvenbogens.

Wir werden später bei der Untersuchung der Krümmungsverhältnisse der ebenen „Kurven“ (gemeint sind damit glatte Jordankurven) auch noch die Existenz und Stetigkeit der zweiten, dritten, ..., n-ten Ableitungen der Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ voraussetzen müssen. Die Kurve k wird dann als zwei-, drei-, ..., n-mal stetig ableitbar bezeichnet. Glatte Kurven sind also (wenigstens) einmal stetig ableitbare Kurven.

Beispiel 1: Die Gerade (x-Achse)

(2. 2) $$x = t, \; y = 0$$

ist eine in allen Punkten t glatte Kurve, weil die Ableitungen

(2. 3) $$\dot{x} = 1, \; \dot{y} = 0$$

stetig sind und nirgends gleichzeitig verschwinden; t ist daher ein zulässiger Parameter der Geraden.

Stellt man diese Gerade jedoch durch die Gleichungen

$$x = s^3,\ y = 0 \tag{2.4}$$

dar, so zeigt sich, daß die Ableitungen

$$x' = 3s^2,\ y' = 0 \tag{2.5}$$

jetzt zwar für alle s stetig sind, aber an der Stelle $s = 0$ (d. h. im Punkte (0, 0)) gleichzeitig verschwinden; s ist also kein zulässiger Parameter der Geraden.

Beispiel 2: Die semikubische Parabel (Neilsche Parabel) mit der Gleichung

$$x^2 - y^3 = 0 \quad \text{oder} \quad y = x^{2/3} \tag{2.6}$$

besitzt im Nullpunkt $O\,(0, 0)$ eine Spitze mit lotrechter Spitzentangente. Ihre einfachste Parameterdarstellung lautet

$$x = t^3,\ y = t^2, \tag{2.7}$$

wobei $-\infty < t < +\infty$ gilt und die Spitze $O\,(0, 0)$ sich für $t = 0$ ergibt. Die Ableitungen

$$\dot{x} = 3t^2,\ \dot{y} = 2t \tag{2.8}$$

sind überall stetig, verschwinden aber beide an der Stelle $t = 0$.

Die Neilsche Parabel ist also eine mit Ausnahme ihrer Spitze $t = 0$ überall glatte Kurve; sie besteht aus den beiden glatten Teilbögen $t > 0$ und $t < 0$, die an der Stelle $t = 0$ zusammenhängen und dort die Spitze der Kurve bilden.

Der Parameter t ist also für jeden dieser beiden Teilbögen ein zulässiger Parameter, nicht aber für die ganze Neilsche Parabel.

Ein Kurvenbogen (1), der glatt ist und durch einen im Intervall J ($t_a \leqq t \leqq t_b$) variierenden zulässigen Parameter t dargestellt ist, d. h. für welchen die beiden Ableitungen

$$\dot{x} = \dot{x}(t),\ \dot{y} = \dot{y}(t) \tag{2.9}$$

im Intervall J überall *stetig* sind und *nirgends gleichzeitig verschwinden*, enthält keinen singulären Punkt, sondern nur reguläre Punkte.

Häufig setzt man bei differentialgeometrischen Untersuchungen die beiden reellen Funktionen $x\,(t)$ und $y\,(t)$ sogar als analytisch voraus. Diese beiden Funktionen sollen also in jedem inneren Punkte t_0 des Intervalles J Potenzreihenentwicklungen nach $(t-t_0)$ mit gemeinsamem Konvergenzbereich $|t-t_0| < \varrho$ besitzen. Eine in J reelle analytische Kurve k ist daselbst beliebig oft stetig ableitbar.

3. Komplexe Kurven. Ähnlich wie man viele Tatsachen der reellen algebraischen Geometrie erst dann voll durchschauen kann, wenn man die umfassendere komplexe algebraische Geometrie heranzieht, bringt auch in der Differentialgeometrie die Berücksichtigung des Komplexen viele neue und grundlegende Einsichten. Wir denken uns daher die reelle Ebene zur komplexen Ebene erweitert, indem wir als Punktkoordinaten (x, y) nun auch komplexe Zahlen zulassen. Während die reelle Ebene ∞^2 reelle Punkte enthält, trägt die komplexe Ebene ∞^4 komplexe Punkte, unter denen die ∞^2 reellen als Teilmannigfaltigkeit vorkommen.

Wir verstehen dann in dieser komplexen Ebene allgemein unter einer **komplexen analytischen Kurve** die Menge der ∞^2 komplexen Punkte $P(x, y)$, deren Koordinaten durch die beiden komplexen Potenzreihen

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{3.1}$$

der komplexen Veränderlichen

$$t = \tau + i\sigma \tag{3.2}$$

dargestellt werden. Diese Potenzreihen haben i. a. komplexe Koeffizienten und sollen einen gemeinsamen Konvergenzbereich haben, ohne gleichzeitig bloße Konstante zu sein.

Wir werden in Hinkunft in der Regel nur von den reellen Zügen analytischer Kurven handeln, die wir wie oben wieder kurz als **reelle analytische Kurven** bezeichnen. Nur gelegentlich werden auch komplexe (analytische) Kurven betrachtet werden. Zumeist handelt es sich jedoch bloß um glatte bzw. endlich oft stetig ableitbare reelle Kurvenbogen.

4. Parameteränderung. Die reellen Funktionen

$$x = x(t),\; y = y(t), \tag{4.1}$$

deren stetige Ableitungen $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ nie gleichzeitig verschwinden sollen, liefern jedoch mehr als nur eine glatte (reelle) Kurve k. Da nämlich jeder ihrer ∞^1 Punkte P nach Annahme umkehrbar eindeutig durch seinen Parameterwert t gekennzeichnet ist (den wir uns zu P geschrieben denken können), liefert (1) in Wahrheit *eine mit einer bestimmten (zulässigen) Parameterskala versehene glatte Kurve* $k(t)$. Durchläuft der Parameter t monoton wachsend seinen Wertebereich J ($t_a \leqq t \leqq t_b$), so durchläuft der Punkt P in einem bestimmten Sinne den Kurvenbogen $k = \widehat{AB}$, der dadurch orientiert (gerichtet) wird.

Die Koordinaten (1) der Kurvenpunkte P können zweckmäßig auch als Koordinaten des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ von P gedeutet werden, der ebenfalls von dem Parameter t abhängt; man schreibt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t) = x(t)\,\mathfrak{e}_1 + y(t)\,\mathfrak{e}_2\,, \tag{4.2}$$

wobei $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ die Einheitsvektoren der Koordinatenrichtungen bedeuten. Auch diese vektorielle Parameterdarstellung stellt die Kurve k einschließlich einer Parameterskala (t-Skala) dar, wobei nach Voraussetzung der abgeleitete Ortsvektor

$$\dot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{x}}(t) = \dot{x}(t)\,\mathfrak{e}_1 + \dot{y}(t)\,\mathfrak{e}_2 \neq \mathfrak{o} \tag{4.3}$$

für alle t aus J stetig und nie der Nullvektor ist.

Es ist in der Kurventheorie häufig zweckmäßig, den ursprünglichen („alten“) Parameter t durch einen neuen (zulässigen) Parameter s zu ersetzen, d. h. auf der Kurve k

statt der alten eine neue (zulässige) Parameterskala einzuführen. Dies geschieht durch eine Parametertransformation

$$t = t(s)\,, \tag{4.4}$$

in der $t(s)$ eine monotone und stetig ableitbare Funktion von s sein soll, welche der Bedingung

$$\frac{dt(s)}{ds} \neq 0 \tag{4.5}$$

genügt. Es soll also entweder stets $dt/ds > 0$ oder < 0 sein. Im ersten Falle wächst t mit wachsendem s, und die Orientierung von k bleibt erhalten; im zweiten fällt t mit wachsendem s, und der Durchlaufungssinn der beiden Skalen ist verschieden.

Die neue Darstellung der Kurve k ist dann

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(t(s)) = x\,(t(s))\,\mathfrak{e}_1 + y\,(t(s))\,\mathfrak{e}_2\,, \tag{4.6}$$

und der neue abgeleitete Ortsvektor $\mathfrak{x}' = \frac{d\mathfrak{x}}{ds}$ hängt mit dem alten $\dot{\mathfrak{x}} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ durch die Kettenregel zusammen:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x}' = \dot{\mathfrak{x}}\,\frac{dt}{ds}\,. \tag{4.7}$$

Aus der Stetigkeit von $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\frac{dt}{ds}$ folgt dann die Stetigkeit von $\mathfrak{x}'$ und aus der Voraussetzung $\dot{\mathfrak{x}} \neq \mathfrak{o}$ und $\frac{dt}{ds} \neq 0$ folgt von selbst auch für den neuen Parameter $\mathfrak{x}' \neq \mathfrak{o}$. Mit t ist dann auch s ein zulässiger Parameter der glatten Kurve k.

Übrigens schreibt man der Kürze halber oft statt $\mathfrak{x}(t(s))$ wieder $\mathfrak{x}\,(s)$.

Bemerkung 1: Im Gegensatz zu den abgeleiteten Vektoren $\dot{\mathfrak{x}}\,(t)$ und $\mathfrak{x}'(s)$ hängt das erste Vektordifferential

$$d\mathfrak{x}(t) = \left\{\begin{matrix} \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\,dt = \frac{d\mathfrak{x}}{ds}\,ds \\ \dot{\mathfrak{x}}(t)\,dt = \mathfrak{x}'(s)\,ds \end{matrix}\right\} = d\mathfrak{x}(s) \tag{4.8}$$

von dem speziellen Parameter t oder s nicht ab. *Das erste Differential des Ortsvektors der Kurve ist parameterinvariant.* Deswegen rechnet man bei Betrachtungen der ersten Differentiationsordnung gerne mit den Differentialen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ oder seiner Koordinaten x, y (und nicht mit den parameterabhängigen Ableitungen!).

5. Tangentenvektor. Der durch (4. 3) eingeführte abgeleitete Ortsvektor $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ hat eine einfache geometrische Bedeutung: er ist Tangentenvektor der (reellen, glatten) Kurve $\mathfrak{x}(t)$ im Punkte t. Die Länge $|\dot{\mathfrak{x}}|$ des Tangentenvektors $\dot{\mathfrak{x}}$ hängt von der Parameterskala ab, seine Richtung stimmt mit dem (durch wachsendes t erklärten) Richtungssinn der Kurve überein und er ist kein Nullvektor ($\dot{\mathfrak{x}} \neq \mathfrak{o}$), weil t nach Annahme ein zulässiger Parameter ist.

Zum Beweis nehmen wir neben dem festen Kurvenpunkt P der Kurve vom Ortsvektor $\mathfrak{x}(t)$ noch einen davon verschiedenen veränderlichen Kurvenpunkt P' vom Ortsvektor $\mathfrak{x}(t')$ an ($t' \neq t$). Der zu dem Sehnenvektor $\overrightarrow{PP'} = \mathfrak{x}(t') - \mathfrak{x}(t)$ proportionale Vektor

$$\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{x}(t') - \mathfrak{x}(t)}{t' - t} = \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}\,\mathfrak{e}_1 + \frac{y(t') - y(t)}{t' - t}\,\mathfrak{e}_2$$

weist dann von dem Punkte mit kleinerem Parameterwert zu jenem mit größerem hin und konvergiert beim Grenzübergang $t' \to t$ gegen eine Grenzlage, den Tangentenvektor

$$\mathfrak{t} = \lim_{t' \to t} \frac{\mathfrak{x}(t') - \mathfrak{x}(t)}{t' - t} = \lim_{t' \to t} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}\,\mathfrak{e}_1 + \lim_{t' \to t} \frac{y(t') - y(t)}{t' - t}\,\mathfrak{e}_2,$$

nämlich gegen den abgeleiteten Ortsvektor $\dot{\mathfrak{x}}(t)$, w. z. b. w.

Wir schreiben den Tangentenvektor

$$\mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{x}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\mathfrak{e}_1 + \frac{dy(t)}{dt}\,\mathfrak{e}_2 \tag{5. 1}$$

oder

$$\mathfrak{t} = \dot{\mathfrak{x}}(t) = \dot{x}(t)\,\mathfrak{e}_1 + \dot{y}(t)\,\mathfrak{e}_2\,. \tag{5. 2}$$

Dieser Tangentenvektor $\dot{\mathfrak{x}}$ existiert und ist stetig, weil die Kurve als glatt (einmal stetig ableitbar) vorausgesetzt war.

Der Tangentenvektor ist im Sinne wachsender Parameter t gerichtet; seine Länge

$$|\dot{\mathfrak{x}}| = \underset{+}{\sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}} = \underset{+}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \tag{5.3}$$

hängt von der Skala der Parameterwerte ab. Ersetzt man nach (4. 4) t durch einen neuen Parameter s, so sind die zugehörigen Tangentenvektoren $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{x}'$ nach Formel (4. 7) proportional, und für ihre Längen (Beträge) gilt

$$|\mathfrak{x}'| = |\dot{\mathfrak{x}}| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right| . \tag{5.4}$$

Bemerkung 1: Ist die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ analytisch, so kann es auf ihr im Komplexen Punkte mit isotropem Tangentenvektor $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ geben. In solchen Punkten ist zwar $\dot{\mathfrak{x}}(t) \neq \mathfrak{o}$, d. h. $(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0,0)$, aber es ist

$$\dot{\mathfrak{x}}^2(t) = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 0 . \tag{5.5}$$

6. Bogenlänge. Nach (4. Bem. 1) ist für die (reelle oder komplexe) glatte Kurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t) = x(t)\,\mathfrak{e}_1 + y(t)\,\mathfrak{e}_2 \tag{6.1}$$

das Vektordifferential

$$d\mathfrak{x}(t) = \frac{d\mathfrak{x}(t)}{dt}\,dt = \dot{\mathfrak{x}}(t)\,dt \tag{6.2}$$

parameterinvariant, d. h. ein von der Parameterwahl unabhängiger Vektor. Sein inneres Quadrat (Längenquadrat)

$$(d\,\mathfrak{x}(t))^2 = \dot{\mathfrak{x}}^2(t)\,dt^2 \tag{6.3}$$

ist überdies bewegungsinvariant. Bei Einführung eines neuen zulässigen Parameters s vermöge der Formel

$$t = t(s) \text{ mit } \frac{dt}{ds} \neq 0, \tag{6.4}$$

wodurch aus dem Ortsvektor $\mathfrak{x}(t)$ der Ortsvektor $\mathfrak{x}(t(s)) = \mathfrak{x}(s)$ entsteht, ist daher insgesamt

$$(d\mathfrak{x}(t))^2 = (d\,\mathfrak{x}(s))^2 \tag{6.5}$$

oder

$$\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 dt^2 = \left(\frac{d\mathfrak{x}}{ds}\right)^2 ds^2 \tag{6.6}$$

oder

$$\dot{\mathfrak{x}}^2(t)\,dt^2 = \mathfrak{x}'^2(s)\,ds^2\,. \tag{6.7}$$

Unter allen denkbaren zulässigen Parametern ist nun jener Parameter s geometrisch besonders ausgezeichnet, für den längs des Kurvenbogens, also für alle s (identisch in s),

$$\mathfrak{x}'^2(s) = x'^2(s) + y'^2(s) \equiv 1 \quad \{s\} \tag{6.8}$$

ist, d. h. jener Parameter s, für den der Tangentenvektor die feste Länge 1 hat. Man nennt diesen ausgezeichneten Parameter s die **Bogenlänge** der Kurve (Länge des Kurvenbogens von der Stelle $s = 0$ bis zur Stelle s) und ds ihr **Bogendifferential** oder **Bogenelement.** Für das Quadrat des Bogendifferentials folgt aus (7) die Formel

$$ds^2 = \dot{\mathfrak{x}}^2(t)\,dt^2 = (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\,dt^2 \tag{6.9}$$

oder

$$ds^2 = (d\mathfrak{x})^2 = dx^2 + dy^2\,. \tag{6.10}$$

Durch Integration des Bogendifferentials ds erhält man die Bogenlänge der Kurve zwischen den Punkten t_0 und t:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2(t)}\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt = s(t)\,. \tag{6.11}$$

Die geometrische Bedeutung der Bogenlänge eines reellen glatten Kurvenbogens wird in (I. 7) erläutert werden.

Bemerkung 1: Für $t = t_0$ wird $s = 0$. Der Punkt t_0 ist der Anfangspunkt der Bogenzählung. Da er willkürlich wählbar ist, ist s nur bis auf eine additive Konstante festgelegt.

Das Bogendifferential ds ist nach (10) erstens parameterinvariant (weil es nur von dem Vektordifferential erster Ordnung $d\mathfrak{x}$ abhängt) und zweitens (wie das innere Vektorquadrat $(d\mathfrak{x})^2$) bewegungsinvariant. Es ist das mit der Kurve verbundene Differential niedrigster Ordnung mit diesen beiden Eigenschaften, d. h. die einfachste Differentialinvariante der Kurve. Die aus ihm durch Integration gewonnene Bogenlänge s ist dann die (im gleichen Sinne) einfachste Integralinvariante der Kurve. In der auf die Bewegungsgruppe (1. 1) gestützten elementaren Differentialgeometrie bezeichnet man dann ds als natürliches Differential der Kurve und s selbst als natürlichen Kurvenparameter.

Wenn man nämlich die Entwicklung der Kurventheorie auf diesen natürlichen Parameter s gründet, so sind alle dabei gewonnenen mit der Kurve verbundenen bewegungsinvarianten Größen $f(s)$ oder Vektoren $\mathfrak{y}(s)$ von selbst auch parameterinvariant, d. h. unabhängig von der zufälligen Parameterskala, mittels derer die Kurve ursprünglich beschrieben wurde.

Bemerkung 2: Durch das Integral (11) ist auch für jede *komplexe analytische ebene Kurve* (1) eine *komplexe Bogenlänge* s erklärt, die gegen Bewegungen der Kurve und gegen reguläre Parameteränderungen invariant ist. Man kann auf der *Membran* der ∞^2 komplexen Punkte der Kurve (1) zwei feste Punkte t_0 und t durch unendlich viele eindimensionale *Fäden* verbinden, deren Bilder in der Gaußschen komplexen t-Ebene τ Kurven sind, welche die Stellen t_0 und t von τ verbinden. *Die komplexe Bogenlänge s hat dann nach den Lehren der Funktionentheorie auf zwei solchen Fäden der komplexen analytischen Kurve* (1) *stets den gleichen Wert, wenn deren Bildkurven in der t-Ebene keine singuläre Stelle des Integranden von* (11) *umschließen.*

Bemerkung 3: Die Normierung (8) ist unmöglich in solchen (komplexen) Kurvenpunkten, in denen

$$\dot{\mathfrak{x}}^2(t) = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 0 \tag{6. 12}$$

ist, deren (komplexer) Tangentenvektor also isotrop ist. Solche Punkte bleiben im folgenden außer Betracht.

Ist sogar

$$\dot{\mathfrak{x}}^2(t) \equiv 0 \quad (\text{aber } \dot{\mathfrak{x}}(t) \neq \mathfrak{o})\,, \tag{6.13}$$

d. h. sind die Tangenten in allen Punkten der Kurve isotrop, so ist nach (12) entweder $\dot{x}(t) + i\dot{y}(t) \equiv 0$ oder $\dot{x}(t) - i\dot{y}(t) \equiv 0$. Durch Integration folgt, daß in diesen Fällen als Kurve eine isotrope Gerade der Gleichung

$$x + iy = \text{const.} \quad \text{oder} \quad x - iy = \text{const.} \tag{6.14}$$

vorliegt. *Wir müssen also auch isotrope Geraden aus der Betrachtung ausschließen, wenn wir beabsichtigen, die Bogenlänge s der Kurve als natürlichen Parameter zu verwenden.*

Ist jedoch längs des betrachteten Kurvenbogens (1) überall $\dot{\mathfrak{x}}^2(t) = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0$ und daher auch

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2(t)} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \neq 0\,, \tag{6.15}$$

so kann man (nach dem Fundamentalsatz über implizite Funktionen) die aus (11) fließende Darstellung des Bogens $s = s(t)$ nach dem Parameter t auflösen:

$$t = t(s) \tag{6.16}$$

und in (1) eintragen, wodurch man den Ortsvektor der Kurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x}(t(s)) \tag{6.17}$$

als (stetig ableitbare) Funktion der Bogenlänge s erhält. Diese theoretisch einfachste Darstellung der Kurve, die wir kurz

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) \tag{6.18}$$

schreiben, wird in Hinkunft stets der Entwicklung der Kurventheorie zugrunde liegen.

7. Die geometrische Bedeutung der Bogenlänge s ist aus den Elementen der Infinitesimalrechnung bekannt. Um die Länge eines Bogens $k = \overset{\frown}{AB}$ der reellen glatten Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ zu definieren, schreibt man dem Bogen k durch Wahl der beliebigen Zwischenpunkte $P_\nu(x(t_\nu), y(t_\nu))$ mit den Parameterwerten

$$t_a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t_b = t \tag{7.1}$$

einen beliebigen Polygonzug $\mathfrak{P} = (A, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, B)$ ein und bestimmt seine Länge

$$\left\{\begin{aligned} s(\mathfrak{P}) &= \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{x}(t_\nu) - \mathfrak{x}(t_{\nu-1})| \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{[x(t_\nu) - x(t_{\nu-1})]^2 + [y(t_\nu) - y(t_{\nu-1})]^2}. \end{aligned}\right. \tag{7.2}$$

Diese Länge $s(\mathfrak{P})$ wächst, wenn man durch Zwischenschalten von weiteren Kurvenpunkten den Polygonzug $\mathfrak{P}$ verfeinert. Ist nämlich $\mathfrak{P}'$ ein der Kurve k eingeschriebener Polygonzug, der neben den Ecken P_ν noch weitere Ecken P'_ν enthält, so gilt für die Längen $s(\mathfrak{P}) \leqq s(\mathfrak{P}')$, weil die geradlinige Verbindung zweier Punkte $P_{\nu-1}$ und P_ν kürzere Länge hat als jede polygonale Verbindung (Dreiecksungleichung).

Es gibt nun Kurven k, bei denen hinreichende Verfeinerung der eingeschriebenen Polygonzüge $\mathfrak{P}$ die Längen $s(\mathfrak{P})$ über alle Grenzen wachsen läßt. Diesen Kurvenbogen k kann man keine endliche Bogenlänge s zuordnen.

Wenn dagegen die Menge $\{s(\mathfrak{P})\}$ der Längen (2) aller in den Kurvenbogen k einschreibbaren Polygonzüge $\mathfrak{P}$ nach oben beschränkt ist, so kann man dem Bogen k in sinnvoller Weise eine endliche Bogenlänge s zuordnen, nämlich die obere Grenze

$$s = \sup s(\mathfrak{P}), \tag{7.3}$$

d. h. die bei beschränktem $s(\mathfrak{P})$ stets vorhandene kleinste obere Schranke aller Polygonzuglängen $s(\mathfrak{P})$.

Wir erklären also, wenn die Menge der Längen $\{s(\mathfrak{P})\}$ aller eingeschriebenen Polygone nach oben beschränkt ist, die Bogenlänge s des Kurvenbogens $k = \widehat{AB}$ durch die Formel (3). Ein Kurvenbogen k, der gemäß (3) eine endliche

Länge s besitzt, heißt nach Giuseppe Peano (1858—1932) rektifizierbar oder streckbar.

Wie schon erwähnt, gibt es *stetige Kurven*, die *nicht streckbar* sind. Dagegen gilt der wichtige

Satz 1: *Jeder glatte (d.h. stetig differenzierbare) Kurvenbogen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ ist streckbar. Seine durch die Definition* (3) *erklärte Bogenlänge $s = s(t)$ ist eine stetig ableitbare Funktion von t, die durch das Integral*

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\, dt \tag{7. 4}$$

dargestellt wird, dessen ausführliche Gestalt wir aus (6. 11) *kennen.*

Beweis: 1) Wir zeigen in einem ersten Beweisschritt, daß das in (4) auftretende Integral, das für glatte Bogen k, d.h. für stetiges $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ einen endlichen Wert hat, eine obere Schranke für die Längen $s(\mathfrak{P})$ aller dem Kurvenbogen k eingeschriebenen Polygonzüge $\mathfrak{P}$ ist.

Dazu bemerken wir zuerst, daß man nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\mathfrak{x}}(t)\, dt = \mathfrak{x}(t) - \mathfrak{x}(t_0) \tag{7. 5}$$

ist. Daher kann man zunächst für die Länge $s(\mathfrak{P})$ des Polygonzugs $\mathfrak{P}$ nach (2) schreiben

$$s(\mathfrak{P}) = \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{x}(t_\nu) - \mathfrak{x}(t_{\nu-1})| = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \dot{\mathfrak{x}}(t)\, dt \right| . \tag{7. 6}$$

Wir bemerken weiter, daß für glatte Kurven

$$\mathfrak{x}(t) = x(t)\mathfrak{e}_1 + y(t)\mathfrak{e}_2, \tag{7. 7}$$

d. h. für Kurven mit stetigem Tangentenvektor

$$\dot{\mathfrak{x}}(t) = \dot{x}(t)\mathfrak{e}_1 + \dot{y}(t)\mathfrak{e}_2 \neq \mathfrak{o} \tag{7. 8}$$

die Ungleichung

$$(7.9)\qquad \left|\int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \dot{\mathfrak{x}}(t)\,dt\right| \leqq \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\,dt$$

gilt. Wenn man links und rechts die Quadrate nimmt, besagt (9) nach (8) ausführlich geschrieben für stetige $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ das Bestehen der im wesentlichen von Hermann Amandus Schwarz (1884) stammenden Ungleichung

$$(7.10)\qquad \left(\int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \dot{x}(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \dot{y}(t)\,dt\right)^2 \leqq \left(\int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt\right)^2 .$$

Um die Ungleichung (10) zu bestätigen, vereinfachen wir die Schreibweise und setzen

$$(7.11)\qquad \begin{array}{lll} \dot{x}(t) = \xi(t), & t_{\nu-1} = \alpha, & \\ \dot{y}(t) = \eta(t), & t_\nu = \beta, & (\beta > \alpha). \end{array}$$

Die zu beweisende Schwarzsche Ungleichung (10) *erhält dann die Gestalt*

$$(7.12)\qquad \left(\int_\alpha^\beta \xi(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_\alpha^\beta \eta(t)\,dt\right)^2 \leqq \left(\int_\alpha^\beta \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}\,dt\right)^2 ,$$

wobei $\xi(t)$ *und* $\eta(t)$ *in* $[\alpha, \beta]$ *stetige reelle Funktionen sind. Das Gleichheitszeichen gilt dabei dann und nur dann, wenn* ξ *und* η *konstantes Verhältnis haben.*

Wir führen noch die linearen Mittelwerte a und b von $\xi(t)$ und $\eta(t)$ im Intervall $[\alpha, \beta]$ ein:

$$(7.13)\qquad a = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \xi(t)\,dt, \qquad b = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \eta(t)\,dt ,$$

und bemerken die Formeln

$$(7.14)\qquad \int_\alpha^\beta (\xi - a)\,dt = 0 , \qquad \int_\alpha^\beta (\eta - b)\,dt = 0 .$$

Die Behauptung (12) lautet damit:

$$(7.15)\qquad (\beta - \alpha)^2 (a^2 + b^2) \leqq \left(\int_\alpha^\beta \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}\,dt\right)^2$$

oder wegen $\beta > \alpha$:

$$(\beta - \alpha) \sqrt{a^2 + b^2} \leqq \int_\alpha^\beta \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}\,dt$$

oder schließlich:

$$(7.16)\qquad \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)} - \sqrt{a^2 + b^2} \right] dt \geqq 0 .$$

Diese Ungleichung ist für $a = b = 0$ von selbst erfüllt. Wir müssen sie also nur für den Fall, daß $a^2 + b^2 > 0$ ist, beweisen.

Der Beweis von (16) für $a^2 + b^2 > 0$ folgt nun sofort aus der allgemein gültigen elementaren Ungleichung

$$(7.17)\qquad \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \geqq a\xi + b\eta,$$

die besagt, daß für zwei beliebige reelle Vektoren

$$\mathfrak{p} = a\mathfrak{e}_1 + b\mathfrak{e}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{q} = \xi\mathfrak{e}_1 + \eta\mathfrak{e}_2,$$

die miteinander den Winkel φ einschließen mögen, stets

$$(7.18)\qquad |\mathfrak{p}| \cdot |\mathfrak{q}| \geqq (\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = |\mathfrak{p}| \cdot |\mathfrak{q}| \cdot \cos\varphi$$

ist. Man erkennt, daß das Gleichheitszeichen in (17) dann und nur dann gilt, wenn in (18) $\cos\varphi = 1$ ist, d. h. wenn die Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gleichsinnig parallel sind, d. h. für

$$(7.19)\qquad \xi = \lambda a, \quad \eta = \lambda b \quad \text{mit} \quad \lambda = \lambda(t) \geqq 0 .$$

Wenn man nämlich die Ungleichung (17) durch $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$ dividiert und beiderseits $\sqrt{a^2 + b^2}$ abzieht, so erhält man die zu (17) äquivalente, ebenfalls für beliebige ξ, η, a, b mit $a^2 + b^2 > 0$ gültige Ungleichung

$$(7.20)\qquad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \geqq \frac{a(\xi - a) + b(\eta - b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Aus ihr folgt in unserem Falle, d. h. für stetige Funktionen $\xi = \xi(t)$ und $\eta = \eta(t)$ und die Werte a und b aus (13), durch Integration nach t zwischen den Grenzen α und β wegen $\beta > \alpha$ und wegen (14) genau die Behauptung (16). Damit ist auch die allgemeine Ungleichung (12), also auch (10) und (9) bewiesen.

Das Gleichheitszeichen gilt nach (19) in (16) und (12) immer dann, wenn $\xi(t)$ und $\eta(t)$ ein konstantes Verhältnis aufweisen, also in (10) immer dann, wenn die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ eine Gerade ist. Daß das Gleichheitszeichen in (10) nur für Geraden gilt, wird hier nicht benötigt, kann aber bewiesen werden.

Für die in (6) berechneten Längen $s(\mathfrak{P})$ aller dem Bogen $k = \widehat{AB}$ der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ eingeschriebenen Polygonzüge $\mathfrak{P}$ kann man nun mittels der soeben bewiesenen Ungleichung (9) eine von $\mathfrak{P}$ unabhängige obere Schranke S gewinnen. Nach (6) und (9) gilt nämlich

$$(7.21)\qquad s(\mathfrak{P}) = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \dot{\mathfrak{x}}(t)\,dt \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\,dt = S(t).$$

Das Gleichheitszeichen gilt dabei in dieser Ungleichung für einen glatten Bogen k immer dann, wenn die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ eine gerade Linie ist.

In dem Ausdruck

$$(7.22)\qquad S(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt$$

haben wir die gesuchte, von der speziellen Unterteilung (1) *des Bogens k unabhängige, obere Schranke gefunden, die von keiner Polygonzuglänge $s(\mathfrak{P})$ übertroffen werden kann.*

Wenn dann $s(t)$ die Länge des Kurvenbogens zwischen den Stellen t_0 und t bezeichnet, so gilt nach der Definition (3) von $s(t)$ als obere Grenze der $s(\mathfrak{P})$ zufolge (21) jedenfalls die Ungleichung

$$(7.23)\qquad s(t) = \sup s(\mathfrak{P}) \leqq \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\,dt = S(t).$$

2) Wir zeigen nun in einem zweiten Beweisschritt, daß das Integral (22) sogar die obere Grenze der Polygonzuglängen $s(\mathfrak{P})$ ist und daher nach der Definition (3) mit der Länge s des Kurvenbogens $k = \widehat{AB}$ übereinstimmt, d.h., daß in (23) sogar das Gleichheitszeichen gilt und $s(t) = S(t)$ ist.

Nach der Definition (3) hat zunächst der zwischen den Stellen t^* und t liegende Kurvenbogen für $t > t^*$ die Länge $s(t) - s(t^*)$. Nach (23) gilt dann

$$(7.24)\qquad s(t) - s(t^*) \leqq \int_{t^*}^{t} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\,dt.$$

Nach der Definition (3) ist die Länge eines Bogens $\widehat{P^*P}$ nicht kleiner als die Länge der Sehne $\overline{P^*P}$. Also gilt für $t > t^*$

$$|\mathfrak{x}(t) - \mathfrak{x}(t^*)| \leqq s(t) - s(t^*). \tag{7.25}$$

Aus (24) und (25) folgt

$$\left|\frac{\mathfrak{x}(t) - \mathfrak{x}(t^*)}{t - t^*}\right| \leqq \frac{s(t) - s(t^*)}{t - t^*} \leqq \frac{1}{t - t^*}\int_{t^*}^{t} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\, dt. \tag{7.26}$$

Diese Ungleichung gilt sowohl für $t > t^*$ als auch für $t < t^*$. Wenn nun $t \to t^*$ strebt, so streben sowohl das erste als auch das letzte Glied von (26) gegen den Grenzwert $|\dot{\mathfrak{x}}(t^*)|$, also auch das Mittelglied.

Damit ist bewiesen, daß die durch (3) erklärte Bogenlänge $s(t)$ einer glatten Kurve $\mathfrak{x}(t)$ an allen Stellen t^* eine Ableitung $\dot{s}(t^*)$ besitzt und daß

$$\dot{s}(t^*) = \lim_{t \to t^*} \frac{s(t) - s(t^*)}{t - t^*} = |\dot{\mathfrak{x}}(t^*)| \tag{7.27}$$

gilt. Ebenso wie $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ hängt daher auch $\dot{s}(t)$ stetig von t ab. *Die Bogenlänge $s(t)$ der glatten Kurve $\mathfrak{x}(t)$ ist also eine einmal stetig ableitbare Funktion von t, für die aus* (27) *schließlich die Formel*

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2(t)}\, dt \tag{7.28}$$

folgt. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Bemerkung 1: Bei Kurven, die über der x-Achse schlicht liegen, kann man $t = x$ als Parameter wählen. Man erhält die explizite Darstellung

$$y = y(x) \tag{7.29}$$

mit $\dot{x} = dx/dx = 1$, $\dot{y} = dy/dx = y'(x)$. Die Bogenlänge der Kurve zwischen den Abszissen x_0 und x ist dann

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx, \tag{7.30}$$

und das Bogenelement lautet

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{7.31}$$