Einführung in die theoretische Physik

von

Dr.-Ing. Werner Döring
o. Prof. an der Universität Hamburg

II

Das elektromagnetische Feld

Dritte, verbesserte Auflage
Mit 16 Abbildungen

Sammlung Göschen Band 77a

Walter de Gruyter & Co · Berlin 1968

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende Bände:

I.	Mechanik	(Band 76)
II.	Das elektromagnetische Feld	(Band 77)
III.	Optik	(Band 78)
IV.	Thermodynamik	(Band 374)
V.	Statistische Mechanik	(Band 1017)

Zur Schreibweise der Formeln:

Alle Formelbuchstaben dieses Buches bedeuten physikalische Größen, also Produkte aus Zahlenwert und Einheit, die von der Wahl der Einheit unabhängig sind.

Vektoren sind durch Fettdruck gekennzeichnet. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ bedeutet das skalare Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ bedeutet das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$.

Bei den Hinweisen auf Formeln bedeutet die erste Ziffer den Paragraphen, die zweite die Nummer der Formel innerhalb dieses Paragraphen. Bei Hinweisen auf Formeln der anderen Bände dieser Gesamtdarstellung ist die Bandnummer nach obiger Liste als römische Ziffer vorangestellt.

 — Archiv-Nr. 7740681. — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin 30. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis einiger einschlägiger Werke

a) Werke über das Gesamtgebiet der theoretischen Physik und Teile von Handbüchern

Berkeley Physics Course (5 Bände). Vol. 2: E. M. Purcell: *Electricity and Magnetism.* New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney 1965.

G. Bruhat: *Cours de Physique Générale* (5 Bände). *Électricité* 6. Aufl., vollständig überarbeitet von G. Goudet. Paris 1956.

Feynman-Leighton-Sands: *Lectures on Physics* (3 Bände). Vol. II: *The electromagnetic Field.* Reading (Mass.)-Palo Alto-London 1965.

S. Flügge: *Lehrbuch der theoretischen Physik*, (5 Bände). Band III: *Klassische Physik II. Das Maxwellsche Feld.* Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

Handbuch der Physik (herausgegeben von S. Flügge) (Viele Verfasser). Bd. XVI: *Elektrische Felder und Wellen.* Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

F. Hund: *Theoretische Physik* (3 Bände). 2. Band: *Theorie der Elektrizität und des Lichts. Relativitätstheorie.* 3. Auflage Stuttgart 1957.

G. Joos: *Lehrbuch der theor. Physik.* 10. Aufl. Frankfurt 1959.

L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Lehrbuch der theor. Physik* (9 Bände, Orig. russ.). Band II: *Klassische Feldtheorie;* Band VIII: *Elektrodynamik der Kontinua.* Berlin 1967.

G. W. Macke: *Lehrbuch der theor. Physik* (6 Bände): *Elektromagnetische Felder.* 2. Aufl. Leipzig 1963.

W. Pauli: *Vorlesungen* (6 Bände). *Elektrodynamik.* 3. Aufl. Torino 1958.

Cl. Schäfer: *Einführung in die theor. Physik* (3 z. T. mehrteilige Bände). 3. Band, 1. Teil: *Elektrodynamik und Optik.* 2. Aufl. Berlin 1950.

A. Sommerfeld: *Vorlesungen über theoretische Physik* (6 Bände). Band III: *Elektrodynamik.* 4. Aufl. (revidiert von F. Bopp und J. Meixner) Leipzig 1964.

W. Weizel: *Lehrbuch der theor. Physik* (2 Bände). I. Band: *Physik der Vorgänge.* 3. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.

b) Einzelwerke über die Theorie des Elektromagnetismus

R. Becker: *Theorie der Elektrizität* (Herausgeber F. Sauter. 3 Bände). 1. Band: *Einführung in die Maxwellsche Theorie. Elektronentheorie, Relativitätstheorie.* 18. Aufl. Stuttgart 1964.

B. I. Bleaney, B. Bleaney: *Electricity and Magnetism.* 2. Aufl. Oxford 1965.

G. Eder: *Elektrodynamik.* Mannheim 1967.

J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics.* New York, London 1962.

D. S. Jones: *The Theory of Electromagnetism.* Oxford-London-New York- Paris 1964.

J. Cl. Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism.* (2 Bände). 3. Aufl. 1891, nachgedruckt Dover 1954 (deutsche Übersetzung der 2. Aufl. Berlin 1883).

K. F. Novobatzky, Th. Neugebauer: *Theoretische Elektrizitätslehre und Wellenoptik.* Berlin 1957.

W. K. H. Panofsky, M. Phillips: *Classical Electricity and Magnetism.* Reading (Mass.) 1956.

J. A. Stratton: *Electromagnetic Theory.* New York, London 1941.

I. Elektrostatik

§ 1. Die elektrische Ladung und die elektrische Feldstärke

Die Elektrostatik befaßt sich mit den ruhenden, elektrisch geladenen Körpern. Die älteste Methode, Körper in den elektrisch geladenen Zustand zu versetzen, besteht darin, sie miteinander in innige Berührung zu bringen, was am besten durch Reiben aneinander geschieht. Chemisch verschiedene Körper sind dann nach dem Auseinanderziehen in der Regel elektrisch geladen. Der elektrisch geladene Zustand äußert sich an dem Auftreten gewisser Kräfte, die im ungeladenen Zustand fehlen. Die experimentelle Erforschung dieser elektrischen Kräfte führte im 18. Jahrhundert zu der Erkenntnis, daß es zwei qualitativ verschiedene, elektrisch geladene Zustände gibt, die man als positiv und negativ geladen bezeichnet. Ungleichartig geladene Körper ziehen sich an, gleichartig geladene Körper stoßen sich ab (du Fay, um 1735). Ferner kann man die Körper in groben Zügen in Leiter und Nichtleiter einteilen (Gray, 1729). Verbindet man einen ungeladenen und einen geladenen, leitenden Körper mit einem Leiter, so geht der erste nahezu momentan in den geladenen Zustand über. Durch einen (idealen) Nichtleiter oder Isolator findet eine solche Übertragung des geladenen Zustandes nicht statt. Es gibt keine vollkommen isolierenden Körper. Langsam entladen sich die Körper auch durch Isolatoren hindurch.

Die quantitative Behandlung der elektrischen Erscheinungen beginnen wir nun mit der Definition der Größe „elektrische Ladung“. Sie kann qualitativ als Maß für die Stärke des elektrisch geladenen Zustands charakterisiert werden. Wir betrachten zu diesem Zweck irgendeinen elektrisch geladenen Isolator K und halten ihn in fester Lage und unveränderlichem Ladungszustand fest. In seine Nähe denken wir uns nacheinander verschiedene kleine, elektrisch geladene und vollkommen isolierte Probekörper gebracht und die auf sie wirkenden Kräfte gemessen. Von ihnen subtrahieren wir die Kräfte, die im ungeladenen Zustand auf die Probekörper wirken. Die restlichen, elektrischen Kräfte $\boldsymbol{F}$ von K auf die Probekörper lassen sich als Produkte aus einer skalaren, nur vom Probekörper abhängigen Größe q und einem vektoriellen, nur vom Ort abhängigen Faktor $\boldsymbol{E}$ schreiben:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}. \tag{1;1}$$

Das ist gleichwertig mit der Aussage: Die elektrische Kraft von K auf verschiedene kleine Körper hat am gleichen Ort immer die gleiche Richtung. Das Verhältnis der Beträge der Kräfte auf zwei Probekörper am gleichen Ort ist vom Ort unabhängig. Den skalaren Faktor q in (1; 1) nennt man die elektrische Ladung des Probekörpers, den vektoriellen Faktor $\boldsymbol{E}$ die elektrische Feldstärke.

Experimentell läßt sich zwar (1; 1) niemals exakt als richtig bestätigen, weil es keine vollkommenen Isolatoren gibt. Aber aufgrund unserer heutigen Einsicht in die Struktur der Materie kann an der Gültigkeit dieses Gesetzes unter idealen Bedingungen kaum ein Zweifel bestehen. Wenn man von den instabilen Teilchen in der Strahlung der radioaktiven Körper und der großen Beschleuniger absieht, besteht die gesamte Materie aus drei Sorten von Elementarteilchen, welche Elektronen, Protonen und Neutronen genannt werden. Die Neutronen sind elektrisch ungeladen, die Elektronen sind negativ, die Protonen positiv geladen. Die Kraft eines geladenen Körpers auf ein Proton ist sehr genau entgegengesetzt gleich der Kraft auf ein Elektron am gleichen Ort. Betrachten wir also einen Probekörper, der N_+ Protonen und N_- Elektronen enthält und so klein ist, daß die Kraft $\boldsymbol{f}$ von K auf ein Proton an verschiedenen Punkten innerhalb des Probekörpers praktisch gleich groß ist, so hat die gesamte elektrische Kraft auf den Probekörper die Größe

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}(N_+ - N_-). \tag{1;2}$$

Bei einem isolierten Probekörper, durch dessen Oberfläche Protonen und Elektronen weder ein- noch austreten können, ist $N_+ - N_-$ eine von Ort und Zeit unabhängige, für den Zustand des Probekörpers charakteristische Konstante, während f außer von dem Zustand des Körpers K nur vom Ort abhängt. (1; 2) hat also genau die in (1; 1) behauptete Form.

Selbstverständlich definiert die eine Gleichung (1; 1) nicht die beiden Größen elektrische Ladung q und elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$. Aus den obigen Betrachtungen ergeben sich vielmehr nur die folgenden Festsetzungen:

1. Die Ladung eines Körpers ist eine Zustandsgröße, die bei einem ideal isolierten Körper von seiner Lage und der Zeit unabhängig ist.

2. Das Verhältnis der Ladungen zweier kleiner Körper ist gleich dem Verhältnis der elektrischen Kräfte eines dritten, geladenen Körpers auf sie am gleichen Ort.

3. Die Ladung eines ausgedehnten Körpers ist gleich der Summe der Ladungen seiner einzelnen Teile. Dadurch ist das Verhältnis der elektrischen Ladungen zweier beliebiger Körper eindeutig definiert. Bei der Größe Ladung selbst bleibt ein für alle Ladungen gemeinsamer Faktor unbestimmt. Über diese Unbestimmtheit verfügen verschiedene Physiker verschieden:

1. Die meisten Experimentalphysiker und Elektrotechniker verstehen unter der elektrischen Ladung eine Größe neuer Größenart, die kein Vielfaches einer mechanischen Größe ist. Der Ladung eines Einheitskörpers, dessen Festlegung wir in § 2 erörtern werden, erteilt man den Namen 1 Coulomb und gibt alle anderen Ladungen als Vielfache dieser Einheitsladung an. Im Sinne der in Bd. I[1]) erläuterten Ausdrucksweise bedeutet das: Man betrachtet die Ladung als Grundbegriff und läßt die Unbestimmtheit, die in der Definition eines Grundbegriffes durch Angabe eines Meßverfahrens steckt, bestehen.

---

[1]) W. Döring, Einführung in die theoretische Physik, Bd. I Mechanik, Sammlung Göschen Bd. 76, 3. Auflage, § 1.

2. Viele theoretische Physiker bevorzugen es, über die Unbestimmtheit so zu verfügen, daß die Größe Ladung eine Zahl oder eine durch Längen, Zeiten und Massen ausdrückbare Größe wird. Man kann z. B. auch die Zahl $N_+ - N_-$ als Ladung q' bezeichnen. Ist q die Ladung eines Körpers im ersten Sinn und e die Ladung des Protons im gleichen Sinn (Elementarladung), so ist

$$q' = N_+ - N_- = \frac{q}{e}\,. \tag{1; 3}$$

In vielen Büchern über theoretische Kernphysik wird unter Ladung diese Zahl q' verstanden. Sie wird meist eingeführt mit den Worten: Wir benutzen die Protonenladung als Einheit. Das soll, präziser ausgedrückt, bedeuten: Über die Unbestimmtheit in der Definition des Begriffes Ladung wird so verfügt, daß die Ladung des Protons gleich der Zahl 1 wird. Im nächsten Paragraphen werden wir eine weitere zu q proportionale Größe, die elektrostatische Ladungsgröße q_s kennenlernen, die in anderen theoretischen Lehrbüchern viel benutzt wird.

Ob man der Größe neuer Art q, der Zahl q' oder der elektrostatischen Größe q_s den Namen Ladung gibt und in Formeln und Berechnungen verwendet, ist im Prinzip völlig gleichgültig, da sich diese Größen nur durch Naturkonstanten als Faktoren unterscheiden, so daß jede aus jeder anderen eindeutig berechnet werden kann. Da aber in jedem Fall die elektrische Feldstärke nach (1; 1) als Quotient aus Kraft und Ladung definiert wird, hat die verschiedene Festlegung des Begriffes Ladung Unterschiede in dem begrifflichen Inhalt des Wortes Feldstärke und aller weiteren damit definierten Begriffe zur Folge. Das ist die Ursache für die sog. Unterschiede in den Maßsystemen. Im folgenden verstehen wir unter Ladung stets die durch mechanische Größen nicht ausdrückbare Größe q. Die Umrechnung auf andere Größen behandeln wir im Anhang (§ 27).

Zum Schluß dieser grundlegenden Betrachtungen sei noch darauf hingewiesen, daß (1; 1) nur gilt, wenn der Zustand des Körpers K durch den Probekörper nicht verändert wird. Diese

Bedingung ist nur erfüllt, wenn der Probekörper genügend klein ist und von allen Teilen von K einen im Vergleich zu den mittleren Atomabständen großen Abstand hat, dagegen nicht im Innern der Materie. Kraftmessungen mit makroskopischen Probekörpern liefern daher nach (1; 1) nur Aussagen über die elektrischen Felder im Vakuum. Die Gesetze, denen die Felder im Innern der Materie genügen, erhält man durch Extrapolation der im Vakuum gültigen Gesetze auf atomare Probekörper und subatomare Entfernungen. Dieses Vorgehen hat sich an der Erfahrung bewährt. Wenn man alle Protonen und Elektronen als punktförmig ansieht, erhält man für das Innere der Körper einen sehr zackigen Verlauf von $\boldsymbol{E}$. Das, was man makroskopisch unter der elektrischen Feldstärke im Innern eines Körpers versteht, ist ein Mittelwert davon (vgl. § 3 bis 5).

§ 2. Das Coulombsche Gesetz

Das grundlegende Gesetz für die Kraft zwischen ruhenden geladenen Körpern wurde experimentell von Coulomb im Jahre 1785 durch Messungen mit Hilfe der Drehwaage gefunden. Es lautet: Die elektrische Kraft $\boldsymbol{F}$ zwischen zwei Körpern, deren Ausdehnung klein gegen ihren Abstand r ist, hat die Richtung der Verbindungslinie zwischen den beiden Körpern. Ihr Betrag $|\boldsymbol{F}| = F$ ist den Ladungen q_1 und q_2 der beiden Körper proportional und dem Quadrat ihres Abstand umgekehrt proportional. Den Proportionalitätsfaktor nennt man heute meist $1/(4\,\pi\varepsilon_0)$:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad (2;1)$$

Die Größe ε_0 ist eine Naturkonstante der Größenart (Ladung)^2/(Kraft · Fläche). Ihr Zahlenwert hängt von der gewählten Ladungseinheit ab. Die Ladungseinheit 1 Coulomb (abgekürzt $1\,\mathrm{C} = 1$ Ampère · sek $= 1\,\mathrm{As}$) wird heute dadurch festgelegt, daß man den Zahlenwert von ε_0 vorschreibt. Aus Gründen, die wir erst später (§ 15) durchschauen werden, wählt man ihn so, daß $4\pi\varepsilon_0$ mal dem Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 einen einfachen Zahlenwert annimmt, nämlich

$$4\pi\varepsilon_0 c_0^2 = 100\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{dyn}\cdot\mathrm{s}^2} = 10^7\,\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{N}} \qquad (2;2)$$

(1 N = 1 Newton = 10^5 dyn).
Da $c_0 = 2{,}99793 \cdot 10^8$ m/s ist, folgt daraus

$$\varepsilon_0 = 8{,}85417 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{A^2\,s^2}}{\mathrm{Nm^2}}\,. \tag{2; 2a}$$

In der theoretisch-physikalischen Literatur wird vielfach über die in § 1 erläuterte Unbestimmtheit bei der Definition der Ladung so verfügt, daß in (2; 1) der Faktor $4\pi\varepsilon_0$ nicht auftritt, d. h. an Stelle von q wird die zu q proportionale Größe

$$q_s = \frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \tag{2; 3}$$

eingeführt. Mit dieser elektrostatisch definierten Ladungsgröße q_s lautet (2; 1)

$$F = \frac{q_{s1}\, q_{s2}}{r^2}\,. \tag{2; 4}$$

Die Umrechnung aller anderen Größen auf die mit Hilfe von q_s definierten Größen des sog. elektrostatischen Begriffssystems wird in § 27 weiter erörtert werden.

§ 3. Das Feld einer gegebenen Ladungsverteilung

In diesem Buch sollen die Eigenschaften der betrachteten Felder stets auf drei verschiedene Weisen beschrieben werden. Erstens soll das Feld als Summe oder als Integral über die Beiträge der felderzeugenden Körper angegeben werden. Das bezeichnet man als die quellenmäßige Darstellung des Feldes. Zweitens werden wir Aussagen über gewisse Linien- und Flächenintegrale über die Feldgrößen machen. Diese integralen Beziehungen sind für die technischen Anwendungen besonders wichtig. Drittens werden wir Differentialgleichungen für die Feldgrößen ableiten. In manchen Fällen, insbesondere bei zeitlich veränderlichen Feldern, findet man zunächst diese Differentialgleichungen und muß daraus die quellenmäßige Darstellung erst erschließen. Wir werden stets so viele Differentialgleichungen bzw. so viele Integralbeziehungen angeben, daß die Felder bei Benutzung gewisser plausibler Randbedingungen für das Verhalten der Felder im Unendlichen daraus eindeutig folgen. In diesem Sinne sind alle drei Beschreibungsweisen physikalisch gleichwertig.

Wir betrachten jetzt einen Körper K aus N ruhenden, geladenen Teilchen mit den Ladungen e_j. Jedes Teilchen soll als punktförmig angesehen werden können und sich am Ende des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_j$ befinden. Wir fügen nun zu dem Coulombschen Gesetz (2; 1) noch die Annahme hinzu, daß sich die Kräfte aller Teilchen auf eine Probeladung der Größe q einfach addieren. Die Kraft des j-ten Teilchens auf eine Probeladung am Ort $\boldsymbol{r}$ hat den Betrag $\left|\frac{e_j q}{4\pi\varepsilon_0 \, |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^2}\right|$ und bei gleichem Vorzeichen von e_j und q die Richtung des Einheitsvektors $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j)/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|$. Die Summe aller dieser Kräfte auf die Probeladung, dividiert durch q, ist die Feldstärke $\boldsymbol{E}$, welche der Körper K am Endpunkt von $\boldsymbol{r}$ erzeugt:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{e_j}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j) . \qquad (3;1)$$

Das ist bereits die quellenmäßige Darstellung des elektrostatischen Feldes. Sie läßt sich aber einfacher schreiben. Der j-te Summand ist der negative Gradient[1]) der skalaren Funktion $\frac{e_j}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|}$, sofern man $\boldsymbol{r}$ (und nicht $\boldsymbol{r}_j$) als den variablen Ortsvektor betrachtet. Das ist in Koordinaten leicht nachzurechnen. Also gilt

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}) \quad \text{mit} \quad \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{e_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|} . \qquad (3;2)$$

Die Größe $\varphi(\boldsymbol{r})$ heißt elektrostatisches Potential. Sie ist durch das Feld nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. In (3; 2) wurde über die Konstante so verfügt, daß φ

[1]) Im folgenden wird die Vektoranalysis als bekannt vorausgesetzt. Zur Erläuterung aller hier nicht erklärten Begriffe verweisen wir stets auf: S. Valentiner, Vektoren und Matrizen, Sammlung Göschen Bd. 354/354a. Hier vgl. § 20.

in unendlich großem Abstand von dem Körper K verschwindet.

Bei wirklichen, makroskopischen Körpern liegt N, die Zahl der Elektronen und Protonen, in der Größenordnung 10^{20} bis 10^{30}, und daher kann man praktisch mit der Summe (3; 2) nichts anfangen. Wenn aber $\boldsymbol{r}$ zu einem Punkt außerhalb von K weist, kann man bei den Beiträgen aller Teilchen in einem kleinen Volumen ΔV, dessen lineare Abmessungen klein gegen $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|$ sind, die relativ kleinen Unterschiede im Nenner vernachlässigen. Dann tritt in (3; 2) im Zähler die Summe der Ladungen aller Teilchen in ΔV auf. Wenn nun die linearen Abmessungen dieses Volumens groß gegen den mittleren Atomabstand sind, aber doch noch so klein, daß sich die mittleren, makroskopischen Eigenschaften auf einer Strecke dieser Größenordnung nur wenig ändern, so ist die Summe dieser Ladungen proportional zu ΔV:

$$\sum_{\text{Alle Teilchen in } \Delta V} e_j = \varrho \Delta V\,. \tag{3; 3}$$

Die Größe ϱ wird Raumladungsdichte genannt. Sie beschreibt die Verteilung der Ladungen im Innern der Körper in makroskopischer Näherung.

An der Oberfläche geladener Körper versagt jedoch oft diese Beschreibung der Ladungsverteilung mit Hilfe von ϱ. Bei elektrischen Leitern gibt es im statischen Fall geladene Atome nur innerhalb einer sehr dünnen Oberflächenschicht, deren Dicke wenige Atomabstände beträgt. Die Summe der Ladungen in einem Teilgebiet, dessen Abmessungen groß gegen die Atomabstände, aber makroskopisch gesehen klein sind, ist dann nicht mehr seinem Volumen proportional, sondern der Fläche ΔS, die es aus der Oberfläche ausschneidet. Dann gilt:

$$\sum_{\text{Alle Ladungen in } \Delta V} e_j = \sigma \Delta S\,. \tag{3; 4}$$

Der hier auftretende Faktor σ heißt Oberflächenladungsdichte.

Die Größen ϱ und σ sind im allgemeinen natürlich noch von dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}'$ zum Mittelpunkt des Volumens ΔV

bzw. des Oberflächenstücks ΔS abhängig. Sie können aber als stetige Funktionen angenommen werden. Für Ortsvektoren $\boldsymbol{r}$ zu Punkten außerhalb von K kann man also in (3; 2) erst über alle Ladungen in den einzelnen, kleinen Volumenelementen summieren und dabei alle $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j$ durch $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ ersetzen. Die verbleibenden Summen über die verschiedenen Teilvolumina kann man durch ein Volumenintegral bzw. Oberflächenintegral ersetzen. So erhält man

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad \text{mit}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\iiint\limits_{\boldsymbol{r}'} \frac{\varrho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV + \iint\limits_{\boldsymbol{r}'} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dS\right\}. \qquad (3;5)$$

Im Gebiet außerhalb von K ist diese Formel praktisch mit (3; 2) bzw. mit dem Coulombschen Gesetz identisch. Für das Innere von K gilt das nicht. Dort steigt das Potential nach (3; 2) in der Nähe jeder der Stellen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_j$ über alle Grenzen. In den Integralen (3; 5) ist der Integrand zwar bei $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ singulär; die Integrale konvergieren aber und haben für alle $\boldsymbol{r}$ endliche Werte, wenn ϱ und σ reguläre Funktionen sind. Da die elektrische Feldstärke im Innern der Körper grundsätzlich nicht mit Hilfe der Kraftwirkung auf Probeladungen definiert werden kann, ist die obige Formel für Punkte innerhalb der Materie als Definitionsgleichung für die elektrische Feldstärke anzusehen.

Wenn man unter $\varrho(\boldsymbol{r}')$ und $\sigma(\boldsymbol{r}')$ die oben erklärten Größen versteht, welche durch Summation über alle Ladungen in vielen benachbarten Atomen definiert werden, ist die durch (3; 5) definierte Größe $\boldsymbol{E}$ im Innern der Körper eine makroskopische Größe, bei welcher über die inneratomaren Unregelmäßigkeiten in gewisser Weise gemittelt wurde. Es trifft jedoch nicht zu, daß (3; 2) stattdessen die wirkliche Verteilung der elektrischen Feldstärke mit ihrem im Innern der Atome recht zackigen Verlauf liefert. Nach unseren heutigen Kenntnissen sind auch die einzelnen Elektronen und Protonen keine Punktladungen. Die Ladung jedes Elektrons in der Atomhülle und jedes Protons im Atomkern ist in Wirklichkeit über ein endliches Gebiet verteilt, und daher gilt (3; 2) im Innern der Atome nicht. Vielmehr kann die Ladungsverteilung im Innern der Atome und Atomkerne auch nur mit Hilfe einer Raumladungsdichte richtig beschrieben werden. Diese Raumladungsdichte wird in der Atomtheorie ebenfalls durch eine Gleichung der Form (3; 3) definiert, nur müssen die linearen Abmessungen von ΔV dann klein gegen den Atomdurchmesser bzw. Kerndurchmesser sein. Die Summe aller Ladungen in ΔV ist zu ersetzen durch den Mittelwert der Summe der Ladungen aller Teilchen, die bei wiederholten Messungen in ΔV angetroffen werden. Die Einzelmessung ergibt dafür jedes Mal null oder ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung. Der Mittelwert ist klein dagegen. Beim Einsetzen der so definierten Raumladung liefert (3; 5) (mit $\sigma = 0$) die im Sinne der Atomtheorie richtige Verteilung der elektrischen Feldstärke im Innern der Atome und Atomkerne. In diesem Sinne ist (3; 5) allgemeiner gültig als die Formel (3; 2), in welcher mit fiktiven Punktladungen gerechnet wird.

§ 4. Die Integralbeziehungen des elektrostatischen Feldes

In einem Vektorfeld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ gibt es zwei Arten von Integralen: *Linienintegrale* werden über Kurven erstreckt, denen eine positive Fortschreitungsrichtung bzw. ein in diese Richtung weisender Tangenteneinheitsvektor $\boldsymbol{t}$ eindeutig zugeordnet ist. Bei ihnen wird die Tangentialkomponente $E_t = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{E}$ über die Bogenlänge integriert. *Flächenintegrale* bildet man über Flächen, denen an jeder Stelle eindeutig eine Normalenrichtung zugeordnet ist bzw. ein Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$, der nirgends unstetig seinen Richtungssinn ändern darf. Integriert wird die Normalkomponente $E_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}$ über die Fläche.

Für das elektrostatische Feld gilt:

1. Das Linienintegral über eine geschlossene Kurve verschwindet:

$$\oint E_t ds = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \qquad (4; 1)$$

2. Das Flächenintegral über eine geschlossene Fläche, multipliziert mit ε_0, ist gleich der umschlossenen Ladung. Der Vektor $\boldsymbol{n}$ in Normalenrichtung muß dabei stets nach außen gerichtet sein.

$$\varepsilon_0 \oiint E_n dS = \text{Umschlossene Ladung}\,. \qquad (4;\,2)$$

Die erste Aussage ergibt sich unmittelbar aus dem Satz der Vektoranalysis, daß das Linienintegral über den Gradienten von φ gleich der Differenz der Werte von φ an Endpunkt und Anfangspunkt ist[1]). Wegen $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ ist also das Linienintegral vom Punkt P_1 zu Punkt P_2 vom Wege unabhängig und hat den Wert:

$$\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2)\,. \qquad (4;\,3)$$

Da nach (3; 2) das Potential φ eine eindeutige Funktion des Ortes ist, verschwindet das Integral für einen geschlossenen Weg, weil P_1 und P_2 zusammenfallen. Die Potentialdifferenz $\varphi(P_2) - \varphi(P_1)$ nennt man die Spannung zwischen den Punkten P_2 und P_1. Da im Vakuum die Kraft auf einen Probekörper mit der Ladung q gleich $q\boldsymbol{E}$ ist, ist das q-fache der Spannung gleich der Arbeit, die man zur Überführung des Probekörpers von P_1 nach P_2 aufbringen muß. Wenn sich beim Bewegen der Probeladung der Zustand des felderzeugenden Körpers nicht ändert, muß die Arbeit auf einem geschlossenen Wege wegen des Satzes von der Erhaltung der Energie verschwinden. Für das Vakuum ist also (4; 1) mit dem Energiesatz gleichwertig. Da es physikalisch unmöglich ist, eine Probeladung (langsam) durch Materie hindurchzubewegen, ohne darin Zustandsänderungen hervorzurufen, ist derselbe Schluß für das Innere der Materie nicht zulässig. Dort ist (4; 1) eine Folge der Definition von $\boldsymbol{E}$ mit Hilfe von (3; 5).

Zum Beweis von (4; 2) nutzen wir aus, daß nach (3; 1) jedes Feld (im Vakuum) als Summe der Felder von Punktladungen geschrieben werden kann. Wenn die Gültigkeit von (4; 2) für eine Punktladung bewiesen ist, folgt der Satz durch Addition über viele Punktladungen auch für

---

[1]) S. Valentiner, § 20.

eine beliebige Ladungsverteilung. Betrachten wir eine Punktladung im Ursprung, so gilt

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{4; 4}$$

Ist ϑ der Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und dem Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$ auf der betrachteten Integrationsfläche, so folgt wegen $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = r \cos\vartheta$

$$\varepsilon_0 \oint\!\!\oint E_n dS = \frac{e}{4\pi} \oint\!\!\oint \frac{\cos\vartheta}{r^2} dS. \tag{4; 5}$$

Nun ist der Winkel ϑ zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{n}$ gleich dem Winkel zwischen der Tangentialebene an die Integrationsfläche und der Kugel um den Ursprung durch den gleichen Punkt (vgl. Abb. 1). Also ist $dS \cos\vartheta$ für ein kleines Flächenstück

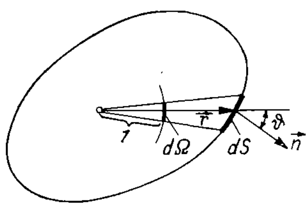

Abb. 1. Zur Berechnung des Flächenintegrals von E_n über eine geschlossene Fläche um eine Punktladung.

im Fall $|\vartheta| < \pi/2$ gleich der Fläche seiner Projektion auf diese Kugel; wenn ϑ zwischen $\pi/2$ und π liegt, ist es das negative davon. Da der Querschnitt eines sehr schmalen Kegels proportional dem Quadrat des Abstandes von seiner Spitze ist, ist $\frac{\cos\vartheta\, dS}{r^2}$ gleich der Fläche $d\Omega$, welche ein Kegel mit der Spitze im Ursprung durch den Rand des Flächenstückes dS aus der Einheitskugel ausschneidet. Zur Auswertung des Integrals muß man also jedenPunkt der geschlossenen Integrationsfläche mit dem Ursprung verbinden und die Fläche bestimmen, welche durch diese Zentralprojektion auf der Einheitskugel markiert ist. Auf