SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 436/436a

ALGEBRAISCHE KURVEN UND FLÄCHEN

von

DR. PHIL. WERNER BURAU
apl. Prof. an der Universität Hamburg

BAND II

ALGEBRAISCHE FLÄCHEN 3. GRADES UND RAUMKURVEN 3. UND 4. GRADES

Mit 17 Abbildungen

WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
BERLIN 1962

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende Bände:

Band I: Algebraische Kurven der Ebene
(Sammlung Göschen Bd. 435)

Band II: Algebraische Flächen 3. Grades und Raumkurven 3. und 4. Grades
(Sammlung Göschen Bd. 436/436a)

Die Bilder und Beispiele hat freundlicherweise Herr Oberstudiendirektor Dr. Arnold Baur, Lübeck, zur Verfügung gestellt.

 — Archiv-Nr. 7713629. — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin W 30. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel II. Algebraische Raumkurven

Literaturverzeichnis

Baker, Principles of geometry, vol. VI, Cambridge 1933
Basset, Geometry of surfaces, Cambridge 1911

Conforto, Le superficie razionali, Bologna 1939
Cremona, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung (übers. von Curtze), Berlin 1870

Enriques, Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche, Padova 1932

Godeaux, Géométrie algébrique I, II, Liège 1948—49
Gröbner, Moderne algebraische Geometrie, Wien-Innsbruck 1949

Herting, Über die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen 3. Ordnung I, II, Augsburg 1887—88

Jung, Algebraische Flächen, Hannover 1925

Picard-Simart, Théories des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, 2 vol., Paris 1897—1906

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes II (Analytische Geometrie der Kurven im Raume und der algebraischen Flächen), 3. Aufl., Leipzig 1880
Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie (übers. von Löffler), Leipzig 1921
Severi, Conferenze di geometria algebrica, Roma 1928

Staude, Anal. Geom. d. kub. Kegelschnitte, Leipzig und Berlin 1913

Wood, The twisted cubic, Cambridge 1913

Zariski, Algebraic surfaces (= Ergebnisse der Math. Bd. 3), Berlin 1935

Außerdem folgende Artikel aus Sammelwerken:

Berzolari, Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen, Pasc. Rep. d. Höheren Math. 2. Bd., Kap. 30—32
Berzolari, Flächen 3. Ordnung, Pasc. Rep. d. Höheren Math. 2. Bd., Kap. 34

Castelnuovo-Enriques, Grundeigenschaften algebraischer Flächen, Enz. d. Math. Wiss. III C 6 a

Meyer, Flächen 3. Ordnung, Enz. d. Math. Wiss. III C 9

Rohn-Berzolari, Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen, Enz. d. Math. Wiss. III_2 10

Staude, Die Raumkurven 3. und 4. Ordnung, Pasc. Rep. d. Höheren Math. 2. Bd., Kap. 29

Einleitung

Der vorliegende Band soll einiges Wichtige aus der Theorie der algebraischen Flächen 3. Ordnung, sowie der Raumkurven bis zur 4. Ordnung bringen. Sein Inhalt schließt sich daher an den Stoff von Band 1 (Ebene algebraische Kurven, Sa. Gö. 435) an, ist jedoch weitgehend unabhängig davon lesbar. Wegen der grundlegenden Voraussetzungen sei auf die dortige Einleitung verwiesen. Einige weitergehende, für die Theorie der Raumkurven benötigten algebraischen Begriffe finden sich in § 15 des vorliegenden Bandes zusammengestellt. In dieser Einleitung sei noch einiges aus der Geometrie vorangestellt, was später benötigt wird.

A. Involutionen und Korrespondenzen zwischen Geraden

Sind (x_0, x_1) projektive Koordinaten auf einer Geraden X_1, so nennt man bekanntlich Involution die Gesamtheit derjenigen Punktepaare auf X_1, deren Koordinaten die Beziehung

$$(1) \qquad F \equiv (y_0 a_{00} + y_1 b_{00}) x_0^2 + 2(y_0 a_{01} + y_1 b_{01}) x_0 x_1 + (y_0 a_{11} + y_1 b_{11}) x_1^2 = 0$$

bei jeweils nicht durchweg verschwindenden festen (a_{ij}) und (b_{ij}) und $(y_0, y_1) \neq (0,0)$ erfüllen. Wir fassen (y_0, y_1) als Koordinaten einer zweiten Geraden Y_1 auf und sagen: Durch (1) wird eine (2,1)-Korrespondenz $\varkappa$ zwischen den Punkten von X_1 und Y_1 definiert. Dabei korrespondiert das Paar von Punkten

$$(X_0, Y_0) \text{ mit } X_0 < X_1,\ Y_0 < Y_1$$

zueinander, wenn ihre Koordinaten (1) erfüllen. Im allgemeinen werden 2 Punkte auf X_1 zu je einem Punkt $Y_0 < Y_1$

korrespondieren, und die Gesamtheit der so erklärten Paare auf X_1 definiert die Involution. Die Punkte eines Paares derselben fallen genau dann zusammen, wenn für die entsprechenden Punkte $Y_0 < Y_1$ gilt:

$$(2) \qquad (a_{01}y_0 + b_{01}y_1)^2 - (a_{00}y_0 + b_{00}y_1)(a_{11}y_0 + b_{11}y_1) = 0.$$

Man spricht von einer regulären Korrespondenz und zugehöriger Involution auf X_1, wenn die linke Seite von (2) nicht identisch in den y_i verschwindet und 2 verschiedene Wurzeln hat, d. h. wenn

$$(3) \qquad \begin{aligned} D = {} & (a_{01}^2 - a_{00}a_{11})(b_{01}^2 - b_{00}b_{11}) \\ & - (a_{01}b_{01} - a_{00}b_{11} - a_{11}b_{00})^2 \neq 0 \end{aligned}$$

gilt. Der reguläre Fall liege vor, und wir wählen auf Y_1 solche Koordinaten, daß (2) die Wurzeln (1,0) und (0,1) hat und auf X_1 solche, daß die entsprechenden sog. Doppelpunkte der Involution zu (1,0) und (0,1) werden. Dann hat (1) die Gestalt:

$$(4) \qquad \alpha x_0^2 y_0 + \beta x_1^2 y_1 = 0 \qquad (\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0).$$

Durch weitere Normierung, d. h. geeignete Wahl des Einheitspunktes auf Y_1 ergibt sich:

Satz 1. Alle regulären (2,1)-Korrespondenzen zwischen den Geraden X_1 und Y_1 können in geeigneten Koordinaten durch:

$$(5) \qquad x_0^2 y_0 - x_1^2 y_1 = 0$$

beschrieben werden.

Der Ausdruck D in (3) ist nun, wie man leicht ausrechnet, gleichzeitig die Resultante der Polynome

$$A \equiv a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2,$$
$$B \equiv b_{00}x_0^2 + 2b_{01}x_0x_1 + b_{11}x_1^2.$$

Das Verschwinden von D ist also gleichwertig damit, daß A und B einen Faktor $\alpha x_0 + \beta x_1$ gemein haben, den dann auch die Form F in (1) abspaltet; das heißt bei $D = 0$ ist F nicht irreduzibel. Zerfällt umgekehrt F im komplexen Zahlkörper K, so muß F notwendig das Produkt einer Form $\alpha x_0 + \beta x_1$ mit einer Bilinearform f sein. Je nachdem, ob f irreduzibel ist oder auch zerfällt, haben wir die Möglichkeiten:

a) $$F \equiv (\alpha x_0 + \beta x_1)(c_{00}x_0y_0 + c_{01}x_0y_1 + c_{10}x_1y_0 + c_{11}x_1y_1)$$
$$\text{mit } c_{00}c_{11} - c_{01}c_{10} \neq 0,$$

b) $$F \equiv (c_{00}x_{01}^2 + 2c_{01}\,x_0x_1 + c_{11}x_1^2)\,(d_0y_0 + d_1y_1),$$

wobei in b) noch die Unterfälle:

b') $c_{00}c_{11} - c_{01}^2 \neq 0,$ b'') $c_{00}c_{11} - c_{01}^2 = 0$

zu unterscheiden sind. Im Fall a) wird durch Nullsetzen des zweiten Faktors eine reguläre Kollineation ϱ zwischen X_1 und Y_1 beschrieben. Wir wählen die Koordinaten so, daß ϱ durch $x_0y_0 - x_1y_1 = 0$ definiert wird und x_0 der Linearfaktor von F ist. Dies ergibt im Fall a) folgende Normalform von F:

(6) $$F = x_0(x_0y_0 - x_1y_1).$$

Ebenso ergeben sich in den Fällen b') und b'') für F die Normalformen:

(7') $F = x_0x_1y_0,$ (7'') $F = x_0^2y_0.$

Wir haben somit als Ergänzung von Satz 1 den

Satz 2. Es gibt 3 Typen nicht-regulärer (2,1)-Korrespondenzen zwischen den Geraden X_1 und Y_1. Diese werden in geeigneten Koordinaten je auf X_1 und Y_1 durch Nullsetzen einer der 3 Formen (6), (7') oder (7'') beschrieben.

Der Begriff der (2,1)-Korrespondenz zwischen X_1 und Y_1 verallgemeinert sich unmittelbar zu dem der (p, q)-Korrespondenz, indem man für F eine Form nimmt, die in den x_i und y_i je vom Grade p und q ist. Diese sog. doppeltbinären Formen und dadurch definierten (p, q)-Korrespondenzen sind besonders für das Studium algebraischer Kurven auf Quadriken wichtig. Weitere Einzelheiten darüber enthält der § 20.

B. Realitätstypen von Ebenen und Geraden des komplexen P_3

Im vorliegenden Band sollen nur geometrische Gebilde betrachtet werden, die dem kompexen projektiven Raum P_3 angehören. Führt man in diesem P_3 projektive Koordinaten ein, so ist damit von selber erklärt, was konjugiert komplexe Punkte $\overline{P}_0$, P_0 sind. Die Koordinaten von $\overline{P}_0$ sind konjugiert komplex zu denen von P_0. Damit haben die Begriffe „konjugiert komplexe Ebenen und Geraden" einen Sinn. Je nachdem, ob für die Ebene P_2

$$P_2 = \overline{P}_2 \text{ oder } P_2 \frown \overline{P}_2 = P_1$$

gilt, heißt P_2 reell oder komplex. Unter den Geraden P_1 sind jedoch 3 Sorten ihrem Realitätsverhalten nach zu unterscheiden:

a) Reelle Geraden mit $P_1 = \overline{P}_1$,

b) Niederimaginäre Geraden mit einem reellen Punkt $P_0 = P_1 \frown \overline{P}_1$,

c) Hochimaginäre Geraden mit $P_3 = P_1 \smile \overline{P}_1$,

die keinen reellen Punkt besitzen.

C. Nullkorrelationen und Polaritäten des P_3

Durch Nullsetzen einer Bilinearform:

$$\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij} x_i y_j = 0 \tag{1}$$

definiert man eine lineare Punktkorrespondenz des P_3. Dabei korrespondieren Punkte, deren Koordinaten (1) erfüllen. Im regulären Fall, d. h. wenn die Determinante der Matrix (a_{ij}) nicht verschwindet, liegen die zu einem Punkt $P_0 < P_3$ korrespondierenden Punkte auf einer Ebene P_2'. Die Beziehung zwischen P_0 und P_2' ist dann eine reguläre Korrelation. Diese ist genau dann involutorisch, wenn die Matrix (a_{ij}) entweder symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist. Im ersten Fall bilden die mit sich selber korrespondierenden Punkte eine Quadrik Q_2, von der als algebraische Fläche in § 1 sowie im folgenden Abschnitt D noch die Rede sein wird. Im schiefsymmetrischen Fall korrespondiert jeder Punkt des P_3 mit sich selber, und man spricht von einer sog. Nullkorrelation[1]).

D. Einiges aus der Liniengeometrie des $\mathbf{P_3}$

Sind $A_0(a_0, a_1, a_2, a_3)$ und B_0 (b_0, b_1, b_2, b_3) zwei verschiedene Punkte des P_3, so nennt man die aus der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{pmatrix}$$

gebildeten 6 Determinanten

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} a_i, & a_j \\ b_i, & b_j \end{bmatrix} \quad (0 \leqq i < j \leqq 3) \tag{9}$$

die Plückerschen Geradenkoordinaten der Verbindung $P_1 = A_0 \cup B_0$. Diese Koordinaten p_{ij} erweisen sich als unabhängig von der Art, wie P_1 durch 2 Punkte aufgespannt wird. Es gilt die Beziehung

$$p_{01}p_{23} + p_{03}p_{12} - p_{02}p_{13} = 0, \tag{10}$$

und man kann umgekehrt zeigen, daß jedes System von 6 nicht durchweg verschwindenden Zahlen p_{ij}, welche (10) erfüllen, Koordinaten einer Geraden des P_3 sind (vgl.[1]) Kap. 66). Man faßt nun die Größen

$$(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}) \tag{11}$$

zweckmäßig als Koordinaten eines Punktes P_0 im projektiven Raum P_5 von 5 Dimensionen auf und definiert durch (10) innerhalb dieses P_5 die Punkte der sog. Plückerquadrik Q_4. Die Liniengeometrie des P_3, bei der die Gerade das Grundelement ist, wird somit gleichwertig zur Geometrie der Punkte auf dieser Q_4.

---

[1]) Vgl. W. Burau, Mehrdimensionale projektive u. höhere Geometrie, Berlin 1961.

Wir benötigen von den hiermit angerührten mehrdimensionalen Dingen im vorliegenden Band für Satz 3 nur die einfache Tatsache, daß durch

$$p_{01} = p_{23} = 0$$

ein $P_3 < P_5$ definiert wird, der die Plückersche Q_4 in einer regulären Quadrik Q_2 schneidet.

Satz 3. Gegeben seien die beiden windschiefen Geraden a_1, b_1 des P_3. Dann wird die Gesamtheit $L^{a,b}$ aller gleichzeitig a_1 und b_1 schneidenden Geraden auf die der Punkte einer regulären Quadrik $Q_2 < Q_4$ abgebildet.

Beweis: a_1 und b_1 mögen in geeigneten Koordinaten durch

$$a_1(x_2 = x_3 = 0),\ b_1(x_0 = x_1 = 0) \tag{12}$$

definiert sein. Die Koordinaten einer a_1 und b_1 betreffenden Geraden P_1 ergeben sich dann aus der Matrix

$$\begin{pmatrix} u_0, & u_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & v_0, & v_1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

zu

$$p_{01} = p_{23} = 0,\ p_{02} = u_0 v_0,\ p_{03} = u_0 v_1,\ p_{12} = u_1 v_0,\ p_{13} = u_1 v_1, \tag{14}$$

wobei die (u_0, u_1) und (v_0, v_1) beliebige Paare nicht gleichzeitig verschwindender Zahlen sind. (14) ist aber die Parameterdarstellung einer regulären $Q_2^{a,b}$, die sich als Schnitt von Q_4 mit dem durch $p_{01} = p_{23} = 0$ definierten P_3 ergibt.

Man nennt die soeben erklärte Gesamtheit $L^{a,b}$ von Geraden des P_3 auch allgemeine lineare Kongruenz. Eine wesentliche Eigenschaft von $L^{a,b}$ ist folgende: Durch jeden weder auf a_1 noch auf b_1 liegenden Punkt geht genau eine Gerade von $L^{a,b}$ und dual dazu: In jeder Ebene, die weder a_1 noch b_1 enthält, liegt genau eine Gerade von $L^{a,b}$.

Hieraus ergibt sich sofort der

Satz 4. Gegeben seien die allgemeine lineare Geradenkongruenz $L^{a,b}$ sowie die weder durch a_1 noch b_1 gehende Ebene C_2' mit

$$C_2' \frown a_1 = C_0^a,\ C_2' \frown b_1 = C_0^b,\ C_1' = C_0^a \smile C_0^b. \tag{15}$$

Ordnet man Punkte $P_0' < C_2'$ und Geraden $P_1 < L^{a,b}$ dann einander zu, wenn sie inzidieren, so ergibt das eine im allgemeinen eineindeutige Beziehung π zwischen den $P_0' < C_2'$ und $P_1 < L^{a,b}$ mit folgenden Ausnahmen: 1. Jeder Punkt von C_1' ist C_1 zugeordnet, 2. C_0^a und C_0^b sind je allen ∞^1 Kongruenzgeraden durch C_0^a und C_0^b zugeordnet.

Zur rechnerischen Erfassung dieser Abbildung π nehmen wir an, a_1 und b_1 seien durch (12) und b_2' durch

$$x_3 - x_0 = 0 \tag{16}$$

beschrieben. Die Ausnahmegerade $C_1' < C_2'$ hat dann die Gleichungen

$$x_3 = x_0 = 0 \tag{17}$$

und damit die Geradenkoordinaten

$$p_{12} = 1,\ \text{alle anderen}\ p_{ij} = 0. \tag{18}$$

Der Punkt $P_0' < C_2'$ habe die Koordinaten

$$P_0'(x_0, x_1, x_2, x_0) \tag{19}$$

mit nicht gleichzeitig verschwindenden x_0, x_1 und x_0, x_2, d. h. es sei $P_0' \notin a_1$, $P_0' \notin b_1$. Dann errechnen sich die Plückerkoordinaten p_{ij} der P_0 enthaltenden Geraden $P_1 < L^{a,b}$ zu

$$\begin{aligned} p_{01} = p_{23} = 0,\ p_{02} = x_0x_2,\ p_{03} = x_0^2, \\ p_{12} = x_1x_2,\ p_{13} = x_0x_1. \end{aligned} \tag{20}$$

Durch (20) wird aber auch die Projektion der Quadrik $Q_2^{a,b}$ des Satzes 3 aus dem Punkt mit den Koordinaten (18) auf eine diesen Punkt nicht enthaltende Ebene beschrieben, wie man sofort ausrechnet. Von dieser sog. stereographischen Projektion wird noch in § 1 die Rede sein.

Kap. 1. Algebraische Flächen 2. und 3. Grades

§ 1. Grundeigenschaften der Quadriken des P_3 vom Standpunkt der algebraischen Geometrie

Nächst den Ebenen sind die Quadriken die einfachsten algebraischen Flächen des P_3. Sie finden sich in vielen Lehrbüchern der analytischen Geometrie behandelt (vgl. z. B. Grotemeyer, Sa. Gö. 65/65a). Wir brauchen im folgenden daher nur kurz das zusammenzustellen, was von den Eigenschaften der Quadriken im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen von Wichtigkeit ist. Quadriken sollen dabei mit Q_2 bezeichnet werden. Ihre Gleichung in allgemeinen projektiven Koordinaten laute:

$$\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0 . \tag{1}$$

Wir heben folgende Punkte aus der Quadrikenlehre besonders heraus:

1. Die einzige komplex-projektive Invariante der Quadriken ist der Rang der Matrix (a_{ij}) in (1). Ist dieser Rang 4, so besitzt Q_2 keine singulären Punkte. Dann hat jeder Punkt von Q_2 eine Tangentialebene. Die Beziehung jedes Punktes $P_0 < Q_2$ auf seine Tangentialebene P_2' läßt sich zu einer wohlbestimmten, nicht ausgearteten, involutorischen Korrelation $\varkappa$ des gesamten P_3 in sich fortsetzen. $\varkappa$ ist die bekannte Polarität bezüglich Q_2 und führt Q_2 als Punktmenge in das mit Q_2 verbundene Dualgebilde $\hat{Q}_2$ aller Tangentialebenen von Q_2 über. Die nicht entarteten Quadriken Q_2 sind demnach von der Ordnung und Klasse 2. Das bedeutet: Eine Gerade P_1 schneidet Q_2 entweder in 2 verschiedenen Punkten oder berührt sie in einem Punkt oder liegt ganz darauf. Dual da-

zu: Durch P_1 gehen entweder genau 2 Tangentialebenen von Q_2 oder nur eine, oder jede Ebene durch P_1 ist Tangentialebene.

2. Verlangt man, daß die Quadrik Q_2 mindestens einen singulären Punkt besitze, so hat man gemäß Band I, Einl. A zu fordern, daß das System

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \text{ d. h. } \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{2}$$

eine nicht triviale Lösung besitze. Ist der Rang von (a_{ij}) gleich 3, so ergeben sich als Lösung von (2) die Koordinaten eines Punktes S_0, und Q_2 ist Kegel mit der Spitze S_0. Das bedeutet, A_2 besteht aus lauter Geraden durch S_0, und diese Geraden erhält man so: In einer gewissen Ebene P_2, die S_0 nicht enthält, gebe man einen nicht entarteten Kegelschnitt Q_1 vor und verbinde alle Punkte von Q_1 mit S_0. In S_0 besitzt Q_2 keine Tangentialebene, wohl aber in jedem Punkt $P_0 \neq S_0$; alle diese Tangentialebenen enthalten S_0. Ihre Gesamtheit ist das Dualgebilde zu den Punkten eines Kegelschnitts, wenn man diesen als Teilmenge des P_3 auffaßt.

3. Eine Quadrik Q_2 muß zum Unterschied vom Kegelschnitt erst dann zerfallen, wenn sie mehr als einen singulären Punkt enthält. Mit 2 Punkten S_0 und S_0' ist auch die ganze Gerade $S_1 = S_0 \cup S_0'$ für Q_2 singulär, und Q_2 zerfällt in 2 verschiedene Ebenen durch S_1, wenn Q_2 außerhalb von S_1 keine singulären Punkte besitzt. Die Matrix (a_{ij}) in (1) hat jetzt den Rang 2.

4. Die Punkte eines quadratischen Kegels mit der Spitze S_0 verteilen sich auf die der Punkte einer gewissen Menge von Geraden. Das Gleiche gilt aber auch für jede nicht entartete Q_2. Es ist bekannt, daß eine solche Q_2 durch 2 Scharen von Geraden erzeugt wird. Man kann auch leicht zeigen, daß es keine andere Fläche außer den Quadriken gibt, die gleichzeitig 2 Scharen von erzeugenden Geraden besitzt. Man braucht dazu bekanntlich nur die eine Schar von Erzeugenden als Gesamtheit aller Geraden zu kennzeichnen, die 3 Geraden der anderen Schar schneiden. Unter den Flächen

3. und 4. Grades werden wir andere Regelflächen, d. h. durch Geraden erzeugte Flächen kennen lernen. Diese werden dann natürlich nur eine Geradenschar besitzen.

5. Die nicht-entarteten Quadriken sind selbstdual, d. h. die Koordinaten ihrer Tangentialebenen erfüllen gleichfalls eine quadratische Gleichung vom Rang 4. Den Kegeln, d. h. den Quadriken vom Rang 3, steht dagegen ein anderes Gebilde dual gegenüber: Die Gesamtheit aller Ebenen des P_3 durch die Tangenten eines in der Ebene S_2 gelegenen nicht entarteten Kegelschnitts.

6. In geeigneten Koordinaten kann man die Gleichung einer nicht entarteten Quadrik Q_2 bekanntlich in der Form

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0 \tag{3}$$

schreiben. Hieraus entnimmt man für Q_2 eine Parameterdarstellung in der Gestalt

$$x_0 = u_0 v_0, \; x_1 = u_0 v_1, \; x_2 = u_1 v_0, \; x_3 = u_1 v_1 . \tag{4}$$

Durch (4) wird eine eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten $P_0 < Q_2$ und den Paaren

$$U_0 < U_1, \; V_0 < V_1 \tag{5}$$

hergestellt. Dabei durchlaufen U_0 und V_0 je unabhängig voneinander die Punkte der Geraden U_1 und V_1. Bei Festhalten je von U_0 oder V_0 in (5) erhält man die Punkte der erzeugenden Geraden je der einen oder anderen Schar auf Q_2.

7. Man könnte zeigen, daß es aus topologischen Gründen unmöglich ist, die Punkte einer regulären Q_2 ausnahmslos eineindeutig auf die Punkte einer projektiven Ebene P_2 zu beziehen. Doch ist dies möglich, wenn man gewisse Ausnahmen dieser Beziehung zuläßt. Dazu braucht man nur mittels der bekannten stereographischen Projektion Q_2 von einem Punkt $Z_0 < Q_2$ auf eine Z_0 nicht enthaltende Ebene Y_2 zu projizieren. Q_2 werde durch (3) beschrieben; ferner sei Z_0 der Punkt (0, 0, 0,1) und Y_2 die Ebene $x_3 = 0$, deren Koordinaten auch mit (y_i) bezeichnet seien. Dann wird auf Grund einfacher Rechnung die Projektion von Q_2 aus Z_0 auf Y_2 durch die Formeln:

$$(6) \qquad x_0 = y_0^2,\; x_1 = y_0 y_1,\; x_2 = y_0 y_2,\; x_3 = y_1 y_2$$

beschrieben. Hieraus entnehmen wir: Punkte $Y_0 < Y_2$, die nicht auf der Geraden $y_0 = 0$ liegen, und Punkte $P_0 < Q_2$, die nicht in der Ebene $x_0 = 0$ liegen, entsprechen sich eineindeutig. Die von Z_0 verschiedenen Punkte der auf Q_2 liegenden beiden Geraden

$$x_0 = x_1 = 0 \text{ und } x_0 = x_2 = 0$$

werden bei der Projektion je auf die Punkte (0, 0, 1) und (0, 1, 0) abgebildet. Zur Vervollständigung der Beziehung ordnet man noch Z_0 jedem Punkt der Geraden $y_0 = 0$ zu.

Wegen der Parameterdarstellung (6) heißen die Quadriken auch rationale Flächen. Weiteren rationalen Flächen werden wir in den folgenden Abschnitten begegnen. Sie sind das Analogon zu den aus Band I bekannten rationalen Kurven. Wie wir es am Beispiel der Quadrik sahen, braucht dabei die Parameterdarstellung nur eine „im allgemeinen" eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten der betr. Fläche F_2 und der Ebene Y_2 herzustellen. Dies bedeutet, die Eineindeutigkeit kann in den Punkten gewisser Kurven je auf Y_2 und Q_2 gestört sein. Diese Ausnahmen der Beziehung lassen sich bei rationalen Flächen im allgemeinen nicht vermeiden, während bei rationalen Kurven die Beziehung zwischen den Stellen der Kurven und den Punkten der Geraden Y_1 stets eineindeutig ohne Ausnahme ist.

§ 2. Einige Grundeigenschaften algebraischer Flächen des P_3

Bevor wir uns später speziellen Flächen zuwenden, sollen in diesem und dem folgenden Abschnitt einige allgemeine Tatsachen über Flächen und ihre Dualgebilde zusammengestellt werden. Einige Dinge davon sind naheliegende Verallgemeinerungen von Eigenschaften ebener Kurven, wie sie im Bd. I, § 12 zusammengestellt wurden oder von den Quadriken her im einfachsten Fall bekannt sind. Auch beziehen wir uns auf einige algebraische Grundtatsachen von Bd. I, Einleitung A.

Eine algebraische Fläche F_n vom Grade n ist das Nullstellengebilde einer quaternären Form n-ten Grades

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

mit Koeffizienten aus unserem Grundkörper K. Ist f in K nicht in Formen niederen Grades $\geqq 1$ zerfällbar, so heißt F_n irreduzibel. Unsere späteren Beispiele für $n = 3$ und $n = 4$ werden selbstverständlich irreduzible Flächen sein. Wie bei ebenen Kurven der Ordnung n ist dann n die Höchstzahl von Punkten, die eine nicht ganz auf F_n liegende Gerade mit F_n gemein hat. Diese Höchstzahl muß auch erreicht werden, außer wenn F_n reduzibel ist und mehrfach zählende Bestandteile hat, d. h. wenn f im Körper K in ein Produkt von Formen niederer Grade zerfällt, wovon mindestens eine mehrfach auftritt.

Eine beliebige Ebene P_2, die kein Teil von F_n ist, schneidet F_n in einer ebenen Kurve n-ten Grades k_n. Jedoch kann eine solche k_n auch bei irreduzibler F_n zerfallen, wie man bereits vom Fall der Quadriken ($n = 2$) her weiß.

Der Punkt $P_0 < F_n$ heißt von der Vielfachheit s, wenn für die Koordinaten von P_0 alle Ableitungen von f bis zur s-1-ten, aber nicht alle s-ten Ableitungen verschwinden. Die Punkte der Vielfachheit $s = 1$ heißen regulär, die mit $s > 1$ singulär. Die irreduziblen Kurven der Ebene besitzen höchstens endlich viele singuläre Punkte. Bei den Flächen wird man dagegen auch damit rechnen müssen, daß sie unendlich viele singuläre Punkte besitzen, die dann eine sog. singuläre Kurve bilden. Was eine Kurve des P_3 ist, werden wir erst im Kap. II allgemein definieren. Doch werden die späteren Beispiele singulärer Kurven sich auf Geraden und Kegelschnitte beschränken. So hat ein Ebenenpaar die Schnittgerade beider Ebenen als singuläre Kurve; bei einer Fläche 3. Grades, die in eine Ebene P_2 und eine Quadrik Q_2 zerfällt, ist ersichtlich der Schnittkegelschnitt von P_2 und Q_2 singulär. Beispiele irreduzibler Flächen F_n mit singulären Kurven werden wir erst bei $n = 3$ finden.

In einem regulären Punkt $P_0(p_0, p_1, p_2, p_3)$ erklärt man als Tangentialebene $T_2(P_0)$ die Ebene mit der Gleichung

(2) $$\sum_{i=0}^{3} x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p_j) = 0\,.$$

Gemäß Band I, Einl. A, schneiden alle Geraden durch P_0, die in $T_2(P_0)$ liegen, F_n in P_0 mit einer Vielfachheit $\geqq 2$, und umgekehrt liegen alle Geraden durch P_0 mit dieser Eigenschaft auch in $T_2(P_0)$. Man spricht auch von Tangenten durch einen singulären Punkt P_0. Ist $P_0 < F_n$ ein Punkt von der Vielfachheit s, so nennt man Tangenten in P_0 an F_n solche Geraden, die F_n in P_0 mindestens in der Vielfachheit $s+1$ schneiden. Die Punkte aller so erklärten Tangenten bilden den Tangentialkegel mit der Spitze P_0. Hat P_0 die Koordinaten $(1, 0, 0, 0)$, so lautet die Gleichung von F_n:

(3) $$f = x_0^{n-s} a_s(x_1, x_2, x_3) + \ldots + x_0 a_{n-1}(x_1, x_2, x_3) + a_n(x_1, x_2, x_3) = 0\,,$$

worin die a_j Formen vom Indexgrade sind. Durch

(4) $$a_s(x_1, x_2, x_3) = 0$$

wird dann ersichtlich die Gleichung des Tangentialkegels an F_n mit der Spitze P_0 beschrieben. Bei $s = 1$ ist dies die Tangentialebene $T_2(P_0)$.

Eine sehr nützliche Kennzeichnung der Tangentialebenen algebraischer Flächen enthält der folgende

Satz 1. P_0 sei ein regulärer Punkt der Fläche F_n. Dann schneidet die Tangentialebene $T_2(P_0)$ die Fläche in einer Kurve, die in P_0 singulär ist, und umgekehrt ist die Ebene T_2 dann Tangentialebene in P_0, wenn P_0 für F_n regulär, für die Schnittkurve
$$T_2 \frown F_n$$
jedoch singulär ist.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei ein Koordinatensystem angenommen mit P_0 als $(1, 0, 0, 0)$ und $x_3 = 0$ als Tangentialebene $T_2(P_0)$. Dann lautet die Gleichung von F_n:

(4) $$f = x_3 x_0^{n-1} + a_2(x_1, x_2, x_3) x_0^{n-2} + \ldots + a_n(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Aus (4) folgt sofort der erste Teil des Satzes. Der zweite Teil ist dann bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß jede von $x_3 = 0$ verschiedene Ebene A_2 durch P_0 die Fläche F_n in einer Kurve schneidet, die in P_0 regulär ist. A_2 habe die Gleichung:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0. \tag{5}$$

Wegen $T_2(P_0) \neq A_2$ darf in (5) nicht $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sein. Es sei

$$\alpha_1 \neq 0, \tag{6}$$

so daß man (5) in der Form

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 \tag{7}$$

schreiben kann. Bei Einsatz von (7) in (4) ergibt sich die durch

$$x_3 x_0^{n-1} + a_2(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, x_2, x_3) x_0^{n-2} + \ldots = 0 \tag{8}$$

dargestellte Kurve der (x_0, x_2, x_3)-Ebene. Diese ist ersichtlich im Punkt $(1, 0, 0)$ regulär. Analog schließt man, wenn (5) nach x_2 statt nach x_1 auflösbar ist.

Durch Verbindung der Punkte einer algebraischen Kurve k_n der Ebene Y_2 mit einem außerhalb von Y_2 gelegenen Punkt Z_0 erzeugt man einen sogenannten Kegel, wie er oben als Tangentialkegel in einem singulären Punkt einer Fläche schon aufgetreten war. Besitzt eine Fläche F_n im Punkt P_0 $(1, 0, 0, 0)$ eine Singularität von der Vielfachheit n, so reduziert sich ihre Gleichung (3) auf

$$a_n(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \tag{9}$$

und umgekehrt hat die Gleichung jedes Kegels mit der Spitze $(1, 0, 0, 0)$ eine Gleichung der Form (9), so daß wir unmittelbar folgenden Satz haben:

Satz 2. Die Kegel sind als solche Flächen n-ten Grades des P_3 gekennzeichnet, die einen singulären Punkt der Vielfachheit n besitzen.

Wie bei den Kurven nennt man weiterhin Monoide alle algebraischen Flächen F_n vom Grade n mit einem Punkt der