SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 1156/1156a

DIE KOMPLEXE BERECHNUNG VON WECHSELSTROMSCHALTUNGEN

von

DR. HANS HEINRICH MEINKE
o. Professor an der Technischen Hochschule München

Dritte, neubearbeitete Auflage

Mit 126 Abbildungen

WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
BERLIN 1965

Satz und Druck: Mercedes-Druck, Berlin 61. — Printed in Germany.

Inhalt

I. Grundlagen

Vorausgesetzt werden einfache Kenntnisse über trigonometrische Funktionen und komplexe Zahlen. Wenn auch gelegentlich Formeln und Begriffe der Differentialrechnung vorkommen, so sind diese jedoch keine unumgängliche Bedingung für das Verständnis des Buches. Die Grundbegriffe der Schwingungslehre und des Wechselstroms sollten ebenfalls bekannt sein. Gewisse wichtige Formeln und Begriffe werden in den folgenden Abschnitten, teilweise ohne Beweis, nochmals zusammengestellt.

I,1. Die Eulersche Gleichung

Im Gegensatz zu der im mathematischen Schrifttum üblichen Schreibweise i bezeichnet man in der Elektrotechnik die Größe $\sqrt{-1}$ mit j, weil der Buchstabe i zur Bezeichnung der Ströme verwendet wird.

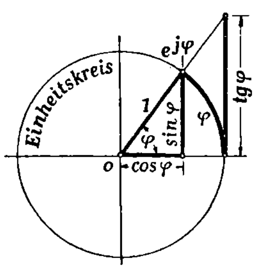

Abb. 1. Funktionen am Einheitskreis (Radius 1)

$$\mathrm{j} = \sqrt{-1};\ \mathrm{j}^2 = -1;\ \frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}. \quad (1)$$

Zu beachten ist ferner, daß die im folgenden benutzten Winkelgrößen nicht in Winkelgraden, sondern im *Bogenmaß* angegeben werden. Ein Winkel φ wird also durch die Länge φ des Bogens gemessen, den er als Zentrumswinkel aus dem Einheitskreis (Radius 1) ausschneidet (Abb. 1):

$$(\varphi \text{ im Bogenmaß}) = \frac{\pi}{180}\ (\varphi \text{ in Winkelgraden}).$$

Vergleichsweise ist $360° = 2\pi$, $180° = \pi$, $90° = \pi/2$, $45° = \pi/4$. Das Vorzeichen von φ wird nach allgemeiner Vereinbarung positiv, wenn φ wie in Abb. 1 von der waagerechten positiven Achse ausgehend gegen den Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis liegt. Abb. 1 zeigt weiter, wie man am Einheitskreis die Größen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und $\mathrm{tg}\,\varphi$ findet.

Die Funktion e^x: Sie wird in der Mathematik definiert durch die unendliche Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots. \tag{2}$$

Das Zeichen $n!$ bedeutet dabei das Produkt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n. \tag{3}$$

Eine solche konvergente, unendliche Reihe sagt aus, daß man bei gegebenem x die Zahl e^x bereits durch endlich viele Glieder mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen kann. Je größer x, desto mehr Glieder muß man berechnen. Die e-Funktion hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß ihr Differentialquotient wieder gleich der Ausgangsfunktion ist:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x. \tag{4}$$

Diese Tatsache, die sich leicht durch gliedweises Differenzieren der Reihe (2) beweisen läßt, ist der tiefere Grund für das häufige Auftreten dieser Funktion bei physikalischen und technischen Problemen. Die Zahl e ergibt sich aus (2) für $x = 1$ als $e = 2{,}72\ldots$ Wichtig ist die Anwendbarkeit der Potenzregeln (ohne Beweis):

$$e^{(x_1 + x_2)} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}. \tag{5}$$

Die Funktion $e^{j\varphi}$: Die Funktion (2) ist zunächst für ein reelles x gedacht. Man kann natürlich rein formal auch ein imaginäres $x = j\varphi$ in (2) einsetzen und untersuchen, was eine solche Funktion darstellt. Man beachte, daß nach (1) stets $j^2 = -1$ ist, und fasse jeweils die entstandenen reellen und imaginären Glieder für sich zusammen:

$$e^{j\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots\right)$$
$$+ j\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots\right). \tag{6}$$

Die erste Klammer ist die bekannte unendliche Reihe für die Funktion

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots, \tag{7}$$

die zweite Klammer die Reihe für die Funktion

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots. \tag{8}$$

Durch Einsetzen dieser Funktionen erhält man die *Eulersche Gleichung*

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi\,. \tag{9}$$

Die neu definierte Funktion $e^{j\varphi}$ ist also eine komplexe Zahl mit dem Realteil $\cos\varphi$ und dem Imaginärteil $\sin\varphi$. Insbesondere ist

$$e^{j\pi/2} = j\,; \quad e^{j\pi} = -1\,; \quad e^{-j\pi/2} = -j\,. \tag{10}$$

Diese Formeln ergeben sich aus (9), wenn man für φ die betreffenden Werte in die cos- und sin-Funktion einsetzt. Näheres über die komplexe Zahl $e^{j\varphi}$ in I,2.

Die außerordentliche Vereinfachung, die die Verwendung dieser komplexen Funktion bei zahlreichen Rechnungen bewirkt und die der wesentliche Grund für die Einführung des komplexen Rechenverfahrens ist, erkennt man schon an folgendem einfachen Beispiel. Man setzt in (9) $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$:

$$e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2)\,. \tag{11}$$

Nach (5) ist aber auch

$$\begin{aligned} e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{j\varphi_1}\cdot e^{j\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)\;(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) \\ &= (\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) \\ &\quad + j\,(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Realteile müssen in beiden Formeln gleich sein. Daraus folgt das Additionstheorem

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2\,. \tag{13}$$

Aus der Gleichheit der beiden Imaginärteile ergibt sich die bekannte Formel

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 . \qquad (14)$$

Man vergleiche mit dieser einfachen Ableitung den erheblichen Aufwand, wenn man diese Formeln in üblicher Weise *ohne* Verwendung des komplexen Rechnens gewinnen will. Wer die Bedeutung der komplexen Methode voll erfassen will, vergleiche auch bei den im folgenden behandelten Aufgaben immer wieder den einfachen komplexen Weg mit den komplizierten Formelgebilden, die entstehen, wenn man mit reellen trigonometrischen Funktionen rechnet. Bei umfangreicheren Wechselstromschaltungen macht die komplexe Rechnung das quantitative Arbeiten überhaupt erst *möglich*, weil die reelle Rechnung wegen ihres Umfangs nicht mehr beherrscht werden kann.

Wichtig sind noch folgende Formeln:

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi . \qquad (15)$$

Man erhält diese Formel aus (9), wenn man φ durch $(-\varphi)$ ersetzt und beachtet, daß $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\sin\varphi = -\sin\varphi$ ist.

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right) . \qquad (16)$$

Zum Beiweis dieser Formel addiere man (9) und (15).

$$j\sin\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) . \qquad (17)$$

Zum Beweis dieser Formel subtrahiere man (15) von (9).

I,2. Komplexe Zahlen

Die Darstellung komplexer Zahlen: In der deutschen elektrotechnischen Literatur ist es nach dem Normblatt DIN 5483 neuerdings weitgehend üblich, komplexe Größen durch Unterstreichen zu kennzeichnen:

$$\underline{a} = a_1 + j a_2 . \qquad (18)$$

Eine komplexe Zahl $\underline{a}$ wird durch ihren *Realteil* a_1 und ihren *Imaginärteil* a_2 beschrieben, also durch zwei voneinander unabhängige Größen. Geometrisch anschaulich stellt man diese Zahl auch durch einen Punkt $\underline{a}$ in einer Ebene dar (Abb. 2), dessen Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem a_1 und a_2 sind. Vielfach bezeichnet man als $\underline{a}$ auch den Pfeil vom Nullpunkt des Koordinatensystems zum Punkt $\underline{a}$ (Abb. 2).

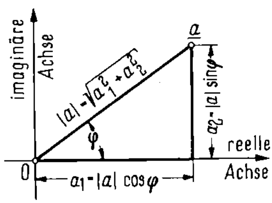

Abb. 2. Komplexe Zahl $\underline{a}$ in der komplexen Zahlenebene

Die zur Koordinate a_1 gehörende Achse nennt man die reelle Achse, die zur Koordinate a_2 gehörende die imaginäre Achse. Für $a_2 = 0$ ist $\underline{a}$ eine reelle Zahl a_1. Diese liegt auf der reellen Achse. Für $a_1 = 0$ ist $\underline{a}$ eine imaginäre Zahl $\mathrm{j}a_2$, die auf der imaginären Achse liegt. Als *Absolutwert* $|\,a\,|$ der komplexen Zahl $\underline{a}$ bezeichnet man die Länge des Pfeiles $\underline{a}$, d. h. den Abstand des Punktes $\underline{a}$ vom Nullpunkt:

$$|\,a\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,. \tag{19}$$

Als Argument φ bezeichnet man den Winkel zwischen dem Pfeil $\underline{a}$ und der reellen Achse (Abb. 2):

$$\tan\varphi = a_2/a_1\,;\quad \varphi = \operatorname{arc}\tan\,(a_2/a_1)\,. \tag{20}$$

Für positive reelle Zahlen ist $\varphi = 0$, für imaginäre Zahlen $\varphi = \pi/2$ oder $-\pi/2$ je nach Vorzeichen von a_2. Es ist nach Abb. 2

$$a_1 = |\,a\,| \cdot \cos\varphi\,;\quad a_2 = |\,a\,| \cdot \sin\varphi\,. \tag{21}$$

Die zwei Größen $|\,a\,|$ und φ sind die Polarkoordinaten des Punktes $\underline{a}$ in der „komplexen Zahlenebene". Die *komplexe* Zahl $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ hat nach (9) die rechtwinkligen Koordinaten $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, nach (19) den Absolutwert

$$|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\,| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \tag{22}$$

und das Argument φ, das in der Elektrotechnik je nach Verwendungszweck auch Phasenwinkel bzw. Phase genannt wird. Der Punkt $e^{j\varphi}$ liegt also auf dem Einheitskreis. Seine Lage in der komplexen Zahlenebene zeigt Abb. 1. Nach (9) und (21) kann man jede komplexe Zahl in folgender Form schreiben:

$$\underline{a} = a_1 + j a_2 = |\,a\,| (\cos\varphi + j \sin\varphi) = |\,a\,| \cdot e^{j\varphi}. \tag{23}$$

Eine komplexe Zahl ist also das Produkt einer reellen Zahl $|\,a\,|$ und der komplexen Zahl $e^{j\varphi}$. Hieran erkennt man die fundamentale Bedeutung der Zahl $e^{j\varphi}$ für die Darstellung komplexer Zahlen.

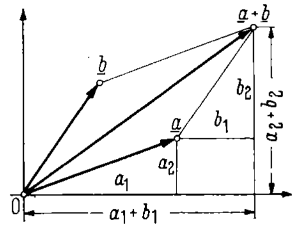

Abb. 3. Addition zweier komplexer Zahlen $\underline{a}$ und $\underline{b}$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen: Wenn man zwei komplexe Zahlen $\underline{a} = a_1 + j a_2$ und $\underline{b} = b_1 + j b_2$ addieren oder subtrahieren will, rechnet man mit rechtwinkligen Koordinaten, um die einfachen Formeln

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2), \tag{24}$$

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1) + j(a_2 - b_2) \tag{25}$$

zu erhalten. Abb. 3 zeigt diese Addition der Pfeile, wie sie von vielen physikalischen Aufgaben her bekannt ist. Wenn man zwei komplexe Zahlen multiplizieren will, rechnet man zweckmäßig nur mit Polarkoordinaten:

$$\underline{a} = |\,a\,| \cdot e^{j\varphi}; \quad \underline{b} = |\,b\,| \cdot e^{j\psi};$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\,a\,| \cdot |\,b\,| \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\psi} = |a\,| \cdot |\,b\,| \cdot e^{j(\varphi+\psi)} \tag{26}$$

Zum Beweis dieser Formel benutze man (5). Man multipliziert also die Absolutwerte und addiert die Argumente. Wenn man die gleiche Aufgabe mit rechtwinkligen Koordinaten rechnen will, werden die Formeln wesentlich komplizierter. Abb. 4 zeigt in einem Beispiel zu gegebenem $\underline{a}$ und $\underline{b}$ die Lage des Produkts $\underline{a} \cdot \underline{b}$ in der komplexen Ebene.

Besonders einfach ist die Multiplikation einer Zahl $\underline{a}$ mit einer reellen Zahl, wobei das Argument φ erhalten bleibt, oder die

Multiplikation mit der Zahl $e^{j\psi}$, wobei nach (22) der Absolutwert $|a|$ unverändert bleibt:

$$\underline{a} \cdot e^{j\psi} = |a| \cdot e^{j(\varphi+\psi)} \tag{27}$$

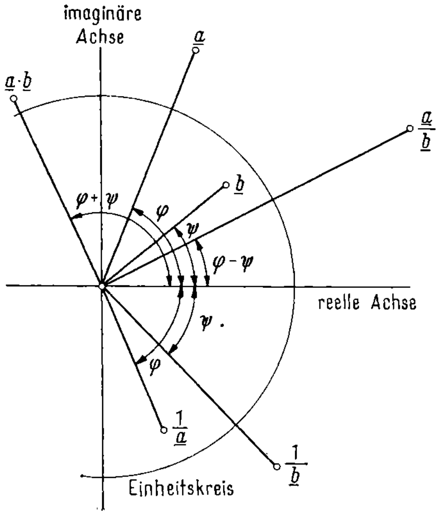

Abb. 4. Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ sowie Bildung der Reziprokwerte

Die Multiplikation mit $e^{j\psi}$ bedeutet also eine Drehung des Pfeiles $\underline{a}$ um den Winkel ψ gegen den Uhrzeigersinn (Abb. 5). Der Reziprokwert $1/\underline{a}$ einer komplexen Zahl $\underline{a}$ kann auf zwei Weisen berechnet werden. Mit rechtwinkligen Koordinaten:

$$\frac{1}{\underline{a}} = \frac{1}{a_1 + j a_2} = \frac{1}{a_1 + j a_2} \, \frac{a_1 - j a_2}{a_1 - j a_2} \tag{28}$$

$$= \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} - j \, \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} \, .$$

Das Vorzeichen des Imaginärteils kehrt sich dabei um. Diese Regel ist besonders wichtig für den Reziprokwert einer rein imaginären Zahl $\mathrm{j}a_2$:

$$\frac{1}{\mathrm{j}a_2} = -\mathrm{j}\,\frac{1}{a_2}\,. \tag{29}$$

Bei der Rechnung mit Polarkoordinaten erhält man nach (5)

$$\underline{a} = |\,a\,|\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi};\ \frac{1}{\underline{a}} = \frac{1}{|\,a\,|\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \frac{1}{|\,a\,|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\,. \tag{30}$$

Abb. 4 zeigt für eine Zahl $\underline{a}$ mit $|\,a\,| > 1$ und für eine Zahl $\underline{b}$ mit $|\,b\,| < 1$ die Lage der Punkte $1/\underline{a}$ und $1/\underline{b}$ in der komplexen Ebene. Den Übergang von einer komplexen Zahl zu ihrem Reziprokwert in der komplexen Ebene nennt man Inversion. Die Inversion ist eine Spiegelung mit reziproken Radien. Die Spiegelung erfolgt an der reellen Achse, weil φ in $(-\,\varphi)$ übergeht. Die Radien, d. h. die Abstände der Punkte $\underline{a}$ und $1/\underline{a}$ vom Nullpunkt sind reziprok. Man sieht bereits hier durch Vergleich von (28) und (30), daß man Rechnungen durch zweckmäßige Wahl der Koordinatendarstellung wesentlich vereinfachen kann. Dies ist bei umfangreichen Rechnungen oft entscheidend. Aus (30) erhält man die Divisionsregel in Polarkoordinaten mit Hilfe von (26):

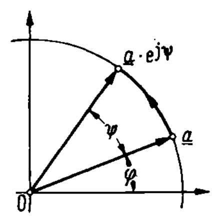

Abb. 5. Multiplikation einer komplexen Zahl $\underline{a}$ mit $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$

$$\frac{\underline{a}}{\underline{b}} = \underline{a}\,\frac{1}{\underline{b}} = |\,a\,|\,\frac{1}{|\,b\,|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi} = \frac{|\,a\,|}{|\,b\,|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi-\psi)}\,. \tag{31}$$

Man dividiert die Absolutwerte und subtrahiert die Argumente. Division durch $\underline{b}$ kann man als Multiplikation mit $1/\underline{b}$ auffassen. Abb. 4 zeigt in einem Beispiel zu gegebenem $\underline{a}$ und $\underline{b}$ die Lage des Punktes $\underline{a}/\underline{b}$.

I,3. Kreispendel und ebenes Pendel

Das Ziel ist die Darstellung von Schwingungen durch komplexe Zahlen. Einen physikalisch besonders einfachen Schwingungsvorgang gibt das *Kreispendel*, in der Mechanik beispielsweise idealisiert dargestellt durch eine an einem gewichtslosen Faden aufgehängte Kugel von geringer Ausdehnung, die als punktförmige, in ihrem Mittelpunkt konzentrierte Masse betrachtet wird. Unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes kann sie sich auf einem Kreis bewegen (Abb. 6a), wenn sie in geeigneter Weise angestoßen wird. Betrachtet man in Abb. 7 die waagerechte Ebene, in der sich die Kugel dann bewegt, als eine komplexe Zahlenebene nach I,2, so kann man den Ort des Massenpunktes in einem bestimmten Zeitpunkt t durch die zu diesem Ort gehörende komplexe Zahl $\underline{m}$ festlegen. Ist

$$\underline{m} = m_1 + \mathrm{j} m_2 = |\, m \,| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \tag{32}$$

durch seinen Realteil m_1 und seinen Imaginärteil m_2 beschrieben, so sind m_1 und m_2 die rechtwinkligen Koordinaten des Kugelortes zur Zeit t. Ist $\underline{m}$ durch Absolutwert und Phase gegeben, so sind $|\, m \,|$ und ψ die Polarkoordinaten des Kugelortes. Die letztere Beschreibungsart ist hier günstiger; da die Kugel auf einem Kreise läuft, ist dabei $|\, m \,|$ konstant gleich dem Radius M des Kreises. Weil der Kreis stets mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird, wächst der Winkel linear mit der Zeit. Man geht aus von dem gegebenen Ort $\underline{m}_0$, den die Kugel zur Zeit $t = 0$, also am Beginn der Bewegung hat. Berechnen will man den Ort $\underline{m}$ der Kugel in einem beliebigen Zeitpunkt t bei gegebener Winkelgeschwindigkeit ω. Der Punkt $\underline{m}_0$ hat den Absolutwert $|\, m_0 \,| = M$. Dieser Absolutwert bleibt

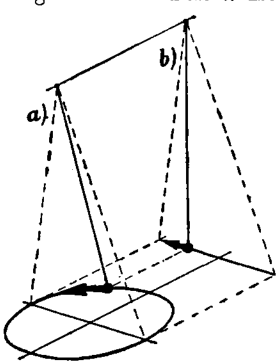

Abb. 6. Komplexer Momentanwert eines Kreispendels

beim Umlauf erhalten:

$$|\underline{m}| = |\underline{m}_0| = M\,. \tag{33}$$

$\underline{m}_0$ hat das Argument ψ_0, das meist als Nullphasenwinkel der Bewegung bezeichnet wird. Als Winkelgeschwindigkeit ω bezeichnet man den Winkel im Bogenmaß, um den sich das Argument ψ des $\underline{m}$ in der Zeiteinheit ändert. Während der Umlaufzeit T durchläuft die Kugel den vollen Kreis, also den Winkel 2π. Daher ist $T = 2\pi/\omega$. Die Frequenz f gibt an, wie oft der Kreis in der Zeiteinheit durchlaufen wird: $f = 1/T = \omega/(2\pi)$. Es besteht also die wichtige Beziehung

$$\omega = 2\pi f\,. \tag{34}$$

Wegen dieses einfachen Zusammenhangs mit der Frequenz nennt man ω auch die Kreisfrequenz. Wenn der Kreis *gegen den Uhrzeigersinn* durchlaufen wird, wächst das Argument des Punktes $\underline{m}$ mit wachsender Zeit (Abb. 7) linear:

$$\psi = \psi_0 + \omega t\,. \tag{35}$$

Wenn der Kreis *im Uhrzeigersinn* durchlaufen wird, nimmt ψ mit wachsender Zeit ab:

$$\psi = \psi_0 - \omega t\,. \tag{36}$$

Wenn man den Ort $\underline{m}$ der Kugel in der Form (23) darstellen will, erhält man nach (33), (35) znd (36):

$$\underline{m}_0 = M \cdot e^{j\psi_0}\,; \quad \underline{m} = M \cdot e^{j(\psi_0 \pm \omega t)} = \underline{m}_0 \cdot e^{\pm j\omega t}\,. \tag{37}$$

Das Vorzeichen von ωt je nach Umlaufsinn. Man vergleiche Abb. 5. Diese komplexe Zahl $\underline{m}$, die den jeweiligen Ort der Kugel angibt, nennt man auch den *komplexen Momentanwert* des Pendelumlaufs. Diesen physikalischen Inhalt der komplexen, zeitabhängigen Zahl $\underline{m}$ muß man sich stets vor Augen halten, wenn man den tieferen Sinn der späteren komplexen Rechenmethode

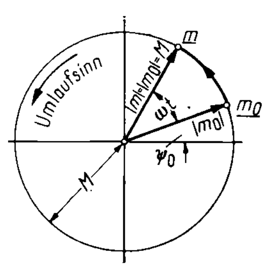

Abb. 7. Komplexer Momentanwert eines Kreispendels

begreifen will. Es wird im folgenden zunächst nur der Umlauf gegen den Uhrzeigersinn betrachtet (Abb. 7). Die Bewegung des Pendels wird dann durch den Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ beschrieben. Der so rotierende Pfeil $\underline{m}$ wird oft als „Drehzeiger" bezeichnet. Verfolgt man den Ort $\underline{m}$ nicht an Hand von Absolutwert und Phase, sondern nach Realteil und Imaginärteil, so erhält man aus (37) nach (23)

$$\underline{m} = \underbrace{M \cdot \cos(\psi_0 + \omega t)}_{m_1} + \mathrm{j}\underbrace{M \cdot \sin(\psi_0 + \omega t)}_{m_2} . \tag{38}$$

Das ebene Pendel: Wie man das Pendel der Abb. 6 nicht auf einem Kreis laufen läßt, sondern so anstößt, daß es in einer Ebene schwingt, dann erhält man das ebene Pendel (Abb. 6b). Um die mathematische Behandlung nicht zu erschweren, beschränkt man sich in der elementaren Physik auf den Fall, bei dem die Länge des Aufhängefadens sehr groß gegen die Schwingungsweite ist. Dann bewegt sich die Kugel praktisch auf einer waagerechten Geraden hin und her. Läßt man das Pendel zur Zeit $t = 0$ im Abstand M vom Nullpunkt los, so schwingt es nach der bekannten cos-Funktion:

$$m_1 = M \cdot \cos \omega t , \tag{39}$$

wobei der *reelle Momentanwert* m_1 der jeweilige Abstand des Massenpunkts vom Nullpunkt ist. Den zeitlichen Verlauf dieses m_1 nach (39) zeigt Abb. 8a, Kurve I. Für $t = 0$ ist $m_1 = M$; für $\omega t = \pi/2$ geht das Pendel durch den Nullpunkt; für $\omega t = \pi$ erreicht es die entgegengesetzte Maximalauslenkung $m_1 = -M$, für $\omega t = 3\pi/2$ die Nullage, für $\omega t = 2\pi$ wieder die Ausgangslage und so fort. Die Zeit $2\pi/\omega$, die das Pendel für eine volle Schwingung braucht, heißt die Schwingungsdauer T. Man vergleiche die Formeln des Kreispendels. Die Zahl der Schwingungen pro Sekunde ist die Frequenz $f = 1/T$ Es ist also wie in (34) wieder $\omega = 2\pi f$. Das ω hat hier keine unmittelbare physikalische Bedeutung. M nennt man die (reelle) Amplitude oder den Scheitelwert der Schwingung. Wenn das Pendel seine Maximallage $m_1 = M$ nicht zur Zeit $t = 0$, sondern in einem beliebigen Zeitpunkt t_0 erreicht, schwingt es nach der Funktion

$$m_1 = M \cdot \cos \omega (t - t_0) = M \cdot \cos(\omega t - \omega t_0) = M \cdot \cos(\omega t + \psi_0), \quad (40)$$

denn für $t = t_0$ wird in (40) $m_1 = M$. Für positives t_0 zeigt den Verlauf von m_1 die Abb. 8a, Kurve II (nacheilende Schwingung gegenüber Kurve I), für negatives t_0 die Kurve III (voreilende Schwingung gegenüber Kurve I). Die Größe $(-\omega t_0)$ bezeichnet man als den Nullphasenwinkel ψ_0; vgl. DIN 1311. ($\psi_0 > 0$: voreilende Schwingung; $\psi_0 < 0$: nacheilende Schwingung gegenüber Kurve I).

Eine um $\psi_0 = -\pi/2$ gegenüber (39) nacheilende Schwingung ergibt eine sin-Funktion (Abb. 8a, Kurve IV):

$$m_1 = M \cdot \cos(\omega t - \pi/2) = M \cdot \sin \omega t \quad (41)$$

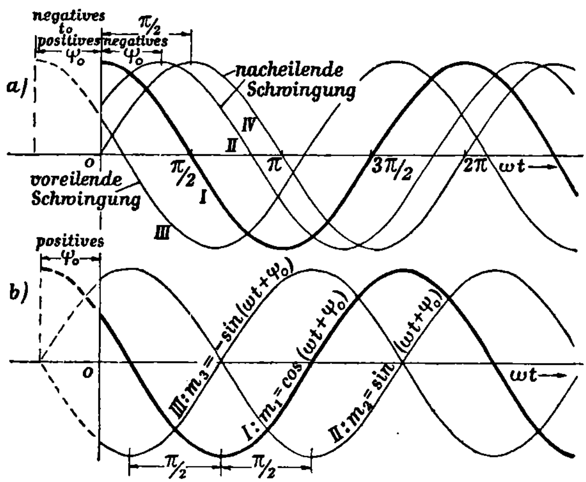

Abb. 8. Phasenverschobene cos-Kurven mit der Amplitude $M = 1$

nach einer bekannten trigonometrischen Formel. Wenn man diejenige Schwingung gleicher Amplitude M sucht, die gegenüber einer durch (40) gegebenen Schwingung (Abb. 8b, Kurve I) um $\pi/2$ *nacheilt*, so ist diese nach Abb. 8b, Kurve II gegeben durch

$$m_2 = M \cdot \cos(\omega t + \psi_0 - \pi/2) = M \cdot \sin(\omega t + \psi_0). \quad (42)$$

Die um $\pi/2$ gegen die Schwingung (40) *voreilende* Schwingung (Abb. 8b, Kurve III) lautet

$$m_3 = M \cdot \cos(\omega t + \psi_0 + \pi/2) = -M \cdot \sin(\omega t + \psi_0)\,. \qquad (43)$$

Zusammenhänge zwischen ebenem Pendel und Kreispendel: Wenn man einem in einer Ebene schwingenden Pendel einen zusätzlichen Anstoß senkrecht zu dieser Ebene gibt, dann schwingt das Pendel außerdem in der Ebene senkrecht dazu. Diese beiden Schwingungen sind nach einem allgemeinen Gesetz der Mechanik unabhängig voneinander, d. h. sie stören sich gegenseitig nicht. Durch Hinzufügen oder Entfernen der Zusatzschwingung wird die ursprüngliche Schwingung nicht verändert. Wenn man das Pendel über der komplexen Zahlenebene schwingen läßt, kann man den jeweiligen Ort des Pendels durch eine komplexe Zahl $\underline{m}$ darstellen. Das Pendel soll ursprünglich entlang der reellen Achse nach der Funktion $m_1 = M_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1)$ schwingen. Die Zusatzschwingung $m_2 = M_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2)$ verläuft dann in Richtung der imaginären Achse. m_1 und m_2 sind die rechtwinkligen Koordinaten des Ortes des Pendels, den man nach I,2 als komplexe Zahl $\underline{m} = m_1 + \mathrm{j}\, m_2$ darstellen kann:

$$\underline{m} = M_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1) + \mathrm{j}\, M_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2)\,. \qquad (44)$$

Ein solches Pendel durchläuft im allgemeinen eine Ellipse. Wenn man erreicht, daß die beiden Amplituden M_1 und M_2 gleich, die Phasen ψ_1 und ψ_2 genau um $\pi/2$ verschieden sind, dann läßt sich der Ort des Pendels mit Hilfe von (42) in folgender Form schreiben und nach (23) zusammenfassen:

$$M_1 = M_2 = M\;; \quad \psi_1 = \psi_2 + \pi/2 = \psi_0\;;$$

$$\underline{m} = M \cdot \cos(\omega t + \psi_0) + \mathrm{j}\, M \cdot \sin(\omega t + \psi_0) = M \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \psi_0)}\,. \qquad (45)$$

Nach (37) schwingt dann das Pendel auf einem Kreis mit dem Radius M und dem Nullphasenwinkel ψ_0 (Abb. 9). Die Bewegung eines Kreispendels kann man sich also nach (38) zerlegt denken in zwei voneinander unabhängige, ebene Schwingungen gleicher Amplitude in zwei zueinander senkrechten Richtungen (reelle und imaginäre Achse). Ebenso kann man umgekehrt nach (45) eine gegebene Schwingung eines ebenen Pendels in Richtung der reellen Achse durch eine zusätzliche Schwingung gleicher Amplitude, die aber um $\pi/2$ nacheilt, in einer dazu senkrechten Schwingungsrichtung (imaginäre Achse) *zu einer Kreisschwingung ergänzen.* Diese zusätzliche Schwingung ist völlig unabhängig von der ersten und stört den Verlauf der ursprünglichen Schwingung nicht. Sie kann beliebig hinzugefügt oder wieder entfernt werden.

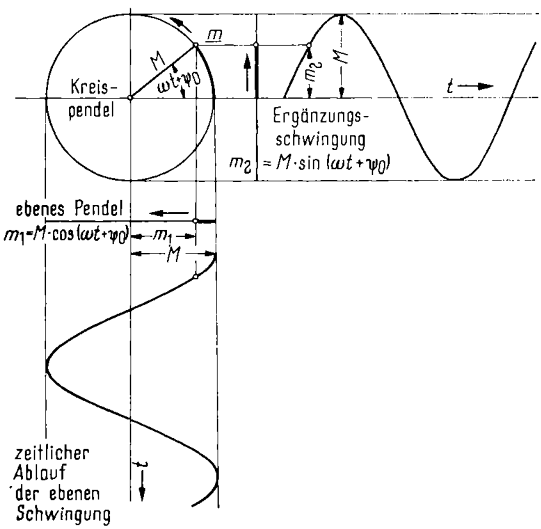

Abb. 9. Überführung eines ebenen Pendels in ein Kreispendel

Eine zweite Möglichkeit, einen Zusammenhang zwischen einer Schwingung nach (39) und Kreisbewegungen herzustellen beruht auf der Gl. (16). Setzt man dort $\varphi = \omega t + \psi_0$, so wird

$$M \cdot \cos(\omega t + \psi_0) = \frac{1}{2} M [e^{j(\omega t+\psi_0)} + e^{-j(\omega t+\psi_0)}] \tag{46}$$

$\frac{1}{2} M \cdot e^{j(\omega t+\psi_0)}$ ist eine Kreisbewegung nach Abb. 7, die zur Zeit $t = 0$ beim Winkel ψ_0 beginnt und den Kreis gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. $\frac{1}{2} M \cdot e^{-j(\omega t + \psi_0)}$ ist eine Kreisbewegung, die zur Zeit $t = 0$ beim Winkel $(-\psi_0)$ beginnt und nach (36) den Kreis im Uhrzeigersinn durchläuft. Die ebene Schwingung $M \cdot \cos(\omega t + \psi_0)$ ist also rein formal auch als Summe zweier Kreisbewegungen mit entgegengesetztem Umlaufsinn zu deuten. Dabei liegen die Drehzeiger beider Kreisbewegungen in jedem Moment symmetrisch zur reellen Achse wie in Abb. 10 und addieren sich wie in Abb. 3 zu einem Momentanwert $M \cdot \cos(\omega t + \psi_0)$, der längs der reellen Achse liegt.

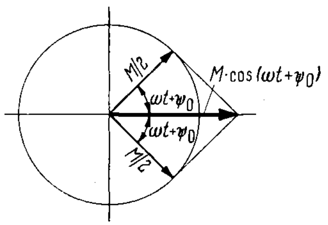

Abb. 10. Addition zweier umlaufender Drehzeiger zu einer cos-Schwingung

II. Definition der komplexen Größen

Die folgende Methode des komplexen Rechnens ist grundsätzlich überall dort mit Erfolg zu verwenden, wo Schwingungsvorgänge nach einer cos-Funktion (40) stattfinden. Der vorgegebene Rahmen des Buches zwingt zu einer Beschränkung auf ein kleines Teilgebiet. Das Ziel ist hier die rechnerische Behandlung der Vorgänge in Wechselstromschaltungen.

II,1. Komplexe Amplituden oder Zeiger

Der rechnerische Umgang mit einer cos-Schwingung nach (40) ist meist nicht besonders einfach; denn der Momentanwert m_1, also der Abstand vom Nullpunkt, ändert sich dauernd nach dem komplizierten cos-Gesetz, und auch die Geschwindigkeit des Pendels ist zeitlich veränderlich. Hinzu kommen die komplizierten trigonometrischen Formeln (Additionstheoreme usw.), die bereits bei relativ einfachen Aufgaben angewendet werden müssen. Man vergleiche dies mit den wesentlich einfacheren Vorgängen bei einer Kreisschwingung nach Abb. 7, bei der der Abstand vom Nullpunkt und die Geschwindigkeit konstant sind und bei komplexer Beschreibung das Additionstheorem die angenehme Form (11) hat. Der Sinn der komplexen Rechenmethode besteht nun darin, daß man *die gegebene eindimensionale Schwingung* (40) *durch eine dazu senkrechte Schwingung* (42) *zu einer Kreisschwingung ergänzt*, um die Formeln zu vereinfachen. Gegebene Ausgangsschwingung:

$$m_1 = M \cdot \cos(\omega t + \psi_0)\,. \tag{47}$$

Ergänzung zur Kreisschwingung:

$$\underline{m} = M \cdot \cos(\omega t + \psi_0) + \mathrm{j} M \cdot \sin(\omega t + \psi_0) = M \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \psi_0)}\,. \tag{48}$$

Diese Ergänzung verändert die ursprüngliche, jetzt in der komplexen Zahl $\underline{m}$ als Realteil enthaltene Schwingung (47) nicht. $\underline{m}$ gibt nach I,3 den *komplexen Momentanwert* oder Drehzeiger der entstandenen Kreisbewegung, also den zeitabhängigen Ort, den die Schwingung auf dem Kreis in der komplexen Zahlenebene jeweils erreicht hat. Alle Rechnungen werden dann nur für die Kreisbewegung durchgeführt und dadurch sehr einfach. Im komplexen Resultat der Rechnung gibt dann wieder der *Realteil* die wirkliche, gesuchte Schwingung, während der Imaginärteil lediglich eine davon unabhängige, physikalisch uninteressante Ergänzungsschwingung ist, die die Aufgabe hatte, die formale Rechnung zu vereinfachen. Diesen Inhalt der komplexen Rechnung sollte man nie vergessen, auch wenn es sich um Anwendungen handelt, die keine mechanische Veranschaulichung möglich machen.

Wohl jeder, der sich erstmals mit dieser komplexen Rechenmethode befaßt, stellt die Frage, ob eine solche Ergänzung durch einen Imaginärteil bei *allen* auftretenden Problemen zu einem richtigen Ergebnis führt, also erlaubt ist. Diese Frage ist sehr berechtigt, denn es gibt tatsächlich Fälle, in denen diese Methode *nicht* erlaubt ist. Wenn man zuverlässig prüfen will, ob ein Resultat richtig ist, ersetzt man die ebene cos-Schwingung durch die Summe *zweier* Kreisschwingungen nach (46). Dies führt stets zu einem richtigen Resultat. Beispiel in Abschn. III,1. Es gibt aber sehr viele Aufgaben, bei denen man bereits mit *einer* Kreisschwingung nach (48) zum richtigen

Resultat kommt, und in diesen Fällen wird man nur mit *einer* Kreisschwingung rechnen, weil man sich dabei viel Schreibarbeit erspart. Viele Beispiele der folgenden Abschnitte werden den Nutzen dieser einfacheren Darstellung zeigen.

Die Zeitabhängigkeit ist bei komplexer Rechnung stets in der Form $e^{j\omega t}$ gegeben. Diesen Faktor kann man aus dem komplexen $\underline{m}$ stets abspalten:

$$\underline{m} = M \cdot e^{j(\omega t + \psi_0)} = M \cdot e^{j\psi_0} \cdot e^{j\omega t} = \underline{M} \cdot e^{j\omega t}. \qquad (49)$$

Der komplexe Momentanwert läßt sich also in eine *zeitunabhängige*, komplexe Zahl $\underline{M}$ und den Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ zerlegen. Die Zahl $\underline{M}$ enthält als Absolutwert die reelle Amplitude M und als Argument den Nullphasenwinkel ψ_0, also die beiden bestimmenden Elemente der Schwingung (47). $\underline{M}$ nennt man die *komplexe Amplitude* (oft auch „Zeiger") der Schwingung; sie ist gleich dem komplexen Momentanwert zur Zeit $t = 0$:

$$\underline{M} = M \cdot e^{j\psi_0}. \qquad (50)$$

Da bei vielen Aufgaben der Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ die ganze Rechnung unverändert durchläuft und daher uninteressant ist, läßt man ihn meist fort und rechnet der Einfachheit halber nur mit der zeitunabhängigen Amplitude $\underline{M}$. Man muß aber stets die komplexen Zahlen der Gattung $\underline{M}$ und die komplexen Zahlen der Gattung $\underline{m}$ konsequent auseinanderhalten. Wenn man mit komplexen Amplituden rechnet, sollte man zur Vermeidung fehlerhafter Anwendungen nie vergessen, daß jede *komplexe Amplitude* $\underline{M}$ *in Gedanken stets durch den Zeitfaktor* $e^{j\omega t}$ *zu ergänzen ist.* Von der Zahl $\underline{M}$ nach (50) zum physikalischen Schwingungsvorgang muß man den Umweg über das komplexe $\underline{m}$ nach (49) zum Realteil $m_1 = M \cdot \cos(\omega t + \psi_0)$ nach (47) gehen.

Zahlenbeispiel: $\underline{M} = 7 + j3$; der Absolutwert ist nach (19) $M = 7{,}62$, der Nullphasenwinkel nach (20) $\psi_0 = 0{,}40$. Die durch $\underline{M}$ dargestellte Schwingung lautet also $m_1 = 7{,}62 \cdot \cos(\omega t + 0{,}40)$.

Addition komplexer Amplituden: Eine Addition komplexer Amplituden bedeutet eine Überlagerung zweier Schwingungen *gleicher* Frequenz mit den reellen Momentanwerten

$$m_1 = M_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1)\,, \quad m_2 = M_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2)\,. \tag{51}$$

Dies ergibt als Summe den reellen Momentanwert

$$\begin{aligned} m = m_1 + m_2 &= M_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1) + M_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2) \\ &= M \cdot \cos(\omega t + \psi_0)\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Die Summe ist wieder eine Schwingung der Frequenz ω mit neuer Amplitude M und neuem Nullphasenwinkel ψ_0. In komplexer Schreibweise lauten die Momentanwerte nach (48) und (49)

$$\underline{m}_1 = M_1 \cdot e^{j\psi_1} \cdot e^{j\omega t}\,; \quad \underline{m}_2 = M_2 \cdot e^{j\psi_2} \cdot e^{j\omega t}\,. \tag{53}$$

Die komplexen Amplituden:

$$\underline{M}_1 = M_1 \cdot e^{j\psi_1}\,; \quad \underline{M}_2 = M_2 \cdot e^{j\psi_2}\,. \tag{54}$$

Die komplexe Darstellung der Summe der Momentanwerte:

$$\begin{aligned} \underline{m} = M \cdot e^{j\psi_0} \cdot e^{j\omega t} &= \underline{M} \cdot e^{j\omega t} \\ &= (M_1 \cdot e^{j\psi_1} + M_2 \cdot e^{j\psi_2}) \cdot e^{j\omega t}\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Unter Fortlassung des gemeinsamen Zeitfahtors $e^{j\omega t}$ auf beiden Seiten der Gleichung wird daraus eine Gleichung für die komplexen Amplituden:

$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2\,. \tag{56}$$

Die Berechnung von $\underline{M}$ bei gegebenem $\underline{M}_1$ und $\underline{M}_2$ erfolgt mit Hilfe rechtwinkliger Koordinaten nach (21) und (24); vgl. Abb. 3.

$$\begin{aligned} \underline{M}_1 &= M_1 \cdot \cos \psi_1 + j\, M_1 \cdot \sin \psi_1\,; \\ \underline{M}_2 &= M_2 \cdot \cos \psi_2 + j\, M_2 \cdot \sin \psi_2\,; \end{aligned} \tag{57}$$

$\underline{M} = (M_1 \cdot \cos \psi_1 + M_2 \cdot \cos \psi_2) + j\,(M_1 \cdot \sin \psi_1 + M_2 \cdot \sin \psi_2)$.
Daraus ergibt sich nach (19) der Absolutwert der Summe als

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{(M_1 \cdot \cos \psi_1 + M_2 \cdot \cos \psi_2)^2 + (M_1 \cdot \sin \psi_1 + M_2 \cdot \sin \psi_2)^2} \\ &= \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2\, M_1 M_2 \cdot \cos(\psi_2 - \psi_1)}. \end{aligned} \tag{58}$$

Der Nullphasenwinkel der Summenschwingung ergibt sich nach (20) aus:

$$\tan \psi_0 = \frac{M_1 \cdot \sin \psi_1 + M_2 \cdot \sin \psi_2}{M_1 \cdot \cos \psi_1 + M_2 \cdot \cos \psi_2}. \tag{59}$$

Vergleichsweise versuche man das Ergebnis für M und ψ direkt aus (52) mit Hilfe trigonometrischer Formeln ohne komplexe Zahlen zu gewinnen, um die Vorteile der komplexen Rechnung zu erkennen.

Eine Subtraktion verläuft nach (25) in gleicher Weise bei unverändertem Zeitfaktor $e^{j\omega t}$. Nach (10) ist $e^{j\pi} = -1$, so daß man jede Subtraktion auch als Addition einer um π gedrehten Schwingung auffassen kann:

$$\underline{M}_1 - \underline{M}_2 = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 \cdot e^{j\pi}. \tag{60}$$

Multiplikation bei komplexen Amplituden: Multiplikation einer komplexen Amplitude mit einer zeitunabhängigen reellen Größe p bedeutet Multiplikation des Absolutwerts bei gleichbleibendem Nullphasenwinkel ψ_0:

$$\underline{M} = M \cdot e^{j\psi_0}; \quad p \cdot \underline{M} = p \cdot M \cdot e^{j\psi_0}. \tag{61}$$

Multiplikation mit einer zeitunabhängigen komplexen Größe $e^{j\varphi}$, deren Absolutwert nach (22) gleich 1 ist, bedeutet nach (27) Änderung der Phase bei gleichbleibendem Absolutwert:

$$\underline{M} = M \cdot e^{j\psi_0}; \ \underline{M} \cdot e^{j\varphi} = M \cdot e^{j\psi_0} \cdot e^{j\varphi} = M \cdot e^{j(\psi_0 + \varphi)}. \tag{62}$$

Die Multiplikation mit einer zeitunabhängigen, beliebigen komplexen Größe $\underline{Z} = |Z| \cdot e^{j\varphi}$ bedeutet gleichzeitige Änderung des Absolutwerts und der Phase nach (26):

$$\underline{M} = M \cdot e^{j\psi_0}; \quad \underline{M} \cdot \underline{Z} = M \cdot |Z| \cdot e^{j(\psi_0 + \varphi)}. \tag{63}$$

Entsprechendes gilt für die Division durch eine zeitunabhängige komplexe Zahl nach (31):

$$\frac{\underline{M}}{\underline{Z}} = \frac{M}{|Z|} e^{j(\psi_0 - \varphi)}. \tag{64}$$

Die Multiplikation *zweier komplexer Amplituden* miteinander ist im allgemeinen sehr problematisch und nicht ohne weiteres erlaubt. Hier stößt man auf eine der Grenzen der komplexen Rechenmethode. Einen möglichen Ausweg bei solchen Multiplikationen zeigt Abschn. III,1.

Die *Division zweier komplexer Amplituden* wird in II,2 behandelt und führt zum Begriff des komplexen Widerstandes.

Differentiation: Den *Differentialquotienten* einer komplexen Amplitude nach der Zeit gibt es nicht; man muß bedenken, daß nur der komplexe Momentanwert $\underline{m}$ zeitabhängig ist: $\underline{m} = \underline{M} \cdot e^{j\omega t}$. Man kann also $\underline{m}$ nach der Zeit t mit Hilfe von (4) differenzieren:

$$\frac{d\underline{m}}{dt} = \underline{M} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} = \underline{m}' = \underline{M}' \cdot e^{j\omega t}. \tag{65}$$

$\underline{m}'$ ist wieder ein komplexer Momentanwert mit dem Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ und der komplexen Amplitude $\underline{M}'$. Die exakte Formulierung dieses Ergebnisses lautet: Die komplexe Amplitude $\underline{M}'$ des Differentialquotienten eines komplexen Momentanwerts mit der komplexen Amplitude $\underline{M}$ hat die einfache Form

$$\underline{M}' = j\omega \cdot \underline{M} = \underline{M} \cdot \omega \cdot e^{j\pi/2}. \tag{66}$$

Differentiation bedeutet nach (63) Multiplikation mit der zeitunabhängigen Größe $j\omega$, also Multiplikation des Absolutwerts mit dem Faktor ω und Vergrößerung des Nullphasenwinkels um $\pi/2$; vgl. auch (10).

II,2. Komplexe Widerstände

Wenn man zwei komplexe Amplituden $\underline{M}_1 = M_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ und $\underline{M}_2 = M_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ dividiert und ein sinnvolles physikalisches Ergebnis haben will, so darf man nicht vergessen, daß jede komplexe Amplitude durch den Faktor $e^{j\omega t}$ ergänzt zu denken ist, der also bei der Division verschwindet. Man dividiert streng genommen die zugehörigen komplexen Momentanwerte, erhält jedoch das gleiche Ergebnis wie bei Amplituden, weil sich $e^{j\omega t}$ sowieso aufhebt:

$$\frac{\underline{m}_1}{\underline{m}_2} = \frac{\underline{M}_1 \cdot e^{j\omega t}}{\underline{M}_2 \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\underline{M}_1}{\underline{M}_2} = \frac{M_1}{M_2}\, e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \underline{Z}. \tag{67}$$