Vektoren und Matrizen

von

Dr. Siegfried Valentiner
Prof. emer. der Physik
an der Techn. Hochschule Clausthal

Mit 35 Figuren

4. Auflage

(11., erweiterte Auflage der „Vektoranalysis")

Mit einem Anhang:

Aufgaben zur Vektorrechnung

von

Dr. Hermann König
Prof. emer. der Mathematik
an der Techn. Hochschule Clausthal

Sammlung Göschen Band 354/354a

Walter de Gruyter & Co · Berlin 1967

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

©

Copyright 1967 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp., Berlin 30. — Alle Rechte, einschl. der Rechte der Herstellung von Photokopien und Mikrofilmen, vom Verlag vorbehalten. — Archiv-Nr. 7713677. — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Schrifttum 5

Einleitung

§ 1. Darstellung der Resultante eines Kraftsystems 6

I. Teil

Rechenregeln der Vektoranalysis

§ 2. Definition des Vektors und der skalaren Größe 11
§ 3. Addition, Subtraktion von Vektoren, Multiplikation der Vektoren mit skalaren Größen 15
§ 4. Zerlegung von Vektoren 18
§ 5. Gleichungen zwischen Vektoren 20
§ 6. Multiplikation von Vektoren. 21
§ 7. Skalares Produkt. 23
§ 8. Anwendungen 25
§ 9. Vektorielles Produkt 26
§ 10. Anwendung auf die Statik 30
§ 11. Das skalare Tripelprodukt $c[ab]$ 32
§ 12. Das vektorielle Tripelprodukt $[c[ab]]$ 35
§ 13. Produkte aus Vektorprodukten 36
§ 14. Die Frage der Division von Vektoren 38
§ 15. Reziproke Vektortripel 38
§ 16. Produkte im schiefwinkligen Bezugssystem 41
§ 17. Über die Erweiterung des Vektorbegriffs auf den mehrdimensionalen Raum 42
§ 18. Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Größe 42
§ 19. Der Gradient einer skalaren Funktion 47
§ 20. Differentiation einer skalaren Funktion nach einer skalaren Größe in einer vorgegebenen Richtung 48
§ 21. Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Größe in einer vorgegebenen Richtung 50
§ 22. Die Operation ∇ bei vektoriellem Argument 52
§ 23. Die skalare Operation ∇ bei vektoriellem Argument. Integralsatz von Gauß 54
§ 24. Anwendungen. Die Bezeichnung Divergenz 59
§ 25. Die vektorielle Operation ∇. Die Rotation 60
§ 26. Satz von Stokes 63
§ 27. Anwendung 66
§ 28. Mehrfache Anwendung der Differentialoperation ∇ 69
§ 29. Die Differentialoperationen bei Benutzung rechtwinkliger, krummliniger Koordinaten 71

II. Teil

Anwendungen in einigen physikalischen Gebieten

§ 30. Einteilung 75

Seite

Kapitel 1
Einige Sätze der Potentialtheorie

§ 31. Die Bedeutung des Potentials in der Mechanik 77
§ 32. Newtonsches Potential 79
§ 33. Hilfssätze von Green 80
§ 34. Ableitung der Potentialfunktion V aus den charakteristischen Bedingungen 82
§ 35. Deutung der einzelnen Glieder der Lösung 84

Kapitel 2
Einige Sätze der Hydrodynamik

§ 36. Einführung der Flächenkräfte 86
§ 37. Eulersche Gleichungen für reibungslose Flüssigkeiten. 90
§ 38. Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegung 91
§ 39. Solenoidaler Vektor 94
§ 40. Flächenwirbel 96

Kapitel 3
Einiges aus der Theorie der Elektrizität

§ 41. Elektromagnetische Gleichungen von Maxwell-Lorentz 99
§ 42. Biot-Savartsches Gesetz 102

III. Teil
Lineare Vektorfunktionen, Matrizen, Dyaden

§ 43. Lineare Vektorfunktionen 103
§ 44. Drehung eines Bezugssystems um den Anfangspunkt 106
§ 45. Matrizen. 108
§ 46. Rechenregeln für Matrizen 109
§ 47. Wiederholte Matrizenoperation. 112
§ 48. Einfache Anwendungen 115
§ 49. Einige bemerkenswerte Folgerungen 117
§ 50. Die Matrix als Summe von Dyaden 122
§ 51. Einige Regeln für die Rechnung mit Dyaden 123
§ 52. Die rotorische Dyade 125
§ 53. Auflösung linearer inhomogener Gleichungen mit n Unbekannten (Gaußscher Algorithmus) 126
§ 54. Der Eliminationsprozeß selbst 129
§ 55. Gaußsche Schreibweise der Eliminationsgleichungen 132
§ 56. Die Kehrmatrix 134
§ 57. Die Kehrmatrix in besonderen Fällen 137
§ 58. Zahlenbeispiel zu § 54 und 56 139
§ 59. Die Matrizen in der Methode der kleinsten Quadrate 142
§ 60. Durchrechnung zweier Beispiele 146
§ 61. Die Matrix in der Gleichung 2. Grades 151
§ 62. Anwendung bei Deformationsbehandlung 152
§ 63. Die Matrix in einer Eigenwertaufgabe 155

Anhang

1. 42 Aufgaben zur Vektorrechnung 162
2. Zusammenstellung einiger wichtiger Formeln 199

Schrifttum

Aus der ersten Zeit der Entwicklung der Vektorrechnung

Möbius, Der baryzentrische Kalkül, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbes. auf die Bildung neuer Klassen von Aufgaben und die Entwicklung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet. Leipzig 1827.

Graßmann, Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. 2. Aufl. Leipzig 1878.

— Die Ausdehnungslehre. Berlin 1862.

Hamilton, Elemente der Quaternionen: deutsch von Glan. Leipzig 1884.

Tait, Elementares Handbuch der Quaternionen: deutsch von v. Scherff. Leipzig 1880.

Die moderne Behandlung der Vektoranalysis und ihrer Verwendungsmöglichkeit findet man in zahlreichen Lehrbüchern der Vektorrechnung; mehr oder weniger ausführlich dargestellt ist sie in allgemeinen Hand- und Lehrbüchern der Mathematik und in Lehrbüchern der theoretischen Physik.

Zur Matrizenrechnung

F. Neiss, Determinanten und Matrizen. Springer-Verlag, 1948.

L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akad. Verlagsges. 1949.

R. Zurmühl. Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer-Verlag. 5. Aufl. In Vorbereitung.

R. Zurmühl, Matrizen und ihre technischen Anwendungen. 4. Aufl. Springer-Verlag, 1964.

A. Duschek u. A. Hochrainer, Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Bd. 1. Tensoralgebra. 4. Aufl. Springer-Verlag, 1960.

Einleitung

§ 1. Darstellung der Resultante eines Kraftsystems

Die Vektoranalysis ist eine mathematische Disziplin, die sich in ihrem Aufbau fast so vollkommen an die Anschauung anlehnt wie die Geometrie selbst: sie bildet ihre Begriffe und Schlüsse gerade denen der Geometrie nach. Insofern sie dadurch zu einer knapperen, übersichtlicheren und anschaulicheren Darstellung aller solcher Erfahrungen führt, die auf den zwei- oder dreidimensionalen Raum sich beziehen, als die gewöhnliche Analysis, will ich in dem ersten Paragraphen an einem Beispiel zeigen. Dasselbe ist zugleich geeignet, den Unterschied der beiden wichtigsten Begriffe der Vektoranalysis: der skalaren Größe und des Vektors, hervortreten zu lassen.

Es mögen an n Punkten eines freien, starren Körpers $p_1 \cdots p_n$ die Kräfte $P_1 \cdots P_n$ angreifen. Ein solches System von Kräften läßt sich ersetzen durch eine resultierende Einzelkraft und ein Kräftepaar, das von dem Angriffspunkt der Einzelkraft abhängig ist. Der analytische Ausdruck der Einzelkraft und des Kräftepaars wird gewonnen, indem man die Kräfte in Komponenten nach drei Richtungen, z. B. eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, y, z zerlegt und diese in geeigneter Weise zu drei resultierenden Komponenten einer Einzelkraft und eines Kräftepaars wieder zusammensetzt. So lehrt es die analytische Mechanik. Anschaulicher und, man möchte sagen, direkter wird die Aufgabe auf geometrischem Wege ohne Zerlegung in Komponenten in folgender Weise durch wiederholte Anwendung der Sätze vom Parallelogramm der Kräfte und der statischen Momente gelöst.

Man denkt sich (vgl. Fig. 1) zwei neue Kraftsysteme dem ursprünglichen $P_1 \cdots P_n$ zugefügt, die dadurch gewonnen

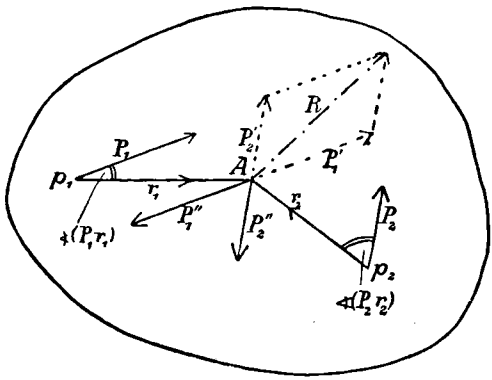

Fig. 1

werden, daß man *in einem und demselben*, aber beliebigen Punkt Kräfte $P_1' \cdots P_n'$ angreifen läßt, die den gegebenen gleich und gleich gerichtet sind, und solche $P_1'' \cdots P_n''$, die ihnen gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Das System $P_1' \cdots P_n'$ setzt man nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte oder, wie man kurz zu sagen pflegt, durch geometrische Addition zu der Resultierenden R zusammen:

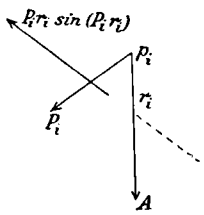

Fig. 2

$$(1) \qquad R = P_1'(+) \cdots (+)\, P_n',$$

wo das Zeichen (+) anzeigen soll, daß die Kräfte geometrisch zu addieren sind, also mit Rücksicht auf die Richtung der Kraft, wie es z. B. auf dem Zeichenbrett geschehen kann. Die beiden anderen Kraftsysteme stellen ein System

von Kräftepaaren dar, deren statische Momente dem absoluten Betrage nach, also abgesehen vom Richtungssinn, den Wert haben:

$$P_i r_i \sin (P_i r_i),$$

wenn r_i die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P_i von dem willkürlich gewählten Angriffspunkt A der resul-

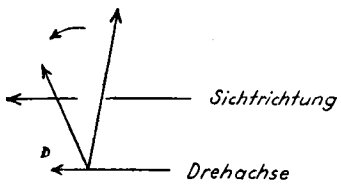

Fig. 2a

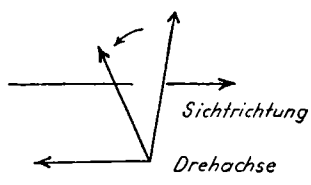

Fig. 2b

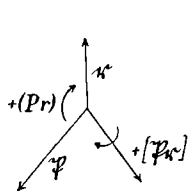

Fig. 2c

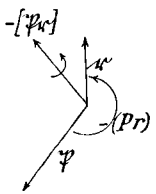

Fig. 2d

tierenden Einzelkraft R bedeutet und nach dem Angriffspunkt der letzteren gerichtet ist, und wenn für den Winkel $(P_i r_i)$ immer der Wert gesetzt wird, der $< \pi$ ist. Die Größe dieser Momente tragen wir als Strecken von dem beliebig gewählten Punkt A aus parallel der Drehungsachse nach der Richtung hin ab, daß die *Drehungsrichtung des Kräftepaares, von dieser Richtung aus betrachtet, positiv, d. h. entgegen der*

Bewegung des Uhrzeigers gerichtet[1]) (vgl. Fig. 2) erscheint. Diese Strecken addieren wir geometrisch in gleicher Weise wie vorher die Kräfte und erhalten als resultierendes statisches Moment:

$$M = [P_1 r_1 \sin (P_1 r_1)] (+) \cdots (+) [P_n r_n \sin (P_n r_n)].$$

Diesen Ausdruck können wir in eindeutiger Weise kürzer auch so schreiben:

$$M = (P_1 r_1) (+) (P_2 r_2) (+) \cdots (+) (P_n r_n), \tag{2}$$

wenn wir unter $(P_i r_i)$ eine Strecke verstehen, deren absoluter Betrag gleich ist dem Produkt: $P_i r_i \sin (P_i r_i)$, und die senkrecht zu der Ebene P_i, r_i nach der Seite der Ebene gerichtet ist, daß der Übergang der Richtung P_i in die Richtung r_i, von der Strecke $(P_i r_i)$ aus gesehen, einer positiven Drehung entspricht.

In Fig. 1 sind die resultierende Einzelkraft R und die beiden Momente $(P_1 r_1)$ und $(P_2 r_2)$ für die beiden an den Punkten p_1, resp. p_2 des starren Körpers angreifenden Kräfte konstruiert worden mit der willkürlichen Wahl des Angriffspunktes A der Resultierenden. Die Punkte p_1, p_2 und A mögen mitsamt der Kraftrichtung P_1 in der Zeichenebene liegen, P_2 sei aus der Ebene heraus nach oben gerichtet. In Fig. 3 ist die Konstruktion des resultierenden statischen Momentes M ausgeführt. Die Zeichenebene ist parallel der Drehungsachse des Kräftepaares $(P_1 r_1)$; die die Momente darstellenden Strecken sind der Größe und Richtung nach von einem Punkt aus abgetragen und ergeben durch geometrische Addition die Strecke M, die der Größe und Richtung nach das resultierende Drehmoment darstellt.

Die Gleichungen (1) und (2) geben eine symbolische Darstellung der geometrischen Konstruktion. Während man in

[1]) In Richtung der Drehachse gesehen erscheint die Drehung in der Bewegung des Uhrzeigers. (Vgl. Fig. 2a—d.)

der analytischen Darstellung nur Strecken gleicher Richtung, die Komponenten, addiert, hat man es hier mit einer Addition von Strecken zu tun, welche sich nicht allein durch ihre Größe, *ihren absoluten Betrag*, sondern auch durch ihre Richtung voneinander unterscheiden, mit welchen also nur unter Rücksichtnahme auf ihre Richtung gerechnet werden darf. Zum Unterschied von reinen Zahlen, „skalaren Größen", bezeichnet man solche Größen, die sich von ihresgleichen durch *Größe und Richtung* unterscheiden können, als *gerichtete Größen oder* Vektoren. Können nun diese

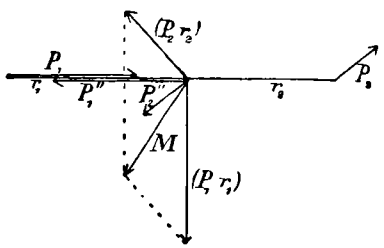

Fig. 3

Symbole auch zur Beschreibung anderer geometrischer Konstruktionen oder gar physikalischer Erfahrungen benutzt werden und lassen sich einfache analytische Rechenregeln für dieselben angeben, die nicht für jeden weiteren Schluß eine Übertragung der Symbole in die gewöhnliche analytische Schreibweise erfordern, so können sie eine brauchbare und infolge der Anlehnung an die Geometrie beträchtlich einfachere Beschreibung liefern als die rein algebraisch analytische Ausführung. In der Tat ist man imstande gewesen, eine Reihe von Rechenregeln abzuleiten, die den Regeln der gewöhnlichen Algebra mit skalaren Größen analog sind. Der Ableitung dieser Regeln, welche die

notwendige Grundlage der Darstellungsmethode durch Vektoren bildet, ist der *erste Teil* dieses Bändchens gewidmet. Zur Übung in der Handhabung der Rechenregeln werden im *zweiten Teil* einige Anwendungen aus physikalischen Gebieten, im Anhang einige Aufgaben besprochen. Endlich soll im *dritten Teil* auf eine wichtige Erweiterung der Vektorrechnung, die Behandlung der linearen Vektorfunktionen (Matrizen, Dyaden) eingegangen werden.

Als die eigentlichen Begründer der Vektorrechnung sind Graßmann und Hamilton zu nennen, die nahezu gleichzeitig und ganz unabhängig voneinander den Vektorbegriff in die analytische Rechnung eingeführt haben, wenn auch in jener Zeit (um 1844) Ansätze zu dieser Methode von anderen versucht worden sind oder schon vorhanden waren, wie in dem „baryzentrischen Kalkül" von Möbius (1828). Mehr als alle anderen waren sich jene beiden der Bedeutung der neuen Methode bewußt. Die Gesichtspunkte, von denen sie ausgingen, sind außerordentlich verschieden, indem Hamilton sich mehr der Geometrie anschloß, während Graßmann die Geometrie nur dazu verwenden wollte, anschauliche Beispiele für seine umfassender angelegte Theorie zu gewinnen. Seine Sätze sollten keine bloßen Übertragungen geometrischer Sätze in die abstrakte Sprache sein, sondern durch Erweiterung auf mehr als dreidimensionale Gebilde eine allgemeine Bedeutung gewinnen. Man unterscheidet dementsprechend zwei Richtungen in der Darstellungsweise der Vektorrechnung, die sich aber in den Anwendungen auf die Geometrie oder physikalische Erkenntnisse aufs engste berühren und zum Teil ergänzen.

I. Teil

Rechenregeln der Vektoranalysis

§ 2. Definition des Vektors und der skalaren Größe

Wir nannten in § 1 die Kräfte und die statischen Momente sowie auch die Resultierenden, die im dreidimensionalen Raum als gerichtete Strecken abgebildet werden können, *Vektoren*. Zur völligen Bestimmung der als erste Beispiele angeführten Vektoren sind drei Angaben, entsprechend den Komponenten in der analytischen Darstel-

lung, hinreichend und notwendig. Drei solche Angaben sind: die Länge des Vektors und die zwei Winkel, die seine Richtung gegen feste Achsen bestimmen. Da es also nur auf die Länge und Richtung der den Vektor darstellenden Strecke ankommen kann, so ist die Darstellung unabhängig von der Lage des Anfangspunktes der Strecke. Soll daher z. B. die Einzelkraft P mit den Komponenten P_x, P_y, P_z, die im Punkt x, y, z eines durch Achsen festgelegten Raumes „A" angreift, in dem dreidimensionalen Bildraum „B" durch eine Strecke dargestellt werden, so ist die Darstellung insofern auf unendlich vielfache Weise möglich, als der Anfangspunkt der darstellenden Strecke mit dem willkürlich gewählten Koordinatenanfangspunkt des Bildraumes „B" zusammenfallen kann oder nicht. In dem Bildraum sind also parallele gleichgerichtete und gleich große Strecken bezüglich ihrer Bedeutung für das dargestellte Objekt völlig äquivalent. Ein Vektor behält danach z. B. seinen Wert (Länge und Richtung) bei Parallelverschiebung des Koordinatensystems, ist *invariant* gegenüber einer solchen Verschiebung. Das gilt nicht von einer Strecke, die z. B. von Punkt A mit den Koordinaten x, y, z zum Anfang des Koordinatensystems führt; sie wird als Ortsvektor oder Fahrstrahl bezeichnet, ist also nicht ein Vektor im strengen Sinne, wenn er auch in der Rechnung wie ein solcher zu behandeln ist. Als Richtung des Fahrstrahls sei im folgenden die vom Anfangspunkt wegweisende angenommen, wenn nicht ausdrücklich anderes gesagt ist.

Wir setzen daher als Definition des Vektors fest:

Eine Größe soll Vektor *genannt werden, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in umkehrbar eindeutiger Weise der Gesamtheit der Strecken im Raum zugeordnet werden kann, die von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt ausgehen*[1]).

[1]) Vektoren sind Strecken — Größen, die durch eine gerichtete Strecke im Raume dargestellt werden können. — Über die Auffassung der Vektoren als *Tensoren 1. Stufe* s. § 43.

Daraus folgt:

Vektoren sind einander gleich, wenn sie durch Parallelverschiebung nach Länge und Richtung zur Deckung gebracht werden können.

Vektoren sind danach außer den genannten, der Kraft und dem statischen Moment, z. B. die folgenden Größen: Verrückung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Feldstärke.

Bei den genannten Größen ist kein Zweifel, daß sie definitionsgemäß als Vektoren anzusprechen sind. Es muß indessen noch auf eine andere Gruppe von Vektoren hingewiesen werden, bei denen die Berechtigung des Namens Vektor nicht sofort erkannt werden könnte.

Der *absolute Betrag* des statischen Moments, d. h. die Größe ohne Bezugnahme auf die Richtung,

$$P_i r_i \sin (P_i r_i),$$

kann aufgefaßt werden als der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten P_i, r_i und dem Winkel $\varphi = (P_i r_i)$. Als Richtung des das statische Moment darstellenden Vektors wurde bei der geometrischen Addition in § 1 die Normalenrichtung auf die durch P_i und r_i gelegte Ebene benutzt. Wir können danach ein Parallelogramm von bestimmter Größe und gegebener Normalenrichtung ebenfalls als einen Vektor ansehen. Es gehören also unter die oben definierten Vektoren auch solche Größen, die vorgestellt werden können als durch den Anfangspunkt gehende, beliebig begrenzte, ebene Flächenstücke.

Endlich ist noch eine dritte Gruppe von Vektoren hervorzuheben, nämlich solche Größen, die unter dem Bilde von unbegrenzten, nicht durch den Anfangspunkt gehenden Ebenen betrachtet werden können. Die Größe und Richtung dieser Vektoren ist offenbar eindeutig definiert durch Größe und Richtung der vom Anfangspunkt auf die Ebene gefällten Normalen.

Zwischen den ursprünglich ins Auge gefaßten Vektoren und den beiden zuletzt hervorgehobenen Gruppen wird ein Unterschied bemerkbar, sobald man von der Vektordarstellung auf Koordinatendarstellung übergehen will und z. B. eine Transformation von einem „positiven" zu einem „negativen" Koordinatensystem ausführen muß, also von einem Koordinatensystem mit den Achsen x, y, z zu einem solchen mit entgegengesetzt gerichteten Achsen; bei einer solchen Transformation wechseln die Komponenten von P das Vorzeichen; die durch P dargestellte Kraft würde durch $-P$ wiedergegeben werden; dagegen würde der das statische Moment darstellende Vektor sein Zeichen nicht ändern, falls wir, wie in § 1, dem Moment stets das positive Zeichen beilegen, wenn die Drehung von der positiven Seite der Drehungsachse aus gesehen positiv, d. h. entgegen der Uhrzeigerbewegung, gerichtet ist.

Man nennt wohl Vektoren, die ihr Vorzeichen bei der genannten Transformation ändern, also etwa durch Pfeile darstellbar sind, polare Vektoren, solche, die es behalten, darstellbar durch Ebenenstücke mit Umlaufsinn oder rotierende dünne Zylinder von bestimmter Länge, axiale Vektoren[1]).

Da in der Rechnung mit Vektoren gerade eben nicht auf ein Koordinatensystem Bezug genommen werden braucht, ist der Unterschied für die *Rechnung* mit Vektoren offenbar bedeutungslos.

Die Abhängigkeit des Vektors vom Ort oder von der Zeit muß natürlich auf den Bildraum selbst oder die den Vektor abbildende Strecke übertragen werden.

Ist in einem Gebiet jedem Punkt ein beliebiger, im allgemeinen stetig mit dem Ort sich ändernder Wert eines Vektors zugeordnet, so nennt man dies Gebiet ein Vektorfeld und spricht in diesem Sinn von Kraftfeld, Momentenfeld, Geschwindigkeitsfeld usw.

Im Gegensatz zu den Vektoren stehen die Größen, zu deren vollständiger Bestimmung nur eine Angabe, *der absolute Betrag*, notwendig ist, weil ihrem Begriff jede Beziehung zu einer Richtung im Raum fehlt. Als Beispiele solcher Größen, der sogenannten *Skalare*, sind an erster

[1]) Die Bezeichnung stammt von W. Voigt. Maxwell (Treatise on electricity and magnetism. London 1873, 1, Art. 15) bezeichnete die Vektoren als transiatorisch und rotatorisch. Wiechert (Ann. Phys. u. Chem. *59*, 1896, S. 187) nannte sie Vektoren und Rotoren.

Stelle die absoluten Beträge der Vektoren zu nennen, d. h. die Längen der Vektoren ohne Rücksicht auf ihre Richtung, ferner Winkel, Temperaturspannen, Zeitspannen u. a.[1]).

Wir nennen eine Größe einen Skalar, *wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann in umkehrbar eindeutiger Weise einer Reihe reeller Zahlen zugeordnet werden kann.* Es sind Größen ohne Richtung[2]).

Um im folgenden durch den Anblick der Zeichen schon erkennen zu lassen, ob eine Größe Vektor oder Skalar ist, wollen wir, wie üblich ist, die Vektoren in der Regel durch *deutsche* kleine oder große Buchstaben bezeichnen, die skalaren Größen i. a. durch *lateinische*. Den absoluten Betrag eines Vektors und den Vektor selbst werden wir i. a. durch gleichlautende Buchstaben angeben.

§ 3. Addition, Subtraktion von Vektoren, Multiplikation der Vektoren mit skalaren Größen

Zwei beliebig gerichtete Strecken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (Fig. 4) werden addiert, indem man den Anfangspunkt der zweiten

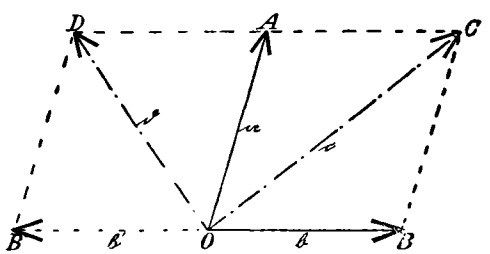

Fig. 4

[1]) Zuweilen wurden auch Größen, die durch Angabe einer sich auf ein Maßsystem beziehenden Zahl bestimmt sind, als Skalare bezeichnet, wie die Temperatur selbst, die Zeit selbst. In dieser allgemeineren Bedeutung ist aber „Skalar" nichts anderes als „Zahl" und die Einführung der Bezeichnung ist überflüssig. Skalare im strengeren Sinne sind bei Änderungen des Bezugssystems *invariant*.

[2]) Skalare als *Tensoren nullter Stufe* s. § 43.

Strecke an den Endpunkt der ersten parallel verschiebt und die Verbindungslinie vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkt der verschobenen zweiten zieht. Diese Verbindungslinie OC, die Summe der beiden Strecken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, ist die vom willkürlich gewählten Anfangspunkt O ausgehende Diagonale des Parallelogramms $OACB$, dessen zwei an den Anfangspunkt der Diagonale stoßende Seiten die von dem Punkte O aus beginnenden Strecken sind.

Da die Vektoren entspr. der Definition durch gerichtete Strecken darzustellen sind, werden Vektoren addiert wie gerichtete Strecken. Operationszeichen für die Addition von Vektoren ist das algebraische Additionszeichen $+$, indem ein Mißverständnis durch die Anwendung der deutschen Buchstaben für Vektoren vermieden werden kann. In Fig. 4 ist

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}. \tag{1}$$

Die Differenz zweier Vektoren ist nichts anderes als die Summe des ersten und des in entgegengesetzter Richtung genommenen zweiten Vektors, also darstellbar durch die von O ausgehende Diagonale des Parallelogramms $OADB'$, dessen an O anstoßende Seiten der erste Vektor und der nach entgegengesetzter Richtung gezeichnete zweite Vektor, also $-\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, sind. Oder es ist also

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{d}. \tag{2}$$

Die beiden Diagonalen des aus den Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *gebildeten Parallelogramms stellen nach Größe und Richtung die Summe resp. die Differenz der zwei Vektoren dar.*

Die Differenz zweier Vektoren ist Null, die Vektoren sind einander gleich, wenn sie gleiche Größe und gleiche Richtung haben. (Vergl. die Folgerung aus der Definition, S. 12).

Aus der Anschauung ergibt sich sofort, daß

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

ist, d. h. das *kommutative* Gesetz gilt.

Die Summe mehrerer Vektoren $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n$ wird gewonnen durch Addition des dritten zu der Summe der ersten beiden, des vierten zu der Summe der ersten drei usw. Da es auch hier auf die Reihenfolge nicht ankommt, so kann die Gruppierung geändert werden, d. h. es gilt auch das *assoziative* Gesetz:

$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) + \mathfrak{a}_3 + \cdots = \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) + \cdots$$

Beispiel: Gleichung (1) können wir schreiben:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c} = 0,$$

oder wenn wir setzen: $-\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$,

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}' = 0.$$

Fassen wir die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}'$ als Kräfte auf, so haben wir den bekannten Satz:

Lassen sich Kräfte, die an einem Punkt angreifen, der Größe und Richtung nach durch solche Strecken darstellen, daß man sie durch parallele Verschiebung zu einem geschlossenen Polygon zusammensetzen kann, so halten sie sich das Gleichgewicht.

Addieren wir m gleiche (d. h. gleich große und gleichgerichtete) Vektoren, so erhalten wir einen Vektor von gleicher Richtung und der m-fachen Länge. Ist der absolute Betrag des Vektors $\mathfrak{a}$ gleich a,

$$|\mathfrak{a}| = a,$$

so stellt $\frac{\mathfrak{a}}{a}$ einen Vektor von gleicher Richtung wie $\mathfrak{a}$ und dem absoluten Betrag 1 dar. Man nennt einen solchen Vektor einen Einheitsvektor[1]). Im allgemeinen ist also ein Vektor das Produkt einer skalaren Größe mit einem Einheitsvektor. Für diese „skalare" Multiplikation gilt, wie aus der Anschauung hervorgeht, ebenfalls wie bei der Addition das kommutative und assoziative Gesetz.

Wir wollen festsetzen, daß die Einheitsvektoren als dimensionslose Größen anzusehen sind. Die Dimension legen wir dem absoluten Betrage bei, der Einheitsvektor gebe allein die Richtung an. Ist z. B. die Geschwindigkeit einer Kugel 400 m/s, und hat die durch die Winkel φ und ϑ gegen feste Achsen bestimmte Richtung, so sagen wir, daß der Einheitsvektor vom absoluten Betrage 1 die

[1]) Statt dessen auch „Einsvektor".

Richtung (φ, ϑ) dieser Geschwindigkeit angibt, während der absolute Betrag der Geschwindigkeit 400 m/s ist.

Die Einheitsvektoren sollen durch einen horizontalen Strich über dem Buchstaben markiert werden, z. B. $\bar{a}$.

§ 4. Zerlegung von Vektoren

Um die Richtung eines Vektors oder der ihn darstellenden Strecke angeben zu können, müssen wir ihn auf zwei willkürlich gewählte Richtungen in dem Bildraum beziehen.

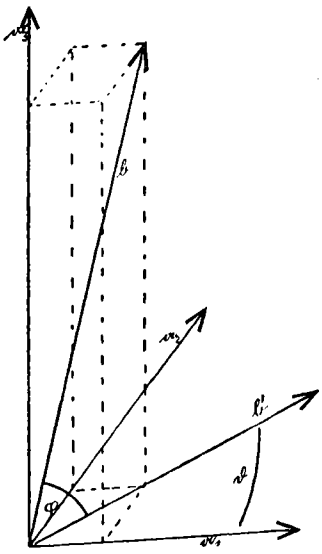

Fig. 5

Wir legen zwei solche Richtungen durch die beiden Einheitsvektoren $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ fest. Dann ist die Richtung eines Vektors $\mathfrak{b}$ gegeben durch den Winkel φ zwischen $\mathfrak{b}$ und seiner recht- oder schiefwinkligen Projektion b' von einer 3. nicht in die Ebene von a_1 und a_2 fallenden Richtung $\bar{a}_3$ aus in die Ebene $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ und durch den Winkel ϑ dieser Projektion gegen einen der beiden Vektoren a_1 oder a_2. Zur völligen Bestimmung des Vektors $\mathfrak{b}$ gehört noch die Angabe des absoluten Betrages (Fig. 5).

An Stelle dieser drei Angaben (φ, ϑ, $|\mathfrak{b}|$) können wir mit Bezugnahme auf die drei Vektoren $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ drei andere Angaben machen: Durch den Endpunkt von $\mathfrak{b}$ legen wir drei Ebenen, die den Ebenen: $\bar{a}_1, \bar{a}_2$; $\bar{a}_2, \bar{a}_3$; $\bar{a}_3, \bar{a}_1$ parallel sind. $\mathfrak{b}$ ist dann eine Diagonale des Parallelepipeds, dessen Kanten $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ den drei Achsen parallel sind, eine Diagonale, die

sich daher durch die mit skalaren Größen multiplizierten drei Einheitsvektoren $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ ausdrücken läßt. Nach § 3 ist diese Diagonale gleich der Summe der drei Seiten. Es ist:

$$\mathfrak{b} = b_1\bar{a}_1 + b_2\bar{a}_2 + b_3\bar{a}_3 .$$

Daraus geht hervor, daß ein Vektor sich durch *drei* nichtkomplanare, willkürliche Einheitsvektoren und skalare Größen bestimmen läßt, — durch *zwei* dann und nur dann, wenn der Vektor in die Ebene dieser beiden Einheitsvektoren fällt, $b_1 = 0$ ist, also:

$$\mathfrak{b} = b_2\bar{a}_2 + b_3\bar{a}_3 ,$$

Bedingung der Komplanarität dreier Vektoren, — durch *einen* dann und nur dann, wenn der Vektor in die Richtung dieses Einheitsvektors fällt, $b_1 = b_2 = 0$ ist, also:

$$\mathfrak{b} = b_3\bar{a}_3 ,$$

Bedingung der Kollinearität. Man nennt die drei Projektionen die Komponenten des Vektors und sagt:

Zur vollständigen Bestimmung des Vektors $\mathfrak{b}$ *im Raume ist hinreichend und notwendig die Angabe von Komponenten des Vektors in drei willkürlich vorgegebenen, nichtkomplanaren Richtungen.*

Die Komponenten, selbst Vektoren in den 3 nicht komplanaren Richtungen, bilden ein Dreibein.

Ein spezieller Fall hiervon ist die Angabe des Vektors durch Komponenten in drei zueinander senkrechten Richtungen, die Darstellung des Vektors in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Die Einheitsvektoren in Richtung dreier willkürlich gewählter, rechtwinklig zueinander stehender Achsen werden in der Regel durch die drei Buchstaben i, j, $\mathfrak{k}$ wiedergegeben (und wenn mehrere derartige Achsensysteme in einer Entwicklung vorkommen, durch i′, i″ usw. oder i*).

Die Vektoren i, j, $\mathfrak{k}$ bilden ein normiertes Dreibein.

Jeder Vektor ist also in der Form darstellbar:

$$\mathfrak{b} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k},$$

wo x, y, z skalare Größen bedeuten.

Diese skalaren Größen selbst, und damit die Komponenten in 3 willkürlich vorgegebenen Richtungen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ oder $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, vektoriell zu finden, kann erst später (in §7, §13 und § 15) gelehrt werden.

§ 5. Gleichungen zwischen Vektoren

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich die folgenden Sätze:

1. Zwei Vektoren sind einander gleich dann und nur dann, wenn die sie definierenden drei Bestimmungsstücke paarweise einander gleich sind. Eine lineare Gleichung zwischen Vektoren ist somit drei Gleichungen zwischen skalaren Größen, d. h. drei gewöhnlichen algebraischen Gleichungen, äquivalent.

2. Die Gleichung:

$$\mathfrak{a}_1 = x\mathfrak{a}_2 + y\mathfrak{a}_3$$

ist bei variablem x und y die vektoranalytische Darstellung einer Ebene, die die beiden Vektoren $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ enthält, denn sie stellt die Gesamtheit aller in dieser Ebene liegenden Geraden dar.

$$\mathfrak{a}_1 = x\mathfrak{a}_2 + y\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4$$

ist die Gleichung einer Ebene, die den Vektoren $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ parallel ist und durch den Endpunkt von $\mathfrak{a}_4$ geht.

3. Ferner ist

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 + x\mathfrak{a}_3$$

der Ausdruck einer zu $\mathfrak{a}_3$ parallelen, durch den Endpunkt von $\mathfrak{a}_2$ hindurchgehenden Geraden.

4. Die Endpunkte von drei (bzw. vier) von demselben Ausgangspunkt ausgehenden Vektoren liegen in einer Geraden (bzw. Ebene), wenn zwischen den drei (bzw. vier) Vektoren eine lineare Gleichung existiert, in der die Summen aller Vektorkomponenten zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich sind.

Denn liegt der Endpunkt von $\mathfrak{a}_1$ auf der Geraden durch die Endpunkte von $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ (bzw. in der Ebene durch die Endpunkte von $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$), so gilt:

$$x(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3) = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_3$$
$$[\text{bzw. } x(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_4) + y(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_4) = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_4].$$

In diesem Lehrsatz lassen sich Haupt- und Nebensatz miteinander vertauschen.

Beispiel. Es soll gezeigt werden, daß die Diagonale eines Parallelogramms im Verhältnis von $n:1$ durch die Verbindungslinie einer Ecke mit dem $(n-1)$ten Teil der Gegenseite geteilt wird.

In Fig. 6 sei

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{n-1}\mathfrak{a}_2, \qquad \mathfrak{c} = \frac{1}{x}\mathfrak{b}_1.$$

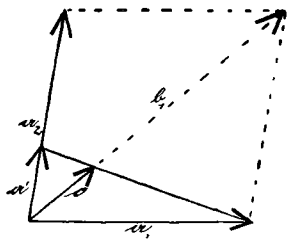

Fig. 6

Nach Voraussetzung ist

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2,$$

oder

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 + (n-1)\,\mathfrak{a}'.$$

Da der Endpunkt von $\mathfrak{c}$ so gewählt werden soll, daß er auf der Geraden durch die Endpunkte von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}'$ liegt, so muß nach dem eben ausgesprochenen Satz

$$x = 1 + (n-1) = n$$

sein, was zu beweisen war.

§ 6. Multiplikation von Vektoren

Die Multiplikation skalarer Größen untereinander oder mit Vektoren folgt den Regeln der gewöhnlichen Algebra (vgl. § 3), es gilt das *assoziative* und *kommutative* Gesetz, d. h. es ist

$$m(n\mathfrak{a}) = n(m\mathfrak{a}) = (mn)\,\mathfrak{a},$$

wie auch das *distributive* Gesetz, d. h. es ist

$$m(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = m\mathfrak{a} + m\mathfrak{b}$$

und

$$(m + n)\,\mathfrak{a} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{a}.$$

Die Multiplikation von Vektoren untereinander folgt anderen Regeln. Um diese abzuleiten, gehen wir von der Erfahrung aus, auf die sie ja anwendbar sein soll.

1. Das Produkt aus der der Größe und Richtung nach gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$ und der in gleicher Weise gegebenen

Wegstrecke $\mathfrak{s}$, längs welcher sie wirkt, bestimmt der Größe nach eine Arbeit:

$$A = Ps \cos(\mathfrak{P}\mathfrak{s}).$$

2. Das Produkt aus einer Kraft $\mathfrak{P}$, die an einem Punkt eines um einen Punkt drehbaren Körpers angreift, und der Entfernung $\mathfrak{r}$ der beiden Punkte bestimmt der Größe und Richtung nach einen Vektor, das statische Moment $\mathfrak{M}$; der absolute Betrag desselben ist

$$M = Pr \sin(\mathfrak{P}\mathfrak{r});$$

seine Richtung ist senkrecht zur Ebene $(\mathfrak{P}, \mathfrak{r})$ und zwar so, daß die kürzeste Drehung der Kraftrichtung in die Richtung: Angriffspunkt → Drehpunkt, von der positiven Seite der Drehungsachse gesehen, entgegen dem Sinn des Uhrzeigers verläuft, in Übereinstimmung mit der Festsetzung in § 1.

Aus dem 1. Beispiel folgt:

Das Produkt zweier Vektoren kann eine skalare Größe sein, deren Betrag gleich ist dem Produkt der absoluten Beträge der zwei Vektoren, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen den beiden Richtungen der Vektoren, oder gleich dem Produkt des absoluten Betrages des einen Vektors und der Projektion des anderen auf die Richtung des ersteren.

Aus dem 2. Beispiel folgt:

Das Produkt zweier Vektoren kann einen neuen Vektor darstellen, dessen absoluter Betrag gleich dem Flächeninhalt des aus den Vektoren als Seiten gebildeten Parallelogramms ist, und dessen Richtung senkrecht zu der Ebene der beiden Vektoren zeigt und nach der Seite, daß für einen, der in dieser Richtung steht, die kürzeste Drehung des bei Angabe des Produktes zuerst genannten Vektors in die Richtung des anderen entgegen dem Sinn des Uhrzeigers verläuft.

Das erste Produkt bezeichnet man als skalares Produkt[1]) mit der symbolischen Schreibweise $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ oder $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$; das zweite führt den Namen vektorielles Produkt oder Vektorprodukt[2]) mit dem im folgenden benutzten Symbol $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ oder $[\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}]$ oder $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ oder dem jetzt wieder häufiger gebrauchten $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

§ 7. Skalares Produkt

1. Aus der Definition des skalaren Produktes:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

folgt unmittelbar die Gültigkeit des *kommutativen* Gesetzes:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}, \tag{1}$$

da $\cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \cos(\mathfrak{b}\mathfrak{a})$ ist.

Für die Multiplikation mit skalaren Größen besteht das *assoziative* Gesetz, es ist

$$(x\mathfrak{a})\,\mathfrak{b} = x(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = x\,|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

da das assoziative Gesetz für die Multiplikation der absoluten Beträge nach den Regeln der Algebra Gültigkeit besitzt. Endlich ergibt sich aus der Definition des skalaren Produktes und der Tatsache, daß die Summe der Projektionen von Strecken auf eine Strecke gleich der Projektion der Summe der Strecken ist, das distributive Gesetz:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

2. *Das skalare Produkt eines Vektors mit einem Einheitsvektor ist nichts anderes als die senkrechte Projektion des Vektors*

[1]) Die Bezeichnung geht auf Hamilton zurück, er benutzte für den negativ genommenen Betrag das Symbol:

$$S\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b});$$

Graßmann nannte dasselbe inneres Produkt und schrieb $[\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}]$; Gibbs sprach von einem „direct product", oder „dot product", $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ oder $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$; Heaviside schrieb $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

[2]) Graßmann: äußeres Produkt, $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$; Hamilton: vektorieller Teil des Quaternionenproduktes, $V\mathfrak{a}\mathfrak{b}$; Gibbs: Vektorprodukt oder „skew product" oder „cross product", $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

auf die Richtung des Einheitsvektors. Das skalare Produkt zweier Einheitsvektoren ist gleich dem Kosinus des Winkels zwischen ihren Richtungen. Die Gleichung:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0 \tag{2}$$

zwischen zwei Vektoren von endlichem Betrag ist somit der *Ausdruck dafür, daß die Vektoren senkrecht zueinander stehen* (Bedingung der Orthogonalität).

Um nicht Widerspruch mit der definitionsmäßig geforderten Regel der Algebra zu empfinden, nach welcher ein Produkt nur verschwinden kann, wenn einer der Faktoren Null ist, müssen wir uns immer daran erinnern, daß das Zeichen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ oder $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein Symbol ist und nicht Produkt der beiden Größen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, sondern das Produkt der einen mit der Projektion der anderen auf die erste darstellt.

Fallen die Richtungen der Vektoren zusammen, so ist das skalare Produkt der Vektoren gleich dem Produkt der absoluten Beträge. Im besonderen ist

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = a^2. \tag{3}$$

$\mathfrak{a}^2$ wird als *Norm* des Vektors $\mathfrak{a}$ bezeichnet.

Hieraus folgen für die Einheitsvektoren in 3 zueinander senkrechten Achsenrichtungen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} &= 1, \\ \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Sind die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ausgedrückt,

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}, \\ \mathfrak{b} &= b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}, \end{aligned} \tag{5}$$

so kann auf Grund der Gleichungen (4) das skalare Produkt geschrieben werden:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{6}$$

und

$$\mathfrak{a}^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$