SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 999/999a

MENGENLEHRE

von

DR. E. KAMKE†

ehem. o. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen

Mit 6 Figuren

5. Auflage

WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

BERLIN 1965

Archiv-Nr. 77 11 647. — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin 30. — Printed in Germany.

Inhalt

I. Aus den Anfängen der Mengenlehre

II. Über beliebige Mengen und ihre Kardinalzahlen

III. Bemerkungen über die Begründung der Mengenlehre

IV. Über geordnete Mengen und ihre Ordnungstypen

I. Aus den Anfängen der Mengenlehre

§ 1. Der Begriff der Menge und eine erste Einteilung der Mengen

Die Mengenlehre (theory of sets, théorie des ensembles) ist durch Georg Cantor (1845–1918) begründet und schon von ihm selbst zu einem bewundernswerten Lehrgebäude entwickelt worden. Sie hat durch ihre Begriffsbildungen, die ihr innewohnenden Ideen und die in ihr enthaltene Problematik fast alle Teile der Mathematik neu befruchtet oder gar zu neuen Disziplinen geführt. Als Beispiele seien genannt die Theorie der Punktmengen, die neuere Theorie der reellen Funktionen, die Topologie, die Funktionalanalysis, die moderne Algebra. Sie hat aber auch über die Mathematik hinaus der wissenschaftlichen Logik und Erkenntnistheorie neue Impulse gegeben. Hier sollen die Grundzüge der allgemeinen oder abstrakten Mengenlehre dargestellt werden; die Theorie der Punktmengen soll nur gestreift werden.

Im gewöhnlichen Leben denkt man bei einer Menge von Dingen immer nur an endlich viele und zwar mindestens zwei Dinge. In der Mengenlehre wird der Begriff weiter gefaßt. Nach G. Cantor ist unter einer **Menge** M zu verstehen „eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen".

Z. B. bilden die Primzahlen zwischen 1 und 100 eine Menge von 25 Elementen. Die sämtlichen geraden Zahlen eine Menge von unendlich vielen Elementen. Die Eckpunkte eines Quadrats eine Menge von 4 Elementen. Die Punkte eines Kreises eine Menge von unendlich vielen Elementen.

Bei einer Menge soll es, falls nichts Gegenteiliges gesagt ist, auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommen. Es ist also z. B. die aus den Elementen 1, 2, 3 bestehende Menge[1]) $\{1, 2, 3\}$ dieselbe Menge wie $\{3, 1, 2\}$ oder $\{2, 3, 1\}$. Ferner soll dasselbe Element nicht mehrfach vorkommen dürfen. Der Zahlenkomplex 1, 2, 1, 2, 3 wird also erst nach Fortlassen der mehrfach angeführten Elemente zu einer Menge, nämlich $\{1, 2, 3\}$.

Was die „wohlunterschiedenen Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens" betrifft, von denen in der obigen Erklärung die Rede ist, so werden sie keineswegs so phantastische Dinge wie die Gedanken Caesars oder die Träume eines Menschen sondern mathematische Objekte sein, wie sie schon bei den obigen Beispielen auftraten oder sich aus solchen aufbauen lassen.

Zwei Mengen M und N werden als **gleich** bezeichnet, in Zeichen $M = N$, wenn sie dieselben Elemente enthalten, d. h. wenn jedes Element von M auch Element von N ist und umgekehrt jedes Element von N auch zu M gehört. Es ist also z. B. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$. $M \neq N$ soll bedeuten, daß M nicht gleich N ist. Wenn m ein Element von M ist, schreibt man auch $m \in M$ (lies: m ist Element von M), während $m \notin M$ oder $m \bar{\in} M$ bedeuten soll, daß m nicht Element von M ist.

Die Grundbegriffe der Mengenlehre sind nach dem Vorangehenden „Menge" und „Element" sowie die Beziehungsaussage „ein Ding a ist Element einer Menge b". Diese Begriffe sind so allgemein, daß es schwierig ist, sie nach Art anderer mathematischer Begriffe auf allgemeinere, hinreichend klar umrissene Begriffe zurückzuführen. Es ist weder hier noch später beabsichtigt, die Grundlegungen der Mengenlehre erschöpfend zu diskutieren, da das den Rahmen dieses Bändchens sprengen würde. Vielmehr wird bewußt an der sog. naiven Mengenlehre Cantors festgehalten, wobei allerdings die Wege zu Widersprüchen abgeschnitten werden, auf Schwierigkeiten bei passender Gelegenheit hingewiesen wird und Hinweise auf genauere Begründungen gegeben werden. Da die oben wiedergegebene Erklärung Cantors tatsächlich zu Miß-

[1]) Mengen werden vielfach dadurch bezeichnet, daß ihre Elemente in geschweifte Klammern gesetzt werden.

verständnissen und zu der Bildung sinnloser Mengen geführt hat, sei sie hier wie folgt erläutert:

a) Es sei $\mathfrak{E}$ eine wohldefinierte Eigenschaft[1]), die mindestens einem „Ding“ zukommt oder eine Aussage, die für mindestens ein Ding wahr ist; ferner sei die Gesamtheit der „Dinge“ m mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ eine wohlbestimmte Gesamtheit[2]).

b) Durch den Akt der Definition wird die Gesamtheit der „Dinge“ m mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ als ein neues „Ding“ eingeführt und „Menge“ M oder $M(m)$ genannt; die Dinge m heißen „Elemente“ von M: $m \in M$.

Ist z. B. $\mathfrak{E}$ die Eigenschaft „natürliche Zahl“, so ist M die Menge der natürlichen Zahlen. Ist $\mathfrak{E}$ die Eigenschaft „gerade Primzahl“, so besteht die Menge nur aus einem Element, nämlich der Zahl 2. Eine Eigenschaft $\mathfrak{E}$ kann auch besagen, daß die Elemente der Menge M bestimmt angegebene Dinge, z. B. die Zahlen 1, 2, 3 sein sollen, also $M = \{1, 2, 3\}$.

Sind einmal aus gegebenen Dingen gewisse Mengen definiert (Mengen erster Stufe; ihre Elemente: „Urelemente“), so kann man diese Mengen (neben Urelementen) wiederum als Elemente neuer Mengen (Mengen zweiter Stufe) nehmen. Hat man z. B. schon die Mengen $\{1\}$, $\{1, 2\}$ gebildet, so kann man die Menge zweiter Stufe $\{\{1\}, \{1, 2\}, 3\}$ und auch Mengen beliebig hoher endlicher Stufe wie z. B. $\{1\}, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}, \ldots$ bilden.

Da durch die Bildung der Menge ein neues Ding, ein neuer Begriff geschaffen werden soll (wie z. B. die komplexe Zahl durch ein geordnetes Paar reeller Zahlen), ist die Menge als verschieden von jedem ihrer Elemente anzusehen, und zwar soll dieses auch dann gelten, wenn die Menge nur aus einem Element besteht. In Zeichen gilt also: aus $m \in M$ folgt $m \neq M$, und insbesondere ist stets $m \neq \{m\}$. Hiernach sind die folgenden „Mengen“ sinnlos, da in sich widerspruchsvoll:

(α) jede Menge, die sich selbst als Element enthält;

(β) die Menge aller Mengen, da sie sich selbst als Element enthalten müßte;

---

[1]) Für die hierin liegende Schwierigkeit s. § 18.

[2]) Ob das zutrifft, ist mit der auch sonst in der Mathematik üblichen Sorgfalt zu untersuchen.

(γ) die Menge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten (Russell), da sie nach dem Vorangehenden nichts anderes als die in (β) genannte Menge ist[1]).

Daß eine grammatikalisch richtige Wortzusammenstellung in Wirklichkeit sinnlos sein kann, ist übrigens ja wohlbekannt (viereckiger Kreis).

Eine erste grobe Einteilung der Mengen unterscheidet **endliche** und **unendliche (transfinite) Mengen,** je nachdem die Mengen endlich viele oder nicht endlich viele Elemente enthalten. Unter den unendlichen Mengen wird die Menge der natürlichen Zahlen, die man sich in der natürlichen Reihenfolge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ gegeben denken kann, besonders hervorgehoben und eine **abzählbare Menge** genannt. Allgemeiner heißt eine unendliche Menge M genau dann abzählbar, wenn sie sich als Folge $\{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ schreiben läßt; d. h. wenn jedem Element m der Menge eine natürliche Zahl so zugeordnet werden kann, daß jedem Element der Menge genau eine natürliche Zahl und jeder natürlichen Zahl genau ein Element der Menge entspricht.

Die in sämtlichen Druckereien der Erde befindlichen Lettern bilden eine endliche Menge, wenn auch die Anzahl der Elemente „sehr groß“ sein mag. Dasselbe gilt von der Anzahl der Bände in der „Universalbibliothek“ von K. Lasswitz (Traumkristalle), bei welcher der Bibliothekar, selbst wenn er mit Lichtgeschwindigkeit an der Bücherreihe entlang saust, erst in $10^{1\,999\,982}$ Jahren bis zum letzten Bande gekommen wäre. Die Primzahlen bilden eine abzählbare Menge. Ebenso die Menge aller geraden Zahlen, da man sie als Folge

$$\{0, -2, +2, -4, +4, \ldots\}$$

schreiben kann.

Ist eine Menge endlich oder abzählbar, so möge sie **höchstens abzählbar** heißen. Ist sie weder endlich noch abzählbar, so heiße sie **nichtabzählbar.**

---

1) Man kann auch so argumentieren: Die Menge müßte (logische Disjunktion) entweder sich selber als Element enthalten oder nicht; nach ihrer „Definition“ würde sie dann aber im ersten Fall sich nicht als Element enthalten dürfen und im zweiten Fall sich gerade als Element enthalten müssen.

§ 2. Drei bemerkenswerte Beispiele von abzählbaren Mengen

Schon in einer seiner ersten Arbeiten über Mengenlehre hatte G. Cantor die Abzählbarkeit von zwei Mengen bewiesen, denen man diese Eigenschaft kaum auf den ersten Blick ansieht.

Satz 1: Die Menge aller rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis: Beschäftigen wir uns zunächst nur mit den positiven rationalen Zahlen, so können wir uns der Größe nach erst alle ganzen Zahlen, d. h. alle Zahlen mit dem Nenner 1, dann alle Brüche mit dem Nenner 2, dann alle Brüche mit dem Nenner 3, usf. aufgeschrieben denken. Es entstehen so die Zahlenfolgen:

$$\begin{array}{lllll}
1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\
\frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, & \ldots \\
\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, & \ldots \\
\frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Schreibt man die Zahlen in der durch den eingezeichneten Linienzug angegebenen Reihenfolge auf (wobei schon vorgekommene Zahlen ausgelassen werden), so kommt jede positive rationale Zahl sicher vor und auch nur einmal; die Gesamtheit dieser rationalen Zahlen erscheint also als Folge

$$1, 2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 3, 4, \tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots$$

geschrieben. Bezeichnet man diese Folge mit $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$, so ist offenbar $\{0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \ldots\}$ die Menge aller rationalen Zahlen, womit die Abzählbarkeit dieser Menge bewiesen ist.

Für den zweiten Satz von Cantor, der die Abzählbarkeit einer noch „umfangreicheren“ Zahlenklasse behauptet, wird an die Definition der **algebraischen Zahl** erinnert. Unter einer solchen versteht man eine Zahl, die Nullstelle eines Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ist, bei dem $a_n \neq 0$ ist und alle a_k ganze rationale Zahlen sind. Zu den algebraischen Zahlen gehören u. a. alle rationalen Zahlen und alle Wurzeln aus solchen.

Satz 2: Die Menge aller algebraischen Zahlen ist abzählbar.

Beweis[1]): Es sei $f(x)$ ein Polynom der eben beschriebenen Art, und überdies, was keine Einschränkung der Allgemeinheit ist, $a_n > 0$. Unter der „Höhe des Polynoms" werde die positive Zahl

$$h = n + a_n + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$$

verstanden. Die Höhe ist offenbar eine ganze Zahl $\geqq 1$. Dieselbe Höhe besitzen nur endlich viele Polynome, da $n \leqq h$ und jedes $|a_k| \leqq h$ ist. Daher gibt es auch zu jeder Höhe nur endlich viele algebraische Zahlen. Dadurch ist es möglich, alle algebraischen Zahlen als Folge zu schreiben. Zuerst werden alle bei der Höhe 2 sich ergebenden algebraischen Zahlen aufgeschrieben. Da es an Polynomen mit der Höhe 2 nur x und 2 gibt, bekommt man als einzige Zahl 0. Die Polynome mit der Höhe 3 sind $x^2, 2x, x+1, x-1, 3$. Diese liefern als neue Nullstellen -1 und $+1$. Die Polynome mit der Höhe 4 liefern als neue Nullstellen, der Größe nach geordnet: $-2, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +2$. Die Höhe 5 liefert $-3, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, 3; usf. Man erhält so, indem man die Höhe die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen läßt und zu jedem Höhenwert die neu hinzukommenden endlich vielen algebraischen Zahlen aufschreibt, eine Folge von verschiedenen algebraischen

[1]) Wir beschränken uns hier auf die reellen algebraischen Zahlen. Satz und Beweis gelten aber auch für komplexe algebraische Zahlen.

Zahlen; und da jedes Polynom eine Höhe hat, werden auch alle algebraischen Zahlen in der Folge aufgeführt. Damit ist aber der Satz bewiesen.

Daß der Begriff der abzählbaren Menge auch bei Funktionen wertvolle Aussagen liefert, zeigt der

Satz 3: Jede in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$ monotone Funktion $f(x)$ ist an höchstens abzählbar vielen Stellen dieses Intervalls unstetig.

Beweis: Es genügt, den Beweis für monoton *zu*nehmende Funktionen zu führen. Ist $f(x)$ eine solche Funktion, so ist sie in einem Punkte ξ genau dann unstetig, wenn[1])

$$\sigma(\xi) = f(\xi + 0) - f(\xi - 0) > 0$$

ist, wobei $f(a - 0) = f(a)$, $f(b + 0) = f(b)$ sein soll. Ist

$$a < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_p < b$$

und sind $x_1, \ldots, x_{p-1}$ Zahlen in den Intervallen

$$\xi_\nu < x_\nu < \xi_{\nu+1}$$

und ist schließlich $x_0 = a$, $x_p = b$, so ist

$$f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) \geqq f(\xi_\nu + 0) - f(\xi_\nu - 0) = \sigma(\xi_\nu),$$

also $\quad f(b) - f(a) = \sum_{\nu=1}^{p} \big(f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\big) \geqq \sum_{\nu=1}^{p} \sigma(\xi_\nu).$

Sind nun die ξ_ν Zahlen mit $\sigma(\xi_\nu) > \frac{1}{n}$, so folgt

$$p < n\big(f(b) - f(a)\big),$$

d. h. die Anzahl der Unstetigkeitsstellen ξ mit $\sigma(\xi) > \frac{1}{n}$ hat eine feste obere Grenze. Dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ gehören daher auch bei Berücksichtigung der Endpunkte höchstens

[1]) Wie üblich bedeute $f(\xi - 0)$ den linksseitigen und $f(\xi + 0)$ den rechtsseitigen Limes von $f(x)$ an der Stelle ξ.

endlich viele Unstetigkeitspunkte ξ mit $\sigma(\xi) > \frac{1}{n}$ an. Die Gesamtheit der Unstetigkeitsstellen läßt sich somit als Folge schreiben, indem man erst die endlich vielen Unstetigkeitsstellen ξ mit $\sigma(\xi) > 1$ aufschreibt, dann die neu hinzukommenden mit $\sigma(\xi) > \frac{1}{2}$, dann die neu hinzukommenden mit $\sigma(\xi) > \frac{1}{3}$, usf. Da zu jeder Unstetigkeitsstelle ξ eine gewisse positive Zahl $\sigma(\xi)$ gehört, kommt in dieser Folge jede Unstetigkeitsstelle vor, und zwar genau einmal; womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 3. Beispiel einer nichtabzählbaren Menge

Die Unterscheidung der Mengen in abzählbare und nichtabzählbare bekommt erst dann einen Sinn, wenn die Existenz von nichtabzählbaren Mengen bewiesen ist. Wir beweisen daher den folgenden

Satz: Die Menge aller reellen Zahlen des Intervalls $0 < x \leqq 1$ ist nichtabzählbar. Oder anders formuliert: Zu jeder Folge $a_1, a_2, \ldots$ von verschiedenen reellen Zahlen $0 < a_n \leqq 1$ gibt es eine reelle Zahl d $(0 < d \leqq 1)$, die von jedem dieser a_ν verschieden ist.

Beweis: Die erste Formulierung folgt aus der zweiten durch den indirekten Schluß: Wenn die Menge aller reellen Zahlen des Intervalls $0 < x \leqq 1$ abzählbar wäre, d. h. sich als Folge $a_1, a_2, \ldots$ schreiben ließe, gäbe es nach der zweiten Formulierung doch noch eine weitere reelle Zahl $0 < d \leqq 1$. Man braucht also nur die zweite Formulierung zu beweisen.

Dieser Beweis wird durch ein sog. Diagonalverfahren geführt; es möge **Cantors** oder **zweites**[1]) **Diagonalverfahren** heißen. Jede Zahl $0 < x \leqq 1$ läßt sich als unendlicher Dezimalbruch $0{,}x_1 x_2 x_3 \ldots$ schreiben (z. B. $\frac{1}{2} = 0{,}499\ldots$; $1 = 0{,}999\ldots$), und zwar auf genau eine Art. Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ ergeben somit eine Folge derartiger Dezimalbrüche:

---

[1]) Das erste Diagonalverfahren (von Cauchy) kommt in § 4 vor.

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{lllll} 0, & \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ 0, & a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} & \ldots \\ 0, & a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

Wir bilden nun aus der durch den Strich bezeichneten Hauptdiagonale den unendlichen Dezimalbruch $0, a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots$ und hieraus einen neuen Dezimalbruch, indem jede Ziffer a_{nn} durch eine beliebige Ziffer b_n ersetzt wird, die $\neq a_{nn}$ und $\neq 0$ ist. Für den so entstehenden Dezimalbruch $d = 0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$ gilt dann auch $0 < d \leqq 1$. Ferner bricht er wegen des Fehlens von Nullen nicht ab, und es ist d verschieden von jedem a_n, da der Dezimalbruch eines jeden a_n von dem Dezimalbruch für d sicher in der n-ten Ziffer abweicht.

§ 4. Untermenge, Summe und Durchschnitt von Mengen, insbesondere von abzählbaren Mengen

Die Überlegungen, die im § 2 zu der Abzählbarkeit der Menge aller rationalen Zahlen geführt haben, liefern darüber hinaus einen allgemeinen Satz, der für die Feststellung der Abzählbarkeit einer Menge oft mit Vorteil verwendet werden kann. Bevor dieser Satz formuliert wird, mögen einige neue Begriffe eingeführt werden, die uns im folgenden immer wieder begegnen werden.

Es sei eine Menge M gegeben. Dann heißt die Menge N **Untermenge** oder **Teilmenge** von M, in Zeichen $N \leqq M$, und M eine **Obermenge** zu N, in Zeichen $M \geqq N$, wenn jedes Element von N zugleich Element von M ist, d. h. wenn aus $n \in N$ stets $n \in M$ folgt. Hiernach ist z. B. jede Menge eine Untermenge von sich selbst, und zwar nennt man sie eine **unechte Untermenge.** Dagegen heißt N eine **echte Untermenge** von M, in Zeichen $N < M$, wenn N Untermenge von M

und $N \neq M$ ist. Die Menge derjenigen Elemente von M, die nicht zugleich der Menge N angehören, nennt man die zu N gehörige **Restmenge** R oder die zu N **komplementäre Menge** von M oder **Differenz** $R = M - N$[1]. Damit diese Definition auch für den Fall gültig ist, daß N eine unechte Untermenge von M ist, führen wir, wie man die unendlich fernen Punkte in der Geometrie als uneigentliche Punkte einführt und wie man einmal die Null als uneigentliche Zahl[2] in das Zahlensystem eingeführt hat, auch hier eine uneigentliche Menge ein, die sogenannte **Nullmenge** oder **leere Menge**, die wir mit $\emptyset$ bezeichnen. Die Nullmenge soll zu den endlichen Mengen gerechnet werden und soll Untermenge von jeder Menge, insbesondere auch von sich selbst sein. $M > \emptyset$ bedeutet dasselbe wie $M \neq \emptyset$, d. h. daß M mindestens ein Element enthält. $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{0\}$ sind natürlich zu unterscheiden.

Beispiele: Die Randpunkte $x^2 + y^2 = 1$ bilden eine echte Untermenge der Punkte des Kreises $x^2 + y^2 \leqq 1$; ihre komplementäre Menge in bezug auf diesen Kreis wird von den inneren Punkten $x^2 + y^2 < 1$ des Kreises gebildet; die Menge der Punkte mit $x^2 + y^2 = -1$ ist leer. Die Menge der rationalen Zahlen ist eine Untermenge der Menge aller reellen Zahlen; die komplementäre Menge wird von den irrationalen Zahlen gebildet.

Es sei eine abzählbare Menge $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ gegeben und $\emptyset < N \leqq M$. Dann gibt es in der Folge M ein erstes Element m_{k_1}, das zu N gehört; es sei $n_1 = m_{k_1}$. Auf dieses folgt wieder ein erstes Element m_{k_2} in M, das zu N gehört; es sei $n_2 = m_{k_2}$; usf. Das Verfahren bricht ab oder nicht, je nachdem N endlich ist oder nicht. Da M alle Elemente von N (und evtl. noch mehr) enthält, umfaßt die evtl. abbrechende

[1] Sierpiński und andere wenden diese Erklärung auch dann an, wenn nicht $N < M$ ist; also z. B. $\{1, 2, 3\} - \{3, 4\} = \{1, 2\}$. Hier soll in diesem Fall die Differenz mit $M \dot{-} N$ bezeichnet werden; mit der Durchschnittsbildung von S. 15 ist $M \dot{-} N = M - MN$.

[2] Hier ist an die historische Entwickelung des Zahlbegriffes gedacht, nicht etwa an die Rolle, welche die Zahl 0 bei einem axiomatischen Aufbau des Zahlensystems spielt.

Folge $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ genau die Elemente von N. Daher ist N endlich oder abzählbar. Es gilt somit der

Satz 1: Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.

Z. B. ist hiernach die Menge aller algebraischen Zahlen, die irreduzibeln Gleichungen mit Primzahlgrad genügen, abzählbar als Teil der Menge aller algebraischen Zahlen. Die Menge der positiven Brüche, die sich als Summe von drei Biquadraten rationaler Zahlen darstellen lassen, ist abzählbar als Teilmenge der Menge aller rationalen Zahlen.

Satz 2: Jede unendliche Menge M hat eine abzählbare Untermenge.

Beweis: Man wähle in M ein beliebiges Element m_1. Da M eine unendliche Menge ist, gibt es in $M - \{m_1\}$ ein Element m_2, ebenso in $M - \{m_1, m_2\}$ ein Element m_3, usw. Man erhält so eine abzählbare Untermenge $\{m_1, m_2, \ldots\}$ von M.

Unter der **Vereinigungsmenge** oder **Summe** S von endlich vielen oder von unendlich vielen Mengen versteht man die Menge derjenigen Elemente, die mindestens einer der Mengen angehören. Die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbar vielen Mengen $M_1, M_2, \ldots$ schreibt man in einer der Gestalten

$$S = M_1 + M_2 + \cdots = M_1 \cup M_2 \cup \cdots = \sum_k M_k = \bigcup_k M_k.$$[1]

Unter dem **Durchschnitt** D oder dem **inneren Produkt** oder **Produkt erster Art** von Mengen M_k versteht man die Menge derjenigen Elemente, die jeder der Mengen M_k angehören, in Zeichen:

$$D = D(M_1, M_2, \ldots) = M_1 \cdot M_2 \cdots = M_1 M_2 \cdots = \prod_k M_k$$
$$= M_1 \cap M_2 \cap \cdots = \bigcap_k M_k.$$

[1]) Die Zeichen $\cup$, $\bigcup$ mögen an „und“, „Vereinigung“ erinnern. — Im Aussagenkalkül bedeuten die entsprechend zu $\cup$, $\cap$ gebildeten Zeichenverbindungen $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$, daß mindestens eine der Aussagen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a}$ „oder“ $\mathfrak{b}$) bzw. daß beide Aussagen ($\mathfrak{a}$ „und“ $\mathfrak{b}$, d. h. sowohl $\mathfrak{a}$ als auch $\mathfrak{b}$) gelten.

Diese Begriffe lassen sich unmittelbar auf beliebige Mengen von Mengen übertragen. Bei der Summenbildung werden etwaige Nullmengen unberücksichtigt gelassen, und die Summe von Nullmengen soll die Nullmenge sein. Ist bei der Durchschnittsbildung eine der Mengen leer, so soll $D = \emptyset$ sein; ebenso wenn die Mengen kein Element gemeinsam haben. Ist für je zwei der betrachteten Mengen der Durchschnitt $\emptyset$, so heißen die Mengen **elementenfremd** oder auch kurz **fremd** zueinander.

Beispiele: Ist $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $N = \{5, 7, 9\}$, so ist $M + N = M$ und $M \cdot N = N$. Ist M die Menge der geraden und N die Menge der ungeraden Zahlen, so ist $M + N$ die Menge aller ganzen Zahlen und $M \cdot N = \emptyset$. Die beiden Kreise in Fig. 1 haben zur Summe das ganze schraffierte und zum Durchschnitt das doppelt schraffierte Gebiet. Die abzählbar vielen Mengen $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \{2, 3, 4, \ldots\}, \{3, 4, \ldots\}, \ldots$ haben zur Summe die erste Menge und den Durchschnitt $\emptyset$.

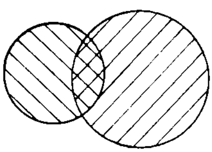

Fig. 1

Der am Anfang dieses § 4 angekündigte Satz lautet nun:

Satz 3: Die Summe von höchstens abzählbar vielen Mengen, deren jede höchstens abzählbar ist, ist ebenfalls höchstens abzählbar.

Beweis: Es seien die Mengen $M_1, M_2, \ldots$ gegeben, und es möge M_μ die Elemente $m_{\mu 1}, m_{\mu 2}, \ldots$ haben. Wir schreiben dann die als Folgen gegebenen Mengen untereinander

$$\begin{array}{llll} m_{11}, & m_{12}, & m_{13}, & \ldots\ (M_1) \\ m_{21}, & m_{22}, & m_{23}, & \ldots\ (M_2) \\ m_{31}, & m_{32}, & m_{33}, & \ldots\ (M_3) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

und schreiben nun die Elemente von neuem in der Reihenfolge auf, die durch die Pfeile angegeben, also wird

$$m_{11}, m_{21}, m_{12}, m_{31}, m_{22}, m_{13}, \ldots,$$

jedoch unter Fortlassung der schon vorgekommenen Elemente[1]). Man erhält so eine Folge, die alle Elemente enthält, die in irgendeinem unserer M_μ vorkommen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Dieses Beweisprinzip, das offenbar das schon auf S. 9 benutzte ist und auch in dem Beweis von S. 10 steckt, wird **erstes (Cauchys) Diagonalverfahren** genannt[2]).

Beispiele: (a) Die Menge aller Punkte der Ebene, deren beide Koordinaten rationale Zahlen sind, ist abzählbar. Denn wird etwa die rationale Abszisse x festgehalten, so bilden die Punkte mit dieser festen Abszisse x und beliebiger rationaler Ordinate y nach § 2, Satz 1 eine abzählbare Menge. Lassen wir nun auch x alle rationalen Zahlen durchlaufen, so haben wir abzählbar viele abzählbare Mengen, die also insgesamt wieder eine abzählbare Menge ergeben. — (b) Ebenso ergibt sich, daß die Menge aller Punkte im Raum, deren sämtliche Koordinaten rationale Zahlen sind, abzählbar ist. — (c) Ferner, daß in der Ebene die Menge aller Kreise und im Raum die Menge aller Kugeln abzählbar ist, deren Mittelpunktskoordinaten und Radien rationale Zahlen sind. — (d) Die Menge aller transzendenten Zahlen[3]) ist nicht abzählbar. Denn wäre sie abzählbar, so würde durch Hinzufügen der nach § 2, Satz 2 abzählbaren Menge der algebraischen Zahlen wieder nur eine abzählbare Menge entstehen, d. h. die Menge aller reellen Zahlen und daher nach Satz 1 erst recht die im Intervall $0 < x \leqq 1$ liegende Teilmenge der reellen Zahlen wäre abzählbar, im Widerspruch zu § 3.

---

[1]) Sind nur endlich viele, z. B. zwei Mengen gegeben, so lautet die Folge $m_{11}, m_{21}, m_{12}, m_{22}, m_{13}, \ldots$.

[2]) Nach Cauchy deswegen benannt, weil bei der Multiplikation von zwei Potenzreihen $\sum_p m_p x^p \sum_q n_q x^q = \sum_n x^n \sum_{p+q=n} m_p n_q$ dieses Anordnungsprinzip ebenfalls verwendet wird.

[3]) Eine Zahl heißt transzendent, wenn sie keine algebraische Zahl ist. Hermite hat 1873 die Transzendenz der Zahl e und Lindemann 1882 die der Zahl π bewiesen.

§ 5. Über das Rechnen mit Mengen

Die in § 4 eingeführten Summen und Produkte sind offenbar von der Reihenfolge der M_k unabhängig. Insbesondere gilt für Mengen A, B, C[1])

$$
(1)\quad \begin{cases} A + B = B + A, AB = BA \\ \text{(Vertauschungsregeln, Kommutationsgesetze)} \\ (A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC) \\ \text{(Anreihungsregeln, Assoziationsgesetze)} \\ (A + B)C = AC + BC, AB + C = (A + C)(B + C) \\ \text{(Mischungsregeln, Distributionsgesetze).} \end{cases}
$$

Weiter: Die Relationen $A \leqq B$, $A = AB$, $A + B = B$ besagen genau dasselbe; ebenso $A = B$, $AB = A + B$; ferner $A \leqq B \leqq C$, $A + B = BC$.

Von grundsätzlicher Bedeutung ist, daß der Durchschnitt zweier Mengen sich durch Summe und Differenz darstellen läßt:

$$
(2)\quad \begin{aligned} AB &= A - (A \dot{-} B) \\ &= (A + B) - [(A + B) - A + (A + B) - B] \\ &= A - [(A + B) - B] = B - [(A + B) - A]. \end{aligned}
$$

Versteht man unter einem **Ring (Körper)** ein System $\mathfrak{S}$ von Mengen A, bei dem Summe und Durchschnitt (Summe und Differenz) je zweier Mengen von $\mathfrak{S}$ wieder zu $\mathfrak{S}$ gehört, so ist hiernach jeder Körper zugleich ein Ring und enthält wegen $A - A = \emptyset$ stets die leere Menge.

Ist $A_1 + \cdots + A_n \leqq X$ und $\overline{A}_\nu = X - A_\nu$, so gilt die **Formel von Morgan**

---

[1]) Die Gleichungen — ebenso (2) und (3) — beweist man, indem man zeigt: jedes links vorkommende Element kommt auch rechts vor, und umgekehrt. Bei der ersten Formel der dritten Zeile von (1) sieht das so aus: ist m ein Element der linken Seite, so ist $m \in A + B$ und $m \in C$; also $m \in A$ oder B, und $m \in C$; also m offenbar auch ein Element der rechten Seite. Ist umgekehrt m ein Element der rechten Seite, so ist $m \in AC$ oder BC; also $m \in C$, und $m \in A$ der B; also m offenbar auch ein Element der linken Seite.

$$\text{(3a)}\qquad X = \Sigma A_\nu + \Pi \overline{A}_\nu, \text{ d. h. } \overline{\Sigma A_\nu} = \Pi \overline{A}_\nu$$

oder, da diese für beliebige $A_\nu \leqq X$, also auch für $\overline{A}_\nu$ statt A_ν gilt,

$$\text{(3b)}\qquad X = \Pi A_\nu + \Sigma \overline{A}_\nu, \text{ d. h. } \overline{\Pi A_\nu} = \Sigma \overline{A}_\nu,$$

d. h. das Komplement einer Summe (eines Durchschnitts) ist gleich dem Durchschnitt (der Summe) der Komplemente. Die Formeln gelten nicht nur für endlich viele A_ν.

Hieraus folgt: Ist die Menge $B = F(A_1, \ldots, A_n)$ in der Weise gebildet, daß endlich oft, in beliebiger Reihenfolge und beliebig übereinander getürmt, Summen und Durchschnitt der A_ν vorkommen (d. h. B ist ein Element des durch $A_1, \ldots, A_n$ erzeugten Ringes), so erhält man $\overline{B} = X - F$, indem man die Durchschnitte und Summen durch Summen und Durchschnitte, sowie die A_ν durch $\overline{A}_\nu$ ersetzt. Das ergibt sich, indem man, von den äußeren zu den inneren Klammern fortschreitend wiederholt (3) anwendet. Aus dem folgenden Beispiel kann man ersehen, wie der Beweis im allgemeinen Fall verläuft:

$$\begin{aligned}
B &= [(A_1 + A_2) + A_2 A_3] A_4 + A_1 A_3, \\
\overline{B} &= \overline{[(A_1 + A_2) + A_2 A_3] A_4} \cdot \overline{A_1 A_3} \\
&= \{\overline{[(A_1 + A_2) + A_2 A_3]} + \overline{A}_4\} (\overline{A}_1 + \overline{A}_3) \\
&= \{\overline{A_1 + A_2} \cdot \overline{A_2 A_3} + \overline{A}_4\} (\overline{A}_1 + \overline{A}_3) \\
&= \{\overline{A}_1 \overline{A}_2 (\overline{A}_2 + \overline{A}_3) + \overline{A}_4\} (\overline{A}_1 + \overline{A}_3).
\end{aligned}$$

Hat man zwischen zwei derartigen Ausdrücken eine Gleichung $F(A_1, \ldots, A_n) = G(A_1, \ldots, A_n)$ oder eine Ungleichung $F \leqq G$, so erhält man durch Anwendung der obigen Vorschrift auf beide Seiten wieder eine Gleichung oder Ungleichung (mit $\geqq$ statt $\leqq$). Das ist das **Dualitätsprinzip.** Hiernach sind z. B. die beiden Gleichungen jeder Zeile von (1) gleichwertig.

Eine Reihe weiterer Mengenoperationen ist in dem folgenden allgemeinen Prinzip von **Suslin** enthalten: Jedem endlichen System natürlicher Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ sei eine Menge $M_{k_1, \ldots, k_n}$ zugeordnet. Aus den Elementen dieser Mengen wird eine Menge S gebildet, indem zu S ein Element m genau dann gerechnet wird, wenn es zu m wenigstens eine unendliche Indexfolge $h_1, h_2, \ldots$ gibt, so daß m dem Durchschnitt der Mengen

$$M_{h_1}, M_{h_1, h_2}, M_{h_1, h_2, h_3}, \ldots$$

angehört; d. h. es ist

$$S = \sum_{k_1, k_2 \ldots} \prod_{n=1}^{\infty} M_{k_1, \ldots, k_n};$$

S heißt eine durch die Mengen M erzeugte **Suslin-Menge** oder ein **Suslin-Kern,** die zu dieser führende Operation die **Suslin-Operation** oder **Operation A.**

Beispiele:

$$M_{k_1, \ldots, k_n} \begin{cases} = M_{k_1}; \quad S = \sum M_\nu. \\ = M_n; \quad S = \prod M_\nu. \\ = M_{k_1 + \cdots + k_n}; \quad S = \overline{\lim_{n \to \infty}} M_n. \\ = M_{k_1 + n - 1}; \quad S = \underline{\lim_{n \to \infty}} M_n. \end{cases}$$

In den beiden letzten Zeilen sind die für S angegebenen Ausdrücke zunächst nur Bezeichnungen. Man sieht jedoch leicht, daß

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} M_n = \prod_k \sum_{h \geqq k} M_h, \quad \underline{\lim_{n \to \infty}} M_n = \sum_k \prod_{h \geqq k} M_h$$

ist; die erste dieser Mengen besteht aus den Elementen, die unendlich vielen M_n angehören; die zweite aus den Elementen, die „fast allen“ M_n angehören, d. h. nur *endlich* vielen M_n *nicht* angehören.

Für weitere Eigenschaften der Suslin-Operation s. z. B. Hausdorff 2).

Es sei noch ein Hinweis auf die **Verbandstheorie**[1]) (lattice theory) angeschlossen. Wir schreiben nochmals die beiden ersten Zeilen von (1) sowie eine neue dritte Zeile in anderen Bezeichnungen (vgl. § 4) auf:

$$a \cup b = b \cup a, \quad a \cap b = b \cap a$$

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c), \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$

$$a \cup (a \cap b) = a, \quad a \cap (a \cup b) = a.$$

Diese Gleichungen gelten, wenn a, b, c Mengen sind und $\cup, \cap$ Vereinigung und Durchschnitt bezeichnen. In der Verbandstheorie löst man die Gleichungen von diesen inhaltlichen Bedeutungen und betrachtet allgemein ein System von Elementen, in dem zwei Operationen $\cup, \cap$ erklärt sind, so daß zu je zwei Elementen a, b Elemente c, d eindeutig bestimmt sind, für die $a \cup b = c$, $a \cap b = d$ sowie die obigen Gleichungen gelten. Man kann nun z. B. weiter eine Relation $a \leqq b$ durch das Bestehen von $a \cap b = a$ oder $a \cup b = b$ erklären,

II. Über beliebige Mengen und ihre Kardinalzahlen

§ 6. Über Erweiterungen des Zahlbegriffs

Bisher sind die Mengen eingeteilt in endliche, abzählbare und nichtabzählbare Mengen. Zu der letzten Klasse gehören einfach alle die Mengen, die nach Abspaltung der beiden ersten Klassen übrig bleiben. Man kann die Frage aufwerfen, ob sich die Klasse der nichtabzählbaren Mengen noch weiter unterteilen läßt. Dieser Frage hat G. Cantor die Wendung gegeben: Kann man den Begriff der natürlichen Zahl so verallgemeinern, daß jeder Menge eine dieser verallgemeinerten „Zahlen“ gleichsam als „Anzahl ihrer Elemente“ zukommt? Wenn das mög-

[1]) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften I_1, Hermes und Köthe, Die Theorie der Verbände. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1939.

lich ist, würde sich daraus eine Einteilung auch der unendlichen Mengen nach der „Anzahl ihrer Elemente" ergeben. Es ist klar, daß diese neuen „Zahlen" etwas ganz Neuartiges sein müßten.

Der Zahlbegriff ist in der Entwicklung der Mathematik mehrfach erweitert worden. Die erste Erweiterung bestand in der Einführung der gebrochenen Zahlen. Bei einer exakten Einführung der rationalen Zahlen wird man allerdings die primitive Art des „Teilens eines Ganzen in eine gewisse Anzahl von Teilen" verlassen müssen und statt dessen so vorgehen: Man betrachtet als neuartige „Zahl" ein Paar von natürlichen Zahlen a, b, das bei dieser Auffassung in Anlehnung an die gewöhnliche Schreibweise der Brüche in der Gestalt a/b geschrieben werden soll. Damit wäre aber noch nicht ganz das getroffen, was man haben möchte. Vielmehr sind die Zahlenpaare a/b, $2a/2b$, $3a/3b$ sämtlich nur als andere Darstellungen derselben rationalen Zahl anzusehen. Die exakte Einführung der rationalen Zahl kann daher so geschehen: Erstens wird festgesetzt, daß je zwei durch natürliche Zahlen gebildete Zahlenpaare pa/pb und qa/qb als äquivalent angesehen werden sollen; zweitens wird festgesetzt, daß unter einer rationalen Zahl ein beliebiger Repräsentant aus der Klasse der untereinander äquivalenten Zahlenpaare verstanden werden soll. Bei der Ableitung der Rechenregeln für rationale Zahlen wird dann immer darauf zu achten sein, daß die Rechenregeln unabhängig davon sind, welchen Repräsentanten der rationalen Zahl man jeweils nimmt.

Die irrationale Zahl kann z. B. durch Intervallschachtelungen eingeführt werden, d. h. durch eine Folge von Intervallen

$$[r_1, s_1],\ [r_2, s_2],\ [r_3, s_3], \ldots,$$

wobei die r_n und s_n rationale Zahlen sind und stets

$$r_{n-1} \leqq r_n \leqq s_n \leqq s_{n-1}$$

und $s_n - r_n \to 0$ für $n \to \infty$ sein soll. Als „äquivalent" werden dabei zwei aus den Intervallfolgen $[r_n, s_n]$ und $[\bar{r}_n, \bar{s}_n]$ bestehende Intervallschachtelungen angesehen, wenn $\bar{r}_n \leqq s_n$ und $r_n \leqq \bar{s}_n$ für alle n ist. Entsprechend dem oben Gesagten ist dann die irrationale oder allgemein die reelle Zahl ein beliebiger Repräsentant aus der Klasse der untereinander äquivalenten Intervallschachtelungen. Auch hier ist bei der Ableitung der Rechenregeln für reelle Zahlen darauf zu achten, daß sie unabhängig davon sind, welchen Repräsentanten man jeweils für die reelle Zahl nimmt.

In beiden Fällen ist die rationale oder reelle Zahl als ein beliebiger Repräsentant aus der Klasse der untereinander äquivalenten Zahlenpaare oder Intervallschachtelungen eingeführt worden. Hierfür braucht man nicht etwa erst die Klasse, d. h. die Menge *aller* untereinander äquivalenten Zahlenpaare (Intervallschachtelungen) zu bilden, um dann einen Repräsentanten auszuwählen, sondern es genügt, *ein* Zahlenpaar (*eine* Intervallschachtelung) zu nehmen und zu zeigen, daß überall, wo dieses Zahlenpaar (Intervallschachtelung) auftritt, es auch durch ein äquivalentes ersetzt werden kann.

An diese Dinge wollen wir uns bei der Einführung der Kardinalzahlen erinnern.

§ 7. Über die Äquivalenz von Mengen

Ein zweiter Ausgangspunkt für Cantors Erweiterung des Zahlbegriffs ist im Gegensatz zu dem ersten sehr einfacher Art. Ein Kind kann, ohne zählen zu können, doch feststellen, ob beispielsweise in einem Zimmer ebensoviel Stühle wie Personen vorhanden sind. Es braucht nur jede Person auf einem Stuhl Platz nehmen zu lassen. Durch diese Maßnahme werden Paare gebildet, und zwar besteht jedes Paar aus einer Person und einem Stuhl. Oder man kann auch sagen: es werden die Stühle und Personen einander eineindeutig zugeordnet, d. h. so zugeordnet, daß jeder Person genau ein Stuhl und jedem Stuhl