Göschens Lehrbücherei

1. Gruppe

Reine und angewandte Mathematik

Band 10

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Von

Prof. Dr. Jakob Horn †

und

Prof. Dr. Hans Wittich

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin 1960

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Von

Dr. Jakob Horn †

ehem. o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt

Sechste, vollständig umgearbeitete Auflage

Von

Dr. Hans Wittich

o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe

Mit 10 Figuren

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin 1960

 — Archiv-Nr. 12 05 60. — Satz und Druck: Mercedes-Druck, Berlin SW 61. — Printed in Germany.

Vorwort zur sechsten Auflage

Als der Verlag mit der Bitte an mich herantrat, eine Neuauflage des bewährten Hornschen Buches „Gewöhnliche Differentialgleichungen" zu besorgen, war ich mir darüber im klaren, daß eine gründliche Umarbeitung nötig sein würde. Bei der Neugestaltung schwebte mir das Ziel vor, die außer Frage stehenden Vorzüge des Werkes möglichst zu erhalten. Dabei mußten eine ausführliche Darstellung des Stoffes gewählt und die erforderlichen Vorkenntnisse niedrig gehalten werden. Die Vielzahl der vollständig durchgerechneten Beispiele soll jene Routine im Lösen einfacher Differentialgleichungen vermitteln, die neben der nötigen Theorie bei einer Einführung in diese Disziplin erworben werden muß.

Die Theorie der Differentialgleichungen im Komplexen wurde gegenüber den früheren Auflagen wesentlich erweitert und gleichzeitig damit die Theorie der speziellen Funktionen, die gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen, stärker betont. Gerade zum Studium ihres Gesamtverhaltens kann das Komplexe kaum entbehrt werden. Eine Darstellung der Theorie der Sturmschen Differentialgleichung wurde auch jetzt, wie in den früheren Auflagen, außer acht gelassen. Man findet eine Einführung, die auf der Theorie der Integralgleichungen basiert, in dem Band über partielle Differentialgleichungen.

Wenn auch Feinheiten der Theorie an vielen Stellen zurückstehen mußten, hoffe ich doch, mit diesem Band eine für Mathematiker, Physiker und Studierende der Ingenieurwissenschaften brauchbare Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen vorzulegen, die den Zugang zu Tabellenwerken und einschlägigen Arbeiten erleichtert.

Für Mithilfe beim Lesen der Korrekturen bin ich Fräulein F. Ullrich und den Herren Dr. H. Heuser, R. Gorenflo und E. Gauß zu großem Dank verpflichtet.

Karlsruhe, im September 1959

Hans Wittich

Inhaltsverzeichnis

Erstes Kapitel

Elementare Integrationsmethoden

Zweites Kapitel

Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Näherung

Drittes Kapitel

Numerische und graphische Näherungsmethoden

Viertes Kapitel

Lineare Differentialgleichungen; elementare Integrationsmethoden

Seite

Zehntes Kapitel

Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen

Elftes Kapitel

Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten

Erstes Kapitel

Elementare Integrationsmethoden

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* ist eine Gleichung zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x, einer Funktion y von x und einem oder mehreren Differentialquotienten $\frac{d\,y}{d\,x}, \frac{d^2\,y}{d\,x^2}, \ldots$. Ist $\frac{d^n\,y}{d\,x^n}$ die höchste vorkommende Ableitung, so liegt eine *Differentialgleichung n-ter Ordnung* vor. Wir schreiben sie in der Form

$$F\left(x, y, \frac{d\,y}{d\,x}, \ldots, \frac{d^n\,y}{d\,x^n}\right) = 0\ ;$$

hierbei ist $F\,(t_1, t_2, \ldots, t_{n+2})$ eine Funktion der Argumente $t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}$. Unter einer *Lösung* oder einem *Integral* der Differentialgleichung (in einem Intervall $a < x < b$) verstehen wir eine Funktion $y = \varphi\,(x)$, welche die Differentialgleichung identisch befriedigt:

$$F\,(x, \varphi\,(x), \varphi'\,(x), \ldots, \varphi^{(n)}\,(x)) \equiv 0\ ;$$

die Bestimmung der Lösungen wird *Integration der Differentialgleichung* genannt. Auf Differentialgleichungen führen viele Probleme aus Physik und Technik.

Die allgemeinste gewöhnliche Differentialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung ist von der Form

$$F\,(x, y, y') = 0 \text{ bzw. } F\,(x, y, y', y'') = 0\ ;$$

sie heißen auch *implizite* Differentialgleichungen erster bzw. zweiter Ordnung. Unter einer *expliziten* Differentialgleichung von erster bzw. zweiter Ordnung versteht man die nach den höchsten Ableitungen aufgelösten Differentialgleichungen

$$y' = f\,(x, y) \text{ bzw. } y'' = f\,(x, y, y').$$

$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ ist eine implizite, $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$ eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung. Wenn man in $y' = f(x, y)$

$$f(x, y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

setzt, erhält die Differentialgleichung die Gestalt

$$P(x, y)\,d\,x + Q(x, y)\,d\,y = 0\,,$$

wobei P und Q gegebene Funktionen der beiden Veränderlichen x, y sind. Dabei läßt sich y als Funktion von x oder x als Funktion von y auffassen.

Die Differentialgleichung $\frac{d\,y}{d\,x} = f(x)$, $f(x)$ stetig auf $a < x < b$, $x_0 \in (a, b)$[1], hat die Lösung $y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,d\,t + C$, C eine willkürliche Konstante. Durch Vorgabe einer *Anfangsbedingung* $y(x_0) = y_0$ ist die Lösung $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,d\,t$ eindeutig festgelegt. Die Berechnung eines Integrals $\int f(x)\,d\,x$, die *Quadratur* genannt wird, erscheint so als besonderer Fall der Integration einer Differentialgleichung. In der Entwicklung der Theorie hat man sich zunächst in erster Linie mit solchen Differentialgleichungen beschäftigt, welche sich mit Hilfe von Quadraturen lösen lassen.

Die neuere Theorie verlangt die Betrachtung der folgenden *Aufgaben:*

1. Beweis der Existenz von Lösungen $y(x)$.
2. Erforschung der Eigenschaften dieser Funktionen $y(x)$.

Dabei werden oft durch Differentialgleichungen neue Funktionen definiert.

Wir betrachten, dem Gange der geschichtlichen Entwicklung folgend, zunächst einige Klassen von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, welche sich durch Quadraturen lösen lassen. Später wenden wir uns, da eine Integration durch Quadraturen nur ausnahmsweise möglich ist, anderen Integrationsmethoden zu.

2. Geometrische Deutung einer Differentialgleichung erster Ordnung

Eine Lösung $y = \varphi(x)$ einer Differentialgleichung läßt sich, indem man x, y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Ebene auffaßt, geometrisch durch eine Kurve darstellen, die *Integralkurve* der Differentialgleichung.

[1] $x_0 \in (a, b)$ bedeutet, daß x_0 dem Intervall $a < x < b$ angehört. Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge, dann besagt $a \in \mathfrak{M}$: a ist ein Element der Menge $\mathfrak{M}$.

Die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f\,(x,\,y), \tag{1,1}$$

mit der wir uns zunächst beschäftigen wollen, kann folgendermaßen geometrisch gedeutet werden. Jedem Punkt x, y eines gewissen Gebietes der x, y-Ebene möge durch die Differentialgleichung (1,1) eine bestimmte Richtung

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = f\,(x,\,y) \tag{1,2}$$

zugeordnet werden. Das Zahlentripel $(x,\,y,\,\operatorname{tg}\alpha) = (x,\,y,\,y')$ heißt *Linienelement* durch den *Trägerpunkt* $(x,\,y)$. Die Gesamtheit der Linienelemente heißt *Richtungsfeld.* Die Kurve $y = \varphi\,(x)$ ist eine Integralkurve der Differentialgleichung, wenn die Tangente in jedem Kurvenpunkt x, y die Richtung hat, welche dem Punkt x, y vermöge der Gleichung (1,2) zugeordnet ist.

Um einen vorläufigen Überblick über die Integralkurven der Differentialgleichung (1,1) zu gewinnen, wenden wir ein Näherungsverfahren an. Durch einen gegebenen Punkt P_0 mit den Koordinaten a, b legen wir ein Geradenstück, welches die dem Punkt P_0 entsprechende Richtung $\operatorname{tg}\alpha_0 = f\,(a,\,b)$ hat. Wir nehmen auf diesem Geradenstück in der Nähe von P_0 einen Punkt P_1 mit den Koordinaten a_1, b_1 an, wobei etwa $a_1 > a$ sein möge. Durch den Punkt P_1 legen wir ein Geradenstück, welches die dem Punkt P_1 zugeordnete Richtung $\operatorname{tg}\alpha_1 = f\,(a_1,\,b_1)$ hat, und wählen auf dieser Geraden in der Nähe von P_1 einen Punkt P_2 mit den Koordinaten a_2, b_2, wobei wieder $a_2 > a_1$ sein möge. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir eine gebrochene Linie $P_0\,P_1\,P_2 \ldots$. Wir können vermuten, daß dieser Polygonzug von einer Integralkurve der Differentialgleichung (1,1) um so weniger abweicht, je näher P_1 bei P_0, P_2 bei P_1 usw. angenommen wird.

Von dieser geometrischen Deutung ausgehend, hat G. PEANO[1]) gezeigt, daß für $a \leqq x \leqq a'$ mindestens eine durch den Punkt $P_0 = (a, b)$ gehende Integralkurve $y = \varphi\,(x)$ der Differentialgleichung (1,1) existiert, wenn die Funktion $f\,(x,\,y)$ in $a \leqq x \leqq a'$, $-\infty < y < +\infty$ stetig und beschränkt ist.

3. Trennung der Veränderlichen

Eine Differentialgleichung erster Ordnung kann nach 1. auf die Form gebracht werden:

$$P\,(x,\,y)\,d\,x + Q\,(x,\,y)\,d\,y = 0. \tag{1,3}$$

Wir betrachten den besonderen Fall, daß P nur von x, Q nur von y abhängt, so daß die Differentialgleichung

$$P\,(x)\,d\,x + Q\,(y)\,d\,y = 0 \tag{1,4}$$

---

[1]) Math. Ann. 37 (1890).

vorliegt. Die linke Seite dieser Gleichung ist das Differential der Funktion

$$\int P(x)\,d\,x + \int Q(y)\,d\,y,$$

wobei wir uns die Integrationskonstante willkürlich, aber fest gewählt denken. Diese Funktion muß, da nach (1,4) ihr Differential verschwindet, konstant sein. Also gilt

$$\int P(x)\,d\,x + \int Q(y)\,d\,y = C, \tag{1,4'}$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Wenn sich eine Differentialgleichung erster Ordnung auf die Form (1,4) bringen läßt oder, anders ausgedrückt, wenn sich die Veränderlichen x, y trennen lassen, ist die Integration durch Quadraturen möglich. Differentialgleichungen von anderer Form lassen sich bisweilen durch Einführung neuer Veränderlicher auf Differentialgleichungen zurückführen, in denen die Veränderlichen getrennt sind.

Die Gleichung (1,4′), eine Gleichung zwischen x und y mit einer willkürlichen Konstanten C, stellt geometrisch eine *Schar von Integralkurven* der Differentialgleichung dar. In der Gleichung (1,4′) haben wir, solange C unbestimmt bleibt, das *allgemeine Integral* oder die *allgemeine Lösung der Differentialgleichung* (1,4). Legt man der Konstanten C einen bestimmten Wert bei, so hat man ein *partikuläres Integral*, welches geometrisch durch eine einzelne Integralkurve dargestellt wird.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{x}{y}$$

schreibt sich nach Trennung der Veränderlichen

$$x\,d\,x + y\,d\,y = 0.$$

Die Integration ergibt

$$\int x\,d\,x + \int y\,d\,y = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

oder, wenn man die willkürliche Konstante C gleich $\frac{c}{2}$ setzt,

$$x^2 + y^2 = c.$$

Das allgemeine Integral wird für $c > 0$ durch eine Schar konzentrischer Kreise dargestellt. Durch jeden Punkt $x = a$, $y = b$ geht ein bestimmter Kreis der Schar entsprechend der Konstanten $c = a^2 + b^2$.

Beispiel. Die Kurven, für welche die Subtangente gleich der doppelten Abszisse ist, genügen der Differentialgleichung

$$y\frac{d\,x}{d\,y} = 2\,x$$

oder

$$\frac{d\,x}{x} = 2\frac{d\,y}{y}.$$

Die Integration ergibt, wenn links die willkürliche Konstante $\log C$ beigefügt wird,

$$\log C + \log x = 2 \log y$$

oder

$$y^2 = C\,x.$$

Wir haben eine Schar von Parabeln, welche die y-Achse im Anfangspunkt berühren.

Wenn eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf die Form $P(x)\,d\,x + Q(y)\,d\,y = 0$ gebracht werden kann, können bei der Umformung Integrale verloren gehen. Beispielsweise hat die Differentialgleichung

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)\,d\,x + x\,y\,d\,y = 0$$

die Integrale $x \equiv 0$, $y \equiv 1$ und $y \equiv -1$. Aus

$$\frac{x^2+1}{x}\,d\,x + \frac{y}{y^2-1}\,d\,y = 0$$

folgt

$$y^2(x) = 1 + C\frac{e^{-x^2}}{x^2}.$$

$C = 0$ ergibt die Lösungen $y(x) \equiv 1$ und $y(x) \equiv -1$. Die Lösung $x \equiv 0$ kann nicht durch passende Wahl von C aus $y^2(x) = 1 + C\frac{e^{-x^2}}{x^2}$ gewonnen werden.

4. Homogene Differentialgleichungen

Die *Differentialgleichung*

(1,5) $$\frac{d\,y}{d\,x} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

deren rechte Seite nur von dem Quotienten $\frac{y}{x}$ *abhängt*, geht, wenn man

(1,6) $$y = x\,z$$

und demnach

$$\frac{d\,y}{d\,x} = x\frac{d\,z}{d\,x} + z$$

setzt, in

$$x\frac{d\,z}{d\,x} = f(z) - z$$

und, wenn $x \neq 0$, $f(z) - z \neq 0$ ist, in

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}$$

über. Die beiderseitige Integration ergibt

$$\log x = \int \frac{dz}{f(z) - z} + \log C,$$

wo C eine willkürliche positive Konstante bedeutet, oder

$$x = C\, e^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}. \tag{1,7}$$

Wenn man auf der rechten Seite z durch $\frac{y}{x}$ ersetzt, erhält man

$$x = C\, \varphi\left(\frac{y}{x}\right).\text{[1]} \tag{1,8}$$

Die Differentialgleichung

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

kann auf die Form (1,5) gebracht werden, wenn P und Q homogene Funktionen gleichen Grades von x, y sind. Ist dieser Grad m, so hat man, wenn λ eine willkürliche Größe darstellt,

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m P(x, y), \qquad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m Q(x, y).$$

Die Differentialgleichung schreibt sich in der Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = -\frac{\lambda^m P(x, y)}{\lambda^m Q(x, y)} = -\frac{P(\lambda x, \lambda y)}{Q(\lambda x, \lambda y)}$$

oder, wenn $\lambda = \frac{1}{x}$ gesetzt wird,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)},$$

so daß die rechte Seite nur von $\frac{y}{x}$ abhängt.

---

[1]) Die Differentialgleichung (1,5) besitzt außerdem die Lösung $y = k\,x$, wenn die Konstante k der Gleichung $f(k) = k$ genügt. Diese Lösung ist durch die Division mit $f(z) - z$ verlorengegangen.

Eine Differentialgleichung von der Form (1,5) wird als *homogene Differentialgleichung* bezeichnet.

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$(x^2 - y^2)\,d\,x + 2\,x\,y\,d\,y = 0,$$

die man auch in der Form

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\,\frac{y}{x}}$$

schreiben kann, geht, wenn

$$y = x\,z, \qquad d\,y = x\,d\,z + z\,d\,x$$

gesetzt wird, über in

$$(1 + z^2)\,d\,x + 2\,x\,z\,d\,z = 0$$

oder

$$\frac{d\,x}{x} + \frac{2\,z\,d\,z}{1 + z^2} = 0.$$

Die Integration ergibt

$$\log x + \log(1 + z^2) = \log(2\,C),$$

wo rechts eine willkürliche Konstante steht. Daraus folgt

$$x\,(1 + z^2) = 2\,C$$

und

$$x^2 + y^2 = 2\,C\,x,$$

d. i. eine Schar von Kreisen, welche die y-Achse im Koordinatenanfang berühren.

In Verbindung mit den homogenen Differentialgleichungen betrachten wir die Differentialgleichung

$$\text{(1,5')} \qquad \frac{d\,y}{d\,x} = f\left(\frac{a\,x + b\,y + c}{a'x + b'\,y + c'}\right).$$

Diese Gleichung ist homogen, wenn $c = 0$, $c' = 0$ ist. Sind c und c' nicht beide Null, so führt man an Stelle von x, y neue Veränderliche ξ, η ein, indem man setzt:

$$x = \xi + h, \qquad y = \eta + k.$$

Dann ist $dx = d\xi$, $dy = d\eta$ und

$$\frac{d\eta}{d\,\xi} = f\left(\frac{a\,\xi + b\,\eta + a\,h + b\,k + c}{a'\xi + b'\,\eta + a'\,h + b'\,k + c'}\right).$$

Bestimmt man h und k aus den beiden linearen Gleichungen

$$a h + b k + c = 0, \qquad a' h + b' k + c' = 0,$$

was im Falle $a b' - a' b \neq 0$ möglich ist, so hat man die homogene Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a'\xi + b'\eta}\right).$$

In geometrischer Ausdrucksweise können wir sagen: wir verschieben die Achsen parallel, indem wir den Punkt $x = h$, $y = k$, den Schnittpunkt der Geraden

$$a x + b y + c = 0, \qquad a' x + b' y + c' = 0$$

zum Anfangspunkt machen; dabei ist vorausgesetzt, daß diese beiden Geraden nicht parallel sind.

Wenn $a b' - a' b = 0$ und $b \neq 0$ ist, setzen wir $b' = m b$, $a' = m a$, so daß wir die Differentialgleichung haben:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a x + b y + c}{m(a x + b y) + c'}\right).$$

Setzen wir jetzt

$$z = a x + b y, \qquad \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = a + b f\left(\frac{z + c}{m z + c'}\right),$$

die durch Trennung der Veränderlichen integriert wird. Wenn $b' \neq 0$ ist, kann man $z = a' x + b' y$ setzen. Im Falle $b = 0$, $b' = 0$ ist $\frac{dy}{dx}$ als Funktion von x allein dargestellt.

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$(4x + 3y + 1)\,dx + (3x + 2y + 1)\,dy = 0$$

geht durch die Substitution $x = \xi - 1$, $y = \eta + 1$ in eine homogene Differentialgleichung über. Sie hat das allgemeine Integral

$$2x^2 + 3xy + y^2 + x + y = C.$$

Beispiel: Die Lösung der Differentialgleichung

$$(x - 2y + 9)\,dx = (3x - 6y + 19)\,dy$$

ergibt sich vermittels der Substitution $x - 2y = z$ in der Form

$$x - 3y + 8\log(x - 2y + 1) = C.$$

5. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Differentialgleichung

$$\frac{d\,y}{d\,x} + P(x)\,y = Q(x)\ , \tag{1,9}$$

$P(x)$ und $Q(x)$ stetig in einem Intervall $J: a < x < b$, wird als *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* bezeichnet.

In der *homogenen linearen Differentialgleichung*

$$\frac{d\,y}{d\,x} + P(x)\,y = 0 \tag{1,10}$$

lassen sich die Veränderlichen trennen:

$$P(x)\,d\,x + \frac{d\,y}{y} = 0.$$

In J gibt es genau eine Lösung $y(x)$, die durch den Punkt (x_0, y_0) hindurchgeht, $a < x_0 < b$ und $-\infty < y_0 < \infty$, nämlich

$$y(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(t)\,d\,t\right) = y_0 \exp\left(-H(x)\right)\ . \tag{1,11}$$

Durch Differentiation nach x folgt, daß (1,11) Lösung von (1,10) ist. Ist $Y(x)$, $Y(x_0) = y_0$, eine zweite Lösung, so gilt mit $h(x) = Y(x)\,e^{H(x)}$

$$h'(x) = e^{H(x)}\,(Y'(x) + P(x)\,Y(x)) \equiv 0 \text{ in } J.$$

Wir erhalten also $Y(x)\,e^{H(x)} = C = y_0$ oder $Y(x) = y_0\,e^{-H(x)}$.

Um die *nichthomogene lineare Differentialgleichung* (1,9) zu integrieren, wenden wir die Methode der *Variation der Konstanten* von LAGRANGE an. Wir verstehen jetzt in $y(x) = C \cdot e^{-H(x)}$ unter C eine differenzierbare Funktion von x, die wir so bestimmen, daß $y(x)$ (1,9) erfüllt. Es gilt

$$y'(x) = \frac{d\,C}{d\,x}\,e^{-H(x)} - C(x) \cdot P(x)\,e^{-H(x)}\ .$$

Einsetzen in (1,9) ergibt

$$\frac{d\,C}{d\,x}\,e^{-H(x)} = Q(x).$$

Daraus folgt, wenn wieder $y(x_0) = y_0$ gelten soll,

$$C(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\,e^{H(x)}\,d\,x. \tag{1,12}$$

Wir erhalten also

$$(1{,}13) \qquad y(x) = e^{-H(x)}\left\{y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\, e^{H(x)}\, dx\right\}, \quad H(x) = \int_{x_0}^{x} P(t)\, dt,$$

und verifizieren sofort, daß $y(x)$ Lösung von (1,9) ist.

Ist $Y(x)$ eine andere Lösung mit derselben Anfangsbedingung, so genügt $h(x) = Y(x) - y(x)$ der Differentialgleichung (1,10) und nimmt in x_0 den Wert 0 an. Nach dem Eindeutigkeitssatz gibt es nur die Lösung $h(x) \equiv 0$; es gilt also $Y(x) \equiv y(x)$ in J. (1,13) ist die einzige Lösung der Differentialgleichung (1,9), die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ genügt.

Beispiele:

1) $$\frac{dy}{dx} - 2y = e^x.$$

Die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' - 2y = 0$$

hat die Lösung $y(x) = C \cdot e^{2x}$. Variation der Konstanten C ergibt

$$\frac{dC}{dx} = e^{-x}, \quad C(x) = -e^{-x} + c,$$

wo c eine willkürliche Konstante ist. Demnach ist

$$y(x) = e^{2x}(-e^{-x} + c) = c \cdot e^{2x} - e^x.$$

Ist die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ vorgeschrieben, so heißt die Lösung

$$y(x) = y_0\, e^{2(x-x_0)} + e^{2x-x_0} - e^x.$$

$$x_0 = 0, \ y_0 = 1 \text{ ergibt } y(x) = 2e^{2x} - e^x.$$

2) Der Widerstand eines Stromkreises sei R und der Koeffizient der Selbstinduktion L. Zwischen der von der Zeit t abhängigen Stromstärke J und der Spannung E besteht nach dem Ohmschen Gesetz unter Berücksichtigung der Selbstinduktion die Gleichung

$$(\alpha) \qquad E = RJ + L\frac{dJ}{dt}.$$

Mit $E = A \sin qt$ und $J(0) = 0$ folgt aus (1,13)

$$J(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t \frac{A}{L} \sin qt\, e^{\frac{R}{L}t}\, dt.$$

Nun wird die Formel

$$\int e^{\alpha t} \sin \beta t \, dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) = \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin (\beta t - \gamma) \text{ benutzt;}$$

dabei ist $\gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha}$, $\cos \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, $\sin \gamma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Es folgt mit $\gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{q L}{R}$

$$J(t) = \frac{A}{\sqrt{R^2 + q^2 L^2}} \left\{ \sin (q t - \gamma) + e^{-\frac{R}{L} t} \sin \gamma \right\}.$$

Da die im letzten Glied enthaltene Exponentialfunktion mit wachsender Zeit rasch abnimmt, ist angenähert

$$J(t) \approx \frac{A \sin (q t - \gamma)}{\sqrt{R^2 + q^2 L^2}}.$$

Zwischen dem Strom J und der Spannung E besteht die Phasenverschiebung γ. Im Falle einer konstanten Spannung E und $J(0) = 0$ ist

$$J(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

3) Die Bernoulli*sche Differentialgleichung*

$$\frac{d y}{d x} + P(x) y = Q(x) y^n, \quad n \neq 0, 1, \tag{1,14}$$

geht durch Multiplikation mit y^{-n} über in

$$y^{-n} \frac{d y}{d x} + P(x) y^{1-n} = Q(x).$$

Mit $y^{1-n} = z$, $y^{-n} \frac{d y}{d x} = \frac{1}{1-n} \frac{d z}{d x}$ ergibt sich die lineare Differentialgleichung

$$\frac{1}{1-n} \frac{d z}{d x} + P(x) z = Q(x).$$

Die Bernoullische Differentialgleichung

$$\frac{d y}{d x} + 2 x y = y^2$$

wird durch die Substitution $z = y^{-1}$ in die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = 2xz - 1$$

mit dem allgemeinen Integral $z = e^{x^2} (C - \int e^{-x^2} dx)$ übergeführt; es ist also

$$y(x) = \frac{e^{-x^2}}{C - \int e^{-x^2} dx}.$$

Im Falle $n = 2$ heißt (1,14) eine RICCATI*sche Differentialgleichung.*

6. Exakte Differentialgleichungen

In der Differentialgleichung (1,3) sollen die Funktionen $P(x, y)$, $Q(x, y)$ in einem Gebiet G der x,y-Ebene eindeutige und stetige Funktionen sein. Die Differentialgleichung heißt eine *exakte Differentialgleichung,* wenn $P dx + Q dy$ ein vollständiges Differential ist, d. h. wenn es eine Funktion $F(x, y)$ gibt, so daß

$$dF = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{1,15}$$

in G gilt, also

$$F_x = P \text{ und } F_y = Q. \tag{1,16}$$

Wir nehmen nun an, daß $y = y(x)$ für $a < x < b$ die exakte Differentialgleichung (1,3) löst. Dann gilt $\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x)) \frac{dy}{dx}$ $= P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x) \equiv 0$ für $a < x < b$, also $F(x, y) \equiv C$ für $a < x < b$. Falls die Integralkurve $y(x)$ durch den Punkt (x_0, y_0) hindurchgeht, ist $F(x, y) = F(x_0, y_0) = C$.

Nun gehöre umgekehrt das Schaubild der differenzierbaren Funktion $y(x)$ G an. Aus der Annahme $F(x, y(x)) \equiv C$ folgt

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0 = F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))\, y'(x)$$
$$= P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x).$$

$y = y(x)$ ist also Lösung der Differentialgleichung. Ist also (1,3) eine exakte Differentialgleichung mit einer Stammfunktion $F(x, y)$, so ergeben sich die Integrale der Differentialgleichung durch Auflösung der Gleichung

$$F(x, y) = C \tag{1,17}$$

nach y. C ist eine willkürliche Konstante.

Die Integration einer exakten Differentialgleichung läuft also auf die Bestimmung der Stammfunktion $F(x, y)$ hinaus. Wir nehmen jetzt weiter an, daß neben $P(x, y)$, $Q(x, y)$ auch noch $P_y(x, y)$ und $Q_x(x, y)$ stetig in G sind. Ist $F(x, y)$ eine Stammfunktion, so folgt wegen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{1,18}$$

Ist umgekehrt diese Bedingung (*Integrabilitätsbedingung*) erfüllt und das Gebiet G einfach zusammenhängend, so gibt es eine Stammfunktion $F(x, y)$[1].

Beispiele:

1. Die Differentialgleichung

$$(3\,x^2 + 6\,x\,y^2)\,d\,x + (6\,x^2\,y + 4\,y^2)\,d\,y = 0$$

ist exakt, da

$$\frac{\partial}{\partial y}(3\,x^2 + 6\,x\,y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(6\,x^2\,y + 4\,y^2) = 12\,x\,y$$

ist. Aus $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 6\,x\,y^2$ folgt $F(x, y) = x^3 + 3\,x^2\,y^2 + \Phi(y)$, wobei $\Phi(y)$ die Rolle der Integrationskonstanten spielt. Partielle Differentiation nach y ergibt

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 6\,x^2\,y + \dfrac{d\,\Phi}{d\,y} = Q(x, y) = 6\,x^2\,y + 4\,y^2$. Daraus folgt $\Phi(y) = \dfrac{4}{3}\,y^3$

unter Weglassung der Integrationskonstanten. Demnach ist

$$F(x, y) = x^3 + 3\,x^2\,y^2 + \frac{4}{3}\,y^3.$$

Die Differentialgleichung hat das allgemeine Integral (in impliziter Form)

$$x^3 + 3\,x^2\,y^2 + \frac{4}{3}\,y^3 = C\,.$$

Für $x_0 = 1$, $y(x_0) = y_0 = 1$ ist $C = \dfrac{16}{3}$ zu wählen.

---

[1]) Man vgl. dazu etwa Mangoldt-Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 3 (1957), S. 431.

2. Für die exakte Differentialgleichung

$$x\,d\,x + y\,d\,y = 0$$

ist $F\,(x, y) = \frac{x^2}{2} + \Phi\,(y)$ und wegen $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d\,\Phi}{d\,y} = y$

$$\Phi\,(y) = \frac{y^2}{2}\,, \quad \text{also} \quad F\,(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\,.$$

Die Integralkurve, die durch den Punkt (x_0, y_0) geht, ergibt sich aus

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

zu $y\,(x) = \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2}\,, \quad |\,x\,| < \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,.$

In einem einfach zusammenhängenden Gebiet G läßt sich ein Punkt (x_0, y_0) mit einem Punkt (x, y) stets durch einen Polygonzug Γ verbinden, der sich aus endlich vielen achsenparallelen Strecken zusammensetzt. In der Differential- und Integralrechnung wird gezeigt, daß das Kurvenintegral

$$F\,(x, y) = \int_\Gamma (P\,dx + Q\,dy) \tag{1,19}$$

für alle Polygonzüge Γ, die (x_0, y_0) mit (x, y) verbinden, denselben Wert hat und eine Stammfunktion darstellt, wenn die Integrabilitätsbedingung (1,18) erfüllt ist.

In beiden eben behandelten Beispielen setzen wir $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ und wählen für Γ den Streckenzug, der sich aus den Strecken I: $(0,0) \ldots (x,0)$ und II: $(x,0) \ldots (x,y)$ zusammensetzt. Mit $P = x$, $Q = y$ erhält man

$$F\,(x, y) = \int_\Gamma (P\,d\,x + Q\,d\,y) = \int_0^x x\,d\,x + \int_0^y y\,d\,y = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\,.$$

Im ersten Beispiel war $P\,(x, y) = 3\,x^2 + 6\,x\,y^2$, $Q\,(x, y) = 6\,x^2 y + 4\,y^2$. Es reduziert sich

$\int_I (P\,d\,x + Q\,d\,y)$ auf $\int_0^x P\,d\,x = \int_0^x 3\,x^2\,d\,x = x^3$ und $\int_{II} (P\,d\,x + Q\,d\,y)$ auf $\int_0^y Q\,d\,y = 6\,x^2 \int_0^y y\,d\,y + 4 \cdot \int_0^y y^2\,d\,y = 3\,x^2\,y^2 + \frac{4}{3}\,y^3$. Damit ergibt sich

$$F\,(x, y) = x^3 + 3\,x^2\,y^2 + \frac{4}{3}\,y^3.$$

7. Integrierender Faktor

Die Differentialgleichung (1,3) ändert ihre Lösungen nicht, wenn man ihre linke Seite mit einer Funktion $\mu\,(x,\, y) \neq 0$ multipliziert. Wenn die linke Seite der Differentialgleichung kein vollständiges Differential ist, suchen wir den Faktor μ so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$d\,F = \mu\,(P\,d\,x + Q\,d\,y) \tag{1,20}$$

durch eine Funktion F der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y erfüllt wird. Dies ist der Fall, wenn in dem einfach zusammenhängenden Gebiet

$$\frac{\partial\,(\mu\,P)}{\partial\,y} = \frac{\partial\,(\mu\,Q)}{\partial\,x} \tag{1,21}$$

erfüllt ist oder, mit anderen Worten, wenn μ der partiellen Differentialgleichung

$$Q\,\frac{\partial\,\mu}{\partial\,x} - P\,\frac{\partial\,\mu}{\partial\,y} + \left(\frac{\partial\,Q}{\partial\,x} - \frac{\partial\,P}{\partial\,y}\right)\mu = 0 \tag{1,22}$$

genügt.

Jede Funktion μ von der Art, daß die mit μ multiplizierte linke Seite der Differentialgleichung (1,3) ein vollständiges Differential ist, wird *integrierender Faktor* oder EULER*scher Multiplikator* der Differentialgleichung (1,3) genannt. Ist ein solcher Multiplikator bekannt, so findet man die zugehörige Funktion F durch Integration eines vollständigen Differentials vermittels Quadraturen nach der in 6. dargestellten Methode. Die Differentialgleichung geht dann über in

$$d\,F = 0, \tag{1,23}$$

und man hat die Gleichung

$$F = C. \tag{1,24}$$

Auf die Frage, ob immer Multiplikatoren μ vorhanden sind und wie groß deren Mannigfaltigkeit ist, wollen wir hier nicht eingehen. Im allgemeinen ist die Bestimmung einer Funktion μ, welche der Gleichung (1,22) genügt, keine leichtere Aufgabe als die Lösung der Differentialgleichung (1,3). Man braucht allerdings nicht die allgemeinste der Differentialgleichung (1,22) genügende Funktion μ zu kennen, sondern nur eine solche Funktion. Es gibt wenigstens Ausnahmefälle, in denen es gelingt, einen Multiplikator μ ohne besondere Schwierigkeit zu finden.

Man kann z. B. fragen, ob ein von y unabhängiger Multiplikator μ vorhanden ist. Dann ist $\dfrac{\partial\,\mu}{\partial\,y} = 0$, und die Gleichung (1,22) schreibt sich

$$\frac{d\log\mu}{d\,x} = \frac{\dfrac{\partial\,P}{\partial\,y} - \dfrac{\partial\,Q}{\partial\,x}}{Q}\,;$$

wenn die rechte Seite von y unabhängig ist, ergibt sich durch eine Quadratur μ als Funktion von x.

So findet man für die in 5. behandelte lineare Differentialgleichung

$$d\,y + (P\,(x)\,y - Q\,(x))\,d\,x = 0$$

den Multiplikator

$$\mu = e^{\int P(x)\,dx}.$$

Man bestätigt auch ohne weiteres, daß für das Produkt

$$e^{\int P\,d\,x}\,[d\,y + (P\,y - Q)\,d\,x]$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist; denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\,e^{\int P\,d\,x} = P\,e^{\int P\,d\,x}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\int P\,d\,x}\,(P\,y - Q)\right] = P\,e^{\int P\,d\,x}\,.$$

Die homogene Differentialgleichung

$$d\,y - f\left(\frac{y}{x}\right)d\,x = 0$$

hat den Multiplikator $\mu = \left(y - x\,f\left(\frac{y}{x}\right)\right)^{-1}$;

denn der Ausdruck

$$\left(d\,y - f\left(\frac{y}{x}\right)d\,x\right)\,\left(y - x\,f\left(\frac{y}{x}\right)\right)^{-1},$$

welcher durch die Substitution $y = x\,z$ in

$$\frac{d\,x}{x} + \frac{d\,z}{z - f\,(z)}$$

übergeht, ist das vollständige Differential der Funktion

$$\log x + \int \frac{d\,z}{z - f\,(z)}\,,$$

die man nur gleich einer willkürlichen Konstanten $\log C$ zu setzen braucht, um die frühere Lösung der homogenen Differentialgleichung zu erhalten.

Wir wollen noch als Beispiel eine Differentialgleichung behandeln, die in keine der bisher behandelten Klassen fällt, für die sich aber ein integrierender Faktor angeben läßt.

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$(x\,y^2 - y^3)\,d\,x + (1 - x\,y^2)\,d\,y = 0$$

geht durch Multiplikation mit $\mu = \frac{1}{y^2}$ in die Gleichung

$$(x - y)\,d\,x + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)d\,y = 0$$

über, deren linke Seite wegen

$$\frac{\partial\,(x-y)}{\partial\, y} = \frac{\partial\left(\dfrac{1}{y^2}-x\right)}{\partial\, x} = -1$$

ein vollständiges Differential ist. Integration ergibt

$$F = \frac{x^2}{2} - x\,y - \frac{1}{y}\,.$$

Das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist $F = C$ oder

$$x^2\,y - 2\,x\,y^2 - 2\,C\,y - 2 = 0.$$

8. Clairautsche Differentialgleichung[1])

Als D'ALEMBERT*sche Differentialgleichung* bezeichnet man eine in x, y lineare Gleichung, deren Koeffizienten von

$$p = \frac{d\,y}{d\,x}$$

abhängen:

$$y = x\,f\,(p) + \varphi\,(p). \tag{1,25}$$

Indem wir (1,25) nach x differenzieren, erhalten wir die Gleichung

$$p = f\,(p) + [x\,f'\,(p) + \varphi'\,(p)]\,\frac{d\,p}{d\,x}\,,$$

welche, wenn

$$f\,(p) \neq p$$

ist, auf die Form

$$\frac{d\,x}{d\,p} + x\,\frac{f'\,(p)}{f\,(p)-p} + \frac{\varphi'\,(p)}{f\,(p)-p} = 0$$

gebracht werden kann. Faßt man p als unabhängige, x als abhängige Veränderliche auf, so hat man eine lineare Differentialgleichung, welche nach 5. integriert wird. Man erhält so x als Funktion von p mit einer willkürlichen Konstanten C:

$$x = F\,(p,\,C).$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die Gleichung (1,25) ergibt sich auch y als Funktion von p und C:

$$y = G\,(p,\,C).$$

---

[1]) Auf eine eingehende Theorie wird verzichtet. Man vgl. dazu die sehr genauen Ausführungen bei KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig 1950), S. 103 bis 112.

Damit ist eine Schar von Integralkurven der Differentialgleichung unter Benutzung der Hilfsveränderlichen p dargestellt. Läßt sich p eliminieren, so ergibt sich eine Gleichung zwischen x und y mit der willkürlichen Konstanten C.

In dem Sonderfall $f(p) = p$ haben wir die CLAIRAUT*sche Differentialgleichung*

(1,26) $$y = p\,x + \varphi(p)\,,$$

bei der wir auf eine neue Art von Integralen stoßen. Durch Differentiation nach x erhält man

$$p = p + [x + \varphi'(p)]\,\frac{d\,p}{d\,x}$$

oder

$$[x + \varphi'(p)]\,\frac{d\,p}{d\,x} = 0\,.$$

Diese Gleichung kann auf zwei Arten befriedigt werden. Entweder ist $\frac{d\,p}{d\,x} = 0$, also $p = C$ konstant, so daß sich die Lösung

(1,27) $$y = C\,x + \varphi(C)$$

ergibt. Oder es ist

(1,28) $$x + \varphi'(p) = 0\,,$$

also

$$x = -\varphi'(p)\,;$$

setzt man diesen Wert von x in die Gleichung (1,26) ein, so erhält man

$$y = \varphi(p) - p\,\varphi'(p)\,.$$

Die beiden letzten Gleichungen stellen eine Integralkurve der Differentialgleichung mit der Hilfsveränderlichen p dar. Durch Elimination von p erhält man eine Gleichung

(1,29) $$F(x, y) = 0$$

ohne willkürliche Konstante.

Die in x, y lineare Gleichung (1,27) mit der willkürlichen Konstanten C stellt eine Schar von geraden Linien dar. Die Hüllkurve dieser Geradenschar findet man, indem man die Gleichung partiell nach C differenziert und die so erhaltene Gleichung

$$x + \varphi'(C) = 0$$

mit der Gleichung (1,27) verbindet. So ergibt sich die Parameterdarstellung der Hüllkurve

$$x = -\varphi'(C)\,,$$
$$y = \varphi(C) - C\,\varphi'(C)\,;$$

hieraus erhält man durch Elimination von C als Gleichung der Hüllkurve die Gleichung $F(x, y) = 0$, welche oben durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen (1,26) und (1,28) gefunden wurde. Die Gleichung (1,29) enthält keine willkürliche Konstante, sie geht aber auch nicht aus dem allgemeinen Integral (1,27) durch Einsetzen eines speziellen Wertes für die Konstante C hervor. Das Integral (1,29) ist hiernach kein partikuläres Integral; man bezeichnet die zum allgemeinen Integral (1,27) noch hinzukommende Lösung (1,29) als *singuläre Lösung*. Geometrisch stellt diese singuläre Lösung die *Hüllkurve* der durch das allgemeine Integral dargestellten Geradenschar dar.

Beispiel: Gesucht ist die Kurve, deren Tangenten mit den Koordinatenachsen Dreiecke von konstanter Fläche $\frac{1}{2}\,a^2$ bilden.

Die Tangente im Kurvenpunkt (x, y) hat die Gleichung

$$\eta - y = p\,(\xi - x),$$

also die Achsenabschnitte

$$-\frac{1}{p}\,(y - p\,x), \quad y - p\,x\,,$$

deren Produkt gleich a^2 sein soll. So ergibt sich die CLAIRAUTsche Differentialgleichung

$$y = p\,x + a\,\sqrt{-p}\,.$$

Ihr allgemeines Integral

$$y = C\,x + a\sqrt{-C}$$

stellt die Geraden dar, welche mit den Achsen Dreiecke von der Fläche $\frac{1}{2}\,a^2$ bilden. Die Hüllkurve dieser Geradenschar, die gleichseitige Hyperbel

$$x\,y = \frac{a^2}{4}\,,$$

stellt die singuläre Lösung der Differentialgleichung dar.

9. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen lassen

Eine *Differentialgleichung zweiter Ordnung* enthält im allgemeinen die vier Größen

$$x,\ y,\ \frac{d\,y}{d\,x},\ \frac{d^2y}{d\,x^2}\,.$$

Sie läßt sich auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen, wenn entweder x oder y in der Gleichung nicht vorkommt.

a) Wenn y fehlt, die Gleichung also die Form

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \tag{1,30}$$

hat, setzt man

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}. \tag{1,31}$$

Man hat dann

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0, \tag{1,32}$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und p. Im allgemeinen ist die Differentialgleichung (1,32) nach den bisherigen Methoden nicht lösbar. Wenn es aber gelingt, ihr allgemeines Integral in der Form

$$p = \varphi(x, C)$$

zu finden, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet, so hat man

$$dy = \varphi(x, C)\, dx;$$

daraus folgt

$$y = \int \varphi(x, C)\, dx + C',$$

wo C' eine zweite willkürliche Konstante darstellt.

Wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung auch x nicht enthält, wenn sie also von der Form

$$F\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

ist, kommt man auf die Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

oder

$$\frac{dp}{dx} = f(p),$$

in der sich die Veränderlichen trennen lassen. Man hat

$$dx = \frac{dp}{f(p)},$$

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + C.$$