

SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 1180/1180a

DIFFERENTIALGEOMETRIE

von

DR. PHIL. KARL STRUBECKER

o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe

III

THEORIE DER FLÄCHENKRÜMMUNG

Mit 38 Figuren



WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

BERLIN 1959

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende Bände:

Band I: Kurventheorie der Ebene und des Raumes
(Band 1113/1113 a)

Band II: Theorie der Flächenmetrik
(Band 1179/1179 a)

Band III: Theorie der Flächenkrümmung
(Band 1180/1180 a)



Copyright 1958 by Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35, Genthiner Str. 13.
Alle Rechte, einschl. der Rechte der Herstellung von Photokopien und
Mikrofilmen, von der Verlagshandlung vorbehalten. — Archiv-Nr. 11 11 80.
Satz: Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35. Druck: Paul Funk, Berlin W 35.
Printed in Germany.

Inhalt

Literaturverzeichnis	5
Einleitung	6

IV. Theorie der Flächenkrümmung

A. Streifentheorie

1. Theorie der Streifen	6
2. Geodätische Streifen, Schmiegestreifen und Krümmungsstreifen	12

B. Elementare Theorie der Flächenkrümmung

3. Die zweite Grundform der Flächentheorie. Satz von Meusnier	18
4. Normalkrümmung, Schmiegtangenten, Schmieglinien	25
5. Beispiele: Windschiefe Regelflächen, Drehflächen, Flächen $z = z(x, y)$, Nabelpunkte	29
6. Formel von Euler	37
7. Indikatrix von Dupin	42
8. Konjugierte Flächentangenten	50
9. Schiebflächen	55
10. Krümmungslinien. Gaußsche Krümmung K und mittlere Krümmung H einer Fläche.	60
11. Beispiele: Drehflächen, Ebene, Kugel, Pseudosphäre, Kettenfläche	65
12. Geodätische Windung einer Flächenkurve, Sätze von F. Joachimsthal	68
13. Weiteres über Krümmungslinien. Normalenflächen. Formel von Olinde Rodrigues	71
14. Krummlinige Koordinaten im Raum. Satz von Dupin über dreifache orthogonale Flächensysteme. Parallelfächen	76
15. Normalenkongruenz einer Fläche. Zentrafläche	85
16. Kanalfächen, Gesimsflächen, Dupinsche Zykliken	89
17. Flächen von Monge und Serret mit einer einzigen Schar von Krümmungslinien	92
18. Konforme (winkeltreue) Abbildungen des Raumes. Möbiussche Kugeltransformationen. Satz von Liouville	98
19. Die Formeln von Weingarten	104

C. Gaußsche Theorie der Flächenkrümmung

20. Sphärisches Bild einer Fläche nach Gauß; Geometrische Deutung der Gaußschen Krümmung	107
21. Das Theorema egregium von Gauß	113
22. Geodätische Polarkoordinaten, Riemannsche Zentralkoordinaten. Biegungsinvariante Erklärung der Gaußschen Krümmung	119
23. Satz von Gauß und Bonnet	124
24. Anwendungen der Gauß-Bonnetschen Integralformel	131
25. Flächen konstanter Gaußscher Krümmung	137
26. Reelle Drehflächen konstanter Gaußscher Krümmung	141
27. Drehflächen konstanter Gaußscher Krümmung $K = \text{const}$ mit (eigentlicher) isotroper Drehachse	148

28. Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Ebene	152
29. Projektive Metrik. Projektives Modell der hyperbolischen Ebene	156
30. Konformes Modell der hyperbolischen Ebene	166
31. Entscheidung der Isometrie zweier Flächen (Problem von Minding)	175
D. Ableitungsgleichungen und Fundamentalsätze der Flächentheorie	
32. Die Gaußschen Ableitungsformeln der Flächentheorie	183
33. Die Integrabilitätsbedingungen der Flächentheorie. Formeln von Codazzi und Mainardi	187
34. Der Fundamentalsatz der Flächentheorie von Ossian Bonnet	192
35. Geodätische Abbildung einer Fläche auf die euklidische Ebene	197
36. Der Identitätssatz für Eiflächen. Unverblegbarkeit und Starrheit der Eiflächen	202
E. Minimalflächen	
37. Minimalflächen	211
38. Minimalflächen als Schiebflächen isotroper Kurven. Formeln von Weierstraß	215
39. Assoziierte Minimalflächen	221
40. Adjungierte Minimalflächen mit kongruenten oder symmetrischen isotropen Schiebkurven. Minimalflächen von Lie und Geiser	225
41. Formeln von H. A. Schwarz. Problem von E. G. Björling	230
42. Beispiele	237
Namen- und Sachverzeichnis	240

Literaturverzeichnis

Neben der in Band I und Band II dieser „Differentialgeometrie“ angeführten Literatur befassen sich mit dem Gegenstande des vorliegenden Bandes III die folgenden Schriften:

1. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen III. Band. Geometrie, 3. Teil D. Differentialgeometrie, Leipzig 1902—1927.
2. H. E. Timerding, Repertorium der höheren Mathematik, 2. Aufl., 2. Band: Geometrie, 2. Hälfte: Raumgeometrie, Leipzig und Berlin 1922.
3. A. D. Alexandrow, Die innere Geometrie der konvexen Flächen, Berlin 1955.
4. Richard Baldus, Nichteuklidische Geometrie (Hyperbolische Geometrie der Ebene), 3. Aufl., durchgesehen und herausgegeben von Frank Löbell, Sammlung Götschen Band 970, Berlin 1953.
5. Eugenio Beltrami, Opere matematiche, vol. 1, Milano 1902.
6. Roberto Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, deutsch von Heinrich Liebmann, 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1921.
7. Richard Courant, Dirichlets principle, Conformal Mapping and Minimal surfaces, New York 1950.
8. N. W. Efimow, Flächenverbiegung im Großen (mit einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grottemeyer), Berlin 1957.
9. J. Favard, Cours de géométrie différentielle locale, Paris 1957.
10. Felix Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Aufl., bearbeitet von Wilhelm Blaschke, Berlin 1926.
11. Felix Klein, Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie, für den Druck neu bearbeitet von W. Rosemann, Berlin 1928.
12. Felix Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I, bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer, Berlin 1926; Teil II, bearbeitet von R. Courant und St. Cohn-Vossen, Berlin 1927.
13. Erwin Kruppa, Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Wien 1957.
14. Max Pinl, 100 Jahre Differentialgeometrie, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, 5 (1956) S. 34—48.
15. A. W. Pogorelow, Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen, Berlin 1956.
16. Tibor Radó, On the Problem of Plateau, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2. Band, Berlin 1933.
17. Bernhard Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Göttinger Abhandlungen 13 (1868) S. 1—20, oder Ges. Werke 2. Aufl. S. 272—287, oder Physikalische Blätter 10 (1954) S. 296 bis 313 (mit Erläuterungen von Karl Strubecker).
18. Hermann Amandus Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I, Berlin 1890.
19. Hermann Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1922.
20. Hermann Weyl, Raum, Zeit, Materie, Vorlesungen über Allgemeine Relativitätstheorie, 5. Aufl., Berlin 1923.

Formelverweise: Es gelten sinngemäß die schon in Band I und Band II erklärten und angewandten Verweise. Insbesondere bezeichnet (IV) den vorliegenden Abschnitt IV (Flächenkrümmung). — Weiter bedeutet (IV. 12) das Kapitel 12 von Abschnitt IV und (16. 3) die Formel 3 in Kapitel 16 des laufenden Abschnittes IV. Schließlich verweist (7. Bem. 1) auf Bemerkung 1 in Kapitel 7 des laufenden Abschnittes IV und (III. 10. Satz 2) auf Satz 2 in Kapitel 10 von Abschnitt III.

Einleitung

Während sich Band II dieser Einführung in die Differentialgeometrie mit den Elementen der inneren Flächentheorie befaßte, die allein von der ersten Grundform der Fläche beherrscht wird und außer der Flächenmetrik und der Vektoranalysis auf Flächen noch die Theorie der Abbildungen von Flächen und die Theorie der geodätischen Linien umfaßt, entwickelt der vorliegende Band III die Elemente der von der zweiten Grundform abhängigen äußeren Flächentheorie, d. h. die Krümmungstheorie der Flächen, sowie jene höheren Teile der inneren Flächentheorie, welche sich an den Begriff der Gaußschen Krümmung anschließen. Neben den klassischen Fragen der Differentialgeometrie im Kleinen werden dabei auch einige neuere Fragen der Differentialgeometrie im Großen erörtert.

IV. Theorie der Flächenkrümmung

A. Streifentheorie

1. Theorie der Streifen. Ordnet man den Punkten P einer (stetig gekrümmten und nicht isotropen) Raumkurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s)$, die auf ihren Bogen s als Parameter bezogen ist, eine (nicht isotrope) Tangentenebene π zu, so erhält man einen zur Raumkurve $\mathfrak{r}(s)$ gehörigen Streifen. Man nennt $\mathfrak{r}(s)$ die Leitkurve des Streifens oder die Streifenkurve. Dieser Streifen heißt stetig gekrümmt, wenn außer der Kurventangente $\mathfrak{t} = \mathfrak{r}'(s)$ auch noch der (zu ihr orthogonale) Normalenvektor $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(s)$ der Streifenebene $\pi(s)$ stetig ableitbar ist. $\mathfrak{t}(s)$ und $\mathfrak{n}(s)$ sind Einheitsvektoren: $|\mathfrak{t}| = |\mathfrak{n}| \equiv 1$. Wegen der Orthogonalität von $\mathfrak{n}(s)$ und $\mathfrak{t}(s)$ ist $\mathfrak{n}\mathfrak{r}' \equiv 0$.

Beispiel 1: Flächenstreifen. Auf jeder stetig gekrümmten (d. h. zweimal stetig ableitbaren) Fläche $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$ bilden die Tangentenebenen $\pi(s)$ längs einer beliebigen stetig gekrümmten

Flächenkurve $\underline{x}(s) = \underline{x}(u(s), v(s))$ einen stetig gekrümmten Streifen (Flächenstreifen); Normalenvektor $\underline{n}(s)$ des Streifens an der Stelle s ist die Flächennormale $\underline{n}(s) = \underline{n}(u(s), v(s))$.

Mit dem durch die Vektoren

$$(1.1) \quad \underline{x} = \underline{x}(s) \text{ und } \underline{n} = \underline{n}(s) \quad (|\underline{n}(s)| \equiv 1, \underline{n}(s)\underline{x}'(s) \equiv 0)$$

($\underline{x}(s)$ = Ortsvektor der Streifenkurve und $\underline{n}(s)$ = Einheitsvektor der Streifenormalen) gekennzeichneten **Streifen** ist ein (rechtshändiges) **begleitendes Dreibein** verbunden, bestehend aus 1. dem Tangentenvektor $\underline{t} = \underline{x}'(s)$ der Streifenkurve ($|\underline{t}(s)| \equiv 1$) und 2. ihrem Seitenvektor

$$(1.2) \quad \underline{s} = \underline{s}(s) = [\underline{n}(s), \underline{t}(s)], \quad |\underline{s}(s)| \equiv 1,$$

der in der Streifenebene $\pi(s)$ zur Kurventangente \underline{t} normal und ein Einheitsvektor ist, und 3. dem Normalenvektor $\underline{n} = \underline{n}(s)$ mit $|\underline{n}(s)| \equiv 1$.

Mit der Streifenkurve $\underline{x}(s)$ ist überdies das aus (II. 4) bekannte, ebenfalls rechtshändige begleitende Dreibein

$$(1.3) \quad \underline{t} = \underline{t}(s), \underline{h} = \underline{h}(s), \underline{b} = \underline{b}(s)$$

der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen verbunden, das aus dem begleitenden Dreibein

$$(1.4) \quad \underline{t} = \underline{t}(s), \underline{s} = \underline{s}(s), \underline{n} = \underline{n}(s)$$

des Streifens entsteht, indem man es um die Kurventangente \underline{t} um den Winkel $\varphi = \sphericalangle(\underline{n}, \underline{b}) = \sphericalangle(\underline{s}, \underline{h})$ dreht (Bild 1). Es folgt

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (\underline{n}\underline{b}) &= (\underline{s}\underline{h}) = \cos \varphi, \\ (\underline{h}\underline{n}) &= \cos(\pi/2 - \varphi) = + \sin \varphi, \\ (\underline{s}\underline{b}) &= \cos(\pi/2 + \varphi) = - \sin \varphi. \end{aligned}$$

Im Nullpunkt O angeheftet, beschreiben die Endpunkte T, S, N der Vektoren (4) auf der Einheitskugel das (sphärische) Tangentenbild $\underline{t}(s)$, das Seitenbild $\underline{s}(s)$ und das Normalenbild $\underline{n}(s)$ des Streifens (1).

Wandert man auf der Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ mit der festen Geschwindigkeit $|\mathfrak{x}'| = 1$ vom Punkte s zum Nachbarpunkte $s + ds$, so erleidet das begleitende Dreibein (4), abgesehen von einer Parallelverschiebung, eine Drehung, deren Drehvektor $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(s)$ folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$(1.6) \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{d}(s) = \alpha(s) \mathfrak{t}(s) + \beta(s) \mathfrak{s}(s) + \gamma(s) \mathfrak{n}(s).$$

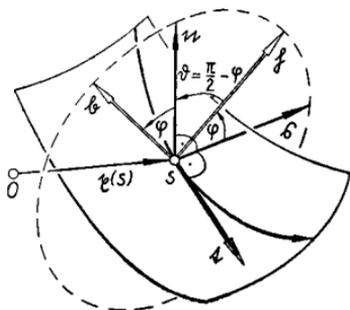


Bild 1. Flächenstreifen.

Der längs der Streifenkurve (Leitlinie) $\mathfrak{x}(s)$ mit dem begleitenden Dreibein \mathfrak{t} (Tangente), \mathfrak{h} (Hauptnormale) und \mathfrak{b} (Binormale) der Fläche umschriebene Streifen besitzt in s ein begleitendes Dreibein, bestehend aus \mathfrak{t} (Tangente), \mathfrak{s} (Seitentangente) und \mathfrak{n} (Streifennormale).

Die Richtung' von \mathfrak{d} gibt dabei nach (II. 11. Bem. 3) die Achse der Drehung, die Länge $|\mathfrak{d}|$ die Winkelgeschwindigkeit ω und der Sinn von \mathfrak{d} den Drehsinn an.

Bei der Drehung (6) verändern sich, wenn s als Zeit geedeut wird, die drei sphärischen Bilder $\mathfrak{t}(s)$, $\mathfrak{s}(s)$ und $\mathfrak{n}(s)$ des Streifens mit Geschwindigkeiten, deren Vektoren $\mathfrak{t}'(s)$, $\mathfrak{s}'(s)$ und $\mathfrak{n}'(s)$ nach der aus (II. 10. 16) bekannten Eulerschen Formel lauten

$$(1.7) \quad \mathfrak{t}' = [\mathfrak{d}\mathfrak{t}], \quad \mathfrak{s}' = [\mathfrak{d}\mathfrak{s}], \quad \mathfrak{n}' = [\mathfrak{d}\mathfrak{n}].$$

Ausführlich folgen, wegen

$$(1.8) \quad [\mathfrak{t}\mathfrak{s}] = \mathfrak{n}, \quad [\mathfrak{s}\mathfrak{n}] = \mathfrak{t}, \quad [\mathfrak{n}\mathfrak{t}] = \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad [\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{n}] = 1,$$

durch Eintragen von \mathfrak{d} aus (6) in (7), die schiefsymmetrischen Formeln

$$(1.9) \quad \begin{array}{l} t' = \quad \quad \quad + \gamma(s)\xi - \beta(s)n \\ \xi' = -\gamma(s)t \quad \quad \quad + \alpha(s)n \\ n' = +\beta(s)t - \alpha(s)\xi \end{array} .$$

In diesen nach Cesare Burali-Forti (1912) benannten **Ableitungsgleichungen der Streifentheorie** treten als bewegungs- und parameterinvariante **Fundamentalgrößen des Streifens** (1) die drei Größen

$$(1.10) \quad \alpha = \alpha(s), \beta = \beta(s), \gamma = \gamma(s)$$

auf. Man nennt $\alpha(s)$ die **geodätische Windung**, $-\beta(s)$ die **Normalkrümmung** und $\gamma(s)$ die **geodätische Krümmung** des Streifens und schreibt dafür häufig auch

$$(1.10^*) \quad \alpha = \tau_g(s), \beta = -\kappa_n(s), \gamma = \kappa_g(s).$$

Man kann diese drei grundlegenden Differentialinvarianten (10) des Streifens (1) durch die Vektoren $t(s)$, $\xi(s)$ und $n(s)$ und ihre Ableitungen nach s ausdrücken, indem man die Gleichungen (9) reihum innerlich mit diesen Vektoren multipliziert. Wegen

$$(1.11) \quad (t\xi) = (\xi n) = (nt) \equiv 0, \quad t^2 = \xi^2 = n^2 \equiv 1$$

und (8) folgt dann

$$(1.12) \quad \begin{array}{l} \alpha(s) = (\xi'n) = -(\xi n') = [t\xi\xi'] = [t n n'] = +\tau_g(s), \\ \beta(s) = (n't) = -(n t') = [\xi n n'] = [\xi t t'] = -\kappa_n(s), \\ \gamma(s) = (t'\xi) = -(t \xi') = [n t t'] = [n \xi \xi'] = +\kappa_g(s). \end{array}$$

Da die Streifenkurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s)$ nach (II. 12) durch ihre Krümmung $\kappa = \kappa(s)$ und Torsion $\tau = \tau(s)$ bis auf ihre Lage im Raum eindeutig bestimmt ist, und da die Streifennormale $n(s)$ nach (5) durch ihren Neigungswinkel $\varphi = \varphi(s)$ gegen die Binormale $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(s)$ der Kurve $\mathfrak{r}(s)$ eindeutig festliegt, kann man die drei Gleichungen

$$(1.13) \quad \kappa = \kappa(s), \quad \tau = \tau(s), \quad \varphi = \varphi(s)$$

als natürliche Gleichungen des Streifens bezeichnen. Sie bestimmen den Streifen bis auf seine Lage im Raum eindeutig.

Zwischen den Invarianten (10) und (13) des Streifens bestehen einfache Beziehungen, die man leicht gewinnen kann, indem man in den Formeln (12) die Vektoren \mathfrak{s} und \mathfrak{n} durch \mathfrak{h} und \mathfrak{b} ausdrückt. Wegen

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \mathfrak{s} &= \mathfrak{h} \cos \varphi - \mathfrak{b} \sin \varphi & \mathfrak{h} &= +\mathfrak{s} \cos \varphi + \mathfrak{n} \sin \varphi \\ \mathfrak{n} &= \mathfrak{h} \sin \varphi + \mathfrak{b} \cos \varphi & \mathfrak{b} &= -\mathfrak{s} \sin \varphi + \mathfrak{n} \cos \varphi, \end{aligned}$$

folgt dann auf Grund der Frenetschen Formeln (II. 6. 14) und aus $[\mathfrak{h}\mathfrak{b}] = +1$

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \alpha &= [\mathfrak{t}\mathfrak{n}\mathfrak{n}'] = (\tau - \varphi') [\mathfrak{t}\mathfrak{h}\mathfrak{b}] & &= \tau - \varphi', \\ \beta &= [\mathfrak{s}\mathfrak{t}\mathfrak{t}'] = [\mathfrak{h} \cos \varphi - \mathfrak{b} \sin \varphi, \mathfrak{t}, \kappa \mathfrak{h}] & &= -\kappa \sin \varphi, \\ \gamma &= [\mathfrak{n}\mathfrak{t}\mathfrak{t}'] = [\mathfrak{b} \cos \varphi + \mathfrak{h} \sin \varphi, \mathfrak{t}, \kappa \mathfrak{h}] & &= +\kappa \cos \varphi, \end{aligned}$$

und daraus umgekehrt

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \kappa^2 &= \beta^2 + \gamma^2, \quad \tau = \alpha + \frac{\beta\gamma' - \gamma\beta'}{\beta^2 + \gamma^2}, \\ \cos \varphi &= \gamma / \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \quad \sin \varphi = -\beta / \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

Satz 1: *Der Streifen (1) ist durch die drei Funktionen (Fundamentalgrößen, Invarianten) $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ d. h. durch die drei natürlichen Gleichungen (10) bis auf seine Lage im Raum eindeutig festgelegt.*

Die Schar der Tangentenebenen $\pi(s)$ des Streifens mit der Gleichung

$$(1.17) \quad \mathfrak{n}(s) \cdot (\mathfrak{X} - \mathfrak{r}(s)) = 0$$

umhüllt insgesamt eine die Leitkurve $\mathfrak{r}(s)$ enthaltende abwickelbare Fläche (Ebene, Kegel, Zylinder, Torse). Deren Mantellinien (Erzeugenden, Charakteristiken), die

man als die zu den Kurventangenten t konjugierten Streifentangenten \mathfrak{f} bezeichnet, genügen nach (II. 15) außer der Gleichung (17) noch der aus (17) durch Ableiten nach s entstehenden Gleichung, d. h. wegen $n\mathfrak{x}' \equiv 0$ der Gleichung

$$(1.18) \quad n'(s) \cdot (\mathfrak{X} - \mathfrak{x}(s)) = 0.$$

Aus (17) und (18) folgt als Vektor $\mathfrak{f} = \mathfrak{X} - \mathfrak{x}(s)$ der zu t konjugierten Streifentangente

$$(1.19) \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{f}(s) = [n(s), n'(s)].$$

Aus den Ableitungsformeln (9) erhält man somit

$$\mathfrak{f}'(s) = [n, \beta t - \alpha \mathfrak{s}] = \beta [nt] + \alpha [\mathfrak{s}n]$$

oder wegen (8) schließlich

$$(1.20) \quad \mathfrak{f}' = \mathfrak{f}'(s) = \alpha(s)t(s) + \beta(s)\mathfrak{s}(s).$$

Es folgt

Satz 2: *Schreitet man auf dem Streifen längs der Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$, d. h. in der Richtung $t(s)$ vorwärts, so dreht sich die Streifenebene $\pi(s)$ um die zu $t(s)$ konjugierte Richtung $\mathfrak{f}(s) = \alpha(s)t(s) + \beta(s)\mathfrak{s}(s)$.*

Damit ist auch eine einfache geometrische Deutung der Invarianten $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ als Koordinaten der Komponentenzerlegung von $\mathfrak{f}(s)$ in den Richtungen $t(s)$ des Tangentenvektors und $\mathfrak{s}(s)$ des Seitenvektors gewonnen.

Bemerkung 1: Man entnimmt den Formeln (12) noch die folgende wichtige Tatsache. Ändert man gleichzeitig die Richtungen (Vorzeichen) des Normalenvektors n und des Seitenvektors \mathfrak{s} des Streifens (1), so bleibt das begleitende Dreibein (t, \mathfrak{s}, n) nach wie vor rechtshändig; dabei bleibt die geodätische Windung $\alpha(s) = \tau_g(s)$ ungeändert, die Normalkrümmung $-\beta(s) = \kappa_n(s)$ und die geodätische Krümmung $\gamma(s) = \kappa_g(s)$ des Streifens ändern jedoch ihr Vorzeichen. Während also das Vorzeichen der geodätischen Windung geometrische Bedeutung hat, kommt den Vorzeichen der Normalkrümmung und der geodätischen

Krümmung, die von der Orientierung der Streifennormalen abhängen, keine geometrische Bedeutung zu.

Man kann daher durch geeignete Wahl der Orientierung von n (und \bar{s}) das Vorzeichen der Normalkrümmung κ_n (oder der geodätischen Krümmung κ_g) des Streifens nach Belieben einrichten.

2. Geodätische Streifen, Schmiegestreifen und Krümmungsstreifen. Von den Invarianten (1. 12) ist uns die Größe

$$(2. 1) \quad \gamma(s) = [ntt'] = [n\bar{x}'\bar{x}'''] = [\bar{x}'\bar{x}''n] = \kappa_g(s)$$

schon in (III. 33. 6) begegnet. $\gamma(s)$ ist mit der geodätischen Krümmung oder Abwickelkrümmung $\kappa_g(s)$ des Streifens identisch und bleibt bei allen Biegungen des Streifens ungeändert, insbesondere auch bei der Abwicklung des Streifens in die Ebene. Nach (III. 33. Satz 1) ist die geodätische Krümmung κ_g , die man nach (1. 15) auch durch die Formel

$$(2. 2) \quad \kappa_g = \kappa \cos \varphi = \kappa^*$$

darstellen kann, zugleich die Krümmung $\kappa^* = \kappa^*(s)$ jener ebenen Kurve $\bar{x}^*(s)$, die man erhält, wenn man die Streifenkurve $\bar{x}(s)$ normal auf die Tangentenebene $\pi(s)$ des Streifens an der Stelle s projiziert.

Streifen mit verschwindender geodätischer Krümmung $\gamma = \kappa_g \equiv 0$ heißen **geodätische Streifen**. Ihre Streifenkurve $\bar{x}(s)$ wird bei Verebnung des Streifens gerade gestreckt ($\kappa^* \equiv 0$). Geradlinige Streifen ($\kappa = 0$) sind nach (2) stets geodätisch.

Für krumme geodätische Streifen ($\kappa \neq 0$, $\kappa_g \equiv 0$) sind nach (2) die Streifennormale n und die Binormale b stets rechtwinkelig ($\varphi = \pm \pi/2$). Ein krummer geodätischer Streifen ist also durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die Schmiegeebene $\sigma(s)$ seiner Streifenkurve $\bar{x}(s)$ überall zu seiner Tangentenebene $\pi(s)$ normal ist. Die Hauptnormale h und die Streifennormale n fallen in dieselbe Gerade ($h = \pm n$).

Wegen $\varphi \equiv \pm \pi/2$ und $\varphi' \equiv 0$ ist nach (1. 12) und (1. 15) für krumme geodätische Streifen

$$(2. 3) \quad \alpha = \tau_g = \tau, \quad -\beta = \kappa_n = \pm \kappa, \quad \gamma = \kappa_g \equiv 0,$$

d. h. ihre geodätische Windung τ_g ist mit der Windung τ und ihre Normalkrümmung κ_n dem Betrage nach mit der Krümmung κ der Streifenkurve $\bar{x}(s)$ identisch.

Die Normalkrümmung eines Streifens

$$(2.4) \quad -\beta(s) = -[\hat{s}t t'] = \kappa \sin \varphi = \kappa_n$$

verschwindet ($-\beta = \kappa_n \equiv 0$) für alle geradlinigen Streifen ($\kappa \equiv 0$), ebenso für krumme Streifen ($\kappa \neq 0$), wenn $\varphi \equiv 0$ oder π ist, d. h. dann und nur dann, wenn die Schmiegeebene σ der Streifenkurve mit der Tangentenebene π des Streifens identisch ist. Solche von den Punkten \underline{x} und Schmiegeebenen σ der Kurve $\underline{x}(s)$ gebildete Streifen heißen **Schmiegestreifen**. Geradlinige Streifen sollen wegen $\beta \equiv 0$ gleichfalls als Schmiegestreifen bezeichnet werden.

Für krumme Schmiegestreifen ($\kappa \neq 0$, $\varphi \equiv 0$ oder π) gilt nach (1.15) wegen $\varphi' \equiv 0$

$$(2.5) \quad \alpha = \tau_g = \tau, \quad -\beta = \kappa_n \equiv 0, \quad \gamma = \kappa_g = \pm \kappa,$$

d. h. die geodätische Krümmung κ_g eines Schmiegestreifens ist dem Betrage nach gleich der Krümmung κ der Streifenkurve $\underline{x}(s)$, und seine geodätische Windung τ_g ist gleich der Windung τ der Streifenkurve. Nach (1.20) ist bei einem Schmiegestreifen ($\beta \equiv 0$)

$$(2.6) \quad \mathfrak{f}(s) = \alpha(s)t(s),$$

d. h. im Falle $\alpha(s) \neq 0$ gilt wegen (1. Satz 2) der

Satz 1: Bei einem Schmiegestreifen mit $\alpha(s) \neq 0$ fallen die Tangente t der Streifenkurve $\underline{x}(s)$ und ihre konjugierte Tangente \mathfrak{f} zusammen. Die Tangentenebene π des Schmiegestreifens dreht sich beim Fortschreiten längs der Streifenkurve $\underline{x}(s)$ stets um die Kurventangente t .

Ein Streifen verschwindender geodätischer Windung

$$(2.7) \quad \alpha(s) = [t n n'] = \tau - \varphi' = \tau_g \equiv 0$$

wird als **Krümmungsstreifen** bezeichnet. Nach (1.20) ist bei einem Krümmungsstreifen ($\alpha \equiv 0$)

$$(2.8) \quad \mathfrak{f}(s) = \beta(s)\hat{s}(s),$$

d. h. im Falle $\beta(s) \neq 0$ gilt

Satz 2: Bei einem Krümmungsstreifen mit $\beta(s) \neq 0$ sind die Tangente t der Streifenkurve $\underline{x}(s)$ und ihre konjugierte Tangente \mathfrak{f} zueinander normal.

Bemerkung 1: Ist $\underline{x}(s)$ eine ebene Kurve mit $\alpha \equiv 0$ (ebene Krümmungslinie), also $\tau(s) \equiv 0$, so folgt aus (7), daß $\varphi' \equiv 0$,

also $\varphi \equiv \text{const}$ ist. Somit gilt, weil die Schmiegeebene σ einer ebenen Kurve mit der Kurvenebene identisch ist, der

Satz 3: *Bei einer ebenen Krümmungslinie (einem Krümmungstreifen mit ebener Leitkurve $\xi(s)$) ist die (feste) Ebene σ der Krümmungslinie $\xi(s)$ gegen alle Tangentenebenen $\pi(s)$ des Streifens unter festem Winkel $\varphi = \text{const}$ geneigt. Diese Bedingung $\varphi = \text{const}$ ist für ebene Krümmungstreifen sowohl notwendig als auch hinreichend.*

Die von den Normalen $n(s)$ eines Krümmungstreifens gebildete Fläche (Normalenfläche des Krümmungstreifens) mit der Darstellung

$$(2.9) \quad \eta(s, t) = \xi(s) + tn(s)$$

ist wegen $\tau_g = [\xi' nn'] = [tnn'] \equiv 0$ nach (III. 20. 14) eine abwickelbare Regelfläche (Ebene, Kegel, Zylinder, Torse). Diese Eigenschaft ist für Krümmungstreifen kennzeichnend. Soll nämlich umgekehrt die Normalenfläche (9) eines Streifens abwickelbar sein, so muß $[\xi' nn'] = [tnn'] = \tau_g \equiv 0$ sein, und der Streifen ist notwendig ein Krümmungstreifen.

Zusammenfassend gilt also

Satz 4: *Die Normalenfläche (9) eines Streifens ist dann und nur dann abwickelbar (d. h. Ebene, Kegel, Zylinder oder Torse), wenn der Streifen Krümmungstreifen ist.*

Bemerkung 2: Vergrößert man bei einem beliebigen Streifen den Winkel $\varphi(s)$ zwischen der Streifennormalen $n(s)$ und der Binormalen $b(s)$ um einen konstanten Wert φ_0 , so ändert sich $\varphi'(s)$ nicht, und man erhält einen neuen Streifen der nämlichen geodätischen Windung

$$(2.10) \quad \alpha(s) = \tau_g = \tau - \varphi'.$$

Daraus folgt, wenn $\tau_g \equiv 0$ ist, der

Satz von F. Joachimsthal (1846): *Dreht man alle Tangentenebenen $\pi(s)$ eines Krümmungstreifens um die Kurventangente $t(s)$ um einen beliebigen festen Winkel φ_0 , so erhält man wieder einen Krümmungstreifen.*

Beispiel 1: Umschreibt man einer Kugel (Radius $r = \text{const}$) längs einer ihrer Linien $\xi(s)$ den berührenden Streifen, so entsteht ein sphärischer Streifen. Läßt man die Kugelnormale n ins Innere der Kugel zeigen, indem man $n = -\xi/r$ setzt, so ist

$n' = -\xi'/r = -t/r$. Die Normalkrümmung des sphärischen Streifens hat dann den konstanten positiven Wert

$$(2.11) \quad \kappa_n = -\beta = -(n't) = (t/r, t) = (tt)/r = 1/r.$$

Die geodätische Windung des sphärischen Streifens verschwindet wegen

$$(2.12) \quad \alpha = \tau_g = [tnn'] = -[t, n, t/r] \equiv 0.$$

Es folgt

Satz 5: *Alle sphärischen Streifen sind Krümmungstreifen.*

Beispiel 2: Längs einer ebenen Kurve $\xi(s)$ bilden die Flächenelemente der (festen) Kurvenebene π einen ebenen oder planaren Streifen. Wegen $n = \text{const}$, $n' \equiv 0$ gilt dann nach (1.12)

$$\alpha = -(\xi n') \equiv 0 \quad \text{und} \quad \beta = (n't) \equiv 0.$$

Also folgt

Satz 6: *Alle planaren Streifen sind sowohl Krümmungstreifen ($\alpha \equiv 0$) als auch Schmiegestreifen ($\beta \equiv 0$).*

Bemerkung 3: Man kann sich den Streifen $\{\xi(s), n(s)\}$ als eine Fahrbahn (Straße) denken mit der Leitkurve $\xi(s)$ als Achse (Mittellinie), deren Normalen $n(s)$ nach oben weisen. Bewegt sich dann ein Massenpunkt (Schwerpunkt eines Wagens) mit konstanter Geschwindigkeit $v=1$ reibungsfrei auf der Mittellinie $\xi(s)$ des Streifens, so ist $\xi'(s) = t$ sein Geschwindigkeitsvektor ($v = |t| = 1$) und $\xi''(s) = t' = \kappa \eta$ sein Beschleunigungsvektor. Nach (1.14) und (1.15) kann man den zur Krümmung κ der Straßenachse $\xi(s)$ proportionalen und in Richtung ihrer Hauptnormalen η weisenden Beschleunigungsvektor ξ'' (also auch den Kraftvektor) wie folgt zerlegen:

$$(2.13) \quad \xi'' = \kappa \cos \varphi \cdot \bar{s} + \kappa \sin \varphi \cdot n = \gamma(s) \bar{s} - \beta(s) n.$$

Die erste Komponente, die Querbewegung $\gamma(s) \bar{s}$, welche den Massenpunkt in Richtung des Seitenvektors \bar{s} (d. h. quer zur Fahrtrichtung) aus der Bahn zu drängen sucht, verschwindet nur für geodätische Streifen ($\gamma \equiv 0$). Die zweite Komponente, die Normalbeschleunigung $-\beta(s)n$, welche den Massenpunkt in Richtung der Streifenormalen nach oben ($\beta < 0$) oder nach unten ($\beta > 0$) drückt, also den Normaldruck des Wagens zu verkleinern oder zu vergrößern sucht, verschwindet nur für Schmiegestreifen ($\beta \equiv 0$).

Die wirkliche Bewegung eines Kraftwagens auf einer Fahrbahn ist weder reibungs- noch kräftefrei. Die Reibung der Räder wirkt der gefährlichen Querdrift des Wagens auf nichtgeodätischer Bahn entgegen, die Schwerkraft (und der Luftwiderstand) drücken den Wagen von oben fest auf die Bahn und verhindern sein Ablösen von der Fahrbahn.

Bemerkung 4: Ein Massenpunkt, der sich, einmal angestoßen, reibungs- und kräftefrei auf einer Fläche bewegt, beschreibt auf ihr mit konstanter Geschwindigkeit eine geodätische Linie $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$. Dabei soll t die Zeit bedeuten. Der Geschwindigkeitsvektor \mathfrak{B} des Massenpunktes ist nämlich allgemein, wenn s die Bogenlänge bezeichnet,

$$(2.14) \quad \mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \frac{d\mathfrak{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = vt,$$

wobei $v = ds/dt$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes bedeutet. Sein (zum Kraftvektor proportionaler) Beschleunigungsvektor \mathfrak{B} lautet dann

$$(2.15) \quad \mathfrak{B} = \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{dv}{dt}t + v \frac{dt}{dt} \\ = \dot{v}t + v^2\mathfrak{h} = \dot{v}t + v^2\mathfrak{h}.$$

Darin ist $\dot{v}t$ die (in Richtung der Bahntangente wirkende) Tangentialbeschleunigung und $v^2\mathfrak{h}$ die (in Richtung der Hauptnormalen der Bahn wirkende) Hauptnormalbeschleunigung.

Zerlegt man in (15) den Vektor \mathfrak{h} nach (1. 14), so folgt

$$(2.16) \quad \mathfrak{B} = \dot{v}t + v^2\mathfrak{h}(\cos\varphi\mathfrak{s} + \sin\varphi\mathfrak{n}) = \dot{v}t + v^2(\mathfrak{h}_g\mathfrak{s} + \mathfrak{h}_n\mathfrak{n}).$$

Darin ist $v^2\mathfrak{h}_g\mathfrak{s}$ die Seitenkomponente und $v^2\mathfrak{h}_n\mathfrak{n}$ die flächennormale Komponente der Beschleunigung.

Im Falle einer kräftefreien Bewegung des Massenpunktes auf der Fläche wirkt die Beschleunigung \mathfrak{B} in Richtung der Flächennormalen \mathfrak{n} und es gilt nach (16)

$$(2.17) \quad \dot{v}(t) = 0, \quad v^2\mathfrak{h}_g = 0, \quad \mathfrak{B} = v^2\mathfrak{h}_n\mathfrak{n},$$

d. h. $v = \text{const} \neq 0$ und $\mathfrak{h}_g = 0$. Der kräftefreie Massenpunkt beschreibt daher auf der Fläche tatsächlich mit fester Geschwindigkeit $v = \text{const} \neq 0$ eine geodätische Linie ($\mathfrak{h}_g = 0$), w. z. b. w.

Weil bei einer solchen kräftefreien Bewegung keine Querdrift vorhanden ist ($\gamma \equiv 0$), hat ein mit dem Massenpunkt verbundener Beobachter tatsächlich den Eindruck, sich immer „geradeaus“ zu bewegen.

Verglichen mit allen anderen Flächenkurven, die den Punkt $P(u, v)$ in derselben Richtung (u', v') passieren, hat die geodätische Bahn die kleinste Krümmung, d. h. für sie ist nach (1. 16)

$$(2. 18) \quad \kappa^2(s) = \beta^2(s) + \gamma^2(s) = \text{Minimum.}$$

Nach (1. 12) hat nämlich

$$(2. 19) \quad \beta = (n' t) = (n' \xi') = (n_u u' + n_v v') (\xi_u u' + \xi_v v')$$

in jedem Flächenpunkte $P(u, v)$ für jede feste Flächenrichtung (u', v') einen festen Wert. Daher hat κ^2 in (18) dann und nur dann seinen kleinsten Wert, wenn $\gamma(s) \equiv 0$ ist, d. h. für geodätische Linien.

Damit ist das von Heinrich Hertz (1894) aufgestellte Prinzip der geradesten Bahn bestätigt, nach dem *ein kräftefreier Massenpunkt sich stets gleichförmig (d. h. mit fester Geschwindigkeit) auf einer Bahn mit kleinster Krümmung ($\kappa^2 = \text{Minimum}$) bewegt.*

B. Elementare Theorie der Flächenkrümmung

3. Die zweite Grundform der Flächentheorie. Satz von Meusnier. Wir betrachten auf der regulären, zweimal stetig ableitbaren Fläche

$$(3.1) \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$$

eine auf ihren Bogen s bezogene (also nichtisotrope) zweimal stetig ableitbare Flächenkurve k mit der Gaußschen Parameterdarstellung

$$(3.2) \quad u = u(s), \quad v = v(s)$$

und dem Ortsvektor

$$(3.3) \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u(s), v(s)) = \mathfrak{r}(s).$$

Die Funktionen (2) sollen also in einem gewissen Intervall $a \leq s \leq b$ zweimal stetig nach s und der Vektor (1) in einem gewissen Parameterbereich $\mathfrak{B}(u, v)$ zweimal stetig nach u und v ableitbar sein. Die Fläche (1) heißt dann stetig gekrümmt, ebenso die Flächenkurve (3). Wegen der angenommenen Regularität der Fläche und ihres Parameternetzes ist der Normalenvektor

$$(3.4) \quad \mathfrak{n} = \frac{[\mathfrak{r}_u \mathfrak{r}_v]}{W} \quad (W^2 = EG - F^2)$$

weder der Nullvektor noch isotrop, sondern $\mathfrak{n}^2 \equiv 1$.

Differenziert man dann den (nichtisotropen) Tangentenvektor der Flächenkurve

$$(3.5) \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}'(s) = \frac{d\mathfrak{r}(s)}{ds} = t(s) = \mathfrak{t} \quad (t^2(s) \equiv 1)$$

nach dem Bogen s , so erhält man nach der ersten Frenetschen Formel (II. 6. 14)

$$(3.6) \quad \mathfrak{r}'' = \frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = t' = \kappa \mathfrak{h},$$

wobei $\kappa = \kappa(s)$ die Krümmung der Flächenkurve (3) und $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(s)$ mit $\mathfrak{h}^2(s) \equiv 1$ den (ebenfalls nichtisotropen) Hauptnormalenvektor der Raumkurve (3) bedeutet. Wir schließen durch die Annahme $\mathfrak{h}^2 \equiv 1$ nach (II. 5. 1) ebene Schnitte der Fläche mit isotropen Ebenen aus, für die $\mathfrak{x}''^2(s) \equiv 0$ gilt.

Weil die Tangentenvektoren (5) in allen Punkten s der Flächenkurve (3) zur Flächennormalen $n = n(u(s), v(s)) = n(s)$ rechtwinklig sind, gilt die Identität

$$(3.7) \quad n \frac{d\mathfrak{x}}{ds} \equiv 0 \quad \{s\}$$

und die daraus durch Ableiten nach s entstehende Identität

$$(3.8) \quad \frac{dn}{ds} \cdot \frac{d\mathfrak{x}}{ds} + n \frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2} \equiv 0 \quad \{s\}$$

oder wegen (6)

$$(3.9) \quad \frac{(n_u du + n_v dv)}{ds} \cdot \frac{(\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv)}{ds} + \kappa(n\mathfrak{h}) \equiv 0 \quad \{s\}.$$

Führt man zur Abkürzung mit Gauß die **Fundamentalgrößen zweiter Art**

$$(3.10) \quad L = -n_u \mathfrak{x}_u, \quad M = -\frac{1}{2}(n_u \mathfrak{x}_v + n_v \mathfrak{x}_u), \quad N = -n_v \mathfrak{x}_v$$

ein (Gauß selbst bezeichnet sie mit D, D', D''), so lautet die Identität (9) mit Rücksicht auf (III. 6. 11)

$$(3.11) \quad \frac{L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2}{E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2} = \kappa(n\mathfrak{h}).$$

Links steht der Quotient zweier quadratischer Differentialformen. Der Zähler

$$(3.12) \quad \boxed{II = -dn d\mathfrak{x} = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2}$$

ist die ebenfalls von C. F. Gauß (1827) eingeführte **zweite**

Grundform (zweite Fundamentalform) der Flächentheorie; sie beherrscht zusammen mit der aus (III. 6. 11) bekannten **ersten Grundform** (ersten oder metrischen Fundamentalform)

$$(3. 13) \quad \boxed{\begin{aligned} I = ds^2 = d\zeta^2 = \\ = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 \end{aligned}}$$

die **Krümmungstheorie der Fläche**.

Bemerkung 1: Ist die Fläche $\zeta = \zeta(u, v)$ eine Ebene, so ist sie Schmiegeebene aller ihrer (krummen, ebenen) Flächenkurven. Weil dann $(n\zeta) = 0$ ist, gilt für alle Richtungen $(du: dv)$

$$(3. 14) \quad II = 0, \text{ d. h. } L(u, v) = 0, M(u, v) = 0, N(u, v) = 0.$$

Wir werden in (19. Anwendung 1) beweisen, daß durch die Gleichungen (14) umgekehrt die Ebenen gekennzeichnet sind.

Da wir die Krümmungstheorie der ebenen Kurven schon in (I) ausführlich entwickelt haben, soll der Fall der Ebene fortan ausgeschlossen werden.

Wir studieren daher in Hinkunft nur die Krümmungstheorie der krummen Flächen des Raumes, für die also

$$(3. 15) \quad II \neq 0 \text{ d. h. } (L(u, v), M(u, v), N(u, v)) \neq (0, 0, 0)$$

ist.

Man kann die Fundamentalgrößen (10) noch auf andere Art darstellen. Weil der Normalenvektor n der Fläche zu den Tangentenvektoren ζ_u und ζ_v der Parameterlinien rechtwinklig ist, gelten für alle u und v die Identitäten

$$1) n\zeta_u = 0 \text{ und } 2) n\zeta_v = 0$$

und die daraus durch Ableiten nach u und v hervorgehenden Identitäten

$$\begin{aligned} 1) n_u\zeta_u + n\zeta_{uu} &= 0, \quad n_v\zeta_u + n\zeta_{uv} = 0, \\ 2) n_u\zeta_v + n\zeta_{uv} &= 0, \quad n_v\zeta_v + n\zeta_{vv} = 0. \end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe und aus (4) erhält man die folgenden wichtigen Darstellungen der Fundamentalgrößen zweiter Art

$$(3.16) \quad \boxed{\begin{aligned} L &= -(\mathfrak{n}_u \xi_u) &= n \xi_{uu} &= \frac{[\xi_u \xi_v \xi_{uu}]}{W}, \\ M &= -\frac{n_u \xi_v + n_v \xi_u}{2} &= n \xi_{uv} &= \frac{[\xi_u \xi_v \xi_{uv}]}{W}, \\ N &= -(\mathfrak{n}_v \xi_v) &= n \xi_{vv} &= \frac{[\xi_u \xi_v \xi_{vv}]}{W}. \end{aligned}}$$

In der Formel (11) sind die Größen E, F, G, L, M, N und der Normalenvektor \mathfrak{n} nur vom Flächenpunkte $P(u, v)$ abhängig; das homogene Größenpaar $(du : dv)$ hängt von der Kurventangente \mathfrak{t} im Punkte P ab und der Vektor \mathfrak{h} der Hauptnormalen von der Schmiegenebene σ der Kurve (3) in P . Aus (11) folgt somit der

Satz 1: *Alle Flächenkurven (3), welche den Punkt $P(u, v)$ in derselben Tangentenrichtung $(du : dv)$ und mit derselben Schmiegenebene σ passieren, haben in P dieselbe Krümmung κ .*

Diese Krümmung κ der Flächenkurve (3) ist daher gleich der Krümmung κ_σ jenes ebenen Schnittes der Fläche im Punkte P , den die durch die Tangente $(du : dv)$ laufende Schmiegenebene σ der Kurve (3) aus der Fläche ausschneidet.

Wir denken uns nun (Bild 2) die Ebene σ dieses ebenen Flächenschnittes um die (zur Bildebene normale) feste Tangente \mathfrak{t} oder $(du : dv)$ des festen Flächenpunktes $P(u, v)$ gedreht. Eine dieser Ebenen enthält die Flächennormale \mathfrak{n} ; sie heiße ν , ihr Schnitt ist der zu der Tangente \mathfrak{t} gehörige Normalschnitt der Fläche. Die übrigen, von der Tangentenebene π der Fläche in P verschiedenen Ebenen σ durch die Tangente \mathfrak{t} erzeugen Schiefschnitte der Fläche. Den von π erzeugten Tangentialschnitt schließen wir aus der Betrachtung aus.

Ist dann ϑ der Winkel, unter dem die in σ liegende Hauptnormale \mathfrak{h} des Schiefschnittes σ gegen die Flächen-

normale n geneigt ist, so ist $(n\mathfrak{t}) = \cos \vartheta$ und die Formel (11) liefert für die Krümmung $\kappa = \kappa_\sigma$ bzw. für den Krümmungsradius $r_\sigma = 1/\kappa_\sigma$ des Schiefschnittes σ die Formel

$$(3. 17) \quad \kappa_\sigma \cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta}{r_\sigma} = \frac{Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2} = \frac{II}{I}.$$

Weil dann die rechte Seite nur noch vom Flächenpunkt $P(u, v)$ und von der Tangentenrichtung $(du : dv)$ abhängt, hat

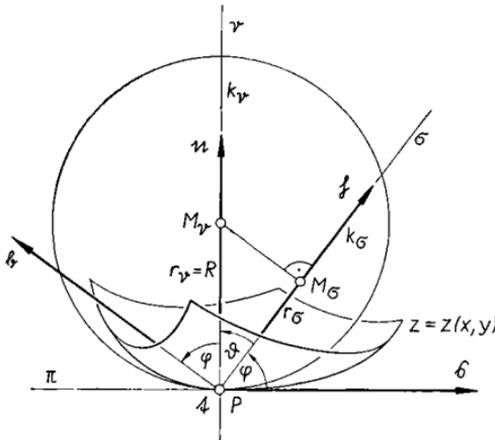


Bild 2. Satz von Meusnier und Meusniersche Kugel der (zur Bildebene normalen) Flächentangente t im Punkte P der Fläche $z = z(x, y)$.

die linke Seite einen von dem Winkel ϑ unabhängigen Wert. Hat insbesondere (Bild 2) der Normalschnitt ν , für den (bei passender Orientierung der Flächennormalen n) $\vartheta = 0$ ist, die Krümmung $\kappa_\nu = 1/r_\nu = 1/R$, die man als die zur Tangente t gehörige **Normalkrümmung** der Fläche bezeichnet, so folgt die von Jean Baptiste Marie Meusnier (1754–1793) gefundene **Formel von Meusnier**

$$(3. 18) \quad \boxed{\frac{\cos \vartheta}{r_\sigma} = \frac{1}{r_\nu} = \frac{1}{R} \quad \text{oder} \quad r_\nu \cos \vartheta = r_\sigma.}$$

Sie enthält (Bild 2) den

Satz von Meusnier (1776): Aus dem Krümmungsmittelpunkt M_v des zur Flächentangente t gehörigen Normalschnittes v erhält man den Krümmungsmittelpunkt M_σ eines durch dieselbe Flächentangente t gelegten Schiefschnittes σ der Fläche, indem man M_v normal auf die Ebene σ des Schiefschnittes projiziert.

Die Krümmungskreise k_σ der im Punkte P zur Flächentangente t gehörigen Schiefschnitte σ der Fläche bilden daher insgesamt eine Kugel κ_t mit dem Krümmungskreis k_v des Normalschnittes von t als Großkreis, die man als die zur Flächentangente t gehörige **Meusniersche Kugel** bezeichnet.

Bemerkung 2: Wir haben den Begriff der Normalkrümmung einer Flächenkurve im wesentlichen schon in der Theorie der Streifen kennengelernt. Ist auf der Fläche $\xi = \xi(u, v)$ durch $u = u(s)$, $v = v(s)$ eine Leitkurve $\xi = \xi(u(s), v(s)) = \xi(s)$ gegeben, so bilden ihre durch den Normalenvektor $n = n(s)$ gekennzeichneten Tangentenebenen $\pi(s)$ den der Fläche $\xi(u, v)$ längs der Kurve $\xi(s)$ umschriebenen Flächenstreifen (Streifen). Nach (1.12) und (1.15) ist die Normalkrümmung $\kappa_n = -\beta(s)$ dieses Streifens

$$(3.19) \quad \kappa_n = -\beta(s) = (l' n) = \kappa(h n),$$

wobei κ die Krümmung der Flächenkurve und $(h n) = \cos \vartheta = \sin \varphi$ ist. Somit gilt nach (3.11)

$$(3.20) \quad \kappa_n = \kappa(n h) = \frac{II}{I} = \frac{1}{R}.$$

Die Normalkrümmung $\kappa_n = -(n' \xi')$ des Flächenstreifens ist daher gleich der Normalkrümmung $\kappa_v = 1/R$ der Fläche in der Richtung t .

Es folgt

Satz 2: Alle Flächenstreifen $\{\xi(s), n(s)\}$ (Flächenkurven $\xi(s)$), welche den festen Flächenpunkt $P(u, v)$ in der festen Tangentenrichtung $t = \xi'$ passieren, besitzen in P dieselbe Normalkrümmung $\kappa_n = -(n' \xi') = 1/R = \kappa_v$.

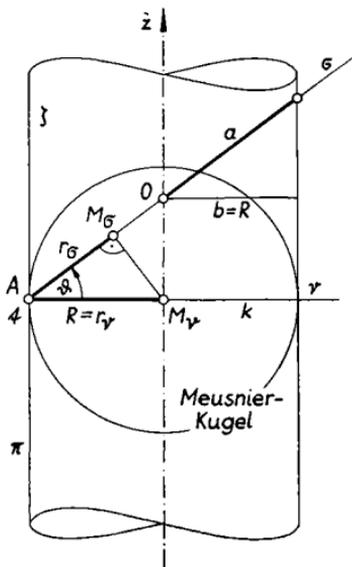


Bild 3
Bestimmung des Scheitelschmiegekreises einer Ellipse, die als schiefer Schnitt eines Drehzylinders gegeben ist, mittels des Satzes von Meusnier.

Beispiel 1: Schneidet man (Bild 3) den Drehzylinder ζ (Radius R) mit einer Ebene σ , welche gegen die Ebene ν des Basiskreises k unter dem Winkel $\vartheta \neq \pi/2$ geneigt ist, so erhält man eine Ellipse mit den Halbachsen $a = OA = R/\cos \vartheta$ und $b = R$. Um in deren tiefstem Punkt (Scheitel A , Scheiteltangente t , Mitte O) den Schmiegekreismittelpunkt M_σ des zu t gehörigen Normalschnittes ν von ζ (Basiskreis vom Radius $r_\nu = R$) auf der Zylinderachse z liegt. Nach dem Satze von Meusnier hat daher der Krümmungsradius r_σ des schiefen Ellipsenschnittes im Scheitel A die Länge

$$(3.21) \quad r_\sigma = R \cos \vartheta = b \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = p,$$

die, wie in (I.12. Beisp. 1), gleich dem Parameter p der Ellipse ist. Die zur Parallelkreistangente t gehörige Meusnier-Kugel besitzt den Basiskreis k des Zylinders als Großkreis.

Bemerkung 3: Führt man durch die reguläre Parametertransformation

$$(3.22) \quad \bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v) \quad | \quad u = u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = v(\bar{u}, \bar{v})$$

mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante $D = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$

auf der Fläche

$$(3.23) \quad \bar{x} = \bar{x}(u, v) = \bar{x}(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) = \bar{x}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{x}$$

statt (u, v) neue zulässige Parameter (\bar{u}, \bar{v}) ein, so sind

(wegen der bekannten Parameterinvarianz der ersten Differentiale $d\bar{x} = d\bar{x}$ und $d\bar{n} = dn$) sowohl die erste Grundform I , wie schon in (III. 8. 10) bewiesen, als auch die zweite Grundform II invariant (parameterinvariant). Es ist nämlich

$$(3. 24) \quad \bar{I} = d\bar{x}^2 = dx^2 = I \quad \text{und} \quad \bar{II} = -d\bar{n}d\bar{x} = -dn dx = II.$$

Die Bewegungsinvarianz der beiden Grundformen I und II folgt aus der Bewegungsinvarianz des Innenproduktes zweier Vektoren. Die Fundamentalgrößen L, M, N selbst gehorchen dabei nach ihrer Definition (16) genau denselben Transformationsformeln wie die Fundamentalgrößen E, F, G , die in (III. 8. 8) berechnet wurden. Alle sechs Fundamentalgrößen sind (als Innenprodukte von Vektoren) Bewegungsinvarianten.

Die Diskriminanten $W^2 = EG - F^2$ und $LN - M^2$ der beiden Grundformen sind gegenüber Parametertransformationen relative Invarianten vom Gewichte 2, d. h. es gilt

$$(3. 25) \quad \overline{EG} - \overline{F^2} = D^2(EG - F^2), \quad \overline{LN} - \overline{M^2} = D^2(LN - M^2),$$

ebenso ihre bilineare Invariante

$$(3. 26) \quad \overline{EN} - 2\overline{FM} + \overline{GL} = D^2(EN - 2FM + GL).$$

Die Quotienten

$$(3. 27) \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \text{und} \quad 2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

sind daher absolute Parameterinvarianten und Bewegungsinvarianten; sie beschreiben daher geometrische Eigenschaften der Fläche $\bar{x}(u, v)$, die wir noch genau kennenlernen werden. Man nennt K die **Gaußsche Krümmung** und H die **mittlere Krümmung** der Fläche $\bar{x}(u, v)$ im Punkte $P(u, v)$.

4. Normalkrümmung. Schmiegtangenten. Schmieglinien. Durch den Satz von Meusnier wird die Untersuchung der Flächenkrümmung im Punkte $P(u, v)$ der reellen Fläche $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$ auf das Studium der Krümmung $1/R$ der durch P in den verschiedenen Richtungen ($du : dv$) laufenden Normalschnitte ν der Fläche zurückgeführt. Für diese Normalkrümmung $1/R$ der Fläche in der Richtung ($du : dv$) gilt nach (3. 17) und (3. 18) die grundlegende Formel

$$(4.1) \quad \boxed{\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2} = \frac{II}{I}}.$$

Bemerkung 1: Das Vorzeichen der Normalkrümmung $1/R$ und des Krümmungsradius R des Normalschnittes ν hängt nach (3.12) von der Orientierung der Flächennormalen n , d. h. nach (3.16) von der Wahl des Vorzeichens von $W = \sqrt{EG - F^2}$ ab. Man kann daher stets annehmen, daß die Normalkrümmung $1/R$ für einen vorgegebenen Normalschnitt (für den $1/R \neq 0$ ist) positiv ($1/R > 0$) ausfällt. Das Vorzeichen der Normalkrümmung aller anderen Normalschnitte desselben Flächenpunktes $P(u, v)$ ist dadurch eindeutig festgelegt.

Für reelle Flächen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ mit reellem ParameterNetz (u, v) und reelle Tangentenrichtungen $(du : dv) \neq (0:0)$ ist in allen Flächenpunkten $P(u, v)$ die erste Grundform $I = ds^2 > 0$; daher stimmt in (1) das Vorzeichen von $1/R$ mit dem Vorzeichen des Zählers II überein, dessen Wertevorrat von dem Vorzeichen der Diskriminante $LN - M^2$ abhängt.

Wenn wir Flächenpunkte $P(u, v)$, in denen gleichzeitig $L(u, v) = M(u, v) = N(u, v) = 0$ ist (sogenannte Flachpunkte der Fläche) ausschließen, in denen nach (1) die Normalkrümmungen $1/R$ aller Flächenrichtungen $(du : dv)$ verschwinden, so sind **drei Fälle** möglich:

1. $LN - M^2 > 0$, **elliptische Flächenpunkte.**

Die quadratische Form II ist definit. Die Normalkrümmung $1/R$ hat für alle Richtungen $(du : dv)$ nur positive (oder nur negative) Werte.

Beispiel 1: Alle eiförmigen Flächen wie Kugel oder Ellipsoid und der Wulst der Ringfläche besitzen nur elliptische Punkte.

2. $LN - M^2 = 0$, **parabolische Flächenpunkte.** Die quadratische Form II ist semidefinit. Die Normalkrümmung $1/R$ hat nur positive (oder nur negative) Werte und für genau eine Richtung den Wert Null.

Beispiel 2: Zylinder, Kegel, Torsen besitzen nur parabolische Punkte; nur für die Normalschnitte ν durch die Erzeugenden dieser Flächen ist $1/R = 0$. Parabolisch sind auch die Punkte des höchsten und tiefsten Parallelkreises der Ringfläche, wobei die Normalkrümmung der Parallelkreistangente $1/R = 0$ ist.

3. $LN - M^2 < 0$, **hyperbolische Flächenpunkte.** Die quadratische Form II ist bei veränderlichem $(du : dv)$ indefinit. Für zwei verschiedene reelle Richtungen ist die Normalkrümmung $1/R = 0$, dazwischen ist in dem einen Winkelraum $1/R > 0$, im anderen $1/R < 0$.

Beispiel 3: Alle Sattelflächen, wie einschaliges Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid, Kehle der Ringfläche.

Die (nicht isolierten) parabolischen Punkte $P(u, v)$ einer Fläche bilden i. a. ihre parabolische Kurve, deren Gleichung somit

$$(4. 2) \quad L(u, v) \cdot N(u, v) - M^2(u, v) = 0$$

ist. Die parabolische Kurve (2) trennt das Gebiet der elliptischen und der hyperbolischen Flächenpunkte, d. h. den elliptisch gekrümmten vom hyperbolisch gekrümmten Teil der Fläche. Daneben kann es noch isolierte parabolische Punkte geben, in deren Umgebung keine weiteren parabolischen Punkte liegen.

Die beiden im Punkte $P(u, v)$ vorhandenen Richtungen $(du : dv)$ verschwindender Normalkrümmung $1/R = 0$ ergeben sich aus der quadratischen Gleichung

$$(4. 3) \quad II = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) dudv + N(u, v) dv^2 = 0,$$

deren Lösungen $(du_1 : dv_1)$ und $(du_2 : dv_2)$ für

$$LN - M^2 \begin{cases} > 0 \text{ konjugiert komplex,} \\ = 0 \text{ reell zusammenfallend,} \\ < 0 \text{ reell verschieden sind.} \end{cases}$$

Man bezeichnet diese beiden aus (3) folgenden Tangentenrichtungen

$$(4. 4) \quad d\chi_i = \chi_u du_i + \chi_v dv_i$$

als die **Schmiegtangenten** des Flächenpunktes $P(u, v)$. Weil nämlich die zugehörigen Normalschnitte ν_i nach (1) in P die Krümmung $1/R = 0$ haben, berühren ihre Tangenten $(du_i : dv_i)$ in P den Normalschnitt (also auch die Fläche) mindestens dreipunktig und sind daher Schmiegtangenten (Wendetangenten oder Flachtangenten) des Normalschnittes und der Fläche. Der Normalschnitt ν_i einer Schmiegtangente $\tilde{\alpha}_i$ besitzt also den Punkt P als (gewöhnlichen oder höheren) Wendepunkt bzw. Flachpunkt oder er enthält die ganze Schmiegtangente $\tilde{\alpha}_i$ als geradlinige Flächenerzeugende (so bei Kegel, Zylinder und Torse).

Die beiden in hyperbolischen Punkten (Sattelpunkten) reell verschiedenen Schmiegtangenten fallen in parabolischen Punkten zusammen und sind in elliptischen Punkten konjugiert komplex.

Bemerkung 2: Man bezeichnet die Schmiegtangenten nach Joseph Diaz Gergonne (1813) auch als Haupttangenten oder nach Charles Dupin (1813) als Asymptotenrichtungen der Fläche.

Durch Integration der Differentialgleichung (3) erhält man auf einem hyperbolisch gekrümmten Flächenstück zwei reelle Scharen von Kurven, welche das Netz der **Schmieglinien** (Haupttangente曲ven, Asymptotenlinien) der Fläche bilden. Alle Tangenten dieser Linien sind Schmiegtangenten der Fläche.

Bemerkung 3: Kegel, Zylinder und Torsen sind in allen regulären Punkten parabolisch gekrümmt. Wie sich zeigen wird, sind dies die einzigen überall parabolisch gekrümmten Flächen. Ihre einzige Schar von Schmieglinien besteht (nach Beispiel 2) aus den Erzeugenden dieser Flächen.

Bemerkung 4: Ist auf einer Fläche $L(u, v) = 0$, so lautet die Differentialgleichung ihrer Schmieglinien

$$(4.5) \quad (2M du + N dv) dv = 0.$$

Die u -Linien ($dv = 0$) bilden dann die eine Schar der

Schmieglinien. Ebenso sind im Falle $N(u, v) \equiv 0$ alle v -Linien ($du = 0$) Schmieglinien.

$L(u, v) \equiv 0$ und $N(u, v) \equiv 0$ bedeutet, daß alle Parameterlinien Schmieglinien sind. Die Parameter (u, v) heißen dann Schmieglparameter oder Asymptotenparameter.

Bemerkung 5: Kennzeichnend für die **krummen Schmieglinien** k einer Fläche ist die Eigenschaft, daß ihre **Schmiegeebenen** σ stets **Tangentenebenen** der Fläche sind. Der einer Fläche längs einer Schmieglinie umschriebene Streifen ist daher nach (IV. 2) ein Schmiegstreifen.

Beweis: Wählt man die k enthaltende Schar der Schmieglinien als u -Linien, so ist $L(u, v) \equiv 0$; nach (3. 16) ist also $[\xi_u \xi_v \xi_{uu}] \equiv 0$ oder $\xi_{uu} = \alpha \xi_u + \beta \xi_v$. Weil die Schmieglinie krumm, nach (II. 3. Satz 1) also $[\xi_u \xi_{uu}] \neq 0$ ist, gilt dabei notwendig $\beta \neq 0$. Folglich sind die von ξ_u und ξ_{uu} aufgespannten Schmiegeebenen σ von k und die von ξ_u und ξ_v aufgespannten Tangentenebenen π der Fläche identisch, w. z. b. w.

Aus der eben bewiesenen rein projektiven Kennzeichnung der Schmieglinien folgt, daß die Eigenschaft einer Flächenkurve, Schmieglinie der Fläche zu sein, bei projektiven Transformationen der Fläche (Kollineationen) erhalten bleibt, also projektiver Natur ist.

Bemerkung 6: Jede auf einer Fläche liegende **gerade Linie** ist stets **Schmieglinie** der Fläche.

Beweis: Identifiziert man die Gerade nämlich mit der Parameterlinie $v = 0$ eines sie enthaltenden Systems von u -Linien, so ist für sie nach (II. 3. Satz 1) sicher $[\xi_u(u, 0), \xi_{uu}(u, 0)] \equiv 0$ also nach (3. 16) auch $L(u, 0) = 0$. Die gerade Linie $v = 0$ ist daher nach (Bem. 4) tatsächlich Schmieglinie, w. z. b. w.

Bemerkung 7: In Flachpunkten $P(u, v)$ der Fläche ist wegen $L(u, v) = M(u, v) = N(u, v) = 0$ die Gleichung (3) für alle Richtungen ($du : dv$) erfüllt. *Flachpunkte sind daher singuläre Punkte des Netzes der Schmieglinien der Fläche.*

5. Beispiele: Windschiefe Regelflächen, Drehflächen, Flächen $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, Nabelpunkte. Wir erläutern die bisherigen Ergebnisse noch an einigen wichtigen Beispielen.

Beispiel 1: Für eine **windschiefe Regelfläche** mit der Leitkurve $\eta = \eta(u)$ und den Erzeugendenrichtungen $\xi = \xi(u)$ gilt nach (III. 20. 3) und (III. 20. 34)

$$(5. 1) \quad \xi = \eta(u) + v\xi(u) \quad \text{mit } [\eta' \xi' \xi] \neq 0.$$