Auslese

aus meiner

Unterrichts- und Vorlesungspraxis

Von

Dr. Hermann Schubert
Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg

Zweiter Band

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1905

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie.

Dem Lehrer, welcher wünscht, daß seine Schüler nicht immer mit mühevollen Berechnungen ihre Zeit verbringen, muß daran liegen, daß in der algebraischen Planimetrie und Stereometrie nicht allein das Gegebene, sondern auch das Gesuchte ganzzahlig oder doch wenigstens rational wird. Aus diesem Bestreben ist der Inhalt dieses Abschnittes, der auch in der Festschrift anläßlich des Kongresses deutscher Philologen und Schulmänner (Hamburg, 1905) erscheint, allmählich hervorgegangen.

§ 1. Der Begriff und die Eigenschaften des heronischen Winkels.

Zu den ältesten geometrischen Ganzzahligkeitsproblemen gehört wohl die Aufgabe, für die drei Seiten eines Dreiecks drei ganze Zahlen so zu finden, daß auch der Inhalt durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden kann, soll doch schon Hero von Alexandrien selbst, der zuerst lehrte, den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen, für die drei Seiten a, b, c die Werte:

$$a = 13, \quad b = 14, \quad c = 15$$

angegeben haben, aus denen sich der ganzzahlige Wert 84 für den Inhalt ergibt. Demgemäß beginnen wir damit, anzunehmen, daß außer den drei Seiten eines Dreiecks auch der Inhalt ganzzahlig werde, und nennen jedes Dreieck, das diese Eigenschaft hat, ein heronisches.

Wenn α, β, γ die Winkel eines heronischen Dreiecks sind, so muß jede der Zahlen

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

rational sein, wie aus der Formel:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{J}$$

ersichtlich ist, wo J den Inhalt des heronischen Dreiecks und s seinen halben Umfang $\frac{1}{2}(a+b+c)$ bedeutet. In jedem heronischen Dreieck muß also der Tangens der Hälfte jedes Winkels gleich einer rationalen Zahl f sein. Daraus folgt aber über den Sinus und den Kosinus eines ganzen heronischen Winkels, daß sie beziehungsweise gleich

$$\frac{2f}{1+f^2} \quad \text{und} \quad \frac{1-f^2}{1+f^2}$$

gesetzt werden können, wo f eine beliebige rationale

Zahl ist. Denn:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2f}{1+f^2}$$

und

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-f^2}{1+f^2}.$$

Hieraus folgt noch:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2f}{1-f^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1-f^2}{2f}.$$

Bezeichnen wir jeden Winkel, der Winkel eines heronischen Dreiecks sein kann, als einen **heronischen Winkel**, so können wir hiernach den Satz aussprechen:

Jede beliebige rationale Zahl ist gleich dem Tangens der Hälfte eines heronischen Winkels. Der Sinus bzw. der Kosinus eines ganzen heronischen Winkels ist zwar nicht

gleich einer beliebigen rationalen Zahl, wohl aber gleich:

$$\frac{2f}{1+f^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1-f^2}{1+f^2},$$

wo f eine beliebige rationale Zahl bedeutet.

Da jede rationale Zahl das Verhältnis zweier ganzer Zahlen ist, so setzen wir

$$f = \frac{n}{m},$$

wo n und m beliebige ganze Zahlen sind, und erhalten:

$$\frac{2mn}{m^2+n^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

für den Sinus und den Kosinus jedes heronischen Winkels. Im rechtwinkligen Dreieck, wo der Sinus und der Kosinus eines spitzen Winkels gleich dem Verhältnis zweier Seiten ist, muß demnach die Hypotenuse gleich m^2+n^2 und jede Kathete gleich $2mn$ bzw. gleich m^2-n^2 sein, wo m und n ganze Zahlen sind, falls dieses rechtwinklige Dreieck ein heronisches sein soll. Man kann daher alle spitzen heronischen Winkel auch allein aus dem rechtwinkligen Dreieck erhalten, wenn man alle rechtwinkligen Dreiecke bildet, deren Seiten sich verhalten wie:

$$m^2+n^2 \quad \text{zu} \quad 2mn \quad \text{zu} \quad m^2-n^2,$$

wo m und n beliebige positive ganze Zahlen sind, und

$m > n$ gewählt ist. Um also alle denkbaren heronischen Winkel zu finden, hat man in

$$\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

für m und n alle denkbaren ganzen Zahlen zu setzen. Um dabei aber jeden Winkel nur einmal zu finden, hat man von vornherein m und n so zu wählen, daß sie ohne gemeinsamen Teiler und nicht beide ungerade sind. Tut man dies, so findet man alle denkbaren heronischen Winkel, wenn man zu jedem gefundenen Winkel auch das Komplement hinzufügt, oder, was dasselbe ist, wenn man $\sin\alpha$ nicht allein gleich

$$\frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \text{sondern auch gleich} \quad \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

setzt. Daß überhaupt diese beiden Formen nicht wesentlich verschieden sind, erkennt man aus den folgenden drei Identitäten:

$$2 \cdot m \cdot n = 2 \cdot \left[\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2\right],$$

$$m^2 - n^2 = 4 \cdot \left[\frac{m+n}{2} \cdot \frac{m-n}{2}\right],$$

$$m^2 + n^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2\right].$$

Wenn man noch m immer größer als n wählt, so erhält man alle spitzen heronischen Winkel. Die stumpfen heronischen Winkel erhält man durch Ergänzung der spitzen zu 180°, oder, was dasselbe ist, durch Vertauschung von m und n. Überhaupt wird man heronisch jeden Winkel nennen dürfen, der dadurch, daß man ihn beliebig oft um 90° vermehrt oder vermindert, zu einem spitzen Winkel führt, dessen Sinus und Kosinus bzw.

$$\text{gleich } \frac{2mn}{m^2+n^2} \quad \text{und} \quad \text{gleich } \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

sind, wo m und n ganze Zahlen sind. Um aus diesen Ausdrücken jeden spitzen heronischen Winkel nur einmal zu erhalten, hat man dafür zu sorgen, daß m und n keinen gemeinsamen Teiler haben. Dabei ist es nicht nötig, die Winkel selbst, etwa in Graden und Minuten, kennen zu lernen, sondern es genügt, ihren Sinus und ihren Kosinus zu kennen, die beide rational sein müssen. Dadurch wird die Aufsuchung der spitzen heronischen Winkel identisch mit der Aufsuchung der pythagoreischen Zahlen[1]), d. h. aller derjenigen Zahlen-Tripel, welche die Gleichung:

$$x^2 = y^2 + z^2$$

erfüllen. Wir stellen deshalb im folgenden nicht die Sinusse und Kosinusse der spitzen heronischen Winkel zusammen, sondern die Größen m^2+n^2, $2mn$,

---

[1]) Vgl. u. a. meine „Math. Musestunden" (Leipzig, 1900), Band I, S. 106 u. f.

Tabelle der spitzen heronischen Winkel.

	m	n	$m^2 + n^2$	$2\,m\,n$	$m^2 - n^2$
1)	2	1	5	4	3
2)	3	2	13	12	5
3)	4	1	17	8	15
4)	4	3	25	24	7
5)	5	2	29	20	21
6)	5	4	41	40	9
7)	6	1	37	12	35
8)	6	5	61	60	11
9)	7	2	53	28	45
10)	7	4	65	56	33
11)	7	6	85	84	13
12)	8	1	65	16	63
13)	8	3	73	48	55
14)	8	5	89	80	39
15)	9	2	85	36	77
16)	9	4	97	72	65
17)	9	8	145	144	17
18)	10	1	101	20	99
19)	10	3	109	60	91
20)	10	7	149	140	51
21)	10	9	181	180	19
22)	11	2	125	44	117
23)	11	4	137	88	105
24)	11	6	157	132	85
25)	11	8	185	176	57
26)	11	10	221	220	21
27)	12	1	145	24	143
28)	12	5	169	120	119
29)	12	7	193	168	95
30)	12	11	265	264	23

$m^2 - n^2$, die nach den obigen Vorschriften zu bilden sind, wobei wir es dem Leser überlassen, aus jeder Zahlengruppe den Sinus und den Kosinus von zwei heronischen Winkeln zu erkennen, die sich zu 90^0 ergänzen.

Diese Tabelle, die mit der alten Tabelle der pythagoreischen Zahlen identisch ist und beliebig weit fortgesetzt werden kann, soll dem Leser für das Folgende Beispiele von heronischen Winkeln bieten. So soll z. B. bei Zeile 13 der heronische Winkel gedacht werden, dessen Sinus $\frac{48}{73}$ und dessen Kosinus $\frac{55}{73}$ ist, oder auch sein Komplement.

Was die Eigenschaften der heronischen Winkel anbetrifft, so ist zunächst zu beachten, daß, der Definition gemäß, der Tangens der Hälfte eines solchen rational sein muß, daß aber der Sinus und der Kosinus dieser Hälfte nicht rational zu sein brauchen. Dagegen müssen von einem ganzen heronischen Winkel alle sechs trigonometrischen Funktionen rational sein, so daß ein Winkel ein heronischer sein muß, erstens, wenn sein Sinus und sein Kosinus beide rational sind, zweitens aber auch, wenn eine der beiden Funktionen Sinus und Kosinus rational ist und zugleich eine der beiden Funktionen Tangens und Kotangens rational ist. Von den Winkeln mit ganzzahliger Gradzahl ist jedes ganzzahlige Vielfache von 90^0, also insbesondere 0^0, 90^0, 180^0 heronisch. Dagegen sind 30°, 45°, 60° **keine** heronischen Winkel. Die allgemeinste Eigenschaft der heronischen Winkel steckt in dem folgenden Satze:

Jede mit ganzzahligen Koeffizienten behaftete ganze Funktion von heronischen Winkeln ist wieder ein heronischer Winkel.

Dieser Satz folgt daraus, daß der Sinus und der Kosinus der Summe oder der Differenz zweier Winkel sich rational durch die Sinusse und die Kosinusse dieser Winkel ausdrücken lassen. Insbesondere folgt aus dem Satze auch:

Wenn von den n Winkeln eines beliebigen n-Ecks $n-1$ heronisch sind, so ist es auch der n-te.

Wenn hier insbesondere $n = 3$ ist, entsteht die Aufgabe: Wenn zwei Dreieckswinkel α und β als heronische gegeben sind, also

$$\sin\alpha = \frac{2f}{1+f^2}, \quad \sin\beta = \frac{2g}{1+g^2}$$

ist, wo f und g rational sind, so sollen Sinus und Kosinus des dritten Winkels γ, der ja nun auch heronisch sein muß, in derselben Form ausgedrückt werden, also x so bestimmt werden, daß

$$\sin\gamma = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \cos\gamma = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

ist. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aus den Elementen der Trigonometrie in folgender Weise:

$$\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \frac{2f}{1+f^2}\cdot\frac{1-g^2}{1+g^2} + \frac{1-f^2}{1+f^2}\cdot\frac{2g}{1+g^2}$$
$$= \frac{2f+2g-2fg^2-2f^2g}{(1+f^2)(1+g^2)} = \frac{2(f+g)(1-fg)}{(f+g)^2+(1-fg)^2};$$
$$\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$= -\frac{1-f^2}{1+f^2}\cdot\frac{1-g^2}{1+g^2} + \frac{2f}{1+f^2}\cdot\frac{2g}{1+g^2}$$
$$= \frac{-1+f^2+g^2-f^2g^2+4fg}{(1+f^2)(1+g^2)}$$
$$= \frac{(f+g)^2-(1-fg)^2}{(f+g)^2+(1-fg)^2}.$$

Wenn wir noch Zähler und Nenner jedes der beiden für $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ erhaltenen Brüche durch $(f+g)^2$ dividieren, so erhalten wir $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ in der gewünschten Form, indem wir

$$x = \frac{1-fg}{f+g}$$

zu setzen haben. Es liegt nahe, für die rationale Zahl f, durch welche der Sinus und der Kosinus eines heronischen Winkels ausgedrückt werden, einen besonderen Namen zu haben. Wir nennen f die Konstituente des heronischen Winkels α, wenn

$$\sin\alpha = \frac{2f}{1+f^2} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{1-f^2}{1+f^2}$$

ist, und können dann unser Resultat so aussprechen:

Wenn f und g die Konstituenten zweier heronischer Dreieckswinkel sind, so ist die Konstituente des dritten gleich $\frac{1-fg}{f+g}$.

Da die Konstituente eines heronischen Winkels nichts anderes als der Tangens seiner Hälfte ist, so konnte das obige Resultat, etwas kürzer, auch so abgeleitet werden:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\left(90 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{1-fg}{f+g}.$$

Auch kann man, vermittels der Formel für:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n),$$

sehr leicht die Konstituente x der Summe von n Winkeln aus den Konstituenten

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$$

dieser Winkel finden. Man erhält:

$$x = \frac{(f_1 + f_2 + \ldots f_n) - (f_1 f_2 f_3 + \ldots) + \ldots}{1 - (f_1 f_2 + \ldots) + (f_1 f_2 f_3 f_4 + \ldots) - \ldots}.$$

Wenn die Konstituente f des heronischen Dreieckswinkels α gleich $\frac{n}{m}$ ist, die Konstituente g des demselben Dreieck angehörigen heronischen Winkels β gleich $\frac{q}{p}$ ist, so ergibt sich für die Konstituente des dritten Winkels γ:

$$\frac{1-fg}{f+g} = \frac{1-\frac{n}{m}\cdot\frac{q}{p}}{\frac{n}{m}+\frac{q}{p}} = \frac{mp-nq}{np+mq}.$$

Wenn also in einem heronischen Dreieck:

$$\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{2pq}{p^2+q^2}$$

ist, so ergibt sich für $\sin\gamma$:

$$\sin\gamma = \frac{2\cdot\frac{mp-nq}{np+mq}}{1+\left(\frac{mp-nq}{np+mq}\right)^2}$$

$$= \frac{2(mq+np)(mp-nq)}{(mq+np)^2+(mp-nq)^2}.$$

Für $\cos\gamma$ ergibt sich in derselben Weise:

$$\cos\gamma = \frac{1-\left(\frac{mp-nq}{np+mq}\right)^2}{1+\left(\frac{mp-nq}{np+mq}\right)^2}$$

$$= \frac{(mq+np)^2-(mp-nq)^2}{(mq+np)^2+(mp-nq)^2}.$$

Man erkennt hieraus, daß γ ein spitzer, rechter oder stumpfer Dreieckswinkel ist, je nachdem die beiden als spitz vorausgesetzten Dreieckswinkel mit den Konstituenten $\frac{n}{m}$ und $\frac{q}{p}$ die Bedingung erfüllen, daß

$$\frac{mp - nq}{mq + np}$$

kleiner, gleich oder größer als eins ist, d. h., je nachdem $\frac{p}{q}$ kleiner, gleich oder größer als

$$\frac{m + n}{m - n}$$

ist. Wenn man z. B., behufs Herstellung heronischer Dreiecke, $\frac{m}{n} = \frac{2}{1}$ als Konstituente des Winkels α gewählt hat, so weiß man, daß man ein spitzwinkliges, rechtwinkliges oder stumpfwinkliges Dreieck erhält, je nachdem man

$$\frac{p}{q} < \frac{2+1}{2-1},$$

$$\text{also} \quad < \frac{3}{1} \quad \text{oder} \quad \frac{p}{q} = \frac{3}{1} \quad \text{oder} \quad \frac{p}{q} > \frac{3}{1}$$

wählt. Die Wahl $p = 3$, $q = 2$ ergibt also ein spitzwinkliges Dreieck, die Wahl $p = 4$, $q = 1$ hingegen ein stumpfwinkliges Dreieck.

Wie schon oben erwähnt ist, erhält man aus der obigen Tabelle alle spitzen heronischen Winkel, wenn man aus jeder Zeile zwei Winkel entnimmt, nämlich den Winkel, dessen Sinus $\frac{2mn}{m^2+n^2}$ ist, und auch sein Komplement, d. h. den Winkel, dessen Sinus $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ ist. Man erhält jedoch auch **alle** heronischen Winkel, wenn man die Bedingung, daß von den Zahlen m und n nicht beide ungerade sein sollen, fallen läßt. Dann erhält man jeden heronischen Winkel, wenn man $\sin\alpha$ immer nur gleich

$$\frac{2mn}{m^2+n^2}$$

setzt, und nicht auch gleich $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$. Wenn nämlich m und n beide ungerade sind, so ist $m+n$ und $m-n$ gerade, also $\frac{m+n}{2}$ und $\frac{m-n}{2}$ ganzzahlig, so daß aus einer planmäßig geordneten Tabelle, auch der Winkel entnehmbar ist, dessen Sinus gleich

$$\frac{2\,\frac{m+n}{2}\cdot\frac{m-n}{2}}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2+\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}$$

oder gleich:

$$\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

ist. Wir werden deshalb den Sinus eines heronischen

Winkels meist gleich

$$\frac{2mn}{m^2+n^2}$$

setzen, dann aber die Bedingung, m und n sollen nicht beide ungerade sein, fallen lassen.

§ 2. Heronische Dreiecke.

In § 1 ist erkannt, daß in einem heronischen Dreiecke, d. h. in einem solchen, das außer rationalen Seiten a, b, c auch einen rationalen Inhalt J besitzt,

$$\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}, \qquad \sin\beta = \frac{2pq}{p^2+q^2},$$

$$\sin\gamma = \frac{2(mq+np)(mp-nq)}{(m^2+n^2)(p^2+q^2)}$$

sein muß, wo m, n, p, q beliebige ganze Zahlen sind, die ohne gemeinsamen Teiler sind, und bei denen, damit α und β spitz werde, $m > n$ und $p > q$ vorauszusetzen ist. Da nun:

$$a = 2r\sin\alpha, \quad b = 2r\sin\beta, \quad c = 2r\sin\gamma$$

ist, so werden wir:

$$4r = (m^2+n^2)(p^2+q^2)$$

setzen, wodurch wir erhalten:

$$a = mn(p^2+q^2), \quad b = pq(m^2+n^2),$$

$$c = (mq+np)(mp-nq).$$

In der Tat erhält man alle denkbaren heronischen Dreiecke, wenn man hier für m, n, p, q alle möglichen ganzen Zahlen einsetzt. Daß dadurch J rational wird, erkennt man aus:

$$J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Denn es wird:

$$s = mp(mq + np)\,, \qquad s - a = mq(mp - nq)\,,$$
$$s - b = np(mp - nq)\,, \qquad s - c = nq(mq + np)\,,$$

also:

$$J = mnpq(mq + np)(mp - nq)\,.$$

Rechtwinklige heronische Dreiecke, die man auch pythagoräische Dreiecke nennt, sind schon durch die Tabelle in § 1 vorgeführt. Gleichschenklige heronische Dreiecke können hier ausgeschlossen werden, weil sie durch Verdoppelung von rechtwinkligen entstehen. Gleichschenklige heronische Dreiecke, in denen $a = b$ ist, werden dadurch ausgeschlossen, daß man nicht $p = m$ und q zugleich gleich n setzt. Dagegen könnte $c = a$ oder $c = b$ werden. c würde gleich a, wenn:

$$(mq + np)(mp - nq) = mn(p^2 + q^2)\,,$$

d. h. wenn:

$$p = 2mn \quad \text{und zugleich} \quad q = m^2 - n^2$$

wäre. Wenn man also bei der Wahl der Zahlen für m, n, p, q vermeidet, daß:

$$\begin{bmatrix} p = 2mn \\ q = m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} m = 2pq \\ n = p^2 - q^2 \end{bmatrix}$$

wird, schließt man gleichschenklige Dreiecke aus. Wie schon in § 1 erörtert ist, wird der Winkel γ des heronischen Dreiecks spitz oder stumpf, je nachdem man $\frac{p}{q}$ kleiner oder größer als

$$\frac{m+n}{m-n}$$

wählt. Die rechtwinkligen Dreiecke schließt man aus, wenn man $\frac{p}{q}$ nicht gleich $\frac{m+n}{m-n}$ setzt. Auch wenn man m, n, p, q ohne gemeinsamen Teiler wählt, kann es vorkommen, daß die für a, b, c gefundenen Zahlen noch einen anderen gemeinsamen Teiler als Zwei erhalten. Wenn man z. B. $m = 2$, $n = 1$, $p = 7$, $q = 4$ wählt, so erhält man:

$$a = 2 \cdot 65\,, \quad b = 2 \cdot 70\,, \quad c = 2 \cdot 75\,.$$

Hebt man, außer durch Zwei, auch durch Fünf, so erhält man:

$$a = 13\,, \quad b = 14\,, \quad c = 15\,,$$

dasselbe Tripel, das man auch erhält, wenn man $m = 2$, $n = 1$, $p = 3$, $q = 2$ setzt, nur daß b mit c vertauscht erscheint. In der folgenden Tabelle aller heronischen Dreiecke sind die drei für a, b, c gefundenen Zahlen immer ohne gemeinsamen Teiler angegeben, und wenn ein und dasselbe Tripel zweimal entsteht, ist es nur das erstemal angegeben. Die Liste ist auch planmäßig aufgebaut, indem sie, genügend weit fortgeführt, zu allen denkbaren heronischen Dreiecken führen muß, bei denen die als teilerfremd vorausgesetzten ganzen Zahlen für die drei Seiten kleiner sind als eine beliebig angenommene obere Grenze. Diese Liste, die eine vollständige werden muß, dürfte sich dazu eignen, von einem Lehrer benutzt zu werden, der bei Einübung der heronischen Dreiecksformel:

$$J = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Liste aller heronischen Dreiecke.

	m	n	p	q	a	b	c	J
1)	2	1	3	2	13	15	14	84
2)	2	1	4	1	17	10	21	84
3)	2	1	5	1	52	25	63	630
4)	2	1	5	2	29	25	36	360
5)	2	1	5	3	68	75	77	2310
6)	2	1	5	4	41	50	39	780
7)	2	1	6	1	37	15	44	264
8)	2	1	6	5	61	75	56	1680
9)	2	1	7	1	100	35	117	1638
10)	2	1	7	2	53	35	66	924
11)	2	1	7	3	116	105	143	6006
12)	2	1	7	5	148	175	153	10710
13)	2	1	7	6	85	105	76	3192
14)	2	1	8	1	13	4	15	24
15)	2	1	8	3	73	60	91	2184

Liste aller heronischen Dreiecke.

	m	*n*	*p*	*q*	*a*	*b*	*c*	*J*
16)	2	1	8	5	89	100	99	3960
17)	2	1	8	7	113	140	99	5544
18)	3	1	3	2	13	20	21	126
19)	3	1	4	1	51	40	77	924
20)	3	1	4	3	25	40	39	468
21)	3	1	5	1	39	25	56	120
22)	3	1	5	2	87	100	143	4290
23)	3	1	5	3	17	25	26	204
24)	3	1	5	4	123	200	187	11220
25)	3	2	4	1	51	26	55	660
26)	3	2	4	3	75	78	51	1836
27)	3	2	5	2	87	65	88	2640
28)	4	1	4	3	25	51	52	624
29)	4	1	5	1	104	85	171	3420
30)	4	1	5	2	58	85	117	2340
31)	4	3	5	1	312	125	323	19380
32)	4	3	5	2	174	125	161	9660
33)	5	1	5	2	29	52	69	690
34)	5	1	5	3	17	39	44	330
35)	5	1	5	4	41	104	105	2100
36)	5	1	6	1	185	156	319	9570
..	..	..	..	..	..	..	..	..