Die Lehre

von den

Elliptischen Integralen

und den

Theta-Functionen.

Von

K. H. Schellbach,

Professor der Mathematik am Königl. Friedrich Wilhelms-Gymnasium
und an der Königl. Kriegs-Akademie zu Berlin.

Berlin,

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1864.

Die Lehre

von den

Elliptischen Integralen

und den

Theta-Functionen.

Von

K. H. Schellbach,
Professor der Mathematik am Königl. Friedrich Wilhelms-Gymnasium
und an der Königl. Kriegs-Akademie zu Berlin.

Berlin,
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1864.

Vorrede.

Wenn auch die Wissenschaften in steter Entwickelung begriffen sind und namentlich die Mathematik zu ihren Wahrheiten stets auf neuen Wegen zu gelangen oder dieselben auch als besondere Fälle höherer Gesetze aufzufassen sucht, so sind doch einzelne Disciplinen im Grossen und Ganzen als abgeschlossen zu betrachten, so dass z. B. Niemand erwarten wird, es könnte die Lehre von den Kreisfunctionen mit ihren Anwendungen auf die Trigonometrie in nächster Zeit eine wesentliche Aenderung erleiden, selbst wenn die mathematische Forschung einen ungewöhnlich raschen Aufschwung nehmen sollte. Eben so haben auch die Arbeiten der Mathematiker in einem höher liegenden Gebiete, welche bereits länger als ein Jahrhundert andauern, hauptsächlich durch Jacobi's Leistungen, eine so krystallinisch feste Gestalt gewonnen, dass sie auf lange Zeit einer wesentlichen Umgestaltung zu widerstehen scheinen.

Wir glauben in der That, dass wenn auch der Eingang zu Jacobi's Thetafunctionen von verschiedenen Seiten möglich ist, doch das Gebäude schon so fest geordnet erscheint, dass Jeder sich schnell orientiren wird, der bereits einmal in das Innere eingeführt worden ist. Das vorliegende Buch macht nun keinen weiteren Anspruch, als ein Führer zu sein in die Rechnung mit den Thetafunctionen, unbekümmert darum, ob es auch noch viele andere Wege dahin giebt, die vielleicht auch noch andere Gesichtspunkte eröffnen, auf Gebiete, die in weiter Ferne liegen und deswegen eine wohlbekannte Anziehungskraft ausüben.

Der Verfasser beabsichtigt mit seinem Buche mehr das Können, als das Wissen seiner Leser zu fördern, und verfolgt also recht eigentlich praktische Zwecke. Die Mechanik, die Astronomie und die Physik fordern von der Mathematik die Lösung bestimmter Aufgaben, und unser Buch soll zeigen, wie man, nach dem Vorgange Jacobi's, mit Hülfe der Theorie der Thetafunctionen viele derselben leichter und vollständiger zu lösen vermag, als dies bisher mit den bekannten Rechnungsoperationen möglich war. Er betrachtet die Thetafunctionen als ein neues, noch wenig bekanntes Instrument, dessen Handhabung zuerst studirt werden sollte, ehe man es gegen ein noch neueres vertauscht, mit dem in vielen Fällen nicht mehr als mit dem alten geleistet wird, besonders dann, wenn man dieses gut zu führen versteht.

Jeder Lehrer weiss, dass Schüler einer Wissenschaft am besten gefördert werden, wenn man sie zunächst in einen Gedankenkreis von übersichtlichem Umfange einweiht, und ihnen Gelegenheit giebt, durch Ausführung vorgeschriebener Operationen sich ihres Besitzes bewusst zu werden. Das nicht sehr alte „exempla plus prosunt quam praecepta“ wird in neueren Lehrbüchern sehr häufig vergessen.

Die erste Anregung, die vorliegende Arbeit zu übernehmen, gab uns vor längerer Zeit ein Heft über die Theorie der elliptischen Functionen, welches Herr Dr. Borchardt während seiner Studienzeit in Königsberg nach einer Vorlesung Jacobi's ausgearbeitet hat. Wenn auch in diesem Hefte ein anderer Ausgangspunkt gewählt ist, und die Wege, die eingeschlagen worden sind, so wie selbst die Ziele, die erreicht werden sollten, wesentlich andere sind, als in diesem Buche, so darf doch nicht unerwähnt bleiben, dass uns die Kenntniss dieses Heftes, welche wir der freundlichen Gefälligkeit des Herrn Dr. Borchardt verdanken, von grossem Nutzen gewesen ist. Ausserdem haben wir mit Vortheil für unsere Arbeit eine Inaugural-Dissertation des Herrn Professor Schröter in Breslau: „De aequationibus modularibus“ studirt und an mehreren Stellen, namentlich im fünften Abschnitte der Anwendungen, die verdienstvolle Schrift des Herrn Dr. Durège: „Theorie der elliptischen Functionen“ benutzen können, das erste in Deutschland über diese Lehre erschienene Werk. Noch glauben wir erwähnen zu müssen, dass die wichtige Formel (2.) pag. 101 sich bereits in einer Abhandlung des Herrn Professor Richelot im 50sten Bande des Crelle'schen Journals findet, wenn sie auch dort auf ganz andere Art abgeleitet worden ist.

Besonders dankbar sind wir aber Herrn Professor Weierstrass, dass wir unser Buch mit einigen Blättern von der Hand dieses berühmten Meisters haben zieren dürfen, denn der dreizehnte Abschnitt der ersten Abtheilung rührt unmittelbar von ihm selbst her.

Bei der Redaction des ganzen Werkes und der einzelnen Rechnungen haben wir uns der Beihülfe einiger junger talentvoller Mathematiker zu erfreuen gehabt, die uns gestatten werden, hier unsern Dank für ihre Hülfe öffentlich aussprechen zu dürfen. Zunächst ist Herr Dr. Wernicke zu erwähnen, der die Correktur des ganzen Werkes übernommen und ausserdem auch für stylistische Sauberkeit und Ordnung in der äussern Ausführung gesorgt hat. Er und Herr Dr. E. Schultze haben ausserdem auf meinen Wunsch den zwölften Abschnitt der ersten Abtheilung aus dem grösseren Werke Légendre's mit gehöriger Umsicht entnommen, da ich selbst keine wesentlichen Verbesserungen anzubringen wusste, ohne wichtigere Glieder in ihrer Entwicklung zu beschränken.

In §. 2 hat hauptsächlich Herr Worpitzky den Nachweis geliefert, dass die Grösse μ aus den Gleichungen reell hervorgeht. Die numerische Rechnung in §. 61 ist von Herrn Dr. Harprecht ausgeführt worden, und eben so haben die Herren Dr. Bachmann, Dr. Teichert, Dr. Kretschmer und Studiosus Biermann mehrere numerische

Rechnungen übernommen, die von wesentlichem Nutzen für mich gewesen sind, auch wenn viele derselben nicht unmittelbar in das Buch mit aufgenommen werden konnten. Allen diesen jungen Mathematikern, und ganz besonders den Herren Dr. Schultze und Dr. Kretschmer, spreche ich nochmals für ihre vielfachen Bemühungen meinen aufrichtigen Dank aus.

Schliesslich haben wir uns noch über die Benutzung einer gewissermassen nur scheinbar neuen Bezeichnung zu rechtfertigen. Es sind in dieser Schrift durch die Zeichen

$$f(x),\ g(x),\ h(x)$$

Functionen von x ausgedrückt worden, welche Jacobi mit

$$\sqrt{k}\sin am\left(\frac{2K}{\pi}x\right);\quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos am\left(\frac{2K}{\pi}x\right);\quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta am\left(\frac{2K}{\pi}x\right)$$

und Gudermann etwas kürzer mit

$$\sqrt{k}\, sn\left(\frac{2K}{\pi}x\right);\quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\, cn\left(\frac{2K}{\pi}x\right);\quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\, dn\left(\frac{2K}{\pi}x\right)$$

bezeichneten. Für diese Functionen wurden später von Briot und Bouquet in ihrer „Théorie des fonctions doublement periodiques“ die Zeichen

$$\sqrt{k}\,\lambda\left(\frac{\omega x}{2\pi}\right);\quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mu\left(\frac{\omega x}{2\pi}\right);\quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\nu\left(\frac{\omega x}{2\pi}\right)$$

benutzt, in denen $4K$ durch ω ersetzt worden ist. Wir haben aber in dem vorliegenden Buche selbst keinen Werth auf den Gebrauch der Buchstaben f, g, h gelegt, die eben so gut durch drei andere ersetzt werden können und überhaupt keinen typischen Charakter beanspruchen sollen. Wer übrigens nur einen oberflächlichen

Blick in unser Buch wirft, wird leicht begreifen, dass wir uns der älteren Bezeichnung unmöglich bedienen konnten, ohne den Formeln eine ungeschickte Breite geben zu müssen. Ausserdem haben wir auch geglaubt, uns wegen der ältern Bezeichnung keinen Zwang auferlegen zu dürfen, weil dieselbe doch nicht fähig gewesen ist, dem Algorithmus eine wesentlich grössere Geschmeidigkeit zu verleihen.

Berlin, im März 1864.

K. H. Schellbach.

Inhalts-Verzeichniss.

Erste Abtheilung.

Die Theorie.

Zweite Abtheilung.

Die Anwendungen.

Erste Abtheilung.

D i e T h e o r i e.

Erster Abschnitt.

Begriff der elliptischen Integrale. Ihre Reduction auf die Normalform.

---

§. 1.

Die Elemente der Integralrechnung lehren das Integral

$$\int f(x,y)\,dx$$

in welchem $f(x,y)$ eine rationale Function der Veränderlichen x und y bedeutet, und y eine Wurzelgrösse von der Form

$$\sqrt{a+bx+cx^2}$$

vorstellt, algebraisch oder mit Hülfe von Logarithmen und Kreisfunctionen berechnen.

Auf eine ähnliche einfache Weise lässt sich auch das Integral

$$\int f(x,y,z)\,dx$$

angeben, wenn die Veränderlichen y und z zwei Wurzelgrössen von der Form

$$\sqrt{a+bx} \quad \text{und} \quad \sqrt{\alpha+\beta x}$$

bedeuten.

Wenn aber im ersten Falle y eine Wurzel von der Form

$$\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$$

vorstellt, oder im zweiten y und z die Ausdrücke

$$\sqrt{a+bx+cx^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

bezeichnen, welcher zweite Fall, durch Rationalmachen der einen Quadratwurzel, leicht auf den ersten zurückgeführt werden kann, dann reichen die Kreisfunctionen, die Logarithmen oder Exponentialgrössen nicht mehr aus, um die Natur dieser Functionen welche elliptische Integrale genannt werden, erforschen zu können. Zu diesem Zwecke eignen sich nur die neuen Gebilde, welche unter dem Namen der Jacobi'schen oder der Thetafunctionen in die Wissenschaft eingeführt worden sind, und ihre Entstehung einer Erweiterung des Begriffes der binomischen Reihe verdanken, während die Logarithmen, die Exponential- und Kreisfunctionen mit Hülfe dieser Reihe, in ihrer einfachsten Gestalt, leicht und vollständig entwickelt werden konnten. Wenn nun auch der Entwickelungsgang der Wissenschaft der Zeit nach thatsächlich ein anderer gewesen ist, und die Mathematiker erst auf diese Gebilde, von denen man schon mehr als ein Jahrhundert lang Kenntniss hatte, durch das Studium der Integralrechnung wieder aufmerksam geworden sind, so erscheint doch diese Auffassungsweise den Lesern eines Buches gegenüber gerechtfertigt, welche in die Rechnung mit den Thetafunctionen ebenso eingeführt werden sollen, wie sie bereits in die Rechnung mit Logarithmen und Kreisfunctionen vollständig eingeweiht sind.

Ehe wir aber die Lehre von den Thetafunctionen ausführlicher abhandeln können, ist es nothwendig, vorher eine Vorstellung von den wichtigsten Eigenschaften der elliptischen Integrale zu geben.

§. 2.

In dem allgemeinen elliptischen Integrale

$$\int f(x, y)\, dx$$

lässt sich die Wurzelgrösse y, unter welcher wir den Ausdruck

$$\sqrt{E(x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}$$

verstehen, immer so umformen, dass das Polynom nur die geraden Potenzen der Veränderlichen x enthält. Um dies nachzuweisen, wollen wir annehmen, dass durch die Substitution

$$x = z - \tfrac{1}{4}A$$

das Polynom bereits die Gestalt

$$y = \sqrt{E(z^4 + 2az^2 + 4bz + c)}$$

angenommen hat.

Bezeichnen wir das Polynom unter dem Wurzelzeichen kurz mit $F(z)$, so ist

$$F(z) = z^4 + 2az^2 + 4bz + c = \left(z^2 + a + \frac{b}{z}\right)^2 - \left(a + \frac{b}{z}\right)^2 + 2bz + c.$$

Führen wir nun wieder statt z eine neue durch die Gleichung

$$z = \lambda + \mu x$$

bestimmte Veränderliche x ein, so lassen sich die Constanten λ und μ so bestimmen, dass in der Entwickelung die Coefficienten von x^0 und x^4, sowie von x^1 und x^3 einander gleich werden. Der Coefficient von x^0 ist aber offenbar in der Entwickelung von $F(z) = F(\lambda + \mu x)$ nur $F(\lambda)$ und der von x^4 ist μ^4; ferner sind die Coefficienten von x^3 und x^1 entsprechend

$$4\lambda\mu^3 \quad \text{und} \quad \mu F'(\lambda) = 4\mu(\lambda^3 + a\lambda + b).$$

Daher hat man zur Bestimmung von λ und μ die Gleichungen

$$(1.) \qquad \left(\lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda}\right)^2 - \left(a + \frac{b}{\lambda}\right)^2 + 2b\lambda + c = \mu^4$$

$$(2.) \qquad \lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda} = \mu^2;$$

folglich liefert die Gleichung

$$(3.) \qquad \left(a + \frac{b}{\lambda}\right)^2 - 2b\lambda - c = 0$$

den gesuchten Werth von λ und die Gleichung (2.) das zugehörige μ.

Es ist nun zunächst nachzuweisen, dass die Gleichung (3.), welche als cubische zwar stets einen reellen Werth für λ liefert, diesen auch so bestimmt, dass er, in die Gleichung (2.) eingesetzt, μ^2 positiv macht, also auch μ reell ergiebt.

Fasst man die linke Seite der Gleichung (3.) als Function von λ auf, setzt also

$$\psi(\lambda) = \left(a + \frac{b}{\lambda}\right)^2 - 2b\lambda - c,$$

so ist, wenn man mit ω eine unendlich grosse Zahl bezeichnet,

$$\psi(0) = +\omega \quad \text{und} \quad \psi(\pm\omega) = \mp b\omega,$$

also hat die Gleichung

$$\psi(\lambda) = 0$$

immer eine reelle Wurzel λ_1, welche mit b gleiches Vorzeichen hat, so dass für diese Wurzel

$$\frac{b}{\lambda_1} > 0$$

ist. Zieht man nun die identische Gleichung

$$\left(a + \frac{b}{\lambda_1}\right)^2 - 2b\lambda_1 - c = 0$$

von (3.) ab, so bleibt, wenn man mit $1-\frac{\lambda}{\lambda_1}$ dividirt,

$$(4.)\qquad \left(\frac{b}{\lambda}+2a+\frac{b}{\lambda_1}\right)\frac{b}{\lambda}=-2b\lambda_1$$

oder wenn man nach (2.)

$$(5.)\qquad \lambda_1^2+a+\frac{b}{\lambda_1}=\mu_1^2$$

setzt,

$$(6.)\qquad \left(\frac{b}{\lambda}+a+\frac{b}{2\lambda_1}\right)^2=\left(a+\frac{3b}{2\lambda_1}\right)^2-\frac{2b}{\lambda_1}\mu_1^2.$$

Ergäbe sich nun μ_1^2 aus (5.) positiv, so wären für λ und μ zwei reelle Grössen λ_1 und μ_1 gefunden. Machte aber λ_1 das μ_{11}^2 negativ, so würden die beiden andern Wurzeln λ_2 und λ_3 der Gleichung (3.) oder der Gleichung (6.) beide reell gefunden, da $\frac{b}{\lambda_1}$ positiv, also $-\frac{2b}{\lambda_1}\mu_1^2$ ebenfalls positiv sein würde und die Grösse

$$\sqrt{\left(a+\frac{3b}{2\lambda_1}\right)^2-\frac{2b}{\lambda_1}\mu_1^2}$$

entschieden reell wäre.

Diese beiden Wurzeln λ_2 und λ_3 liefern aber ein positives μ^2, also ein reelles μ; denn setzt man

$$a+\frac{b}{2\lambda_1}=L \text{ und } \sqrt{L^2-2b\lambda_1}=M,$$

so findet man aus (4.)

$$\frac{b}{\lambda}=-L\pm M$$

$$2\lambda_1\lambda=-L\mp M.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen ergiebt sich aus (2.)

$$2\lambda_1^2\mu^2=M^2\pm(L+2\lambda_1^2)M.$$

Es ist aber

$$(L+2\lambda_1^2)^2=M^2+4\lambda_1^2\mu_1^2$$

folglich

$$2\lambda_1^2\mu^2=M\left(M\pm\sqrt{M^2+4\lambda_1^2\mu_1^2}\right).$$

Da nun μ_1^2 negativ ist, so ist die Wurzelgrösse kleiner als M, also μ^2 stets positiv und μ reell.

§. 3.

Nachdem wir uns jetzt überzeugt haben, dass die Constanten λ und μ stets als reelle Grössen bestimmt werden können, führen wir in y die Substitution $z = \lambda + \mu x$ ein und erhalten so, mit Rücksicht auf (1.) und (2.),

$$y = \sqrt{E\{\mu^4(x^4+1) + 4\lambda\mu^3(x^3+x) + 2\mu^2(3\lambda^2+a)x^2\}}$$
$$= \mu x\sqrt{E\left\{\mu^2\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right) + 4\lambda\mu\left(\frac{1}{x}+x\right) + 2(3\lambda^2+a)\right\}}.$$

Setzt man nun

$$x = \frac{1+t}{1-t}$$

so wird

$$z = \lambda - \mu + \frac{2\mu}{1-t}; \qquad dz = \frac{2\mu dt}{(1-t)^2}$$

und

$$y = \frac{2\mu}{(1-t)^2}\sqrt{\alpha + 2\beta t^2 + \gamma t^4},$$

wenn man die Bezeichnungen einführt

$$\alpha = E\left(2\lambda^2 + 2\lambda\mu + a + \frac{b}{2\lambda}\right)$$
$$\gamma = E\left(2\lambda^2 - 2\lambda\mu + a + \frac{b}{2\lambda}\right)$$
$$\beta = E\left(2a + \frac{3b}{\lambda}\right)$$

§. 4.

Ist nun das Integral

$$\int f(x,y)\,dx$$

zu berechnen, in welchem $f(x,y)$ eine rationale Function von x und y, und y eine Quadratwurzel aus einem Polynom vierten Grades der Variabeln x bedeutet, so lässt sich zunächst $f(x,y)$ unter der Form darstellen

$$f(x,y) = \frac{P+Qy}{R+Sy} = \frac{P+Qy}{R+Sy}\cdot\frac{R-Sy}{R-Sy}$$
$$= \frac{PR-QSy^2}{R^2-S^2y^2} + \frac{(QR-PS)y^2}{R^2-S^2y^2}\cdot\frac{1}{y},$$

wo P, Q, R, S ganze rationale Functionen von x sind. Der erste Bruch auf der rechten Seite dieser Gleichung, sowie der zweite, welcher als Factor von $\frac{1}{y}$ erscheint, sind beide rationale Functionen von x und mögen durch X und Y bezeichnet werden. Dann erscheint das vorgelegte Integral als aus den beiden Theilen

$$\int X dx + \int Y \frac{dx}{y}$$

zusammengesetzt, von denen sich der erste nach bekannten Vorschriften integriren lässt.

Wenn man im zweiten Theile die Substitution des §. 3 benutzt, so wird Y eine rationale Function von t statt von x, und das Differential $\frac{dx}{y}$ erscheint unter der Gestalt

$$\frac{dt}{\sqrt{\alpha+2\beta t^2+\gamma t^4}}.$$

Ganz in derselben Weise wie vorher $f(x, y)$ zerlegt wurde, lässt sich auch Y in zwei Theile

$$T+tT_1$$

auflösen, in denen T und T_1 rationale Functionen von t^2 vorstellen. Das Integral

$$\int \frac{T_1\, t dt}{\sqrt{\alpha+2\beta t^2+\gamma t^4}}$$

lässt sich, wenn man $t^2 = x$ setzt, nach bekannten Methoden auffinden. Es bleibt also nur noch übrig, das Integral

$$\int \frac{T.dt}{\sqrt{\alpha+2\beta t^2+\gamma t^4}}$$

zu berechnen.

Durch Zerlegung in Partialbrüche lässt sich T in Glieder von der Form

$$\frac{A}{(a-t^2)^n} \quad \text{und} \quad Bt^{2m}$$

auflösen, wo a auch imaginär sein kann. Man hat sich also nur noch mit den beiden Integralen

$$\int \frac{t^{2m}\, dt}{\sqrt{\alpha+2\beta t^2+\gamma t^4}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dt}{(a-t^2)^n \sqrt{\alpha+2\beta t^2+\gamma t^4}}$$

zu beschäftigen. Diese Integrale nehmen für $t^2 = x$, wenn man

$$\alpha x + 2\beta x^2 + \gamma x^3 = \varphi(x)$$

setzt, die Gestalt an

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{(a-x)^n \sqrt{\varphi(x)}}$$

von denen die erste als ein specieller Fall der zweiten betrachtet werden kann, wenn man nämlich $a=0$ und n negativ annimmt. Es bleibt daher nur noch das letzte Integral zu untersuchen übrig.

§. 5.

Um dieses Integral auf seine einfachen Elemente zurückzuführen, kann man folgende allgemeine Reductionsformel benutzen. Nach dem Taylor'schen Satze ist für

$$a-x=A$$

$$\varphi(x)=\varphi(a-A)=\varphi(a)-A\varphi'(a)+\frac{A^2}{2!}\varphi''(a)-\frac{A^3}{3!}\varphi'''(a)+\cdots$$

Ferner

$$\frac{d.A^\lambda\sqrt{\varphi(x)}}{dx}$$

$$=-\lambda A^{\lambda-1}\sqrt{\varphi(x)}+\tfrac{1}{2}\frac{A^\lambda\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}=\frac{A^{\lambda-1}}{2\sqrt{\varphi(x)}}(A\varphi'(x)-2\lambda\varphi(x))$$

$$=\frac{A^{\lambda-1}}{2\sqrt{\varphi(x)}}\Big\{A\varphi'(a)-A^2\varphi''(a)+\frac{A^3}{2!}\varphi'''(a)-\frac{A^4}{3!}\varphi^{\mathrm{IV}}(a)+\cdots$$
$$-2\lambda\Big(\varphi(a)-A\varphi'(a)+\frac{A^2}{2!}\varphi''(a)-\frac{A^3}{3!}\varphi'''(a)+\cdots\Big)\Big\}$$

$$=\frac{A^{\lambda-1}}{2\sqrt{\varphi(x)}}\Big\{-2\lambda\varphi(a)+(2\lambda+1)A\varphi'(a)-\frac{2\lambda+2}{2!}A^2\varphi''(a)$$
$$+\frac{2\lambda+3}{3!}A^3\varphi'''(a)-\frac{2\lambda+4}{4!}A^4\varphi^{\mathrm{IV}}(a)+\cdots\Big\}.$$

Integrirt man diese Gleichung, so wird

$$(1.)\qquad 2A^\lambda\sqrt{\varphi(x)}$$
$$=-2\lambda\varphi(a)\int\frac{A^{\lambda-1}dx}{\sqrt{\varphi(x)}}+(2\lambda+1)\varphi'(a)\int\frac{A^\lambda\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$
$$-\frac{2\lambda+2}{2!}\varphi''(a)\int\frac{A^{\lambda+1}dx}{\sqrt{\varphi(x)}}+\frac{2\lambda+3}{3!}\varphi'''(a)\int\frac{A^{\lambda+2}dx}{\sqrt{\varphi(x)}}-\cdots$$

Da

$$\varphi(x)=\alpha x+2\beta x^2+\gamma x^3$$

so verschwindet $\varphi^{\mathrm{IV}}(a)$ und daher enthält die rechte Seite dieser Formel (1.) in diesem Falle nur die vier niedergeschriebenen Glieder.

Aus dieser Formel ergiebt sich sogleich, dass man, wenn λ eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, jedes Integral von der Form

$$\int\frac{A^\lambda\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

berechnen kann, wenn die drei Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}; \qquad \int \frac{A\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}; \qquad \int \frac{dx}{A\sqrt{\varphi(x)}}$$

bekannt sind, denn man braucht in dieser Formel nur $\lambda = 0, +1, -1, +2, -2, \ldots$ einzusetzen, um sich von der Richtigkeit der Behauptung zu überzeugen.

§. 6.

Die letzten drei Integrale sind einer weitern Umformung fähig, und zwar lässt sich das erste derselben, oder auch das Integral

$$u = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)}}$$

stets auf ein Integral von der Form

$$(N) \qquad \int_{a'}^{b'} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\delta x)}}$$

zurückführen, in welchem der Coefficient δ immer ein positiver echter Bruch ist. Denn wenn zunächst die Coefficienten α, β, γ sämmtlich positiv sind, so führen wir durch die Gleichungen

$$(1.) \qquad \sqrt[4]{\frac{\gamma x^2}{\alpha}} = \frac{1-\sqrt{1-z}}{\sqrt{z}}$$

$$(2.) \qquad \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\gamma x^2}} = \frac{1+\sqrt{1-z}}{\sqrt{z}}$$

oder

$$(3.) \qquad \tfrac{1}{4}\left(\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\gamma x^2}} + \sqrt[4]{\frac{\gamma x^2}{\alpha}}\right)^2 = \frac{1}{z}$$

eine neue Veränderliche z ein. Differenziirt man die erste dieser Gleichungen logarithmisch, so findet man

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z\sqrt{1-z}}.$$

Aus Nr. 3 ist sogleich

$$\frac{\alpha}{x} + \gamma x = \left(\frac{4}{z} - 2\right)\sqrt{\alpha\gamma}.$$

Bezeichnet man daher

$$(4.)\quad \tfrac{1}{4}\left(\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\gamma a^2}}+\sqrt[4]{\frac{\gamma a^2}{\alpha}}\right)^2=\frac{1}{a'}$$

$$(5.)\quad \tfrac{1}{4}\left(\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\gamma b^2}}+\sqrt[4]{\frac{\gamma b^2}{\alpha}}\right)^2=\frac{1}{b'},$$

so wird, wenn man wieder x statt z schreibt, da bei dem bestimmten Integrale der Integrations-Buchstabe ganz willkürlich ist,

$$(6.)\quad u=\frac{1}{2\sqrt[4]{\alpha\gamma}}\int_{a'}^{b'}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\left(1-\frac{1}{2}\left[1-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}\right]x\right)}}\cdots$$

Wenn nun β kleiner ist als $\sqrt{\alpha\gamma}$, so hat jetzt u in der That die vorgeschriebene Form angenommen.

Ist aber β grösser als $\sqrt{\alpha\gamma}$ und man ersetzt x durch $1-x$, so verwandelt sich u in

$$(7.)\quad u=\frac{1}{\sqrt{2(\beta-\sqrt{\alpha\gamma})}}\int_{1-b'}^{1-a'}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\left(1-\frac{\beta-\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta+\sqrt{\alpha\gamma}}x\right)}}$$

erscheint also wieder in der Gestalt ($N.$), die wir als die Normalform bezeichnen wollen.

§. 7.

Hat man aber das Integral zu reduciren

$$u=\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{x(\alpha+2\beta x-\gamma x^2)}}$$

in welchem die Coefficienten α, β, γ, sämmtlich wieder positive Grössen sind, so nimmt zunächst das Trinom unter der Wurzel für

$$\sqrt{\alpha\gamma+\beta^2}=\delta$$

die Gestalt an

$$\frac{1}{\gamma}(\delta-\beta+\gamma x)(\delta+\beta-\gamma x)$$

und für $\gamma x=(\delta+\beta)z$ verwandelt sich u, wenn man die Grenzen noch unbestimmt lässt, in

$$u=\int\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(\delta-\beta+[\delta+\beta]z)}}$$

Schreibt man hier wieder $1-x$ statt z, so erhält man

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \int_{a'}^{b'} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\left(1-\frac{1}{2}\left[1+\frac{\beta}{\delta}\right]x\right)}}$$

wenn

$$a' = 1 - \frac{b\gamma}{\beta+\delta} \quad \text{und} \quad b' = 1 - \frac{a\gamma}{\beta+\delta}$$

Da $\beta < \delta$ ist, so hat das Integral die Normalform bereits angenommen, sowohl wenn β negativ als wenn es positiv ist.

§. 8.

Die beiden Integrale

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(\alpha+2\beta x+\gamma x^2)}} \quad \text{und} \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(\alpha+2\beta x-\gamma x^2)}}$$

lassen sich also stets auf ein Integral von der Form

$$\int_{a'}^{b'} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\delta x)}}$$

zurückführen, in welchem δ ein positiver echter Bruch ist. Alle übrigen Fälle, welche durch die Verschiedenheit der Zeichen und numerischen Werthe der Coefficienten α, β, γ auftreten können, lassen sich aber auf diese beiden Integrale zurückführen, wenn man den Integrationsbuchstaben mit

$$-x \quad \text{oder} \quad \frac{x}{\delta} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x}$$

vertauscht. Es wird dem Leser keine Mühe machen, sich von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen, wenn er alle einzelnen Fälle, mit Rücksicht auf diese Behauptung, untersucht.

§. 9.

Wenn man

$$x(1-x)(1-\delta x) = \psi(x)$$

setzt, so ist also das erste der drei Integrale in §. 5. auf die Form gebracht

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$$

und bildet, in dieser Gestalt, die erste Gattung der elliptischen Integrale.

Das zweite Integral

$$\int \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{x(\alpha+2\beta x+\gamma x^2)}}$$

zerfällt, wenn α und γ entgegengesetzte Zeichen haben, durch die Substitutionen des §. 7. in die beiden

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} \quad \text{und} \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

Haben aber α und γ gleiche Zeichen, dann wird durch die Substitution des §. 6, wenn man N. 1 durch N. 2 dividirt

$$(1) \quad x\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}$$

oder

$$x\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{2-z-2\sqrt{1-z}}{z},$$

also zerfällt das Integral in drei Integrale von der Form

$$A\int \frac{dz}{z\sqrt{\psi(z)}} + B\int \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} + C\int \frac{\sqrt{1-z}.\,dz}{z\sqrt{\psi(z)}}$$

Das erste wird durch die Substitution $z = \frac{1}{x}$ leicht auf die Form gebracht

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{\psi(x)}}$$

und bildet die zweite Gattung der elliptischen Integrale. Das zweite ist ein elliptisches Integral erster Gattung und das dritte oder

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z(1-\delta z)}}$$

wird nach bekannten Methoden berechnet.

Das dritte Integral in §. 5

$$\int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{x(\alpha+2\beta x+\gamma x^2)}}$$

nimmt wieder durch die Substitutionen im §. 7, wenn α und γ entgegengesetzte Zeichen haben, die Form an

$$\int \frac{dx}{(b-x)\sqrt{x(1-x)(1-\delta x)}}.$$

Sind aber α und γ mit gleichen Zeichen behaftet, vo verwandelt man den Factor $\frac{1}{b-x}$ durch die Substitution (1) leicht in

$$\frac{A+B(c-z)+C\sqrt{1-z}}{c-z},$$

wodurch das vorgelegte Integral in die drei andern

$$A\int\frac{dz}{(c-z)\sqrt{\psi(z)}}+B\int\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}+C\int\frac{dz}{(a-z)\sqrt{z(1-\delta z)}}$$

zerfällt, von denen das erste die dritte Gattung der elliptischen Integrale bildet, das zweite zur ersten Gattung gehört und das dritte nach bekannten Methoden berechnet werden kann.

§. 10.

Wir sind also jetzt zu drei wesentlich von einander verschiedenen Grundformen der elliptischen Integrale gelangt, die sich nicht mehr in einfachere Bestandtheile zerlegen lassen. Ersetzt man in ihnen x durch x^2, so nehmen sie die Formen an

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

$$\int\frac{dx}{(a-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

in denen k kleiner als 1 ist und a jede beliebige auch complexe Grösse sein kann.

Zieht man das zweite Integral vom ersten ab, so erhält man das Integral

$$\int\frac{dx\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

welches gewöhnlich als Normalform der zweiten Gattung betrachtet wird.

Legendre, der Schöpfer der Theorie der elliptischen Integrale, führt in diesen drei Integralen $\sin\varphi$ statt x ein und erhält so die Formen

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}};\quad \int\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}};\quad \int\frac{d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}.$$

Multiplicirt man das zweite Integral mit k^2 und zieht es vom ersten ab, so bleibt der Rest

$$\int d\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}$$

welchen Legendre als die eigentliche Normalform der elliptischen Integrale zweiter Gattung ansieht. Dieses Integral, durch welches die Länge des Bogens einer Ellipse dargestellt wird, hat dieser ganzen Klasse von Functionen den Namen gegeben.

Er bezeichnet ausserdem

$$\sqrt{1-k\sin^2\varphi^2} = \Delta\varphi$$

oder auch $\Delta(\varphi,k)$, wenn ausgedrückt werden soll, dass der Werth des Integrals auch von k abhängt. Diese drei Gattungen elliptischer Integrale werden von ihm auch stets als bestimmte aufgefasst, deren untere Grenze 0 und deren obere φ ist, so dass man gewöhnlich unter den elliptischen Integralen erster, zweiter und dritter Gattung die Integrale

$$\int_0^\varphi \frac{dx}{\Delta x}; \quad \int_0^\varphi \Delta x\, dx; \quad \int_0^\varphi \frac{dx}{(1+n\sin x^2)\Delta x}$$

versteht.

Die Constante k, welche stets kleiner als 1 ist, wird der Modul des Integrals genannt und die Constante n, welche nur in den Integralen dritter Gattung erscheint und auch imaginär sein kann, heisst der Parameter.

Die obere Grenze φ nennt man die Amplitude des Integrals.

Führt man durch die Gleichung

$$k^2 + k'^2 = 1$$

einen neuen Modul k' ein, so heisst dieser der complementäre Modul.

Legendre lässt auch häufig in dem Zeichen $\Delta\varphi$ den Buchstaben φ fort und unterscheidet die drei Gattungen der elliptischen Integrale durch folgende Zeichen:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta} = F; \quad \int^\varphi \Delta d\varphi = E; \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta} = \Pi.$$

Durch die Zeichen

$$F(\varphi,k); \quad E(\varphi,k); \quad \Pi(\varphi,k,n)$$

wird ausgedrückt, dass diese Integrale nicht nur Functionen der Amplitude φ, sondern auch des Moduls k und des Parameters n sind.

Wenn die obere Grenze der Integrale $\frac{\pi}{2}$ ist, werden sie vollständige Integrale genannt und von Legendre durch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta} = F'; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varDelta d\varphi = E'; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\varDelta} = \Pi'$$

bezeichnet.

Jacobi bezeichnet das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit K und das entsprechende, in welchem der Modul k mit dem complementären k' vertauscht ist, durch K', so dass nach ihm

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = K \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin\varphi^2}} = K'.$$

Noch andere Bezeichnungsweisen, welche Jacobi eingeführt hat, werden wir später kennen lernen.

Zweiter Abschnitt.

Die Bildungsweise der Thetafunctionen.

---

§. 11.

Erweiterung des Begriffs der Potenz eines Binoms und ihrer Entwickelung.

Die Verwandlung eines Products von n gleichen Factoren

$$(1-x)(1-x)(1-x)\ldots(1-x) = (1-x)^n$$

in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe, ist zuerst von Newton benutzt worden, um auch zusammengesetztere Ausdrücke, und namentlich die einfachsten Kreisfunctionen, in solche Reihen zu entwickeln. Er erkannte zugleich die Bedeutung dieser algebraischen Gebilde auch in dem Falle, wenn dem n ein gebrochener oder negativer numerischer Werth beigelegt wird, und die gleichzeitigen grossen Mathematiker verfolgten diese Gedanken weiter, bis endlich Euler in seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen, welche 1748 erschien, ein vollständiges Lehrgebäude der Analysis des Endlichen aufstellen konnte, dem Ideen von Newton und Leibnitz und die Entdeckungen der Gebrüder Jacob und Johann Bernoulli zu Grunde lagen.

In diesem grossartigen Werke benutzt aber Euler bereits auch Gebilde von der Form

$$(1-x)(1-xr)(1-xr^2)(1-xr^3)\ldots$$

hauptsächlich um durch ihre Entwickelung in Reihen gewisse Eigenschaften der Zahlen zu erforschen, und bedient sich ihrer dann später bei zahlentheoretischen Untersuchungen.

Selbst vor Euler hatte schon Jacob Stirling in seiner Methodus differentialis, welche 1730 in London herauskam, bei sehr merkwürdigen Reihenentwickelungen, die wir später mittheilen werden, Ausdrücke von dieser Gestalt benutzt. Auch Gauss bediente sich ihrer in einer Abhandlung vom Jahre 1808, und endlich wendete sie Jacobi zuerst in seinem Werke Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum 1829 zu Reihenentwickelungen der elliptischen Transcendenten an. Nach diesen Andeutungen erscheint es gerechtfertigt, eine nächste fruchtbare Erweiterung des Newtonschen Theorems in der Entwickelung dieser Formen zu suchen. Wir beschränken uns indessen, bei dem unermesslichen Reichthum von Gestalten, welche diese Gebilde annehmen können, in unsern Mittheilungen zunächst nur auf das, was in der Theorie der elliptischen Functionen von Wichtigkeit erscheint.

§. 12.

Ein Product von n Factoren der angeführten Art

$$(1-x)(1-xr)(1-xr^2)\ldots(1-xr^{n-1})$$

bezeichnen wir kurz durch

$$(x;r)^n$$

und multipliciren die identische Gleichung

$$1-axr^{n-1}=1-xr^{n-s-1}+x(1-ar^s)r^{n-s-1}$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$\frac{1-axr^{n-1}}{1-r^n}=\frac{1-xr^{n-s-1}}{1-r^{n-s}}\cdot\frac{1-r^{n-s}}{1-r^n}+x\frac{1-ar^s}{1-r^{s+1}}\cdot\frac{r^{n-s-1}-r^n}{1-r^n}$$

mit dem Producte der Factoren x^s und

$$\frac{(a;r)^s}{(r;r)^s} \quad \text{und} \quad \frac{(x;r)^{n-1-s}}{(r;r)^{n-1-s}},$$

welche letztere beide durch

$$A_s \quad \text{und} \quad X_{n-1-s}$$

bezeichnet werden sollen. Wir setzen dann in der entstandenen Gleichung für s alle ganze Zahlen von 0 bis $n-1$ und addiren die erhaltenen n Gleichungen. Diese ganze Operation lässt sich leicht verständlich und übersichtlich, mit Hülfe des Summenzeichens, in folgender Weise ausdrücken:

$$\frac{1-axr^{n-1}}{1-r^n}\Sigma_0^{n-1}x^sA_sX_{n-1-s}$$

$$=\Sigma_0^{n-1}x^sA_sX_{n-s}\frac{1-r^{n-s}}{1-r^n}+\Sigma_0^{n-1}x^{s+1}A_{s+1}X_{n-1-s}\frac{r^{n-s-1}-r^n}{1-r^n}.$$

Sondert man hier auf der rechten Seite von der ersten Reihe das erste Glied ab und von der zweiten das letzte, so nimmt sie die

Gestalt an:

$$X_n + \Sigma_0^{n-1} x^s A_s X_{n-s} \frac{1-r^{n-s}}{1-r^n} + \Sigma_1^{n-1} x^s A_s X_{n-s} \frac{r^{n-s}-r^n}{1-r^n} + x^n A_n$$

oder

$$X_n + \Sigma_1^{n-1} x^s A_s X_{n-s} + x^n A_n = \Sigma_0^n x^s A_s X_{n-s}.$$

Es ist also

$$\frac{1-axr^{n-1}}{1-r^n} \Sigma_0^{n-1} x^s A_s X_{n-1-s} = \Sigma_0^n x^s A_s X_{n-s}.$$

Fasst man die rechte Seite dieser Gleichung als eine Function von n auf und bezeichnet sie durch $\varphi(n)$, sowie den Bruch auf der linken Seite vor dem Summenzeichen durch $\psi(n)$, so lässt sich diese Gleichung als

$$\psi(n)\varphi(n-1) = \varphi(n)$$

darstellen. Setzt man für n alle ganze Zahlen von 1 bis n und multiplicirt die so erhaltenen n Gleichungen mit einander, so gelangt man zu der Gleichung

$$\psi(1).\psi(2).\psi(3)\ldots\psi(n) = \varphi(n),$$

da $\varphi(0) = 1$ ist. Es ist also

$$(1.) \qquad \frac{(ax;r)^n}{(r;r)^n} = \Sigma_0^n x^s \frac{(a;r)^s}{(r;r)^s} \cdot \frac{(x;r)^{n-s}}{(r;r)^{n-s}}$$

oder

$$\frac{1-ax.1-axr.1-axr^2\ldots 1-axr^{n-1}}{1-r\;.\;1-r^2\;.\;1-r^3\ldots\ldots 1-r^n}$$

$$= \frac{1-x.1-xr\ldots 1-xr^{n-1}}{1-r.1-r^2\ldots 1-r^n} + x\frac{1-a}{1-r} \cdot \frac{1-x\ldots 1-xr^{n-2}}{1-r\ldots 1-r^{n-1}}$$

$$+ x^2 \frac{1-a.1-ar}{1-r.1-r^2} \cdot \frac{1-x\ldots 1-xr^{n-3}}{1-r\ldots 1-r^{n-2}}$$

$$+ x^3 \frac{1-a.1-ar.1-ar^2}{1-r.1-r^2.1-r^3} \cdot \frac{1-x\ldots 1-xr^{n-4}}{1-r\ldots 1-r^{n-3}} + \cdots$$

$$+ x^{n-1} \frac{1-a\ldots 1-ar^{n-2}}{1-r\ldots 1-r^{n-1}} \cdot \frac{1-x}{1-r} + x^n \frac{1-a\ldots 1-ar^{n-1}}{1-r\ldots 1-r^n}.$$

Um diese Formel noch übersichtlicher darzustellen, kann man auch den Bruch

$$\frac{(a;r)^s}{(r;r)^s} \quad \text{mit} \quad a_s$$

bezeichnen, wodurch sie die Form annimmt

$$(ax)_n = \Sigma_0^n x^s a_s x_{n-s}$$

oder

$$(ax)_n = x_n + x a_1 x_{n-1} + x^2 a_2 x_{n-2} + x^3 a_3 x_{n-3} + \cdots + x^n a_n.$$

§. 13.

Um die Natur der gewonnenen Formel etwas genauer kennen zu lernen, setzen wir bx statt x und $\frac{a}{b}$ statt a; dann verwandelt sie sich in

$$(1.) \quad (ax)_n = (bx)_n + bx\left(\frac{a}{b}\right)_1 (bx)_{n-1} + b^2x^2\left(\frac{a}{b}\right)_2 (bx)_{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + b^n x^n \left(\frac{a}{b}\right)_n.$$

Nimmt man nun $b = 0$ an und multiplicirt die ganze Gleichung mit $(r;r)^n$, so ergiebt sich, wenn noch ax mit x vertauscht wird,

$$(2.) \quad (x;r)^n = 1 - x \,.\, 1 - xr \ldots 1 - xr^{n-1}$$
$$= 1 - \frac{1-r^n}{1-r}x + \frac{1-r^n \,.\, 1-r^{n-1}}{1-r \,.\, 1-r^2} r x^2 - \frac{1-r^n \,.\, 1-r^{n-1} \,.\, 1-r^{n-2}}{1-r \,.\, 1-r^2 \,.\, 1-r^3} r^3 x^3$$
$$+ \frac{1-r^n \ldots 1-r^{n-3}}{1-r \ldots 1-r^4} r^6 x^4 - \cdots \pm r^{\frac{n^2-n}{2}} x^n.$$

Für $r = 1$ erhält man hieraus den binomischen Lehrsatz, da sich $\frac{1-r^m}{1-r^\mu}$ für $r = 1$ in $\frac{m}{\mu}$ verwandelt.

Das Zeichen

$$(x;r)^n$$

hat auch für ein negatives n einen ganz bestimmten Sinn; denn da

$$(3.) \quad \frac{(x;r)^n}{1 - xr^{n-1}} = (x;r)^{n-1}$$

also, für $n = 1$, hieraus

$$(x;r)^0 = \frac{(x;r)^1}{1-x} = 1$$

folgt, so erhält man aus (3.) für $n = 0, -1, -2, -3 \ldots$ die Gleichungen

$$\frac{1}{1-\frac{x}{r}} = (x;r)^{-1}$$

$$\frac{(x;r)^{-1}}{1-\frac{x}{r^2}} = (x;r)^{-2}$$

$$\frac{(x;r)^{-2}}{1-\frac{x}{r^3}} = (x;r)^{-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(x;r)^{-n+1}}{1-\frac{x}{r^n}} = (x;r)^{-n},$$

deren Product die Formel liefert

$$(4.)\qquad (x;r)^{-n} = \frac{1}{1-\frac{x}{r}}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{r^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{r^3}}\cdots\frac{1}{1-\frac{x}{r^n}}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{x}{r};\frac{1}{r}\right)^n}.$$

Verwandelt man nun in (2.) n in $-n$, so erhält man

$$(x;r)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{x}{r};\frac{1}{r}\right)^n} = 1 - \frac{1-r^{-n}}{1-r}x + \frac{1-r^{-n}.1-r^{-n-1}}{1-r.1-r^2}rx^2$$
$$- \frac{1-r^{-n}.1-r^{-n-1}.1-r^{-n-2}}{1-r.1-r^2.1-r^3}r^3x^3 + \cdots$$

und wenn hier xr statt x und dann $\frac{1}{r}$ statt r geschrieben wird, so entsteht die Formel

$$(5.)\qquad \frac{1}{(x;r)^n} = 1 + \frac{1-r^n}{1-r}x + \frac{1-r^n.1-r^{n+1}}{1-r.1-r^2}x^2$$
$$+ \frac{1-r^n.1-r^{n+1}.1-r^{n+2}}{1-r.1-r^2.1-r^3}x^3 + \cdots$$

Für $r=1$ verwandelt sich diese Formel in die bekannte Entwickelung von $(1-x)^{-n}$ nach Potenzen von x.

Die Formel (5.) lässt sich auch direct ohne Hülfe des Zeichens (4.) ableiten und beide Formeln (2.) und (5.) nehmen für $r<1$ und ein unendlich grosses n neue Gestalten an; aber wir verlassen hier diesen Gegenstand, der in einem späteren Abschnitte etwas ausführlicher behandelt werden soll, um jetzt unserm Hauptziele zuzueilen.

§. 14.

Die Formel (1.) im §. 12 lässt sich jetzt einer solchen Umformung unterwerfen, dass man aus ihr unmittelbar zu den Thetafunctionen gelangen kann.

Wir ersetzen zu dem Zwecke in ihr n durch $2n$, x durch $\frac{ar^{\frac{1}{2}}}{c}$, a durch cr^{-n} und multipliciren beide Seiten derselben mit dem Quadrate von $(r;r)^{2n}$, und erhalten dann

$$(r;r)^{2n}(ar^{\frac{1}{2}-n};r)^{2n}$$
$$=\Sigma_0^{2n}\frac{a^s r^{\frac{s}{2}}}{c^s}\cdot\frac{(r;r)^{2n}}{(r;r)^s}\cdot\frac{(r;r)^{2n}}{(r;r)^{2n-s}}(cr^{-n};r)^s\left(\frac{ar^{\frac{1}{2}}}{c};r\right)^{2n-s}.$$

Es ist aber

$$\frac{(r;r)^{2n}}{(r;r)^s}=(r^{s+1};r)^{2n-s} \quad \text{und} \quad \frac{(r;r)^{2n}}{(r;r)^{2n-s}}=(r^{2n-s+1};r)^s.$$

Nimmt man c unendlich gross an, so wird

$$\frac{r^{\frac{s}{2}}}{c^s}(cr^{-n};r)^s=r^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{c}-r^{-n}\right)\left(\frac{1}{c}-r^{1-n}\right)\dots\left(\frac{1}{c}-r^{s-1-n}\right)$$
$$=(-1)^s\frac{r^{\frac{1}{2}(n-s)^2}}{r^{\frac{1}{2}n^2}}.$$

und

$$\left(\frac{ar^{\frac{1}{2}}}{c};r\right)^{2n-s}=1.$$

Auf diese Weise verwandelt sich unsre Formel in

$$(r;r)^{2n}(ar^{\frac{1}{2}-n};r)^{2n}=\Sigma_0^{2n}(-1)^s a^s\frac{r^{\frac{1}{2}(n-s)^2}}{r^{\frac{1}{2}n^2}}(r^{2n+1-s};r)^s(r^{s+1};r)^{2n-s}.$$

Es ist aber

$$(ar^{\frac{1}{2}-n};r)^{2n}=(-1)^n\frac{a^n}{r^{\frac{1}{2}n^2}}\left(\frac{r^{\frac{1}{2}}}{a};r\right)^n(ar^{\frac{1}{2}};r)^n.$$

Multiplicirt man nun noch beide Seiten der Formel mit $(-1)^n\frac{r^{\frac{1}{2}n^2}}{a^n}$ und nimmt dann rechts die Summe nicht von $s=0$ bis $s=2n$, sondern von $s=-n$ bis $s=+n$, was erlaubt ist, wenn man $n-s$ statt s schreibt, so gelangt man endlich zu der Formel

$$(1.)\quad (r\,;r)^{2n}(ar^{\frac{1}{2}}\,;r)^{n}\left(\frac{r^{\frac{1}{2}}}{a}\,;r\right)^{n}$$
$$=\Sigma_{-n}^{n}(-1)^{s}r^{\frac{1}{2}s^2}\,.\,a^{s}(r^{n+s+1}\,;r)^{n-s}(r^{n-s+1}\,;r)^{n+s}.$$

Diese Formel gilt nun für ganz beliebige Werthe von a und r, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Sie nimmt aber eine ausserordentlich einfache und symmetrische Gestalt an, wenn man $r<1$ und n unendlich gross setzt. Bezeichnen wir dann durch

$$(x\,;r)=1-x\,.\,1-xr^{2}.\,1-xr^{3}\dots$$

eine unendlich grosse Anzahl von Factoren, wo also in dem früheren Zeichen bloss der Buchstabe fortgefallen ist, der diese Anzahl angiebt, so erhalten wir, wenn noch $-a$ statt a und r^2 statt r geschrieben und ω statt des Zeichens ∞ eingeführt wird

$$(2.)\quad (r^{2};r^{2})(-ar;r^{2})\left(-\frac{r}{a};r^{2}\right)=\Sigma_{-\omega}^{\omega}a^{s}r^{s^2}$$

oder

$$(1-r^{2}.\,1-r^{4}.\,1-r^{6}\dots)(1+ar\,.\,1+ar^{3}.\,1+ar^{5}\dots)\left(1+\frac{r}{a}\,.\,1+\frac{r^{3}}{a}\,.\,1+\frac{r^{5}}{a}\dots\right)$$
$$=1+(a+a^{-1})r+(a^{2}+a^{-2})r^{4}+(a^{3}+a^{-3})r^{9}+(a^{4}+a^{-4})r^{16}+\dots$$

Ersetzen wir in dieser Formel a durch ar, multipliciren beide Seiten mit $a^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{4}}$ und sondern links den Faktor $1+\frac{1}{a}$ ab, so gewinnen wir noch folgende Formel:

$$(3.)\quad a^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{a}\right)(r^{2};r^{2})(-ar^{2};r^{2})\left(-\frac{r^{2}}{a};r^{2}\right)=\Sigma_{-\omega}^{\omega}a^{s+\frac{1}{2}}r^{(s+\frac{1}{2})^2}$$

oder

$$a^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{a}\right)(1-r^{2}.\,1-r^{4}.\,1-r^{6}\dots)(1+ar^{2}.\,1+ar^{4}.\,1+ar^{6}\dots)$$
$$\cdot\left(1+\frac{r^{2}}{a}\cdot 1+\frac{r^{4}}{a}\cdot 1+\frac{r^{6}}{a}\cdots\right)$$
$$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})r^{\frac{1}{4}}+(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}})r^{\frac{9}{4}}+(a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}})r^{\frac{25}{4}}+(a^{\frac{7}{2}}+a^{-\frac{7}{2}})r^{\frac{49}{4}}+\cdots$$

§. 15.

Die Jacobischen oder die Thetafunctionen in ihrer ersten Form.

Während die unendliche geometrische Reihe

$$1+x+x^{2}+x^{3}+\cdots=(1-x)^{-1}$$

wenn x kleiner als 1 ist, als ein specieller Fall des binomischen Satzes betrachtet werden kann, und eine solche Reihe

$$1+r\left(a+\frac{1}{a}\right)+r^2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+r^3\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-ra}+\frac{1}{1-\frac{r}{a}}-1=\frac{1-r^2}{1-r\left(a+\frac{1}{a}\right)+r^2}$$

als die Summe zweier geometrischen Reihen erscheint und z. B. für $a=e^{xi}$ die Gestalt annimmt:

$$1+2r\cos x+2r^2\cos 2x+2r^3\cos 3x+\cdots=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},$$

so sind wir jetzt durch Erweiterung des binomischen Satzes, wenn das a in §. 14 ebenfalls durch e^{xi} ersetzt wird, zu Reihen von der Form gelangt:

$$1+2r\cos x+2r^4\cos 2x+2r^9\cos 3x+2r^{16}\cos 4x+\cdots$$

und

$$r\cos x+r^9\cos 3x+r^{25}\cos 5x+r^{49}\cos 7x+\cdots$$

Jede dieser Reihen kann als die Summe zweier geometrischer Reihen zweiter Ordnung d. h. solcher Reihen betrachtet werden, in denen erst die Quotienten der Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder constante Grössen sind, oder in denen die Exponenten der einzelnen Glieder arithmetische Reihen zweiter Ordnung bilden.

Die allgemeinste Form einer solchen geometrischen Reihe zweiter Ordnung würde

$$abc+ab^2c^4+ab^3c^9+ab^4c^{16}+\ldots+ab^nc^{n^2}$$

oder

$$\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta^3\gamma^3+\alpha\beta^4\gamma^6+\ldots+\alpha\beta^{n-1}\gamma^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

sein.

Unsere bisherigen Entwickelungen haben aber nicht etwa dazu geführt, einen geschlossenen Ausdruck in endlicher Form für diese Reihen aufstellen zu können, sondern sie haben nur gelehrt ein Product von unendlich vielen Factoren in eine solche Reihe aufzulösen, obgleich die Formel (1.) im §. 14, welche uns als Ausgangspunkt für unsere Rechnungen diente, aus einer endlichen Anzahl von Gliedern und Factoren bestand.

Da die Reihen (2.) und (3.) nur aus Gliedern von der Form $(ar^n)^n$ und $\left(\frac{r^n}{a}\right)^n$ bestehen, so convergiren sie offenbar, wenn r kleiner als 1 ist, für einen ganz beliebigen Werth von a.

§. 16.

Ersetzt man in den Reihen (2.) und (3.) des §. 14. a durch e^{2xi} und schreibt q statt r, so verwandeln sie sich in

$$(q^2\,;q^2)(-qe^{2xi}\,;q^2)(-qe^{-2xi}\,;q^2)=\Sigma_{-\omega}^{\omega}\,q^{s^2}e^{2xsi}$$

oder

$$(1.)\qquad (q^2\,;q^2)\,\Pi_0^{\omega}(1+2q^{2s+1}\cos 2x+q^{4s+2})$$
$$=1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots$$

und

$$2q^{\frac{1}{4}}\cos x.(q^2;\,q^2)(-q^2e^{2xi}\,;q^2)(-q^2e^{-2xi}\,;q^2)=\Sigma_{-\omega}^{\omega}\,q^{(s+\frac{1}{2})^2}e^{(2s+1)xi}$$

oder

$$(2.)\qquad 2q^{\frac{1}{4}}(q^2\,;q^2)\cos x\,\Pi_0^{\omega}(1+2q^{2s+2}\cos 2x+q^{4s+2})$$
$$=2q^{\frac{1}{4}}\cos x+2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x+2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x+\cdots$$

wenn man nämlich immer zwei sich entsprechende Factoren auf der linken Seite mit einander multiplicirt und das übersichtliche und bekannte Productzeichen einführt. Die Reihe auf der rechten Seite der Formel (1.) bezeichnet Jacobi, der Schöpfer der Theorie der Thetafunctionen, mit dem Zeichen $\theta_3(x)$ und die Reihe in Nr. 2. durch $\theta_2(x)$. Der blosse Anblick dieser Formeln lehrt, dass sowohl die Reihen rechts als auch die Producte links, stark convergiren, selbst wenn das q nur wenig kleiner als 1 ist.

Wir werden uns also künftig, nach Jacobi, stets folgender Bezeichnungen bedienen

$$\theta_3(x)=1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots$$
$$\theta_2(x)=\qquad 2q^{\frac{1}{4}}\cos x+2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x+2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x+\cdots$$

Sowie man in der Theorie der Kreisfunctionen für die Function $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ein besonderes Zeichen $\sin x$ hat, ganz in derselben Weise ist man genöthigt, auch für die Complemente der Functionen $\theta_3 x$ und $\theta_2 x$ neue Bezeichnungen zu wählen. Jacobi bezeichnet

$$\theta_2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\theta_1 x$$

$$\theta_3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\theta x.$$

Man hat daher noch die Gleichungen zu beachten

$$\theta_1 x=\qquad 2q^{\frac{1}{4}}\sin x-2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x+2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x-\cdots$$
$$\theta\,x=1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots$$

Die wichtigste Arbeit, der wir uns jetzt zu unterziehen haben, besteht darin, die Natur dieser vier Thetafunctionen zu erforschen, welche durch folgende vier Formeln characterisirt sind.

$$(3.)\quad \theta x = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots$$
$$(4.)\quad \theta_1 x = 2q^{\frac{1}{4}}\sin x - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x - \cdots$$
$$(5.)\quad \theta_2 x = 2q^{\frac{1}{4}}\cos x + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x + \cdots$$
$$(6.)\quad \theta_3 x = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots$$

oder mit Benutzung des Summen- und Productzeichens

$$(3.)\quad \theta x = \Sigma_{-\omega}^{\omega}(-1)^s q^{s^2}\cos 2sx = (q^2;q^2)\,\Pi_0^{\omega}(1 - 2q^{2s+1}\cos 2x + q^{4s+2})$$
$$(4.)\quad \theta_1 x = \Sigma_{-\omega}^{\omega}(-1)^s q^{(s+\frac{1}{2})^2}\sin(2s+1)x = 2q^{\frac{1}{4}}(q^2;q^2)\sin x\,\Pi_0^{\omega}(1 - 2q^{2s+2}\cos 2x + q^{4s+4})$$
$$(5.)\quad \theta_2 x = \Sigma_{-\omega}^{\omega} q^{(s+\frac{1}{2})^2}\cos(2s+1)x = 2q^{\frac{1}{4}}(q^2;q^2)\cos x\,\Pi_0^{\omega}(1 + 2q^{2s+2}\cos 2x + q^{4s+4})$$
$$(6.)\quad \theta_3 x = \Sigma_{-\omega}^{\omega} q^{s^2}\cos 2sx = (q^2;q^2)\,\Pi_0^{\omega}(1 + 2q^{2s+1}\cos 2x + q^{4s+2}).$$

§. 17.

Das unendliche Product für $\theta_3 x$ ist einer Umformung fähig. Offenbar ist

$$\theta_3 o = (q^2\,;q^2)\,\Pi_0^{\omega}(1 + 2q^{2s+1} + q^{4s+2}) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$

und mit Hülfe dieser Formel geht (6.) in §. 16. über in

$$\theta_3 x = \theta_3 o\,\Pi_0^{\omega}\frac{1 + 2q^{2s+1}\cos 2x + q^{4s+2}}{1 + 2q^{2s+1} + q^{4s+2}}.$$

Der Bruch unter dem Productzeichen ist aber, wenn man

$$q = e^{-\nu}$$

setzt und den Bruch mit $e^{(2s+1)\nu}$ erweitert,

$$\frac{e^{(2s+1)\nu} + e^{-(2s+1)\nu} + 2\cos 2x}{e^{(2s+1)\nu} + e^{-(2s+1)\nu} + 2} = \frac{\cos(2s+1)\nu i + \cos 2x}{\cos(2s+1)\nu i + 1}$$
$$= \frac{\cos(x + (s+\frac{1}{2})\nu i)\cos(x - (s+\frac{1}{2})\nu i)}{\cos(s+\frac{1}{2})\nu i\,.\cos(s+\frac{1}{2})\nu i}$$

Vermöge dieser Zerlegung lässt sich $\theta_3(x)$ so darstellen

$$\theta_3 x = \theta_3 o\, e^{ix}\,\Pi_{-\omega}^{\omega}\frac{\cos(x + (s+\frac{1}{2})\nu i)}{\cos(s+\frac{1}{2})\nu i}$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Formel, wenn man bedenkt, dass das erste Product, in welchem s die Werthe aller ganzen Zahlen von 0 bis ω annimmt, nach der Zerlegung des Bruches in zwei Factoren, $2\omega+2$ Factoren enthält, und das zweite nur $2\omega+1$. Man muss also zu diesem letzteren Producte noch den Factor

$$\frac{\cos(x-(\omega+\frac{1}{2})\nu i)}{\cos(\omega+\frac{1}{2})\nu i} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}e^{-(2\omega+1)\nu}}{1-e^{-(2\omega+1)\nu}} = e^{ix}$$

hinzufügen, damit es dem ersteren gleich wird.

Wenn man sich die Factoren niedergeschrieben denkt, so erkennt man sofort die Identität

$$\Pi_{-\omega}^{\omega} F(s) = \frac{F(\omega)}{F(-\omega-1)}\Pi_{-\omega}^{\omega} F(s-1)$$

also in unserm Falle, wo ω unendlich gross angenommen wird,

$$\Pi_{-\omega}^{\omega}\frac{\cos(x+(s+\frac{1}{2})\nu i)}{\cos(s+\frac{1}{2})\nu i} = \frac{e^{-ix}}{e^{ix}}\Pi_{-\omega}^{\omega}\frac{\cos(x+(s-\frac{1}{2})\nu i)}{\cos(s-\frac{1}{2})\nu i}$$

Ersetzt man daher in dem zweiten Producte für ϑx das s durch $s-1$, so muss der Factor vor dem Producte nicht e^{ix}, sondern e^{-ix} heissen. Es muss ferner noch bemerkt werden, dass man in einem solchen Producte, in welchem dem s alle ganze Zahlenwerthe von $-\omega$ bis $+\omega$ beigelegt werden, offenbar stets $-s$ statt $+s$ schreiben darf.

Nachdem wir jetzt zu der Formel

$$\begin{aligned}\vartheta x &= \vartheta o\, e^{ix}\ \Pi_{-\omega}^{\omega}\frac{\cos(x+(s+\frac{1}{2})\nu i)}{\cos(s+\frac{1}{2})\nu i}\\ &= \Sigma_{-\omega}^{\omega} q^{s^2} e^{2sxi} = e^{\frac{-x^2}{\nu}}\Sigma_{-\omega}^{\omega} e^{-\frac{1}{\nu}(s\nu+xi)^2}\\ &= 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots\end{aligned}$$

gelangt sind, so wollen wir zunächst aus ihr eine zweite für θx ableiten, indem wir x durch $\frac{\pi}{2}-x$ ersetzen. Wir erhalten so, wenn $s-1$ statt s geschrieben wird,

$$\begin{aligned}\theta x &= \vartheta o\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\Pi_{-\omega}^{\omega}\frac{\sin((s+\frac{1}{2})\nu i-x)}{\cos(s+\frac{1}{2})\nu i}\\ &= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots\end{aligned}$$

für $x=0$ wird

$$\theta o = \vartheta o\, e^{\frac{i\pi}{2}}\Pi_{-\omega}^{\omega}\operatorname{tang}(s+\tfrac{1}{2})\nu i = 1-2q+2q^4-2q^9+\cdots$$

daher

$$\theta x = \theta o\, e^{-ix}\, \Pi^{\omega}_{-\omega} \frac{\sin\left((s+\frac{1}{2})\nu i - x\right)}{\sin(s+\frac{1}{2})\nu i}$$

oder auch, da offenbar $\theta(-x) = \theta(x)$ ist, wie man aus der Reihe sieht,

$$\theta x = \theta o\, e^{ix}\, \Pi^{\omega}_{-\omega} \frac{\sin(x+(s+\frac{1}{2})\nu i)}{\sin(s+\frac{1}{2})\nu i} = \Sigma^{\omega}_{-\omega} (-1)^s q^{s^2} e^{2sxi}.$$

Wendet man dieselben Mittel der Transformation auch auf die Functionen $\theta_1 x$ und $\theta_2 x$ an, so erhält man folgendes Formelsystem:

$$(1.)\qquad \theta x = \theta o\, e^{ix}\, \Pi^{\omega}_{-\omega} \frac{\sin(x+(s+\frac{1}{2})\nu i)}{\sin(s+\frac{1}{2})\nu i}$$

$$(2.)\qquad \theta_1 x = \theta_1 o\quad \Pi^{\omega}_{-\omega} \frac{\sin(x+s\nu i)}{\cos. s\nu i}$$

$$(3.)\qquad \theta_2 x = \theta_2 o\quad \Pi^{\omega}_{-\omega} \frac{\cos(x+s\nu i)}{\cos s\nu i}$$

$$(4.)\qquad \theta_3 x = \theta_3 o\, e^{ix}\quad \Pi^{\omega}_{-\omega} \frac{\cos(x+(s+\frac{1}{2})\nu i)}{\cos(s+\frac{1}{2})\nu i}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Producte convergiren, wenn man die Rechnung mit den mittelsten Factoren beginnt, und zwei gleichweit von der Mitte entfernte Factoren zusammenzieht

Aus §. 16. entnehmen wir noch, dass

$$\theta_1 o = 0 \quad \text{und}$$

$$\theta o = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots$$

$$\theta_2 o = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + 2q^{\frac{49}{4}} + \cdots$$

$$\theta_3 o = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$

§. 18.

Drückt man durch das Zeichen $\theta(x, \nu)$ aus, dass die Thetafunctionen zugleich von x und von ν abhängen, und setzt in den Reihenausdrücken dieser Functionen $\nu - \pi i$ statt ν, so dass sich $q = e^{-\nu}$ in $q^{\pi i - \nu} = -e^{-\nu} = -q$ verwandelt, so ersieht man aus den Formeln des §. 16 sogleich, dass

$$(1.)\qquad \theta(x, \nu - \pi i) = \theta_3(x, \nu)$$

$$(2.)\qquad \theta_1(x, \nu - \pi i) = e^{\frac{i\pi}{4}}\, \theta_1(x, \nu)$$

$$(3.)\qquad \theta_2(x, \nu - \pi i) = e^{\frac{i\pi}{4}}\, \theta_2(x, \nu)$$

$$(4.)\qquad \theta_3(x, \nu - \pi i) = \theta(x, \nu)$$

§. 19.

Die zweite Form der Thetareihen.

Die für die Thetafunctionen aufgestellten Reihen sind mit Hülfe der Fourier'schen Reihe einer Verwandlung fähig, welche wir vornehmen wollen, nachdem wir uns die Form dieser Reihe auf eine leichte Weise wieder in's Gedächtniss gerufen haben.

Wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet und m und s ganze Zahlen zwischen $-n$ und $+n$ sind, so ist der Ausdruck

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\sin(m-s)\pi}{\sin\frac{(m-s)\pi}{2n+1}}$$

stets Null, so lange s von m verschieden ist; nimmt aber den Werth 1 an, wenn $s=m$ wird. Es ist daher, wenn φ ein Functionszeichen bedeutet,

$$(1.)\qquad \varphi\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)=\Sigma_{-n}^{n}\,\varphi\left(\frac{s\pi}{2n+1}\right)\frac{\sin(m-s)\pi}{\sin\frac{(m-s)\pi}{2n+1}}$$

eine identische Gleichung.

Setzt man aber

$$\frac{m\pi}{2n+1}=\alpha$$

und nimmt n unendlich gross an, so liegt α zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ und der Bruch $\frac{s\pi}{2n+1}$ durchläuft alle Werthe, welche zwischen denselben Grenzen liegen; daher ist, dem Begriffe eines bestimmten Integrals gemäss, die Gleichung (1.) nichts anderes als

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)\frac{\sin(2n-1)(\alpha-x)}{\sin(\alpha-x)}\,dx.$$

Für ein beliebiges ganzes n gilt aber die Gleichung

$$\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}=\Sigma_{-n}^{n}\cos 2sz.$$

Daher wird

$$(2.)\qquad \varphi(\alpha)=\frac{1}{\pi}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)\cos 2s(\alpha-x)\,dx$$

und dieses ist die unserm Zwecke entsprechende Form des Fourierschen Satzes.

Vertauscht man in dieser Formel $\varphi(\alpha)$ mit $F(\alpha+n\pi)$, also $\varphi(x)$ mit $F(x+n\pi)$, so geht sie über in

$$F(\alpha+n\pi)=\frac{1}{\pi}\Sigma_{-\omega}^{\omega}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x+n\pi)\cos 2s(\alpha-x)\,dx.$$

Wenn man also $x+n\pi$ durch z ersetzt und sich unter n eine ganze Zahl denkt, so erhält man

$$(3.)\qquad F(\alpha+n\pi)=\frac{1}{\pi}\Sigma_{-\omega}^{\omega}\int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi}F(z)\cos 2s(\alpha-z)\,dz.$$

Substituirt man hier nun noch für n alle ganze Zahlen von a bis b, wo z. B. a auch negativ sein kann, summirt die entstandenen Gleichungen und zieht die Integrale in eins zusammen, so gelangt man zu der Formel

$$\Sigma_a^b\, F(\alpha+s\pi)=\frac{1}{\pi}\Sigma_{-\omega}^{\omega}\int_{(a-\frac{1}{2})\pi}^{(b+\frac{1}{2})\pi}F(z)\cos 2s(\alpha-z)\,dz,$$

welche für $a=-\omega$ und $b=\omega$, wenn man α mit x vertauscht, in

$$(4.)\qquad \Sigma_{-\omega}^{\omega}F(x+s\pi)=\frac{1}{\pi}\Sigma_{-\omega}^{\omega}\int_{-\omega}^{\omega}F(z)\cos 2s(x-z)\,dz$$

übergeht.

§. 20.

Die letzte Gleichung, welche überhaupt eine unendliche Reihe in eine andere verwandeln lehrt, kann nun dazu dienen, den Reihen für die Thetafunctionen eine andere Gestalt zu geben.

Nimmt man z. B. für die Function $F(z)$ die Exponentialgrösse

$$e^{-\frac{z^2}{\nu}}$$

an, so wird das bestimmte Integral

$$\int_{-\omega}^{\omega}e^{-\frac{z^2}{\nu}}\cos 2s(x-z)\,dz=\cos 2sx\int_{-\omega}^{\omega}e^{-\frac{z^2}{\nu}}\cos 2sz\,dz$$
$$+\sin 2sx\int_{-\omega}^{\omega}e^{-\frac{z^2}{\nu}}\sin 2sz\,dz.$$

Alle Elemente des zweiten Integrals auf der rechten Seite vernichten sich gegenseitig und der Werth des ersten, welches allein übrig bleibt, ist

$$\sqrt{\nu\pi}\, e^{-\nu s^2}$$

wie in jedem guten Lehrbuche der Integralrechnung bewiesen wird. Setzt man nun die gefundenen Werthe in die Formel (4.) des §. 19. ein, und multiplicirt beide Seiten mit $\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}$, so verwandelt sie sich in

$$(1.)\quad \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \Sigma_{-\omega}^{\omega} e^{-\frac{1}{\nu}(x+s\pi)^2} = \Sigma_{-\omega}^{\omega} e^{-\nu s^2} \cos 2sx.$$

Es war aber in den Thetafunctionen $e^{-\nu} = q$ gesetzt worden, also liefert diese Formel nach §. 16.

$$\theta_3 x = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\, \Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\frac{1}{\nu}(s\pi+x)^2}.$$

Aus der Formel (1.) lässt sich eine neue ableiten, wenn man rechts noch die Reihe

$$i\, \Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\nu s^2} \sin 2sx$$

addirt, deren Werth offenbar Null ist, da immer ein positives Glied von einem negativen vernichtet wird. Die rechte Seite nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\nu s^2 + 2sxi}.$$

Wenn man nun noch die linke Seite der Gleichung mit

$$(-1)^s e^{-\pi i s} = 1$$

multiplicirt, so verwandelt sich (1.) in

$$\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\, \Sigma_{-\omega}^{\omega} (-1)^s e^{-s\pi i - \frac{1}{\nu}(x+s\pi)^2} = \Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\nu s^2 + 2sxi}.$$

Ersetzt man hier x durch $x - \frac{\nu i}{2}$ oder multiplicirt beide Seiten der Gleichung mit $e^{-ix-\frac{\nu}{4}}$, so ergiebt sich die neue Formel

$$(2.)\quad \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\, \Sigma_{-\omega}^{\omega} (-1)^s e^{-\frac{1}{\nu}(x+s\pi)^2} = \Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\nu(s+\frac{1}{2})^2 + (2s+1)xi},$$

da man offenbar rechts $s+1$ statt s schreiben darf.

Nach §. 16. ist aber die rechte Seite dieser Gleichung nichts anderes als $\theta_2 x$, da man nämlich in der Reihe für $\theta_2 x$ auch $\cos(2s+1)x$ durch $e^{(2s+1)xi}$ ersetzen darf, denn der imaginäre Theil, der durch diese Exponentialgrösse eingeführt wird, verschwindet offenbar.

Setzt man nun in (1.) und (2.) $\frac{\pi}{2}+x$ statt x und verwandelt dann in allen vier erhaltenen Gleichungen x in $-x$, so gelangt man zu folgenden neuen Reihenentwickelungen für die vier Thetafunctionen:

$$(3.)\qquad \theta x = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\frac{1}{\nu}((s+\frac{1}{2})\pi-x)^2}$$

$$(4.)\qquad \theta_1 x = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}(-1)^s e^{-\frac{1}{\nu}((s+\frac{1}{2})\pi-x)^2}$$

$$(5.)\qquad \theta_2 x = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}(-1)^s e^{-\frac{1}{\nu}(s\pi-x)^2}$$

$$(6.)\qquad \theta_3 x = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\frac{1}{\nu}(s\pi-x)^2}.$$

§. 21.

Die Vergleichung dieser letzten Formeln mit denen im §. **16.** führt zu sehr wichtigen Relationen der verschiedenen Thetafunctionen unter einander.

Zunächst bringt man die Ausdrücke für $\theta_3 x$ in §. 15. und §. 20, wenn man andeutet, dass diese Reihen von x und ν abhängen, leicht unter die Form

$$\theta_3(x,\nu) = e^{-\frac{x^2}{\nu}}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\nu\left(s+\frac{xi}{\nu}\right)^2}$$

$$\theta_3(x,\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\frac{\pi^2}{\nu}\left(s+\frac{x}{\pi}\right)^2}.$$

Führt man nun durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad \nu\nu' = \pi^2$$

$$(2.)\qquad \frac{x'}{\sqrt{\nu'}} = \frac{x}{\sqrt{\nu}} \quad \text{oder} \quad \frac{x'}{\nu'} = \frac{x}{\pi} \quad \text{und} \quad \frac{x}{\nu} = \frac{x'}{\pi}$$

zwei neue Grössen x' und ν' ein, so ergiebt sich aus der ersten Formel

$$\theta_3(x',\nu') = e^{-\frac{x'^2}{\nu'}}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\nu'\left(s+\frac{x'i}{\nu'}\right)^2}$$

oder wenn man in der zweiten x mit ix vertauscht, so wird mit Benutzung von (1.) und (2.)

$$\theta_3(ix,\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\frac{\pi^2}{\nu}\left(s+\frac{xi}{\pi}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\Sigma_{-\omega}^{\omega}\, e^{-\nu'\left(s+\frac{x'i}{\nu'}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\nu'}{\pi}}\, e^{\frac{x'^2}{\nu'}}\,\theta_3(x',\nu').$$

Nimmt man nun ganz dieselben Substitutionen mit den übrigen Thetafunctionen vor, so gelangt man ohne Mühe zu folgenden Formeln

$$(3.)\qquad \theta(ix,\nu) = \sqrt{\frac{\nu'}{\pi}}\, e^{\frac{x'^2}{\nu'}}\, \theta_2(x',\nu')$$

$$(4.)\qquad \theta_1(ix,\nu) = i\sqrt{\frac{\nu'}{\pi}}\, e^{\frac{x'^2}{\nu'}}\, \theta_1(x',\nu')$$

$$(5.)\qquad \theta_2(ix,\nu) = \sqrt{\frac{\nu'}{\pi}}\, e^{\frac{x'^2}{\nu'}}\, \theta(x',\nu')$$

$$(6.)\qquad \theta_3(ix,\nu) = \sqrt{\frac{\nu'}{\pi}}\, e^{\frac{x'^2}{\nu'}}\, \theta_3(x',\nu').$$

§. 22.

Vergleichung der Theta unter einander.

Die letzten Formeln lehren die Theta mit dem Modul ν oder q, welches mit dem ν durch die Gleichung $q = e^{-\nu}$ zusammenhängt, durch Theta mit dem Modul ν' oder $q' = e^{-\nu'}$ ausdrücken. Wenn man dieses Zeichen einführt, so lassen sich die Formeln in §. 20. so darstellen:

$$\theta x =$$
$$\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\Big\{q'^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(\frac{5}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2}$$
$$+ q'^{\left(\frac{5}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} + \cdots\Big\}$$

$$\theta_1 x =$$
$$\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\Big\{q'^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} - q'^{\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} - q'^{\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(\frac{5}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2}$$
$$- q'^{\left(\frac{5}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} - \cdots\Big\}$$

$$\theta_2 x =$$
$$\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\Big\{q'^{x^2} - q'^{\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2} - q'^{\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(2-\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(2+\frac{x}{\pi}\right)^2} - q'^{\left(3-\frac{x}{\pi}\right)^2}$$
$$- q'^{\left(3+\frac{x}{\pi}\right)^2} + \cdots\Big\}$$

$$\theta_3 x =$$
$$\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\Big\{q'^{x^2} + q'^{\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(2-\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(2+\frac{x}{\pi}\right)^2} + q'^{\left(3-\frac{x}{\pi}\right)^2}$$
$$+ q'^{\left(3+\frac{x}{\pi}\right)^2} + \cdots\Big\}$$

und daher

$$\theta o = 2\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\left\{q'^{\frac{1}{4}} + q'^{\frac{9}{4}} + q'^{\frac{25}{4}} + q'^{\frac{49}{4}} + \cdots\right\}$$

$$\theta_2 o = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\left\{1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 + 2q'^{16} - \cdots\right\}$$

$$\theta_3 o = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\left\{1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + 2q'^{16} + \cdots\right\}.$$

Es lässt sich aber auch jede Thetafunction durch die drei übrigen darstellen, wenn alle denselben Modul enthalten. Die Formeln (3.) und (4.) in §. 16. lassen sich z. B. in folgender Weise schreiben:

$$\theta x = \Sigma_{-\omega}^{\omega} (-1)^s e^{-\nu s^2 - 2sxi}$$

$$\theta_1 x = i\Sigma_{-\omega}^{\omega} (-1)^s e^{-\nu(s+\frac{1}{2})^2 - (2s+1)xi},$$

wenn man $\cos 2sx$ und $\sin(2s+1)x$ durch ihre imaginären Exponentialausdrücke ersetzt. Der blosse Anblick dieser beiden Ausdrücke lehrt, dass

$$\theta_1 x = ie^{-ix - \frac{1}{4}\nu}\theta(x, \tfrac{1}{2}\nu i)$$

ist. Behandelt man die übrigen Theta in derselben Weise, so erhält man ohne Mühe folgendes System von Formeln, welches sehr oft benutzt werden wird und in welchem, der Kürze wegen,

$$e^{-ix - \frac{1}{4}\nu} = A$$

gesetzt worden ist:

$$(1.)\quad \theta x = \theta_3(\tfrac{1}{2}\pi - x) = iA\theta_1(x - \tfrac{1}{2}\nu i) = -iA\theta_2(\tfrac{1}{2}\pi + x - \tfrac{1}{2}\nu i)$$

$$(2.)\quad \theta_1 x = \theta_2(\tfrac{1}{2}\pi - x) = iA\theta(x - \tfrac{1}{2}\nu i) = iA\theta_3(\tfrac{1}{2}\pi + x - \tfrac{1}{2}\nu i)$$

$$(3.)\quad \theta_2 x = \theta_1(\tfrac{1}{2}\pi - x) = A\theta_3(x - \tfrac{1}{2}\nu i) = A\theta(\tfrac{1}{2}\pi + x - \tfrac{1}{2}\nu i)$$

$$(4.)\quad \theta_3 x = \theta(\tfrac{1}{2}\pi - x) = A\theta_2(x - \tfrac{1}{2}\nu i) = A\theta_1(\tfrac{1}{2}\pi + x - \tfrac{1}{2}\nu i).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln und gehörige Beachtung derselben, findet man, wenn m und n positive oder negative ganze Zahlen bedeuten und der Kürze wegen

$$e^{\nu n^2 - 2nxi} = N$$

gesetzt wird, folgende vier wichtige Gleichungen

$$(5.)\quad \theta(x + m\pi + n\nu i) = (-1)^n N\theta x$$

$$(6.)\quad \theta_1(x + m\pi + n\nu i) = (-1)^{m+n} N\theta_1 x$$

$$(7.)\quad \theta_2(x + m\pi + n\nu i) = (-1)^m N\theta_2 x$$

$$(8.)\quad \theta_3(x + m\pi + n\nu i) = N\theta_3 x.$$