

Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker

Von

Professor
ERWIN LOHR

Mit 34 Figuren im Text

2. Auflage
mit einem Nachtrag



1950

WALTER DE GRUYTER & CO.
vorm. G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.
Berlin W 35

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung vorbehalten. Copyright
1950 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche
Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp. Berlin W 35,
Genthiner Straße 13. Archiv-Nr. 526250.
Printed in Germany. — Druck von C. G. Röder, Leipzig

VORWORT

Als ich 1905 nach Brünn zu Gustav Jaumann kam, wies er mich alsbald mit großem Nachdruck auf die außerordentliche Bedeutung der Vektor- und Dyadenrechnung für die gesamte theoretische Physik hin. Jaumanns „Bewegungslehre“ und die „Vektor Analysis“ von J. W. Gibbs waren die Bücher, nach denen ich die mir damals neue Disziplin studierte. Trotz der leider so zahlreichen und verschiedenartigen Operationszeichen und Schreibweisen, welche in der Vektor- und Tensorrechnung mehr oder weniger gebräuchlich geworden sind, habe ich an der, meiner Erfahrung nach klarsten und verallgemeinerungsfähigsten Gibbs-Jaumannschen Schreibweise festgehalten.

Wiederholt schon wurde ich von verschiedenen Seiten gedrängt, ein Lehrbuch der Vektor- und Dyadenrechnung zu schreiben das, neben den unerläßlichen theoretischen Grundlagen, vor allem auf die praktische Anwendung größten Wert legt. — Gerade ein solches Buch paßt naturgemäß auch in den Rahmen der Sammlung „Arbeitsmethoden der modernen Naturwissenschaften“. Meine Legitimation für dieses Unternehmen liegt in der Tatsache, daß ich seit 3 Jahrzehnten dieses Rechenverfahren in allen meinen theoretischen Arbeiten praktisch verwende. Mein Zögern aber war in dem Umstande begründet, daß ich Physiker und nicht Mathematiker bin. Der Wunsch des Verlages und die Wohlmeinung meiner Freunde, unter ihnen in erster Linie Herr Professor Dr. Clemens Schaefer (Breslau), ließen mich schließlich alle derartigen formalen Bedenken überwinden. Dem Genannten schulde ich überdies für die Durchsicht einer ganzen Korrektur und für wertvolle Anregungen herzlichen Dank.

Aus einer Vorlesung hervorgegangen, die ich im Studienjahre 1936/37 an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn vor einem Auditorium von Physikern, Ingenieuren und Hörern höherer Semester der verschiedenen technischen Fächer hielt, ist auch das vorliegende Buch in erster Linie für Physiker und Techniker bestimmt.

Schon die Auswahl des Stoffes der beiden ersten Teile des Buches, welche dem Leser eine ausreichende und tragfähige mathematische Grundlage des vorgetragenen Rechenverfahrens vermitteln sollen, ist vorzugsweise nach den Bedürfnissen der physikalischen Anwendungen ausgerichtet. Der dritte und umfangreichste Teil bringt physikalische Anwendungen aus allen Gebieten der theoretischen Physik. Das letzte Kapitel führt noch kurz in die einschlägigen Rechenverfahren der Quantenmechanik (Matrizenmechanik) ein.

Ich war von Anfang an darauf bedacht, durch das Verfahren des „Projizierens“ die systematische Verbindung mit der gewöhnlichen Arithmetik, Algebra und Analysis aufrechtzuerhalten, deren Sätze, soweit sie den Rahmen des üblichen technischen Hochschulstudiums nicht überschreiten, hier als bekannt vorausgesetzt werden. Dem Leser soll dauernd vor Augen geführt werden, daß er und wie er alle seine früheren Kenntnisse im Bereiche des neuen Rechenverfahrens verwerten kann. Gleichzeitig war es aber selbstverständlich mein lebhaftes Bestreben, den Leser durch die Tat zu überzeugen, wie vorteilhaft das **wirkliche Rechnen** mit Vektoren, Dyaden und extensiven Gebilden noch höheren Ranges nicht nur bei physikalischen Untersuchungen allgemeineren Charakters, sondern vielfach auch noch bei der Lösung von Einzelaufgaben ist. Um bei den Anwendungen wirklich und im vollen Umfange mit dem neuen Verfahren arbeiten zu können, mußten die Anwendungen nach der Entwicklung dieses Verfahrens in einem eigenen Schlußteile zusammengefaßt werden.

Im mathematischen Sinne Neues wird man in dem Buche nicht finden. Was die Auswahl und Anordnung des Stoffes betrifft, habe ich mich ausschließlich von meinen eigenen Erfahrungen leiten lassen. Ich habe mich nicht gescheut, vom üblichen Wege abzuweichen, wo mir der neue Weg leichter, übersichtlicher, besser erschien; ich habe aber auch ruhig die gute alte Straße überall dort benützt, wo eine Änderung der Linienführung dem Leser keinen Vorteil gebracht hätte. Abweichungen von den gewohnten Darstellungen wird der Kenner bei der systematischen Behandlung der Dyade, in dem Kapitel über Triaden und Tetraden, in der Art der Einführung des Vektorpotentials und im Zusammenhange damit bei der Behandlung der Wirbelfelder, in den Untersuchungen

über die Äquivalenz von Wirbel- und Quellenfeldern, sowie in manchen Einzelheiten der physikalischen Anwendungen finden. Alles, was für das in diesem Buche angestrebte Ziel „Die Praxis der Vektor- und Dyadenrechnung in der heutigen Physik und Technik“ nur Ballast gewesen wäre, habe ich grundsätzlich weggelassen. Dahin gehört die Behandlung der Quaternionentheorie, ein tieferes Eingehen auf Probleme der Differentialgeometrie, auf die Vektor- und Dyadenrechnung im Riemannschen Raume u. ä.

Um das rasche Auffinden der Gleichungen zu ermöglichen, wird bei Verweisungen im Text neben der Formelnummer auch die Seitenzahl angegeben.

Aus der neueren einschlägigen Literatur habe ich gelegentlich benützt die Bücher: J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung (Wittwer 1916); W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie (Springer 1921); M. Lagally, Vektorrechnung (Akadem. Verl. Ges. 1928); O. D. Kellog, Foundations of Potential Theory (Springer 1929); M. Born und P. Jordan, Elementare Quantenmechanik (Springer 1930); P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics (Oxford Clarendon Press 1935).

Ich danke zunächst meinem ersten Assistenten, Herrn D. J. Obrist, der einen Teil der Reinschrift besorgt und alle Korrekturen mitgelesen hat. Es haben mich ferner mein Freund und Kollege, Professor Dr. Joh. Jaumann, die Herren meines Institutes, Ing. H. Čech, Dr. F. Lettowsky, sowie anfänglich auch Herr Dr. A. Erdélyi bei der Durcharbeitung der Korrekturen wirksam unterstützt. Ing. H. Čech fertigte die Figuren an und meine Tochter Irmhilt nahm mir einen großen Teil der Schreibarbeit ab. — Ihnen allen sage ich herzlichen Dank, der in besonderem Maße auch dem Verlage für das verständnisvolle Entgegenkommen gebührt, mit dem er meine Wünsche während des Druckes berücksichtigte.

Werfenweng (Salzburg), Gassengut, im Sommer 1939.

E. Lohr

VORWORT ZUR 2. AUFLAGE

Als sich zu Beginn des Jahres 1944 eine Neuauflage meiner „Vektor- und Dyadenrechnung“ als notwendig erwies, entschloß ich mich sogleich, das Buch selbst, bis auf unbedeutende Korrekturen, unverändert zu lassen, ihm jedoch einige, in sich abgeschlossene „Ergänzungen“ hinzuzufügen. — Dieser Entschluß entsprach meiner Überzeugung, daß einerseits zu einer Umarbeitung des Buches kein Anlaß vorlag, sich andererseits aber die Berücksichtigung einiger in der ersten Auflage nicht behandelten Sondergebiete als wünschenswert erwiesen hatte. — Neben kurzen Bemerkungen über den Zusammenhang der sphärischen Trigonometrie mit der Vektorrechnung (A), über Derivationen in krummlinigen Koordinaten (B), Reihenentwicklungen (D), den Zusammenhang von Matrizenmechanik und Integralgleichungen (E), sind es insbesondere die Gebiete: „Ebene Vektorrechnung und Funktionentheorie“ (C), „Vektorrechnung der speziellen Relativitätstheorie“ (F), und „Grundzüge des mathematischen Formalismus der Diracschen Theorie des Elektrons“ (G), welche den Hauptinhalt der Ergänzungen ausmachen. — Ich hoffe damit von meinen Lesern verschiedentlich ausgesprochenen Wünschen entsprochen zu haben. —

Wie seinerzeit, bei der Ausarbeitung des ursprünglichen Buches, bin ich auch in den Ergänzungen vielfach eigene Wege gegangen, und man wird manches finden, das, zumindest in der hier gegebenen Form, überhaupt neu ist. So, meines Wissens, die Diskussion der Gleichungen (30) und (30') bzw. (33) und (33') in der Ergänzung (C) und der auf diesem Wege erbrachte Nachweis, daß, bis auf eine Konstante, schon die Randwerte von u (oder jene von v) allein, die Werte der komplexen Funktion $u + iv$ im ganzen Inneren des regulären Bereiches bestimmen. — Dasselbe gilt von der analogen Beweisführung in der Ergänzung (C'), wie von der ganzen Ergänzung (E) über Matrizenmechanik und Integralgleichungen und von zahlreichen Einzelheiten in den Ergänzungen (F) und (G). — Auch der hier verfolgte Weg zur Gewinnung sowohl der relativistischen Schrödinger-Gleichung, wie der Diracschen Gleichungen dürfte streckenweise neuartig sein. —

Vorwort zur 2. Auflage

In der Ergänzung (G) konnte ich, insbesondere beim Rechnen mit hyperkomplexen Einheiten, das vorzügliche Buch: Atombau und Spektrallinien, II. Bd. (1939) von A. Sommerfeld, mit Vorteil benützen. —

Das Erscheinen der Neuauflage, welche seit Ende 1944 dem Verlage druckfertig zur Verfügung stand, verzögerte sich durch kriegsbedingte Umstände leider ungebührlich. — Anfänglich und bis zuletzt fehlte es an Papier, später dann auch an eingearbeiteten Setzern für den schwierigen Satz. — Wegen des letztgenannten Umstandes entschloß sich der Verlag zu einem photomechanischen Nachdrucke des Buches, so daß lediglich die „Ergänzungen“ neu gesetzt werden mußten. — Die von mir aus sachlichen Gründen gewählte Zweiteilung von Altem und Neuem, von „erster Auflage“ und „Ergänzungen“ hat sich somit auch als glücklicher Umstand für die Ermöglichung des nunmehrigen Erscheinens der durch nahezu 4 Jahre im Manuskript liegen gebliebenen zweiten Auflage erwiesen. Nicht unerwähnt möchte ich lassen, daß während des Krieges, J. W. Edwards, Publisher in Michigan (U.S.A.) einen Neudruck meines Vektorbuches veranstaltete, der nach Kriegsende u. a. noch in Schweizer Buchhandlungen zu haben war. — Ich glaube aus diesem Umstande, wie aus verschiedenen Äußerungen, die von deutschen, interessierten Kreisen direkt und indirekt zu mir gelangten, schließen zu dürfen, daß das Fehlen meiner „Vektor- und Dyadenrechnung“ auf dem Büchermarkte als Lücke empfunden wurde. — Möge es der zweiten Auflage, welche nun diese Lücke schließen soll, beschieden sein, sich die Zufriedenheit ihrer Leser zu erwerben.

Allen, die zum Wiedererscheinen meine Buches unter den gegenwärtig in jeder Hinsicht so überaus schwierigen Verhältnissen beitrugen, gilt mein aufrichtiger Dank. — Ganz besonders und in tiefer Verbundenheit danke ich meinem hochverehrten Freunde, Professor Dr. Clemens Schaefer in Köln, ohne dessen weitestgehende Hilfe bei der Korrekturarbeit, die Aufgabe das Buch herauszubringen, derzeit schon aus versandtechnischen Gründen, unlösbar gewesen wäre.

Werfenweng (Salzburg), Gassengut, im Sommer 1949.

E. Lohr.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	1
I. Teil. Arithmetik und Algebra extensiver Größen....	3
1. Erste Einführung der neuen Größen	3
2. Strenge Definitionsgleichungen.....	5
Grundsatz des Projizierens	5
3. Überanschauliche Bedeutung unserer Definitionsgleichungen	9
a) Vektoren in mehrdimensionalen Räumen.....	9
b) Koordinatentransformationen	10
c) Skalares Produkt und metrische Fundamentalgrößen...	13
d) Bivektoren	14
4. Definitionsgleichungen der Dyaden	16
a) Einführung der Dyaden	16
b) Verschiedene Darstellungsformen der Dyaden (Neuner- form).....	20
c) Symmetrische und antisymmetrische Dyaden, Vektor der antisymmetrischen Dyade	22
5. Die vektorische Multiplikation	26
a) Zurückführung auf das Punktprodukt: Vektor-Dyade...	26
b) Vektor und erster Skalar einer Dyade.....	28
c) Vektorisches Tripelprodukt	30
6. Noch einige wichtige Produktbildungen und Rechenregeln	31
a) Skalares Tripelprodukt, reziproke Systeme	31
b) Vektorisches Quadrupelprodukt, Identitätsdyade.....	33
c) Darstellung der Produkte im schiefwinkligen Bezugs- system. Polare und axiale Vektoren	34
d) Kreuzprodukt von Vektor und Dyade	35
e) Produkte zweier Dyaden. Reziproke Dyade	36
f) Doppel- und Tripelprodukte von Dyaden. Zweite Dyade, zweiter und dritter Skalar	39
g) Einige Rechenregeln	43

	Seite
7. Eigenwertprobleme der Dyaden	44
a) Die Dyade als lineare Vektorfunktion	44
b) Hauptachsentransformation (Säkulargleichung).....	45
c) Bidyaden	46
d) Tonische, im besonderen symmetrische Dyaden, Normal- form der Dyade	47
e) Die durchwegs reellen Wurzeln der Säkulargleichung sind nicht alle voneinander verschieden	52
f) Die Säkulargleichung hat eine reelle und zwei konjugiert- komplexe Wurzeln	54
g) Hermitesche Dyaden	57
8. Invarianten der Dyade; Cayley-Hamiltonsche Gleichung; die Dyade als Deformationsdyade	60
a) Invarianten	60
b) Vertauschungssatz	61
c) Die Cayley-Hamiltonsche Gleichung	62
d) Die Dyade als Deformationsdyade	63
e) Das Ellipsoid als anschaulicher Repräsentant der Dyade	64
f) Einfacher und zusammengesetzter Schub	67
g) Die zyklische Dyade und der Versor	68
h) Die unitäre Dyade	73
9. Triaden und Tetraden	74
a) Einführung der Triaden und Tetraden.....	74
b) Verallgemeinerung auf extensive Größen noch höheren Ranges. Der Verjüngungsprozeß	77
c) Produktbildungen aus extensiven Größen beliebigen Ranges	79
d) Systematik der Tetraden. Reziproke Systeme von Dyaden	82
e) Systematik; Identitäts-, reziproke, symmetrische, anti- symmetrische Tetrade	85
f) Einige Rechenregeln	87
g) Eigenwertprobleme und Transformationstheorie der Tetraden	89
h) Korrespondenz zwischen mehrdimensionalen Räumen und extensiven Gebilden höheren Ranges	93
i) Irreduzible extensive Größen	94

Inhaltsverzeichnis	XI
	Seite
II. Teil. Analysis extensiver Größen	99
1. Differentialoperationen	99
a) Definition des Differentials	99
b) Differentiation von Produkten	100
c) Höhere und partielle Differentialquotienten, Reihen- entwicklungen	102
2. Derivationen und Feldbegriff	104
a) Derivation eines Skalarfeldes	104
b) Einführung krummliniger Koordinaten	106
c) Einige Rechenregeln	108
3. Derivationen von Vektorfeldern. Extensive Differential- quotienten höherer Ordnung und höheren Ranges.....	109
a) Dyadische Derivation, Rotor, Divergenz	109
b) Derivationen höheren Ranges und höherer Ordnung.....	111
c) Der Hamiltonsche Operator als symbolischer Vektor, Rechenregeln	113
d) Differentiation nach dyadischen und nach komplexen Veränderlichen	117
e) Einige Formeln	120
4. Integraloperationen	120
5. Linien-, Flächen-, Raumintegrale. Stokesscher Satz, Gaußscher Satz und verwandte Sätze	124
a) Linien-, Flächen- und Raumintegrale	124
b) Umformung von Linienintegralen in Flächenintegrale. Stokesscher Satz	130
c) Umformung von Flächen- in Raumintegrale. Gaußscher Satz	135
6. Quellen und Wirbel; wirbelfreie und quellenfreie Vektor- und Dyadenfelder	139
a) Wirbelfreie Felder	139
b) Wirbel	140
c) Quellen und quellenfreie Felder	143
d) Eindeutige Bestimmtheit eines Vektorfeldes durch sein Quellenfeld und sein Wirbelfeld.....	144
e) Dyadenfelder, das „Vektorfeld“ des Dyadenfeldes	147

	Seite
7. Ermittlung des Vektorfeldes bzw des Dyadenfeldes aus dem Quellenfeld und dem Wirbelfeld	151
a) Skalares Potential eines wirbelfreien Vektorfeldes.....	151
b) Vektorpotential eines Dyaden- oder Vektorfeldes	159
c) Dyadisches Potential eines Dyadenfeldes	160
d) Verallgemeinerung auf n -dimensionale Räume	161
8. Wichtige Sonderfälle von Quellenfeldern	162
a) Punktförmige Quelle	162
b) Quelllinien	163
c) Flächenhaft verteilte Quellen	168
d) Allgemeine Überlegungen über Flächen-, Linien- und Punktdivergenzen.....	172
e) Erörterung der Verhältnisse, falls ein Teil der Quellen sehr weit entfernt ist.....	177
9. Vektorische Quellenfelder, insbesondere Wirbelfelder und wichtige Sonderfälle	180
a) Vektorische Raum-, Flächen-, Linien- und Punktdiver- genzen von Dyadenfeldern	180
b) Abhängigkeit des Vektorpotentials von den Wirbelfläüssen	184
c) Flächenwirbel und Linienwirbel	185
d) Das vektorische Quellenfeld bestimmt jedenfalls den quellenfreien Anteil des Vektorfeldes	188
e) Punktwirbel.....	190
f) Beispiel für eine vektorische Liniendivergenz (Linienwirbel)	193
10. Äquivalenzen zwischen Quellen- und Wirbelfeldern.....	196
a) Eindeutige Bestimmtheit des Quellen- und Wirbelfeldes durch das Vektorfeld	196
b) Mathematische Behandlung der Äquivalenz zwischen Quellen- und Wirbelsystemen	198
c) Doppelschicht und Wirbellinie	207
d) „Reale Bedeutung“ von Doppelschichten	216
e) In sich abgeschlossene Systematik der Skalarfelder, der Vektorfelder, der Dyadenfelder	217
f) Vielfachschichten, Multipole und Legendresche Kugel- funktionen	222

	Seite
III. Teil. Physikalische Anwendungen	227
1. Einige Anwendungen aus der Mechanik	227
a) Bewegungsgleichung, Spannungsdyade, Schwerpunktssatz	227
b) Symmetrie der Spannungsdyade, Momentensatz	230
c) Mechanik des starren Körpers	232
2. Beispiele vektorischer Schreibweise in der Geometrie.....	235
a) Darstellung von Kurven und Flächen. Grundaufgaben..	235
b) Ellipsoid	240
c) Geometrie der Deformation.....	244
d) Raumkurven, Frenetsche Dyade	247
e) Flächenkurven	250
f) Flächen	253
g) Differentialgeometrie der Vektorfelder	259
3. Weitere Anwendungen aus der Mechanik	260
a) Mechanik des Massenpunktes	260
b) Systeme von Massenpunkten, „Hamilton-Jacobische Differentialgleichung“.....	263
c) Kinematik des starren Körpers	266
d) Drehung um einen festen Punkt, Trägheitsdyade.....	268
e) Drehung um eine feste Achse	271
f) Bewegte Bezugssysteme	272
g) Keplerbewegung und Störungsgleichungen.....	273
4. Anwendungen aus der Theorie der Elastizität.....	275
a) Die Deformationsdyade	275
b) Der einfache Schub als Beispiel	277
c) Deformationsellipsoid, infinitesimale Deformationen	279
d) Spannungsdyade und Spannungsellipsoid	280
e) Die Bewegungsgleichungen mit Berücksichtigung der elastischen Spannungen. Energiesatz	282
f) Elastostatik, Bedeutung der Moduln und Beziehungen zwischen ihnen	286
g) Kristallelastizität	289
h) Elastische Wellen in Kristallen	295
i) Bestimmung der elastischen Konstanten in Kristallen (Cl. Schaefer, L. Bergmann)	297
k) Oberflächenwellen	301

	Seite
5. Anwendungen aus der theoretischen Hydrodynamik	305
a) Lagrangesche Gleichungen der Hydrodynamik	305
b) Eulersche Gleichungen der Hydrodynamik	306
c) Differentialform des Energiesatzes	307
d) Berücksichtigung von Reibungswärme und Wärmeleitung	309
e) Differentialform des Entropiesatzes	312
f) Zeitliche Änderung von Flächen- und Linienintegralen, die auf bewegte Flächen und Linien bezogen sind.....	315
g) Helmholtzsche Wirbelsätze	317
h) Die Bernoullische und mit ihr zusammenhängende Gleichungen.....	318
i) Zähigkeitsspannungen und Poiseuillesche Strömung..	320
6. Anwendungen aus der Theorie der elektromagnetischen Er- scheinungen	323
a) Die Maxwellischen Gleichungen	323
b) Die H. Hertzschen Gleichungen	324
c) Die Lorentzschen Gleichungen	326
d) Vereinfachte Feldgleichungen der Praxis	327
e) „Körperliche“ Fluxionen	328
f) Die elektromagnetische Spannungsdyaide	330
g) Lorentzsche Theorie und Gegenwirkungsprinzip	333
h) Dielektrische Kugel im ursprünglich homogenen elektro- statischen Felde	335
i) Die Hertzsche Lösung der Maxwellischen Gleichungen (Strahlender Dipol)	339
k) Elektromagnetische Wellen längs paralleler vollkommener Leiter	347
7. Anwendungen aus der klassischen Theorie der optischen Erscheinungen.....	352
a) Dispersion und Absorption	352
b) Kristalloptik	357
c) Klassische Theorie des Zeemaneffektes und verwandter Erscheinungen.....	363

Inhaltsverzeichnis	XV
	Seite
8. Ausblick auf die Quantenmechanik	366
a) Wellenmechanik	366
b) Zusammenhang mit der Hamilton-Jacobi- schen Differentialgleichung	371
c) Erwartungswerte, Strahlungsemission	373
d) Heisenbergsche Ungenauigkeitsrelation und Vertauschungsrelationen	377
e) Matrizenmechanik	381
f) Zusammenhang zwischen Wellen- und Matrizen- mechanik	385
g) Einige grundlegende Rechenverfahren der Matrizen- mechanik	391
9. Ergänzungen	399
a) Sphärische Trigonometrie und Vektorrechnung ...	399
b) Derivationen in krummlinigen Koordinaten	400
c) Ebene Vektorrechnung und Funktionentheorie ...	403
c') Verwandte Ergänzungen zur Potentialtheorie im Raume	415
d) Eine Bemerkung über Reihenentwicklungen	418
e) Matrizenmechanik und Integralgleichungen	420
f) Einiges über die Vektorrechnung der speziellen Re- lativitätstheorie	422
g) Grundzüge des mathematischen Formalismus der Dirac'schen Theorie des Elektrons	444
Register	473

EINLEITUNG

Wir machen alle unsere sinnlichen Wahrnehmungen im Raume; das wissenschaftliche Schema, durch das wir unsere Erfahrungen ordnen, wird also gleichfalls ein räumliches sein müssen. Die Zahlen aber, welche durch systematische Verknüpfungen diskreter Denksetzungen entstehen, bilden eine geordnete eindimensionale Folge. Wollen wir das räumliche Geschehen durch gewöhnliche Zahlen erfassen, so müssen wir jedem Raumpunkte drei Zahlen zuordnen, wie es die auf Descartes zurückgehende analytische Geometrie tut. Diese drei Zahlen charakterisieren den betreffenden Raumpunkt aber nur in bezug auf ein ganz bestimmt gewähltes, an sich aber völlig willkürliches Koordinatensystem. Dieselbe Bemerkung gilt ebenso für jede zwei Raumpunkte verbindende, gerichtete Strecke und damit für alle physikalischen Größen, welche man durch gerichtete Strecken darstellen kann und die man als Vektoren zu bezeichnen pflegt. Was für Vektoren zutrifft, gilt schließlich analog für die durch entsprechende Verknüpfung von Vektoren definierten „extensiven Größen höheren Ranges“ (höherer Stufe), die Dyaden, Triaden, Tetraden usw.

Das Unbefriedigende der Koordinatendarstellung liegt vor allem in der Willkür, mit welcher irgendein besonderes Koordinatensystem für die Darstellung herausgegriffen werden muß. Wird man zu willkürlichen Entscheidungen genötigt, so ist das stets ein Anzeichen dafür, daß man in unsachgemäßer Weise spezialisiert hat. Willkürliche Entscheidungen sind ja immer Entscheidungen über Bestimmungen, die für das Darzustellende unwesentlich sind.

Handelt es sich um die Lösung von Einzelaufgaben, etwa um ein bestimmtes Randwertproblem, dann wird sich auch jeweils eine ganz bestimmte Koordinatenwahl als die der Aufgabe angemessenste darbieten. Man wird z. B. elliptische Koordinaten einzuführen haben, wenn die Randfläche ein Ellipsoid ist. Erst die Einzelaufgabe verlangt ein spezielles Koordinatensystem, in Unter-

suchungen allgemeinen Charakters aber wird jede vorzeitige Spezialisierung nur die Formeln komplizieren und das Hervortreten des Wesentlichen erschweren.

Die Grenze, an der es sich empfiehlt, vom Rechnen mit den extensiven Größen selbst zum Rechnen in geeignet gewählten Koordinaten überzugehen, ist naturgemäß eine fließende.

Da die Vektor- und Dyadenrechnung der Eigenart physikalischer Problemstellungen weitgehend angepaßt ist, wird man gut daran tun, sich der Vorteile dieses Formalismus möglichst ausgiebig zu bedienen. Unerläßlich dafür ist allerdings eine gewisse Vertrautheit mit den wichtigsten Rechenregeln des Kalküls, worauf in der folgenden Darstellung, bei aller Kürze, gebührend Rücksicht genommen werden soll.

I. TEIL

ARITHMETIK UND ALGEBRA

EXTENSIVER GRÖSSEN

1. Erste Einführung der neuen Größen

Wenn wir einerseits ein durchaus autarkes Rechnen im Rahmen des neuen Kalküls als wesentlich für die Erreichung des angestrebten Zieles ansehen, wollen wir doch anderseits die extensiven Größen und das Operieren mit ihnen von vornherein und in konsequenter Weise so an das Rechnen mit reellen bzw. komplexen Zahlen anschließen, daß wir bei den neuen Begriffsbildungen, Definitionen und der Ableitung der neuen Rechenregeln alle erforderlichen Begriffe, Definitionen und Sätze der als bekannt vorausgesetzten Algebra und Analysis mühelos übertragen können.

Im dreidimensionalen euklidischen Raum kann bekanntlich jede gerichtete Strecke, deren Endpunkt stets durch eine Pfeilspitze markiert werden soll, oder anders gesprochen, jeder Vektor der ja immer durch eine gerichtete Strecke darstellbar ist, durch seine drei Projektionen auf drei von einem Punkte O aus gezogene, nicht in dieselbe Ebene fallende, wie man auch sagt, nicht komplanare Gerade charakterisiert werden. Für diese drei Geraden, die Achsen des Bezugssystems, bildet der Ursprung O den Nullpunkt der Zählung. Die drei positiven Halbachsen denken wir uns immer so angeordnet, daß von der dritten aus beurteilt, die erste in die zweite durch Drehung entgegen dem Uhrzeigersinne — wir wollen das eine positive Drehung nennen — übergeführt, einen Winkel kleiner als 180° durchläuft. Man überzeugt sich leicht, daß obige Definition auch zutrifft, wenn man die Reihenfolge der drei positiven Halbachsen zyklisch vertauscht, also die Drehung der zweiten in die Richtung der dritten von der ersten oder die Drehung der dritten in die Richtung der ersten von der zweiten positiven Halbachse beurteilt. Ein solches Achsensystem heißt ein Rechtssystem, weil die Drehung von i nach j und die Fort-

schreitung in der Richtung von $\mathfrak{k}$ zusammen eine Rechtsschraube bestimmen. Zur Veranschaulichung zeigt die Figur ein rechtwinkliges Rechtssystem, dessen positive Halbachsen durch die gerichteten Strecken (Pfeile) von der Länge Eins, die sogenannten Einheitsvektoren $i, j, \mathfrak{k}$ charakterisiert, dessen Maßzahlen in üblicher Weise durch x, y, z bezeichnet werden.

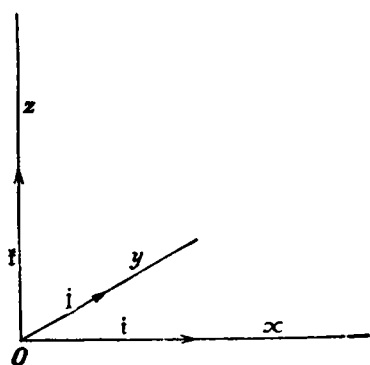


Fig. 1. Rechtwinkliges Rechtssystem

Jede Vektorgröße, z. B. eine Kraft, läßt sich durch eine gerichtete Strecke darstellen und besitzt als solche eine bestimmte Richtung und einen bestimmten Betrag der, nach Wahl einer Maßeinheit, durch die Länge der gerichteten Strecke gegeben ist. An sich kommt einem Vektor oder einer Dyade, Triade usw. ebensowenig ein bestimmter Ort im Raume zu, wie einer gewöhnlichen Zahl.

Auch die Größen der Projektionen — der Komponenten —

einer gerichteten Strecke, bezogen auf ein gegebenes Achsensystem, sind von der Lage im Raume unabhängig, d. h. die gerichtete Strecke kann parallel zu sich selbst beliebig verschoben gedacht werden.

Wie die Kraft durch eine gerichtete Strecke, so kann z. B. die Temperatur — selbstverständlich nach Zugrundelegung einer bestimmten Temperaturskala — durch eine gewöhnliche Zahl charakterisiert werden. Man nennt darum die Temperatur eine skalare Größe oder kurz einen Skalar, während die Kraft als vektorische Größe oder kurz als Vektor bezeichnet wird.

Fragen wir nach der Temperaturverteilung in einem gegebenen Raume, so werden wir jedem Raumpunkte eine Zahl, eben die Maßzahl der dort herrschenden Temperatur, zuordnen müssen. Die Temperaturverteilung als Funktion des Ortes $T(x, y, z)$ bildet ein Skalarfeld. Analog kann man natürlich auch nach der Verteilung einer vektorischen Größe im Raume fragen, z. B. nach

dem elektrischen Vektor als Funktion des Ortes $\mathfrak{E}(x, y, z)$ und hat es dann mit einem Vektorfeld zu tun. Ganz ebenso spricht man von einem Dyadenfeld usf.

2. Strenge Definitionsgleichungen

Grundsatz des Projizierens

Wie schon bemerkt, kann man jede gerichtete Strecke, also auch jede vektoriische Größe, die ja stets durch eine gerichtete Strecke darstellbar ist, durch ihre drei Projektionen auf drei nicht komplanare, aber im allgemeinen schiefwinklige Achsen charakterisieren. Um kein bestimmtes Achsensystem von vornherein willkürlich auszeichnen zu müssen, denken wir uns einen Vektor grundsätzlich als den Inbegriff seiner Projektionen auf alle möglichen Achsenrichtungen.

Bedeutet e einen beliebig gerichteten Einheitsvektor, so wollen wir die Projektion irgendeines Vektors a — Vektoren sollen stets mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden — auf die durch e bestimmte Achse in der Form:

$$(1) \quad e \cdot a \equiv a \cdot e \equiv |a| \cos(a, e)$$

ansetzen. $|a|$ bedeutet den Betrag des Vektors a ; oft bedient man sich auch zur Bezeichnung des Betrages der entsprechenden lateinischen Buchstaben, schreibt also a statt $|a|$.

Wir definieren: Zwei Vektoren a und $\mathfrak{A}$ sollen dann und nur dann gleich heißen, wenn für beliebig gerichtete e

$$(2) \quad e \cdot a = e \cdot \mathfrak{A}$$

gilt. Wir schreiben dann:

$$(3) \quad a = \mathfrak{A}.$$

Man bezeichnet $e \cdot a$ — gelesen „e Punkt a“ — auch als das innere oder skalare Produkt der beiden Vektoren. Für diese Multiplikation fordern wir, wie man das für jede Multiplikation, die praktisch verwendbar sein soll, tun muß, die Gültigkeit des distributiven Gesetzes. Wir definieren demgemäß: Die Summe beliebig vieler Vektoren

$$(4) \quad \mathfrak{A} = a + b + c + \dots$$

ist wieder ein Vektor, der durch

$$(5) \quad e \cdot \mathfrak{A} = e \cdot (a + b + c + \cdots) \equiv e \cdot a + e \cdot b + e \cdot c + \cdots$$

bestimmt wird. Konsequenterweise wird man dann, wenn s eine beliebige reelle Zahl bedeutet, das Zutreffen des assoziativen Gesetzes:

$$(6) \quad e \cdot (s a) \equiv s (e \cdot a) \equiv (s e) \cdot a$$

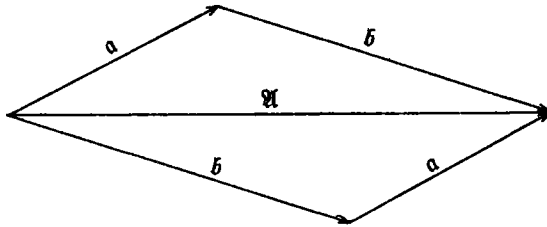


Fig. 2. Kommutatives Gesetz der Vektoraddition

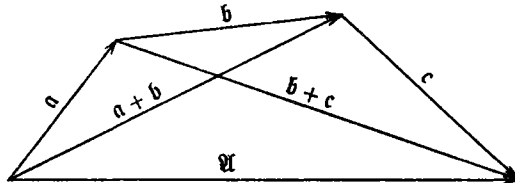


Fig. 3. Assoziatives Gesetz der Vektoraddition

verlangen müssen. Aus der Definitionsgleichung (5, 6) folgt die anschauliche Definition der Vektoraddition: Vektoren sind so zu addieren, daß man immer den Anfangspunkt des folgenden Vektors in den Endpunkt des vorangehenden bringt und schließlich den Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkte des letzten durch eine gerichtete Strecke verbindet. Die durch (5, 6) definierte Vektoraddition ist kommutativ und assoziativ (Fig.). Aus der Definitionsgleichung (6, 6) folgt, daß $s a$ einen Vektor derselben Richtung wie a , aber von s -facher Länge bedeutet. Multiplikation mit -1 kehrt den Richtungssinn des betreffenden

Vektors um. Es gilt also: $a - a \equiv 0$ („Nullvektor“, das ist ein Vektor vom Betrage Null) und es folgt demgemäß aus

$$(7) \quad a + b = \mathfrak{A} \text{ die Gleichung } b = \mathfrak{A} - a.$$

Selbstverständlich werden wir unter

$$(8) \quad b = s e$$

einen Vektor von der Länge s und der Richtung des Einheitsvektors e zu verstehen haben. Gelegentlich bedient man sich der Schreibweise:

$$(9) \quad b = b \bar{b},$$

worin b den Betrag von b und $\bar{b}$ einen Einheitsvektor in der Richtung von b bedeutet. (1, 5) und (8, 6) ergibt dann

$$(10) \quad b \cdot a \equiv a \cdot b \equiv |a| |b| \cos (a, b)$$

als Definition des skalaren Produktes aus zwei beliebigen Vektoren. Verschwindet das skalare Produkt bei nicht verschwindenden Beträgen der Vektoren, so stehen die beiden Vektoren aufeinander senkrecht.

$$(11) \quad a \cdot a \equiv |a|^2 \equiv a^2$$

ist das Quadrat des Betrages, eine wesentlich positive Größe. Wir führen noch den reziproken Vektor durch die Definitionsgleichung

$$(12) \quad a^{-1} \equiv \frac{a}{a^2}$$

ein.

Die Aussage, ein Vektor sei kleiner oder größer als ein anderer, kann sich naturgemäß nur auf deren Beträge beziehen:

$$(13) \quad |a| < |b|.$$

Die Definitionsgleichung (1, 5) ist noch durch die anschauungsgemäß evidente Aussage zu ergänzen: Jeder Vektor in einem dreidimensionalen Raume wird schon durch seine Projektionen auf irgend drei nicht komplanare Achsen eindeutig (und zwar umkehrbar eindeutig) bestimmt.

Wir definieren zu irgend drei nicht komplanaren Vektoren e_1, e_2, e_3 von im allgemeinen beliebigem Betrage, ein reziprokes System e_1^*, e_2^*, e_3^* durch die Relationen:

$$(14) \quad \begin{cases} e_1 \cdot e_1^* = 1 & e_1 \cdot e_2^* = 0 & e_1 \cdot e_3^* = 0 \\ e_2 \cdot e_1^* = 0 & e_2 \cdot e_2^* = 1 & e_2 \cdot e_3^* = 0 \\ e_3 \cdot e_1^* = 0 & e_3 \cdot e_2^* = 0 & e_3 \cdot e_3^* = 1 \end{cases}$$

Da e_1^* auf der durch e_2, e_3 bestimmten Ebene senkrecht steht usf., bilden auch e_1^*, e_2^*, e_3^* ein System dreier nicht komplanarer Vektoren. Gilt nun für einen beliebigen Vektor

$$(15) \quad e_1 \cdot a = a_1 \quad e_2 \cdot a = a_2 \quad e_3 \cdot a = a_3$$

so folgt aus (15, 8)

$$(16) \quad a = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^*$$

weil (16, 8) wegen (5, 6), (6, 6), (8, 7), (14, 8) wieder (15, 8) ergibt. Da das gewählte Achsensystem vollkommen willkürlich war, kann man den Inhalt der Gleichung (16, 8) auch so formulieren: Jeder Vektor kann als Summe von drei beliebig gerichteten, nicht komplanaren Vektoren dargestellt werden. Zwischen je vier Vektoren besteht also immer eine lineare Beziehung, zwischen drei nicht komplanaren Vektoren niemals, diese sind demnach linear unabhängig. Wenn zwischen drei Vektoren eine lineare Beziehung besteht, so sagen wir, sie liegen in derselben Ebene, was anschauungsgemäß nach Fig. 2 evident ist. Aus dieser Festsetzung folgt auch rechnerisch, daß e_1^*, e_2^*, e_3^* nicht komplanar sein können, denn aus

$$x e_1^* + y e_2^* = e_3^*$$

würde für beliebiges x, y bei Multiplikation mit e_3 die linke Seite verschwinden, die rechte Seite aber Eins ergeben. Besteht zwischen zwei Vektoren eine lineare Beziehung, so haben sie natürlich dieselbe Richtung (bei gleichem oder entgegengesetztem Richtungssinn), sie sind parallel, sind kollinear [vgl. etwa (8, 7)].

Man beachte noch, daß das zu e_1^*, e_2^*, e_3^* reziproke System wieder durch:

$$(17) \quad \begin{cases} e_1^* \cdot (e_1^*)^* = 1 & e_1^* \cdot (e_2^*)^* = 0 & e_1^* \cdot (e_3^*)^* = 0 \\ e_2^* \cdot (e_1^*)^* = 0 & e_2^* \cdot (e_2^*)^* = 1 & e_2^* \cdot (e_3^*)^* = 0 \\ e_3^* \cdot (e_1^*)^* = 0 & e_3^* \cdot (e_2^*)^* = 0 & e_3^* \cdot (e_3^*)^* = 1 \end{cases}$$

gegeben sein wird. Ein Vergleich der ersten Kolonne von (17, 8) mit der ersten Zeile von (14, 8) ergibt:

$$(18) \quad (e_1^*)^* = e_1$$

und analog folgt:

$$(e_2^*)^* = e_2$$

$$(e_3^*)^* = e_3.$$

3. Überanschauliche Bedeutung unserer Definitionsgleichungen

a) Vektoren in mehrdimensionalen Räumen

Man beachte, daß wir die Definitionsgleichungen (1, 5), (2, 5), (5, 6), (6, 6) sowie die Forderung, daß sich jeder dreidimensionale Vektor als Summe dreier beliebig gerichteter, nicht komplanarer Vektoren darstellen läßt, zwar in engster Anlehnung an den anschaulichen Vektorbegriff, an eine dem bekannten Parallelogrammsatze für die Zusammensetzung vektorischer Größen (z. B. von Kräften) entsprechende Vektoraddition formuliert haben, daß aber die Definitionsgleichungen selbst analytischer Art sind. Wir könnten die gegebenen Rechenvorschriften auch dann anwenden, wenn uns die raumanschauliche Bedeutung der neuen Größen nicht bewußt würde.

Charakterisieren wir die Dreidimensionalität des Raumes durch die Forderung, daß sich jeder Vektor gemäß (16, 8) jedenfalls als Summe von drei bestimmt gerichteten Vektoren darstellen lassen soll, so ist klar, daß je drei solcher Gleichungen, die sich nach den e_1^* , e_2^* , e_3^* auflösen lassen, ein neues, zur Darstellung ebenso geeignetes Vektortripel a_1 , a_2 , a_3 ergeben, das wir dann als „nicht komplanar“ bezeichnen können.

Gewiß, die Anschaulichkeit des Vektorbegriffes, die Darstellbarkeit jedes Vektors als gerichtete Strecke gehören gerade zu den Vorzügen der Vektorrechnung. Die überanschauliche Bedeutung unserer Definitionsgleichungen ermöglicht aber erst die Ausdehnung des neuen Kalküls auf „mehrdimensionale Räume“. Wir haben lediglich in der Forderung, daß sich jeder Vektor als Summe von drei beliebig gerichteten, linear unab-

hängigen Vektoren darstellen lassen soll, die Zahl 3 durch die Zahl n zu ersetzen, um mit denselben Definitionsgleichungen eine n -dimensionale Vektorrechnung zu begründen.

Das ist aber physikalisch nicht nur für die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt der Relativitätstheorie von Bedeutung, sondern ebenso für die Vektoren und Dyaden der modernen Quantenmechanik, die einem Raume von unendlich vielen Dimensionen angehören.

Da auch der Vektorrechnung mehrdimensionaler Räume dieselben Definitionsgleichungen zugrunde liegen, wie jener im dreidimensionalen Raume, und die letztere eine anschauliche Deutung zuläßt, genießt man noch den Vorteil, daß man sich irgend drei Vektoren des n -dimensionalen Raumes, genau so als ob sie sich in einem wirklichen Raume befänden, anschaulich vorstellen darf.

b) Koordinatentransformationen

Die folgenden Überlegungen sollen zeigen, wie man auf Grund unserer Definitionen mit den neuen Größen operieren kann, ohne irgendwie auf die Anschauung zurückzugreifen. Dabei bleiben wir der Einfachheit halber im Dreidimensionalen. Es sei vermöge (15, 8) irgendein Vektor a durch die Maßzahlen a_1, a_2, a_3 in bezug auf eine durch die „Grundvektoren“ e_1^*, e_2^*, e_3^* bestimmte „Basis“ gegeben. Bezeichnen $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ die Maßzahlen in bezug auf irgendeine andere durch die drei (nicht komplanaren) Grundvektoren $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*$ charakterisierte Basis, so muß gemäß (10, 8):

$$(1) \quad a = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* = \bar{a}_1 \bar{e}_1^* + \bar{a}_2 \bar{e}_2^* + \bar{a}_3 \bar{e}_3^*$$

gelten. Natürlich muß die neue Basis, bezogen auf die alte, formelmäßig gegeben sein. Das kann durch die neun Zahlen:

$$(2) \quad e_i \cdot \bar{e}_x^* = c_{ix} \quad \left. \begin{matrix} i \\ x \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3$$

geschehen. Aus (1, 10) und (2, 10) folgt dann für die Transformation der Maßzahlen:

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 = c_{11} \bar{a}_1 + c_{12} \bar{a}_2 + c_{13} \bar{a}_3 \\ a_2 = c_{21} \bar{a}_1 + c_{22} \bar{a}_2 + c_{23} \bar{a}_3 \\ a_3 = c_{31} \bar{a}_1 + c_{32} \bar{a}_2 + c_{33} \bar{a}_3 \end{cases}$$

für die Transformation der Grundvektoren:

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{e}_1^* = e_1^* c_{11} + e_2^* c_{21} + e_3^* c_{31} \\ \bar{e}_2^* = e_1^* c_{12} + e_2^* c_{22} + e_3^* c_{32} \\ \bar{e}_3^* = e_1^* c_{13} + e_2^* c_{23} + e_3^* c_{33} \end{cases}$$

Die Transformation (4, 11) heißt die zur Transformation (3, 10) transponierte. Die Determinante:

$$(5) \quad c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden, denn bei der Auflösung von (4, 11) nach einem e_i^* ergibt sich dieses mit c multipliziert, während linker Hand ein in den $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*$ linearer Ausdruck zustande kommt. Für $c=0$ müßte demnach zwischen den genannten Vektoren eine lineare Beziehung bestehen, sie müßten komplanar sein, was voraussetzungsgemäß nicht der Fall sein soll.

(3, 10) und (4, 11) sind also nach den Maßzahlen $\bar{a}_\kappa$ bzw. nach den Grundvektoren e_i^* auflösbar. Bezeichnet man

$$(6) \quad e_i^* \cdot \bar{e}_\kappa = c_{i\kappa}^*,$$

so kann man die betreffenden Formeln auch unmittelbar aus (1, 10) und (6, 11) gewinnen:

$$(7) \quad \bar{a}_\kappa = a_1 c_{1\kappa}^* + a_2 c_{2\kappa}^* + a_3 c_{3\kappa}^* \quad \text{für } \kappa = 1, 2, 3$$

$$(8) \quad e_i^* = c_{i1}^* \bar{e}_1^* + c_{i2}^* \bar{e}_2^* + c_{i3}^* \bar{e}_3^* \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

Multiplizieren wir (4, 11) mit $\bar{e}_1$, so erhalten wir:

$$(9) \quad \begin{cases} 1 = c_{11}^* c_{11} + c_{21}^* c_{21} + c_{31}^* c_{31} \\ 0 = c_{11}^* c_{12} + c_{21}^* c_{22} + c_{31}^* c_{32} \\ 0 = c_{11}^* c_{13} + c_{21}^* c_{23} + c_{31}^* c_{33} \end{cases}$$

und daraus:

$$(10) \quad c_{11}^* = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}; \quad c_{21}^* = -\frac{1}{c} \begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}; \quad c_{31}^* = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{vmatrix}.$$

Ebenso berechnet man nach Multiplikation von (4, 11) mit $\bar{e}_2$ bzw. $\bar{e}_3$ die übrigen sechs Größen $c_{i\kappa}^*$. Die aus den $c_{i\kappa}^*$ analog zu (5, 11) ge-

bildete Determinante bezeichnet man durch c^* . In der Bezeichnungswiese der Determinantentheorie sind die $c_{i,n}^*$ die „reduzierten Minoren“ der $c_{i,n}$. Man beachte, daß der Übergang von (2, 10) zu (6, 11) in der Weise erfolgt, daß alle vorkommenden Größen durch die mit * versehenen, d. h. durch die des reziproken Systems ersetzt werden.

Das Produkt zweier Determinanten wird bekanntlich durch Kombination der Elemente der (horizontalen) Zeilen oder der (vertikalen) Kolonnen gebildet. — Die erste Kolonne von $c c^*$ entspricht demnach den rechten Seiten der Gleichungen (9, 11), und die folgenden Kolonnen erhält man aus den zu (9, 11) analogen Gleichungen, also gilt:

$$(11) \quad c c^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Nach Einführung der skalaren Tripelprodukte werden wir dieselbe Beziehung leicht wiedergewinnen.

Von entscheidender Bedeutung ist die Relation (1, 10), durch welche die Unabhängigkeit der Vektorgröße von der gewählten Basis, das heißt also die Invarianz der Vektorgröße gegenüber Transformationen der Basis unmittelbar zum Ausdruck kommt. Gerade (1, 10) vermittelt den für Vektorgrößen charakteristischen Zusammenhang der durch (2, 10) bzw. (4, 11) gegebenen Transformation der Basis und der durch (7, 11) dargestellten Transformation der Maßzahlen des Vektors. Man bezeichnet die Transformation (7, 11) der Maßzahlen als kontragredient zur Transformation (4, 11) der Grundvektoren. Jedes Größensystem, das durch dieselben Formeln transformiert wird wie die Maßzahlen, heißt zu den Grundvektoren kontragredient, jedes, das durch dieselben Formeln transformiert wird wie die Grundvektoren, heißt zu diesen kogredient.

In einem n -dimensionalen Raume hätten wir (1, 10) zu ersetzen durch:

$$(12) \quad a = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + \cdots + a_n e_n^* = \bar{a}_1 \bar{e}_1^* + \bar{a}_2 \bar{e}_2^* + \cdots + \bar{a}_n \bar{e}_n^*.$$

Die entsprechende Verallgemeinerung der Formeln (14, 8) und (2, 10) ist ohne weiteres klar.

c) Skalares Produkt und metrische Fundamentalgrößen

Gleichwie der Vektor selbst eine, gegenüber Änderungen des Bezugssystems (der Basis) invariante Größe darstellt, ist das auch für das skalare Produkt zweier Vektoren der Fall.

Um das skalare Produkt bei gegebener Basis ausrechnen zu können, müssen uns noch die zu der gewählten Basis gehörenden Zahlen:

$$(1) \quad e_i \cdot e_n = g_{in} \quad \left. \begin{matrix} i \\ n \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3$$

gegeben sein; sie heißen die metrischen Fundamentalgrößen. Gleichwie aus (2, 10) die Relation (6, 11), so folgt aus (1, 13):

$$(2) \quad e_i^* \cdot e_n^* = g_{in}^*,$$

worin die g_{in}^* wieder die reduzierten Minoren der g_{in} sind. g bzw. g^* bezeichnen die betreffenden Determinanten. Wählt man speziell:

$$(3) \quad g_{in} = \delta_{in},$$

worin wir in üblicher Weise

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{in} = 1 & \text{setzen für } i = n \\ \delta_{in} = 0 & \text{für } i \neq n, \end{array} \right.$$

so stehen die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 wechselseitig aufeinander senkrecht. Ein solches Rechtssystem von Grundvektoren bezeichnet man, wie wir es schon getan haben, gewöhnlich durch i, j, k und nennt es gelegentlich auch „Dreibein“. Ein System von wechselseitig aufeinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren bildet, wie ein Vergleich mit (14, 8) lehrt, sein eigenes reziprokes System. Aus (2, 10) und (6, 11) folgt für Dreibeine:

$$(5) \quad c_{in} = c_{in}^*$$

und aus (5, 13) und (11, 12) weiter:

$$(6) \quad c = c^* = 1.$$

Aus

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \sum_i a_i e_i^* \\ b = \sum_n b_n e_n^* \end{array} \right.$$

erhält man:

$$(8) \quad a \cdot b = \sum_{i, \kappa} a_i b_{\kappa} g_{i\kappa}^*.$$

Der Betrag eines Vektors wird dann aus

$$(9) \quad |a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\sum_{i, \kappa} a_i a_{\kappa} g_{i\kappa}^*},$$

der Kosinus des Winkels, den zwei Vektoren miteinander einschließen, aus

$$(10) \quad \cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

zu berechnen sein.

Es ist hier nicht nötig, diese im Grunde überaus einfachen Deduktionen aus unseren Definitionsgleichungen weiter zu diskutieren oder in noch größerer Breite zu entwickeln. Das prinzipiell Wichtige ist hoffentlich schon aus der gegebenen kurzen Darstellung klar geworden. Zum Abschlusse dieses Paragraphen soll nur noch bemerkt werden, daß unsere Definitionen auch noch in einem nichteuklidischen, einem Riemannschen Raum anwendbar bleiben. Allerdings gilt eine bestimmte Basis dann nur für Vektoren eines bestimmten Raumpunktes, und es ist nicht möglich, sämtliche Vektoren eines endlichen Gebietes des gekrümmten Raumes auf dieselbe Basis zu beziehen. Als anschaulich vorstellbaren Fall denke man im Zweidimensionalen an die Darstellung der Vektoren innerhalb einer gekrümmten Fläche. Damit die Aufgabe eine bestimmte sei, muß jetzt auch die Änderung der Grundvektoren e_i beim Fortschreiten von Punkt zu Punkt gegeben sein.

d) Bivektoren

Während wir bisher ganz im Reellen geblieben sind, wollen wir jetzt in unserem Kalkül auch komplexe Größen zulassen. Wir können und wollen das einfach durch die Festsetzung tun, daß alle Multiplikationsregeln, deren Gültigkeit wir bisher für Produkte aus reellen Zahlen s mit Vektoren gefordert haben, ebenso auch für Produkte aus komplexen Zahlen mit Vektoren zutreffen sollen. Dieselbe Voraussetzung soll in der Folge dann auch für Produkte aus komplexen

Zahlen mit Dyaden oder mit extensiven Größen noch höheren Ranges zutreffen.

Wir erklären ferner: Ein komplexer Vektor oder „Bivektor“ unterscheidet sich vom reellen Vektor durch den Umstand, daß seine Projektionen im allgemeinen komplexe Zahlen

$$(1) \quad a_x = \bar{a}_x + i \bar{\bar{a}}_x$$

sein werden. Den Gleichungen (15, 8) und (16, 8) gemäß erhalten wir jetzt als Darstellung eines beliebigen Bivektors:

$$(2) \quad a = \bar{a}_1 e_1^* + \bar{a}_2 e_2^* + \bar{a}_3 e_3^* + i (\bar{\bar{a}}_1 e_1^* + \bar{\bar{a}}_2 e_2^* + \bar{\bar{a}}_3 e_3^*)$$

oder

$$(3) \quad a = \bar{a} + i \bar{\bar{a}}$$

und ebenso für beliebige Bivektoren

$$(4) \quad b = \bar{b} + i \bar{\bar{b}} \text{ usf. ,}$$

worin $\bar{a}, \bar{\bar{a}}$ bzw. $\bar{b}, \bar{\bar{b}}$ reelle Vektoren bedeuten.

Der Betrag eines Bivektors wird durch

$$(5) \quad |a| = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{\bar{a}}^2}$$

definiert. Natürlich werden zwei Bivektoren dann und nur dann gleichzusetzen sein, wenn für beliebig gerichtete (reelle) e die komplex-skalaren Gleichungen:

$$(6) \quad e \cdot a = e \cdot b$$

zutreffen. Für die Darstellung (3, 15) und (4, 15) folgt aus dieser Definition: es ist

$$(7) \quad a = b$$

dann und nur dann, wenn für die reellen Vektoren

$$(8) \quad \bar{a} = \bar{b}, \quad \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$$

gilt. Der komplexe Vektor erscheint also erst durch zwei reelle Vektoren oder durch sechs reelle Zahlen bestimmt.

Man beachte im besonderen, daß aus

$$(9) \quad a = s b$$

nicht $\bar{a} \parallel \bar{b}$, $\bar{\bar{a}} \parallel \bar{\bar{b}}$ folgt, denn es gilt ja, wenn $s = \bar{s} + i \bar{\bar{s}}$ gesetzt wird,

$$(10) \quad \begin{cases} \bar{a} = \bar{s} \bar{b} - \bar{\bar{s}} \bar{\bar{b}} \\ \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{s}} \bar{b} + \bar{s} \bar{\bar{b}} . \end{cases}$$

4. Definitionsgleichungen der Dyaden

a) Einführung der Dyaden

Bedeutet in dem Produkte $s \bar{b}$ der Faktor s selbst ein skalares Produkt aus zwei Vektoren, haben wir demnach etwa:

$$(1) \quad s \bar{b} = (e . a) \bar{b} ,$$

so liegt ein vektorisches Produkt aus drei Vektoren vor. Zur tatsächlichen Durchführung von Rechnungen mit vektorischen Größen wird es oft notwendig, in solchen Produkten anders zu assoziieren. Diese Notwendigkeit führt zur Definition der dyadischen Produkte bzw. der Dyaden. Ein dyadisches Produkt — man nennt es auch eine lineare Dyade — besteht aus zwei Vektoren als Faktoren, die durch das Punktstrichzeichen als Zeichen der dyadischen Multiplikation verknüpft werden. (Oft setzt man die beiden Vektoren auch ohne eigenes Multiplikationszeichen nebeneinander.) Wir schreiben also ein dyadisches Produkt in der Form:

$$a ; \bar{b}$$

(gelesen „a Punktstrich $\bar{b}$ “) und bestimmen es in konsequenter Fortentwicklung der hier befolgten Methode durch die Gesamtheit seiner „Projektionen“ auf alle möglichen Achsenrichtungen. Dabei definieren wir diese Projektionen durch die Relation:

$$(2) \quad e . (a ; \bar{b}) \equiv (e . a) \bar{b} \equiv \bar{b} (a . e) \equiv (\bar{b} ; a) . e .$$

Die so definierten Projektionen sind also Vektoren. Das Verfahren des Projizierens führt Vektoren auf Skalare, dyadische Produkte bzw. Dyaden auf Vektoren zurück. — Wie die Vektoren den Skalaren gegenüber neuartige Rechen-

größen darstellen, für die eine Gleichheitsdefinition und die nötigen Rechenregeln festgesetzt werden mußten, so ergibt sich dieselbe Notwendigkeit neuerdings beim Übergange zu den dyadischen Produkten als den extensiven Größen nächsthöheren Ranges. — Wir verfahren in möglichster Analogie zu den entsprechenden Definitionen für Vektoren, welche der Leser, zum leichteren Verständnis der folgenden, ihn zunächst vielleicht etwas fremdartig anmutenden Festsetzungen und Überlegungen nachschlagen möge.

Wieder sollen zwei dyadische Produkte $a; b$ und $\mathfrak{A}; \mathfrak{B}$ dann und nur dann gleich heißen, wenn für beliebig gerichtete e

$$(3) \quad e \cdot (a; b) = e \cdot (\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$$

gilt, oder, was ersichtlich mit (3, 17) gleichwertig ist:

$$(4) \quad (a; b) \cdot e = (\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \cdot e.$$

Wir schreiben dann:

$$(5) \quad a; b = \mathfrak{A}; \mathfrak{B}.$$

Aus den Gleichungen (2, 16) und (3, 17) liest man unmittelbar ab: Zwei dyadische Produkte sind gleich, wenn die Beziehungen

$$(6) \quad b \parallel \mathfrak{B}, \quad a \parallel \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad |a||b| = |\mathfrak{A}||\mathfrak{B}|$$

gelten. Eine lineare Dyade wird demnach durch zwei Richtungen und einen Betrag oder durch fünf skalare Größen bestimmt. Um das Zutreffen des distributiven Gesetzes zu sichern, definieren wir weiter: Die Summe dyadischer Produkte (linearer Dyaden), sie verhält sich kommutativ und assoziativ,

$$(7) \quad \Phi = \mathfrak{A}; \mathfrak{B} + \mathfrak{C}; \mathfrak{D} + \mathfrak{E}; \mathfrak{F} + \dots$$

heißt eine Dyade — Dyaden bezeichnen wir im allgemeinen durch griechische Buchstaben —, die durch:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} e \cdot \Phi = e \cdot (\mathfrak{A}; \mathfrak{B} + \mathfrak{C}; \mathfrak{D} + \mathfrak{E}; \mathfrak{F} + \dots) \\ \equiv (e \cdot \mathfrak{A}) \mathfrak{B} + (e \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{D} + (e \cdot \mathfrak{E}) \mathfrak{F} + \dots \\ \equiv (\mathfrak{B}; \mathfrak{A} + \mathfrak{D}; \mathfrak{C} + \mathfrak{F}; \mathfrak{E}) \cdot e = \Phi_e \cdot e \end{array} \right.$$

definiert wird. Φ_e nennt man die zu Φ konjugierte Dyade.

Wie ein dyadisches Produkt, so soll auch jede Summe von dyadischen Produkten, also jede beliebige Dyade durch die Gesamtheit ihrer Projektionen definiert sein:

$$(9) \quad e \cdot \Phi = \mathfrak{A}_e$$

oder, was damit gleichwertig ist:

$$(10) \quad \Phi \cdot e = \mathfrak{A}.$$

Die Bezeichnungen entsprechen denen, die wir später wieder benützen werden.

Zwei Dyaden, Φ und Ψ , sollen dann und nur dann gleich genannt werden, wenn für beliebig gerichtete e

$$(11) \quad e \cdot \Phi = e \cdot \Psi$$

oder

$$(12) \quad \Phi \cdot e = \Psi \cdot e$$

zutrifft. Wir schreiben dann:

$$(13) \quad \Phi = \Psi.$$

Eine Folge von (8, 17) und (11, 18) ist auch die Gültigkeit des distributiven Gesetzes bei der dyadischen Multiplikation. Es gilt ja:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} e \cdot [\mathfrak{A}; (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \cdots)] \equiv (e \cdot \mathfrak{A}) (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \cdots) \\ \equiv (e \cdot \mathfrak{A}) \mathfrak{B} + (e \cdot \mathfrak{A}) \mathfrak{C} + (e \cdot \mathfrak{A}) \mathfrak{D} + \cdots \\ \equiv e \cdot [\mathfrak{A}; \mathfrak{B} + \mathfrak{A}; \mathfrak{C} + \mathfrak{A}; \mathfrak{D} + \cdots] \end{array} \right.$$

also nach (11, 18)

$$(15) \quad \mathfrak{A}; (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \cdots) = \mathfrak{A}; \mathfrak{B} + \mathfrak{A}; \mathfrak{C} + \mathfrak{A}; \mathfrak{D} + \cdots.$$

Für die Multiplikation mit einer reellen Zahl s soll wieder das assoziative Gesetz gelten:

$$(16) \quad e \cdot (s \Phi) \equiv s (e \cdot \Phi) \equiv (s e) \cdot \Phi.$$

Da wir in der Form $s e$ jeden beliebigen Vektor darstellen, können wir (8, 17) in

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \cdot \Phi = a \cdot (\mathfrak{A}; \mathfrak{B} + \mathfrak{C}; \mathfrak{D} + \mathfrak{E}; \mathfrak{F} + \cdots) \\ \equiv (a \cdot \mathfrak{A}) \mathfrak{B} + (a \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{D} + (a \cdot \mathfrak{E}) \mathfrak{F} + \cdots \\ \equiv (\mathfrak{B}; \mathfrak{A} + \mathfrak{D}; \mathfrak{C} + \mathfrak{F}; \mathfrak{E} + \cdots) \cdot a = \Phi_e \cdot a \end{array} \right.$$

verallgemeinern und haben damit das Punktprodukt eines Vektors mit einer Dyade definiert; man pflegt es das skalare Produkt eines Vektors mit einer Dyade zu nennen. Das Ergebnis dieser Punktmultiplikation ist aber jetzt kein Skalar, sondern der durch (17, 18) bestimmte Vektor. Aus (17, 18) folgt auch, daß diese Multiplikation nicht kommutativ ist. An die Stelle des kommutativen Gesetzes tritt die Beziehung:

$$(18) \quad a \cdot \Phi = \Phi_c \cdot a.$$

Selbstverständlich folgt aus (17, 18) unmittelbar:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a + b + \dots) \cdot (\Phi + \Psi + \dots) \\ \equiv a \cdot \Phi + a \cdot \Psi + \dots + b \cdot \Phi + b \cdot \Psi + \dots \end{array} \right.$$

Man erkennt leicht, daß im dreidimensionalen Raume jede Dyade schon durch ihre Projektionen auf drei nicht komplanare Richtungen ein-eindeutig bestimmt wird. Ist nämlich:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi \cdot e_1 = \mathfrak{A}_1 \\ \Phi \cdot e_2 = \mathfrak{A}_2 \\ \Phi \cdot e_3 = \mathfrak{A}_3, \end{array} \right.$$

so folgt für jede andere gegebene Richtung $\bar{e}_1$ wegen

$$(21) \quad \bar{e}_1 = e_1 c_{11}^* + e_2 c_{21}^* + e_3 c_{31}^*$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi \cdot \bar{e}_1 = c_{11}^* \Phi \cdot e_1 + c_{21}^* \Phi \cdot e_2 + c_{31}^* \Phi \cdot e_3 \\ = c_{11}^* \mathfrak{A}_1 + c_{21}^* \mathfrak{A}_2 + c_{31}^* \mathfrak{A}_3. \end{array} \right.$$

Als explizite Form der Dyade Φ erhalten wir aus (20, 19):

$$(23) \quad \Phi = \mathfrak{A}_1; e_1^* + \mathfrak{A}_2; e_2^* + \mathfrak{A}_3; e_3^*.$$

Sind auch die „Antezedenten“ der Dyade: $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ (die zweiten Vektoren der dyadischen Produkte heißen die „Konsequenzen“) nicht komplanar, so haben wir eine komplette Dyade. Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ komplanar, so spricht man von einer planaren Dyade, sind sie kollinear, von einer linearen. Da e_1, e_2, e_3 ein beliebig vorgebbares Grundsystem charakterisieren, wird die komplette Dyade durch drei Vektoren $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$, also durch neun Zahlen bestimmt. Es ist klar, daß in beliebiger Form vorgegebene gleiche Dyaden mit Benützung der verfügbaren

Rechenregeln auch unmittelbar ineinander umgerechnet werden können. Besteht zwischen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ eine lineare Beziehung:

$$(24) \quad \mathfrak{U}_3 = x \mathfrak{U}_1 + y \mathfrak{U}_2,$$

so folgt aus (15, 18), (16, 18) und (23, 19):

$$(25) \quad \Phi = \mathfrak{U}_1; (e_1^* + x e_3^*) + \mathfrak{U}_2; (e_2^* + y e_3^*).$$

Sowohl die Antezedenten wie die Konsequenten einer planaren Dyade liegen in je einer Ebene. Fallen die beiden Ebenen zusammen, so soll die Dyade uniplanar heißen. Für jede planare Dyade gibt es eine und nur eine Richtung, für welche

$$(26) \quad \Phi \cdot \bar{e}_3 = 0$$

wird. Innerhalb der auf $\bar{e}_3^*$ senkrechten Ebene können wir zwei beliebige nicht kollineare Vektoren $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ als Grundvektoren wählen, es gilt dann:

$$(27) \quad \Phi \cdot \bar{e}_1 = \bar{\mathfrak{U}}_1 \quad \text{und} \quad \Phi \cdot \bar{e}_2 = \bar{\mathfrak{U}}_2, \quad \text{also}$$

$$(28) \quad \Phi = \bar{\mathfrak{U}}_1; \bar{e}_1^* + \bar{\mathfrak{U}}_2; \bar{e}_2^*.$$

Aus (26, 20) und (27, 20) folgt, daß eine planare Dyade durch acht skalare Größen, nämlich durch zwei Vektoren $\bar{\mathfrak{U}}_1, \bar{\mathfrak{U}}_2$ und durch eine Richtung $\bar{e}_3$ bestimmt ist. Sind $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ kollinear, so gelangen wir wieder zum einfachen dyadischen Produkt. Ganz analog wie wir im Falle der planaren Dyade von der Summe dreier dyadischer Produkte in (23, 19) zur Summe von nur zwei dyadischen Produkten in (25, 20) gelangt sind, kann man jede als Summe von beliebig vielen dyadischen Produkten explizit gegebene komplette Dyade auf die Summe von drei dyadischen Produkten reduzieren. In einem n -dimensionalen Raume wird die komplette Dyade erst durch ihre Projektionen auf n linear unabhängige Grundvektoren gegeben sein und sich explizit als Summe von n dyadischen Produkten darstellen lassen.

b) Verschiedene Darstellungsformen der Dyade (Neunerform)

Setzen wir noch, was ja immer möglich ist:

$$(1) \quad \mathfrak{U}_\kappa = \sum_i a_{i\kappa} e_i^* \quad \begin{array}{l} \kappa = 1, 2, 3 \\ i = 1, 2, 3, \end{array}$$

so ergibt (23, 19):

$$(2) \quad \Phi = \sum_{i, \kappa} a_{i\kappa} e_i^* ; e_\kappa^*$$

die durch die neun Zahlen $a_{i\kappa}$ bestimmte Neunerform der Dyade. In der Regel bezieht man die Neunerform auf ein Dreibein i, j, k . Selbstverständlich kann man in (2, 21) auch die Antezedenten herausheben und erhält so:

$$(3) \quad \Phi = e_1^* ; \mathfrak{A}_{1c} + e_2^* ; \mathfrak{A}_{2c} + e_3^* ; \mathfrak{A}_{3c},$$

wenn

$$(4) \quad \mathfrak{A}_{ic} = \sum_{\kappa} a_{i\kappa} e_\kappa^*$$

gesetzt wird.

Wir können die drei Vektoren $\mathfrak{A}_i$ in (23, 19) als die Antezedenten-Komponenten, die drei Vektoren $\mathfrak{A}_{\kappa c}$ in (3, 21) als die Konsequenten-Komponenten der Dyade Φ in bezug auf die Basis e_1^*, e_2^*, e_3^* bezeichnen. (3, 21) würde man übrigens auch unmittelbar erhalten, wenn man, statt wie in den Gleichungen (20, 19) von der Definitionsgleichung (10, 18), von der gleichwertigen Definitionsgleichung (9, 18) ausginge.

Die Neunerform der Gleichung (2, 21) entspricht einem Sonderfall der allgemein möglichen Darstellung

$$(5) \quad \Phi = \sum_{\lambda=1}^9 b_\lambda \varphi_\lambda,$$

worin die φ_λ ein beliebig vorgegebenes System von neun linear unabhängigen Dyaden bilden.

Setzen wir zur Vereinfachung der Schreibarbeit hier Gleichung (2, 21) in der Form an:

$$(6) \quad \Phi = \sum_{\mu=1}^9 a_\mu e_i^* ; e_\mu^*,$$

worin also:

$$a_1 = a_{11}, \quad a_2 = a_{12}, \quad a_3 = a_{13}, \quad a_4 = a_{21}, \quad \dots, \quad a_9 = a_{33}$$

ist und in ganz entsprechender Bezeichnungsweise

$$(7) \quad \varphi_\lambda = \sum_{\mu=1}^9 e_{\lambda\mu} e_i^* ; e_\mu^*,$$

so entspricht (5, 21) den neun skalaren Gleichungen:

$$(8) \quad a_\mu = \sum_{\lambda=1}^9 b_\lambda e_{\lambda\mu} \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, 9.$$

Unsere oben aufgestellte Behauptung trifft zu, wenn (8, 22) für beliebige, nicht durchwegs verschwindende a_μ nach den b_λ aufgelöst werden kann. Das ist bekanntlich dann und nur dann der Fall, wenn die Determinante

$$(9) \quad D = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & \cdots & e_{19} \\ e_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{91} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & e_{99} \end{vmatrix}$$

ungleich Null ist. Da aber das Verschwinden von D gerade die Bedingung dafür darstellt, daß

$$(10) \quad 0 = \sum_{\lambda=1}^9 b_\lambda \varphi_\lambda$$

erfüllt werden kann, ohne daß sämtliche b_λ verschwinden, ergibt sich als notwendige Voraussetzung für (5, 21) tatsächlich, daß die φ_λ neun linear unabhängige Dyaden sein müssen. Zwischen zehn Dyaden liefert (5, 21) stets eine lineare Beziehung: Mehr als neun linear unabhängige Dyaden kann es demnach im dreidimensionalen Raume nicht geben.

c) Symmetrische und antisymmetrische Dyaden, Vektor der antisymmetrischen Dyade

Wenn und nur wenn für (1, 20) und (4, 21)

$$(1) \quad \mathfrak{A}_{\kappa e} = \mathfrak{A}_\kappa \quad \kappa = 1, 2, 3$$

zutrifft, gilt für beliebige e nach (23, 19) und (3, 21):

$$(2) \quad \Phi \cdot e = e \cdot \Phi,$$

woraus gemäß (8, 17)

$$(3) \quad \Phi_e = \Phi$$

folgt. Eine Dyade, welche (3, 22) genügt, heißt selbst-konjugiert oder symmetrisch. Ist hingegen

$$(4) \quad \Phi_e = -\Phi,$$

so sprechen wir von einer antisymmetrischen oder schiefsymmetrischen Dyade. Aus der Neunerform liest man ab: Für die symmetrische Dyade gilt

$$(5) \quad a_{ix} = a_{xi},$$

für die antisymmetrische Dyade gilt

$$(6) \quad \begin{cases} a_{ii} = 0 \\ a_{ix} = -a_{xi} \end{cases} \quad \text{für } i \neq x.$$

Da demnach eine symmetrische Dyade schon durch sechs skalare Bestimmungsstücke, eine antisymmetrische Dyade durch drei skalare Bestimmungsstücke festgelegt ist, überlegt man leicht, daß es höchstens sechs linear unabhängige symmetrische und höchstens drei linear unabhängige antisymmetrische Dyaden geben kann.

Natürlich ist:

$$(7) \quad (\Phi_e)_e \equiv \Phi,$$

woraus folgt, daß $\Phi + \Phi_e$ stets symmetrisch und $\Phi - \Phi_e$ stets antisymmetrisch sein muß. Das bedeutet, daß man jede Dyade als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Dyade darstellen kann:

$$(8) \quad \Phi = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi_e) + \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_e).$$

Man beachte, daß wir nirgends auf die Anschauung zurückgreifen mußten. Auch die Erweiterung des neuen Kalküls durch das Gebiet der Dyaden besitzt daher eine von jeder Anschauung unabhängige Bedeutung. Tatsächlich haben wir ja auch bisher der Dyade überhaupt kein geometrisch anschauliches Gebilde zugeordnet.

Wieder ist die Dyade, da sie, wie alle extensiven Größen, durch die Gesamtheit ihrer „Projektionen“ definiert wird, eine gegenüber Änderungen der Basis invariante Größe. Erst die Tatsache, daß — im Dreidimensionalen — schon drei linear unabhängige Projektionen zur eindeutigen Bestimmung aller übrigen

ausreichen, ermöglicht die Auszeichnung irgend dreier nicht komplanarer Richtungen als Basis. Wir setzen demgemäß:

$$(9) \quad \Phi = \mathfrak{U}_1; e_1^* + \mathfrak{U}_2; e_2^* + \mathfrak{U}_3; e_3^* = \bar{\mathfrak{U}}_1; \bar{e}_1^* + \bar{\mathfrak{U}}_2; \bar{e}_2^* + \bar{\mathfrak{U}}_3; \bar{e}_3^*.$$

Daraus ergeben sich die Transformationsformeln:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_i = \sum_{\kappa} c_{i\kappa} \bar{\mathfrak{U}}_{\kappa} \\ \bar{\mathfrak{U}}_{\kappa} = \sum_i \mathfrak{U}_i c_{i\kappa}^* \end{array} \right.$$

beziehungsweise in der Neunerform der Gleichung (2, 21):

$$(11) \quad \Phi = \sum_{i,\kappa} a_{i\kappa} e_i^*; e_{\kappa}^* = \sum_{\lambda,\mu} \bar{a}_{\lambda\mu} \bar{e}_{\lambda}^*; \bar{e}_{\mu}^*$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{i\kappa} = \sum_{\lambda,\mu} \bar{a}_{\lambda\mu} c_{i\lambda} c_{\kappa\mu} \\ \bar{a}_{\lambda\mu} = \sum_{i,\kappa} a_{i\kappa} c_{i\lambda}^* c_{\kappa\mu}^* \end{array} \right.$$

Diese Formeln können wieder ohne weiteres auf n Dimensionen übertragen werden.

Ein besonderes Interesse bietet die antisymmetrische Dyade Φ_a im dreidimensionalen Raume. Für diese erhalten wir wegen (6, 23) aus (12, 24):

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{23} = \bar{a}_{23} (c_{22} c_{33} - c_{23} c_{32}) + \bar{a}_{31} (c_{23} c_{31} - c_{21} c_{33}) \\ \quad + \bar{a}_{12} (c_{21} c_{32} - c_{22} c_{31}) \end{array} \right.$$

und daraus gemäß den Relationen (10, 11):

$$(14) \quad a_{23} = c [c_{11}^* \bar{a}_{23} + c_{12}^* \bar{a}_{31} + c_{13}^* \bar{a}_{12}].$$

Analog erhalten wir die beiden anderen Transformationsgleichungen:

$$(15) \quad a_{31} = c [c_{21}^* \bar{a}_{23} + c_{22}^* \bar{a}_{31} + c_{23}^* \bar{a}_{12}],$$

$$(16) \quad a_{12} = c [c_{31}^* \bar{a}_{23} + c_{32}^* \bar{a}_{31} + c_{33}^* \bar{a}_{12}].$$

Da für ein Dreibein nach (5, 13) und (6, 13)

$$(17) \quad c = 1, \quad c_{i\kappa}^* = c_{i\kappa}$$

gilt, erhalten wir aus den (3, 10) entsprechenden Transformationsgleichungen (14, 24), (15, 24), (16, 24) für eine beliebige Basis

mit wechselseitig aufeinander senkrecht stehenden Grundvektoren den gegenüber Drehungen des Achsensystems invarianten „Vektor“ oder „Rotor“ der Dyade Φ_a durch die Definitionsgleichung:

$$(18) \quad \frac{1}{2} \Phi_x = a_{23} \mathbf{i} + a_{31} \mathbf{j} + a_{12} \mathbf{k} = \bar{a}_{23} \bar{\mathbf{i}} + \bar{a}_{31} \bar{\mathbf{j}} + \bar{a}_{12} \bar{\mathbf{k}}.$$

(Sprich: Φ -Kreuz oder Φ -Vektor.) Die drei skalaren Bestimmungsstücke a_{23} , a_{31} , a_{12} , welche die antisymmetrische Dyade bei gegebenem Dreibein vollkommen bestimmen, bilden also die Maßzahlen eines Vektors. Allgemein gilt natürlich:

$$(19) \quad \frac{1}{2} \Phi_x = a_{23} \mathbf{i} + a_{31} \mathbf{j} + a_{12} \mathbf{k} = c \bar{a}_{23} \bar{\mathbf{e}}_1 + c \bar{a}_{31} \bar{\mathbf{e}}_2 + c \bar{a}_{12} \bar{\mathbf{e}}_3.$$

Das heißt: Beim Übergang zu einer Basis mit schiefwinkligen Grundvektoren unterscheiden sich die Maßzahlen des Vektors von jenen der neuen Neunerform der Dyade durch den Faktor c . Wir kommen auf diese Zusammenhänge nochmals zurück. Die weiteren Überlegungen wollen wir nicht an die allgemeine Darstellung der antisymmetrischen Dyade

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_a &= a_{23} (e_2^* ; e_3^* - e_3^* ; e_2^*) + a_{31} (e_3^* ; e_1^* - e_1^* ; e_3^*) \\ &\quad + a_{12} (e_1^* ; e_2^* - e_2^* ; e_1^*) \end{aligned} \right.$$

knüpfen, sondern an eine ganz spezielle, welche es uns ermöglicht, die für das Folgende wichtigen Zusammenhänge sehr viel bequemer zu erkennen.

Wir wählen als Basis ein spezielles Dreibein $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$ derart, daß

$$(21) \quad \frac{1}{2} \Phi_x = \bar{a}_{12} \bar{\mathbf{k}},$$

also

$$(22) \quad \bar{a}_{23} = \bar{a}_{31} = 0$$

wird. Dann folgt für die antisymmetrische Dyade selbst die „Normalform“ (in der nur die Ebene $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}$ festliegt):

$$(23) \quad \Phi_a = \bar{a}_{12} (\bar{\mathbf{i}} ; \bar{\mathbf{j}} - \bar{\mathbf{j}} ; \bar{\mathbf{i}}) = \frac{1}{2} |\Phi_x| (\bar{\mathbf{i}} ; \bar{\mathbf{j}} - \bar{\mathbf{j}} ; \bar{\mathbf{i}}),$$

in welche man jede antisymmetrische Dyade durch spezielle Wahl von $\bar{\mathbf{k}}$ bringen kann. Wir bilden nun:

$$(24) \quad \Phi_a \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{2} |\Phi_x| (\bar{\mathbf{i}} \bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\mathbf{j}} \bar{\mathbf{i}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) = \mathfrak{A},$$

worin $\bar{e}_1$ einen beliebig gerichteten Einheitsvektor bedeutet. Da Φ_a immer eine planare Dyade ist, muß für eine bestimmte Richtung, hier $\bar{e}_1 \parallel \bar{f}$, der Vektor $\mathfrak{A}$, auch für $\Phi_a \neq 0$, verschwinden. Diese Eigenschaft der antisymmetrischen Dyade überträgt sich auf das durch sie zu definierende „Kreuzprodukt“ zweier Vektoren. Mit Benützung von (21, 25) folgt aus (24, 25) allgemein:

$$(25) \quad \bar{e}_1 \cdot \mathfrak{A} = 0, \quad \Phi_x \cdot \mathfrak{A} = 0,$$

ferner:

$$(26) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} &= \frac{1}{4} |\Phi_x|^2 [(\bar{i} \cdot \bar{e}_1)^2 + (\bar{i} \cdot \bar{e}_1)^2] = \frac{1}{4} |\Phi_x|^2 [1 - (\bar{f} \cdot \bar{e}_1)^2] \\ |\mathfrak{A}| &= \frac{1}{2} |\Phi_x| |\sin(\bar{e}_1, \bar{f})|. \end{aligned}$$

Durch (24, 25) wird also ein Vektor $\mathfrak{A}$ bestimmt, der sowohl auf $\bar{e}_1$ wie auf Φ_x senkrecht steht und dessen Betrag durch (26, 26) gegeben ist.

5. Die vektorische Multiplikation

a) Zurückführung auf das Punktprodukt: Vektor-Dyade

Mit Benützung der Relationen (24, 25), (25, 26) und (26, 26) können und wollen wir eine neue Multiplikation zweier Vektoren durch

$$(1) \quad \Phi_a \cdot \bar{e}_1 \equiv -\bar{e}_1 \cdot \Phi_a \equiv \bar{e}_1 \times \frac{1}{2} \Phi_x \equiv -\frac{1}{2} \Phi_x \times \bar{e}_1 \equiv \mathfrak{A}$$

definieren. Darin bedeuten Φ_a eine antisymmetrische Dyade, $\bar{e}_1$ einen beliebig gerichteten Einheitsvektor, $\mathfrak{A}$ einen Vektor, der auf $\bar{e}_1$ und Φ_x derart senkrecht steht, daß $\bar{e}_1$ von $\mathfrak{A}$ aus beurteilt, auf kürzestem Wege entgegen dem Uhrzeigersinne in die Richtung von Φ_x gedreht werden kann. Der Betrag von $\mathfrak{A}$ aber wird durch

$$(2) \quad |\mathfrak{A}| = \frac{1}{2} |\Phi_x| |\sin(\bar{e}_1, \Phi_x)|$$

gegeben sein. Die so definierte Multiplikation heißt vektorische oder äußere oder Kreuzmultiplikation. (Sprich: „ $\bar{e}_1$ Kreuz $\frac{1}{2} \Phi_x$ “.) Sie ist lediglich eine andere Form der skalaren Multiplikation eines Vektors mit einer antisymmetrischen Dyade. Diese Umformung ist aber nur

im Dreidimensionalen möglich. Im Vierdimensionalen wird, wie man leicht überlegt, die antisymmetrische Dyade durch sechs skalare Größen bestimmt, welche also nicht durch einen „Vierervektor“ gegeben sein können. Auch die die c_{i*}^* bestimmenden Minoren werden im Vierdimensionalen schon dreireihige Determinanten sein.

Wir haben absichtlich, um die unmittelbare Übertragbarkeit unseres Kalküls ins n -Dimensionale zu sichern, die neue Multiplikation auf dem Wege über das skalare Produkt zwischen Vektor und antisymmetrischer Dyade eingeführt. Daß wir das Vektorprodukt überhaupt definieren, hat seinen Grund in dessen großer praktischer Bedeutung im Dreidimensionalen. Zum Beispiel sind die Momente der Kräfte adäquat durch vektorische Produkte gegeben.

Man beachte, daß das neue Produkt vermöge (1, 26) unabhängig von jedem speziellen Bezugssystem, also in invarianter Form definiert wurde. Aus (16, 18) folgt, daß auch beim vektorischen Produkt die Multiplikation mit einer Zahl s assoziativ sein wird. Dann können wir unsere Definitionsgleichungen (1, 26) bzw. (2, 26) verallgemeinern zu:

$$(3) \quad \begin{cases} a \times b \equiv -b \times a = \mathfrak{A} \\ |\mathfrak{A}| = |a| |b| |\sin(a, b)|, \end{cases}$$

worin der Vektor $\mathfrak{A}$ im oben definierten Sinne auf der Ebene a, b senkrecht steht, sein Betrag aber gemäß der zweiten Gleichung (3, 27) durch die Fläche des über a, b aufgespannten Parallelogrammes bestimmt wird. Natürlich wird man nach Einführung des neuen Multiplikationszeichens nicht immer wieder auf den Zusammenhang mit der antisymmetrischen Dyade zurückzugreifen brauchen, wird es aber gelegentlich mit Vorteil tun können. — Aus der Definitionsgleichung (3, 27) folgt unmittelbar:

$$(4) \quad \sin(a, b) = 0 \quad \text{also} \quad |\mathfrak{A}| = 0 \quad \text{für} \quad a \parallel b.$$

Das heißt: Besteht zwischen a und b eine lineare Beziehung, sind sie parallel, so verschwindet ihr Kreuzprodukt. Umgekehrt: wenn $a \times b = 0$ ist, ohne daß $|a|$ oder $|b|$ verschwindet, so müssen die beiden Vektoren kollinear sein.

Bei Verwendung eines Dreibeins als Basis, also mit

$$(5) \quad \begin{cases} a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \\ b = b_1 i + b_2 j + b_3 k \end{cases}$$

erhält man, da nach der Definitionsgleichung (3, 27)

$$(6) \quad i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

ist, die Darstellung:

$$(7) \quad a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k.$$

Die Gleichung (7, 28) kann man sich leicht in der Form einer verallgemeinerten Determinantendarstellung:

$$(8) \quad a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

merken.

b) Vektor und erster Skalar einer Dyade

Aus der Definitionsgleichung (1, 26) folgern wir weiter, daß die Kreuzmultiplikation genau so distributiv sein muß, wie die skalare Multiplikation zwischen Vektor und Dyade. Kommutativ ist sie natürlich nicht. Wir bemerken weiter, daß sowohl die dyadische, wie die vektorische, wie die skalare Multiplikation zweier Vektoren dem distributiven Gesetze gehorcht und in bezug auf die Multiplikation mit einer Zahl assoziativ ist. Da man eine als Summe beliebiger dyadischer Produkte gegebene Dyade mit den genannten Rechenregeln stets auf eine bestimmte Form, z. B. auf die Neunerform in bezug auf irgendein bestimmt gewähltes Dreibein umrechnen kann, ist dieselbe Umrechnung nach denselben Rechenregeln ebenso durchführbar, wenn wir das Punktstrichzeichen überall durch das Kreuzzeichen oder das Punktzeichen ersetzen¹⁾. Es ist demnach für das Ergebnis gleichgültig, in welcher zufälligen Darstellungsform der Übergang von

¹⁾ Dieser Vorgang ist ein Sonderfall des allgemeinen „Verjüngungsprozesses“ bei extensiven Größen höheren Ranges.

der dyadischen zur vektorischen oder skalaren Multiplikation vollzogen wird.

Aus dieser Bemerkung schließen wir, daß wir jeder Dyade einen von der Form der Darstellung unabhängigen, also gegenüber einem Wechsel der Basis invarianten Vektor durch die Vorschrift zuordnen können, daß das Punktstrichzeichen in der Dyade überall durch das Kreuzzeichen zu ersetzen sei. Für eine symmetrische Dyade folgt aus

$$(1) \quad \Phi = \sum_{i,n} a_{i,n} e_i^* ; e_n^* \text{ mit } a_{i,n} = a_{n,i}$$

$$(2) \quad \Phi_{\times} = \sum_{i,n} a_{i,n} e_i^* \times e_n^* = 0,$$

weil

$$e_i^* \times e_n^* = -e_n^* \times e_i^*$$

gilt.

Mit Benützung von (8, 23) und (2, 29) erhalten wir allgemein:

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi_{\times} = \frac{1}{2} (\Phi_{\times} - \Phi_{\times}) \\ = (a_{12} - a_{21}) i \times j + (a_{23} - a_{32}) j \times k + (a_{31} - a_{13}) k \times i \end{cases}$$

oder, wenn wir noch von (6, 28) Gebrauch machen:

$$(4) \quad \Phi_{\times} = (a_{12} - a_{21}) k + (a_{23} - a_{32}) i + (a_{31} - a_{13}) j.$$

Da

$$\frac{1}{2} (a_{23} - a_{32}), \quad \frac{1}{2} (a_{31} - a_{13}), \quad \frac{1}{2} (a_{12} - a_{21})$$

die drei Maßzahlen der antisymmetrischen Dyade $\frac{1}{2} (\Phi - \Phi_{\times})$ sind, die hier an die Stelle von a_{23}, a_{31}, a_{12} der von vornherein als antisymmetrisch vorausgesetzten Dyade Φ_a treten, ergibt ein Vergleich der Relationen (18, 25) und (4, 29) die Identität der beiden Definitionen und damit die Legitimation für die gleiche Bezeichnung durch $\Phi_{\times}$. Wir fassen nochmals zusammen:

$$(5) \quad \Phi_{\times} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} + \mathfrak{E} \times \mathfrak{F} + \mathfrak{G} \times \mathfrak{H} + \dots$$

ist der von der gewählten Darstellung unabhängige, also invariante Vektor der Dyade

$$(6) \quad \Phi = \mathfrak{A}; \mathfrak{B} + \mathfrak{C}; \mathfrak{D} + \mathfrak{E}; \mathfrak{F} + \mathfrak{G}; \mathfrak{H} + \dots$$

Natürlich haben gleiche Dyaden gleiche Vektoren.

Ersetzen wir das Punktstrichzeichen überall durch das Punktzeichen, so erhalten wir eine skalare Invariante der Dyade Φ , sie heißt „Erster Skalar der Dyade“:

$$(7) \quad \Phi_1 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D} + \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{H} + \dots$$

(Sprich: Φ -Eins oder Φ -Skalar.) Gleichen Dyaden entsprechen natürlich wieder gleiche Werte der Skalare. Da die skalare Multiplikation kommutativ ist, erhalten wir sofort:

$$(8) \quad \Phi_1 = \Phi_{e_1}.$$

Da jedoch für eine antisymmetrische Dyade wegen

$$\Phi_a = -\Phi_{a^c}$$

die Relation (8, 30) auch mit dem negativen Vorzeichen auf der rechten Seite zutreffen müßte, folgt

$$(9) \quad \Phi_{a_1} = 0$$

für jede antisymmetrische Dyade. Da lediglich die Kreuzmultiplikation den besonderen Verhältnissen des dreidimensionalen Raumes angepaßt ist, bei der Bildung des ersten Skalars aber nur der Übergang von der dyadischen zur skalaren Multiplikation gebraucht wird, können die Definition des ersten Skalars (man nennt ihn auch die Spur der Dyade), sowie die aus ihr folgenden Sätze auf n -dimensionale Räume übertragen werden.

c) Vektorisches Tripelprodukt

Wir leiten schließlich noch eine ungemein wichtige Rechenregel ab, indem wir die antisymmetrische Dyade

$$(1) \quad \Phi_a = a ; b - b ; a,$$

also

$$(2) \quad \frac{1}{2} \Phi_x = a \times b$$

in die Definitionsgleichung (1, 26) einführen, wobei wir noch verallgemeinernd $\bar{e}_1$ durch

$$(3) \quad s \bar{e}_1 = c$$

ersetzen. Wir erhalten dann:

$$(4) \quad \Phi_a \cdot c \equiv -c \cdot \Phi_a \equiv a b \cdot c - b a \cdot c \equiv c \times (a \times b) \equiv -(a \times b) \times c$$

Die wichtige Rechenregel:

$$(5) \quad c \times (a \times b) \equiv a b \cdot c - b a \cdot c \equiv (b \times a) \times c$$

heißt wohl auch der Entwicklungssatz des „Vektorischen Tripelproduktes“. Dieser **Entwicklungssatz**, sowie die folgenden Sätze über das **skalare Tripelprodukt** sind für das praktische Rechnen von so ausschlaggebender Bedeutung, daß dem Leser empfohlen werden muß, sie seinem Gedächtnisse fest einzuprägen.

6. Noch einige wichtige Produktbildungen und Rechenregeln

a) Skalares Tripelprodukt, reziproke Systeme

Das skalare Produkt zweier Vektoren, von denen der eine selbst ein Vektorprodukt ist, heißt ein skalares Tripelprodukt oder auch ein gemischtes Produkt. Ergänzen wir die Ansätze (5, 28) durch

$$(1) \quad c = c_1 i + c_2 j + c_3 k,$$

so erhalten wir aus (7, 28) unmittelbar:

$$(2) \quad a \times b \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Die Determinante (2, 31) ändert ihren Wert nicht, wenn die Zeilen zyklisch vertauscht werden, was man auch durch einfaches Ausrechnen leicht bestätigen kann. Daraus folgt, wenn man noch hinzunimmt, daß die skalare Multiplikation zweier Vektoren kommutativ ist:

$$(3) \quad \begin{cases} a \times b \cdot c = c \times a \cdot b = b \times c \cdot a = c \cdot a \times b \\ \quad \quad \quad = b \cdot c \times a = a \cdot b \times c = [a b c]. \end{cases}$$

In einem skalaren Tripelprodukt $[a b c]$ kann man die drei Vektoren zyklisch vertauschen und überdies zwischen den ersten und zweiten Vektor nach Belieben das Punkt- oder das Kreuzzeichen setzen; je nachdem hat dann zwischen dem zweiten und

dritten Vektor das Kreuz- oder das Punktzeichen zu stehen. Diese Vertauschbarkeit der Operationszeichen im skalaren Tripelprodukt ist beim praktischen Rechnen oft von Vorteil. Das Kommutieren zweier benachbarter Vektoren bedingt natürlich einen Vorzeichenwechsel. Aus (2, 31) findet man auch ohne Bezugnahme auf die Anschauung: Besteht zwischen a, b, c eine lineare Beziehung, so verschwindet ihr skalares Tripelprodukt identisch. Anschaulich

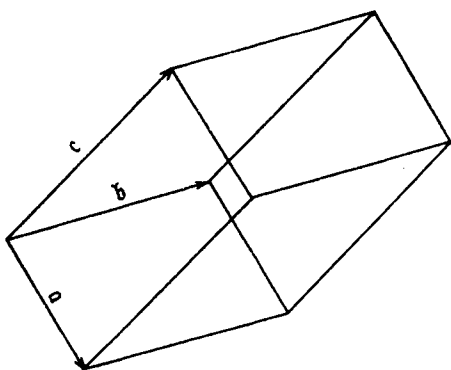


Fig. 4. Skalares Tripelprodukt

sieht man sofort ein:

Sind a, b, c komplanar, so muß, da $a \times b$ auf dieser Ebene senkrecht steht, $a \times b \cdot c$ identisch verschwinden. Genauer bestimmt das skalare Tripelprodukt, wie Fig. 4 erkennen läßt, das Volumen V des skizzierten Parallelpipeds. Das Volumen ergibt sich positiv oder negativ, je nachdem die Vektoren (wie in der Figur) ein Rechtssystem oder ein

Linkssystem bilden. Wir greifen jetzt auf die Definitionsgleichungen (14, 8) des reziproken Systems zurück und bemerken, daß

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 \cdot \frac{e_2 \times e_3}{[e_1 e_2 e_3]} = 1 \\ e_2 \cdot \frac{e_3 \times e_1}{[e_1 e_2 e_3]} = 0 \\ e_3 \cdot \frac{e_1 \times e_2}{[e_1 e_2 e_3]} = 0 \end{array} \right.$$

zutrifft, folglich muß

$$(5) \quad e_1^* = \frac{e_2 \times e_3}{[e_1 e_2 e_3]}$$

sein, und ebenso erhält man:

$$(6) \quad e_2^* = \frac{e_3 \times e_1}{[e_1 e_2 e_3]}, \quad e_3^* = \frac{e_1 \times e_2}{[e_1 e_2 e_3]}.$$

Natürlich gelten die Relationen (4, 32), (5, 32), (6, 32), gleichwie die ursprünglichen Definitionsgleichungen (14, 8) auch dann, wenn die drei nicht komplanaren Vektoren e_1, e_2, e_3 keine Einheitsvektoren sind.

b) Vektorisches Quadrupelprodukt, Identitätsdyade

Wenn wir $[e_1^* e_2^* e_3^*]$ ausrechnen wollen, werden wir auf das vektorische Quadrupelprodukt geführt, das allgemein die Form hat:

$$(a \times b) \times (c \times d).$$

Seine Entwicklung gelingt mit Benützung von (5, 31) auf zwei Wegen, wenn man einmal zunächst $a \times b = \mathfrak{A}$, ein zweites Mal zunächst $c \times d = \mathfrak{C}$ setzt. Wir erhalten:

$$(1) \quad (a \times b) \times (c \times d) = [a b d] c - [a b c] d = [a c d] b - [b c d] a.$$

Bilden a, b, c ein nicht komplanares System, so folgt aus (1, 33) mit Benützung der Sätze über skalare Tripelprodukte:

$$(2) \quad d = a \frac{b \times c}{[a b c]} \cdot d + b \frac{c \times a}{[a b c]} \cdot d + c \frac{a \times b}{[a b c]} \cdot d$$

$$(3) \quad d = [a; a^* + b; b^* + c; c^*] \cdot d.$$

Da (3, 33) für beliebige Vektoren d gilt, ist der geklammerte Ausdruck eine Dyade, die jeden Vektor in sich selbst überführt; diese Dyade heißt Identitätsdyade. Wir schreiben:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} I = a; a^* + b; b^* + c; c^* = e_1; e_1^* + e_2; e_2^* + e_3; e_3^* \\ \quad \quad \quad = i; i + j; j + k; k \end{array} \right.$$

Die letzte explizite Form in (4, 33) zeigt, daß I eine symmetrische Dyade ist, somit auch

$$a; a^* + b; b^* + c; c^* = a^*; a + b^*; b + c^*; c.$$

Da eine symmetrische Dyade keinen Vektor besitzt, folgt die mit (5, 31) leicht zu verifizierende Identität:

$$(5) \quad a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) \equiv 0.$$

Aus (1, 33) erhalten wir

$$(6) \quad (b \times c) \times (c \times a) = [a b c] c$$

und daraus mit Verwendung der Bezeichnungen von (2, 33), (3, 33):

$$(7) \quad [a^* b^* c^*] = \frac{1}{[a b c]}$$

Natürlich gilt dann im besonderen auch:

$$(8) \quad [e_1^* e_2^* e_3^*] = \frac{1}{[e_1 e_2 e_3]} \quad \text{und} \quad [i j k] = 1$$

c) Darstellung der Produkte im schiefwinkligen Bezugssystem. Polare und axiale Vektoren

Es seien jetzt drei Vektoren, statt wie in (5, 28) bzw. (1, 31) auf ein Dreiein, auf ein beliebiges schiefwinkliges Achsensystem bezogen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* \\ b = b_1 e_1^* + b_2 e_2^* + b_3 e_3^* \\ c = c_1 e_1^* + c_2 e_2^* + c_3 e_3^* \end{array} \right.$$

Man findet die Transformationsgleichungen für die Maßzahlen dieser Vektoren unter (3, 10) bzw. unter (7, 11). Bilden wir nun durch Kreuz-Multiplikationen einen neuen Vektor:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1^* \times e_3^* \\ \quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3^* \times e_1^* + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1^* \times e_2^*, \end{array} \right.$$

so erhalten wir durch Einführung des zu dem reziproken wieder reziproken, ursprünglichen Systems:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = [e_1^* e_2^* e_3^*] \{ (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 \\ \quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \}. \end{array} \right.$$

Es ist üblich, das Kreuzprodukt $\mathfrak{A}$ als einen, aus den „polaren“ Vektoren a und b gebildeten „axialen“ Vektor zu bezeichnen. Aus (3, 34) folgt dann: Erst die mit dem Faktor $[e_1^* e_2^* e_3^*]$ (der für ein Dreiein den Wert Eins hat und beim Übergange vom Rechtssystem zum Linkssystem sein Vorzeichen wechselt) multiplizierten Maßzahlen $(a_i b_k - a_k b_i)$ sind die Maßzahlen des durch (3, 34) definierten axialen Vektors. Sie transformieren sich kontragredient zu den Maßzahlen der polaren Vektoren, aus

denen $\mathfrak{A}$ gebildet wurde. Lediglich diese Transformationseigenschaften der Maßzahlen, die dem Kreuzprodukte von seinem dyadischen Ursprunge anhaften, charakterisieren die axialen Vektoren gegenüber den polaren. Derselben Komplikation sind wir tatsächlich schon bei der Transformation der Maßzahlen des Vektors einer Dyade in den Relationen (14, 24) bis (19, 25) begegnet und sind ihr dort durch die Beschränkung auf rechtwinklige Achsensysteme ausgewichen. Für die durch (20, 25) gegebene antisymmetrische Dyade folgt in unserer jetzigen Bezeichnungsweise:

$$(4) \quad \frac{1}{2} \Phi_{\mathbf{x}} = [e_1^* e_2^* e_3^*] (a_{23} e_1 + a_{31} e_2 + a_{12} e_3).$$

Allgemein erhält man aus (4, 11) und (5, 11) leicht:

$$(5) \quad \begin{cases} [\bar{e}_1^* \bar{e}_2^* \bar{e}_3^*] = c [e_1^* e_2^* e_3^*] \\ [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3] = c^* [e_1 e_2 e_3], \end{cases}$$

woraus sich gemäß (8, 34)

$$(6) \quad 1 = c c^*$$

ergibt. Wir schreiben schließlich die für eine beliebige Basis verallgemeinerten Formeln (8, 28) und (2, 31) nochmals an:

$$(7) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [e_1^* e_2^* e_3^*] \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(8) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = [e_1^* e_2^* e_3^*] \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Aus (1, 13), (2, 13), (4, 33) und (8, 34), (8, 35) folgt speziell:

$$(9) \quad g = \frac{[e_1 e_2 e_3]}{[e_1^* e_2^* e_3^*]} = [e_1 e_2 e_3]^2 = \frac{1}{[e_1^* e_2^* e_3^*]^2} = \frac{1}{g^*}.$$

d) Kreuzprodukt von Vektor und Dyade

Die Definition der vektorischen Multiplikation eines Vektors mit einer Dyade ergibt sich wieder aus der für das praktische Rechnen so wichtigen Forderung, anders assoziieren zu dürfen. Wir verlangen für beliebige Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{e}$:

$$(1) \quad \mathbf{a} \times (\Phi \cdot \mathbf{e}) \equiv (\mathbf{a} \times \Phi) \cdot \mathbf{e} \equiv -(\mathbf{e} \cdot \Phi_c) \times \mathbf{a} \equiv -\mathbf{e} \cdot (\Phi_c \times \mathbf{a}),$$

worin $a \times \Phi$ bzw. $\Phi_e \times a$ wieder Dyaden bedeuten sollen. Mit

$$(2) \quad \Phi = \mathfrak{A}; \mathfrak{B} + \mathfrak{C}; \mathfrak{D} + \dots$$

folgt aus:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a \times \Phi) \cdot e \equiv a \times (\Phi \cdot e) = a \times \mathfrak{A} \mathfrak{B} \cdot e \\ \quad + a \times \mathfrak{C} \mathfrak{D} \cdot e + \dots = [a \times \mathfrak{A}; \mathfrak{B} + a \times \mathfrak{C}; \mathfrak{D} + \dots] \cdot e \end{array} \right.$$

nach der Gleichheitsdefinition für Dyaden:

$$(4) \quad a \times \Phi = a \times \mathfrak{A}; \mathfrak{B} + a \times \mathfrak{C}; \mathfrak{D} + \dots$$

Analog erhält man:

$$(5) \quad \Phi_e \times a = \mathfrak{B}; \mathfrak{A} \times a + \mathfrak{D}; \mathfrak{C} \times a + \dots$$

Aus der Definitionsgleichung (1, 26) folgt nun auch unmittelbar für jede antisymmetrische Dyade:

$$(6) \quad \Phi_a \cdot \bar{e}_1 \equiv -\frac{1}{2} \Phi_x \times \bar{e}_1 \equiv -\frac{1}{2} \Phi_x \times I \cdot \bar{e}_1,$$

also

$$(7) \quad \Phi_a = -\frac{1}{2} \Phi_x \times I,$$

oder

$$(8) \quad \begin{aligned} -\bar{e}_1 \cdot \Phi_a &\equiv \bar{e}_1 \times \frac{1}{2} \Phi_x \equiv \bar{e}_1 \cdot I \times \frac{1}{2} \Phi_x \\ \Phi_a &= -I \times \frac{1}{2} \Phi_x. \end{aligned}$$

Mit Verwendung von (8, 36) können wir (8, 23) in der Form schreiben:

$$(9) \quad \Phi = \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_e) - \frac{1}{2} I \times \Phi_x,$$

worin Φ eine beliebige Dyade bedeutet. Wenn der Vektor einer Dyade verschwindet, so ist es eine symmetrische Dyade.

e) Produkte zweier Dyaden. Reziproke Dyade

$a \cdot \Phi$ bzw. $\Phi \cdot a$ sind selbst Vektoren. Multiplizieren wir einen so gebildeten Vektor skalar mit einer Dyade

$$(1) \quad \Psi = \mathfrak{A}'; \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}'; \mathfrak{D}' + \dots$$