

Handbuch der Statik fester Körper.

Mit
vorzüglicher Rücksicht
auf
ihre Anwendung in der Architektur.

Aufgesetzt
von

D. J. A. Eytelwein,

Königl. Preuß. Ober-Landes-Baubirektor; Ritter des rothen Adlers
und des L. niederländ. Löwenordens; ordentlichem Mitgliede der Akademie der Wissenschaften und des Senats der Akademie der Künste zu Berlin, des National-Instituts der Wissenschaften und Künste zu Amsterdam, der Gesellschaft der Experimental-Philosophie zu Rotterdam, u. m. a. Gesellschaften Mitgliede.

Zweite Auflage.

Erster Band.

Mit elf Kupfertafeln.

Berlin.

Gedruckt und verlegt bei G. Reimer.

1832.

V o r r e d e

zur ersten Auflage.

Unter denjenigen Theilen der angewandten Mathematik, welche für den Baumeister als Hülfswissenschaften unentbehrlich sind, behauptet die Statik der festen Körper den ersten Rang. Soll diese Wissenschaft mit vorzüglicher Rücksicht auf Anwendung im bürgerlichen Leben vorgetragen werden, so ist ihr Umfang außerordentlich groß, und es wird sehr schwierig, bestimmte Grenzen zu ziehen, wenn ein Lehrbuch außer den allgemeinen Sätzen auch nur die nächsten Anwendungen auf besondere Fälle enthalten soll. Da man bei der Bearbeitung dieses Handbuchs nur vorzüglich Anwendungen auf Architektur zur Absicht hatte, so wird sich dadurch entschuldigen lassen, daß einige

Materien mehr, andere weniger Ausdehnung erhielten, so wie es dem Bedürfniß angemessen zu seyn schien. Der mehrern Einfachheit wegen ist hier die ganze Statik auf den Lehrsatz vom Parallelogramme der Kräfte gegründet, dessen Beweis ich im Jahre 1804 ohne Beihülfe des Hebels bekannt machte. Hieraus ist, so weit es hier erforderlich war, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit gefolgert worden, weil sich dies vorzüglich durch seine Allgemeinheit und Einfachheit empfiehlt, um in schwierigen Fällen dem Praktiker, welcher nicht sogleich mit allen Hülfsmitteln der Statik vertraut ist, zur Führerin zu dienen, oder solches nach vollendeter Auflösung einer schwierigen Aufgabe als Prüfstein zu gebrauchen.

Die Untersuchung über die Reibung der Körper wird gewöhnlich in den Lehrbüchern in einer besondern Abtheilung, mit Anwendung auf einige Fälle, vorgetragen. Hier schien es zweckmäßiger, um die einzelnen Lehren nicht zu zerstreuen, und ihre Anwendung auf vorkommende Fälle zu erleichtern, gleich in jedem Kapitel, wie z. B. bei der schiefen Ebene, der Schraube, dem Räderwerke u. s. w., die Lehre von der Reibung mit den übrigen Lehren, so weit es erforderlich war,

zu verbinden. Besonders ist man bemüht gewesen, die Reibungen beim Räderwerke, bei den Zähnen, Rämmen und Daumen möglichst genau, und so weit solches zulässig war, durch einfache Ausdrücke anzugeben. Ohne bei demjenigen zu verweilen, was etwa diese Schrift neues enthält, und welches dem Kenner wahrscheinlich nicht entgehen wird, darf ich die schwierige Untersuchung über den Druck der Körper auf ihre Unterlagen, wenn deren mehr als zwei in einer graden Linie liegen, nicht unberührt lassen. Die Eulerschen Bemühungen, dieses Problem aufzulösen, sind bekannt, aber eben so leicht überzeugt man sich auch, daß solche für die Ausübung ohne Nutzen sind, weil sie das widersprechende Resultat geben, daß die von der Last entferntere Stütze einen stärkeren Druck leidet, als die der Last näher gelegene. Bei der von mir gegebenen Auflösung dieses Problems, welches für den Architekten von so großer Wichtigkeit ist, mußte man wünschen, die Resultate eben so wie beim Parallelogramm der Kräfte, ohne Hülfe der höhern Analysis, zu erhalten. Dies hat aber bis jetzt nicht gelingen wollen. Es wäre zu weitläufig gewesen, diejenigen Versuche, welche die Uebereinstimmung dieses Gesetzes mit

den Erfahrungen beweisen, umständlich hier anzuführen, weshalb solches in einer besondern Abhandlung für die Denkschriften der hiesigen Königl. Akademie der Wissenschaften geschehen ist. Nur die besondere Ansicht, daß diese Schrift vorzüglich für angehende Architekten bestimmt ist, wird es rechtfertigen lassen, daß die Lehren von den Gewölben und von der Festigkeit der Materialien ungewöhnlich ausgedehnt sind. Auch liegt hierin der Grund, weshalb die von mir angestellten mühsamen und weitläufigen Versuche über die Biegsamkeit und Festigkeit mehrerer Holzarten hier mitgetheilt worden sind, ob sie gleich nach meiner Meinung mehr der Physik als der Statik angehören.

Es war nicht möglich, die sämmtlichen Lehren der Statik, so weit sie in der Architektur erfordert werden, ohne höhere Analysis vorzutragen, ob man gleich bemüht war, da, wo es ohne zu große Weitläufigkeit geschehen konnte, diese Rechnungsart zu vermeiden, welches besonders vom ersten Abschnitte der Lehre von den Gewölben gilt. Damit aber dem ersten Anfänger und denjenigen, welche mit der höhern Analysis noch nicht vertraut sind, das Studium erleichtert werde, so

sind mehrere §. §., und selbst einige Abschnitte, mit einem Sternchen * bezeichnet worden, welches anzeigt, daß diese Abtheilungen noch ausgesetzt bleiben können, bis nach fortgesetztem Studiren die Statik in dem ganzen hier gegebenen Umfange erlernt werden kann. Eben so war es nothwendig, zur Vermeidung einer unnützen Ausdehnung und zur Erleichterung für den Anfänger, bei vorkommenden analytischen Ausdrücken, eine Quelle anzuführen, wo man sich von der Richtigkeit der Formeln überzeugen könne. Da nun die mathematische Analysis von Pasquich größtentheils alle diejenigen Integralformeln entwickelt enthält, welche hier vorkommen, so hat man sich der Kürze wegen jedesmal auf diese Schrift bezogen. Nicht so konnte man bei der Lehre von denjenigen krummen Linien verfahren, deren Kenntniß hier als bekannt vorausgesetzt werden mußte, weil das Pasquichsche Lehrbuch nur auf die Regelschnitte eingeschränkt ist, und weil man nicht leicht die hier erforderlichen Lehren in dem nöthigen Zusammenhange findet. Es ist deshalb im dritten Bande als Anhang die Theorie transcendenten krummer Linien, welche bei statischen Untersuchungen vorkommen, beigelegt worden.

Sämmtliche Maaße, bei welchen nichts besonders erinnert worden, beziehen sich auf das bei uns eingeführte brandenburgische Maaß, welches mit dem rheinländischen überein stimmt, und eben so sämmtliche Gewichte auf das berlinische Handelsgewicht.

(P. A. 1. B.) bedeutet den ersten Band, und (P. A.) den zweiten Band von Pasquich's mathematischer Analysis (Leipzig 1791).

Berlin, im Januar 1808.

J. A. C.

V o r r e d e

zur zweiten Auflage.

Außer einigen Erweiterungen und Verbesserungen sind besonders dieser zweiten Auflage die neuern bekannt gewordenen wichtigen Versuche über die Festigkeit mehrerer Materialien beigelegt worden. Es wäre leicht gewesen dieser Auflage noch die ganz allgemeinen Lehren der Statik beizufügen. Hierdurch wäre aber der vorgesezte Zweck verloren gegangen, und es hätten alsdann andere dem Baumeister nicht unwichtige Untersuchungen weg bleiben müssen, wenn der Umfang des Handbuchs nicht unnöthig erweitert werden sollte. Für diejenigen angehenden Baumeister, welche aus besonderer Neigung die ganz allgemeinen Lehren der Statik studiren wollen, ist durch

die im Jahr 1826 herausgekommene schätzbare
Statik fester Körper, von Grunert, hinlänglich
gesorgt.

Die vorkommende Abkürzung: (H. A.) be-
zieht sich auf meine Grundlehren der höhern
Analysis.

Berlin, im Januar 1832.

J. A. Eytelwein.

I n h a l t

d e s

e r s t e n B a n d e s.

Einleitung.

Kraft. Widerstand. Druck. Richtung des Drucks.

Gleichgewicht. Geostatik.

Feste Körper. Materie. Masse. §. 1.

Schwere. Gewicht. Vertikallinie. Horizontallinie. §. 2.

Einerlei, entgegengesetzte und grade entgegengesetzte
Richtung. §. 3.

I. Kapitel. Grundlehren der Statik, oder vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

Die ersten Sätze vom Gleichgewichte unter mehreren
Kräften. §. 4 — 9.

Mittlere Richtung. Mittelkraft. Seitenkräfte. Gegenkraft. Zusammensetzung und Zerlegung der
Kräfte. §. 10.

Aus den Seitenkräften die Mittelkraft zu finden. §. 11.

Durch Zeichnung. §. 12.

Die Richtung der Mittelkraft zu finden. . . . §. 15.

Parallelogramm der Kräfte.	§. 17.
Bedingungen für das Gleichgewicht unter drei Kräften.	§. 19.
Für mehrere Kräfte.	§. 24.
Momente der Kräfte.	§. 27.
Lage der Kräfte gegen irgend eine Linie.	§. 29.
Wirkung einer Kraft auf eine Ebene. Einfallswinkel. Normaldruck.	§. 31.
Parallelepiped der Kräfte.	§. 32.
Mehrere Kräfte, welche nicht in einer Ebene liegen.	§. 33.
Grundgesetz der Statik für die Wirkung mehrerer Kräfte auf einen Punkt.	§. 35.

II. Kapitel. Vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte, welche nicht auf einen einzigen Punkt wirken, oder vom Hebel und der Drehungsaxe.

Hebel. Ruhez oder Drehpunkt. Angriffspunkt. Winkelhebel.	§. 38.
Gleichgewicht zweier Kräfte am graden Hebel.	§. 39.
Druck auf den Drehpunkt.	§. 40.
Auf die Unterlagen.	§. 41.
Gleichheit der Momente für mehrere Kräfte.	§. 44.
Bestimmung der Lage des Drehpunkts.	§. 45.
Gleichgewicht am Winkelhebel.	§. 48.
Bedingungsgleichungen für drei Kräfte nach verschiedenen Richtungen.	§. 49. 50.
Bestimmung der Richtungen dreier Kräfte, wenn solche nebst den Angriffspunkten am graden Hebel gegeben sind.	§. 51.
Für zwei Kräfte am gebogenen Hebel.	§. 52.
Gleichheit der Momente am gebogenen Hebel.	§. 53.
Lage des Drehpunkts.	§. 56.
Wenn die Richtungen der Kräfte parallel sind.	§. 57.

Druck auf den Drehpunkt des gebogenen Hebels.	§. 58.
Bedingungsgleichungen für Kräfte in einer Ebene.	§. 59.
Dreh- oder Bewegungssaxe. Are der Momente.	§. 60.
Kräfte wirken winkelrecht auf eine Ebene.	§. 61.
Druck auf die Drehaxe.	§. 62. 63.
Kräfte, welche auf mehrere verbundene Ebenen wirken.	§. 64.
Druck auf die Drehaxe, wenn die Richtung der Kraft mit der Drehaxe in eine Ebene fällt.	§. 66—68.
Allgemeines Grundgesetz der Statik.	§. 69.

III. Kapitel. Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper.

Dichtigkeit.	§. 71.
Eigenthümliches und absolutes Gewicht der Körper.	§. 72.
Des Wassers	§. 73.
Vergleichung zwischen Gewicht und Inhalt eines Körpers.	§. 74.
Tafel über das eigenthümliche Gewicht der Körper.	§. 75.

IV. Kapitel. Vom Schwerpunkte.

Erklärung.	§. 76.
Den Schwerpunkt einzelner Gewichte in einerlei Ebene zu finden.	§. 77.
Wenn solche nicht in einerlei Ebene liegen.	§. 78.
Durchmesser und Ebene der Schwere.	§. 79.
Bei Linien, Flächen und Körpern.	§. 80.

(I.) Vom Schwerpunkte der Linien.

Schwerpunkt vom Umfange des Kreises und jeder regelmäßigen Figur.	§. 81.
Vom Umfange eines Dreiecks.	§. 82.
Vom Kreisbogen.	§. 83—86.
Schwerpunkt einer jeden Kurve.	§. 87.

Des Parabelbogens	§. 88.
Des Hyperbelbogens	§. 89.
Des elliptischen Bogens.	§. 90—92.
Der Cykloide	§. 93—94.
Der Kettenlinie.	§. 95.

(II.) Vom Schwerpunkte ebener Flächen.

Des Dreiecks.	§. 96.
Abstand des Schwerpunkts eines Dreiecks von einer Axe.	§. 97.
Parallelogramm, Kreisfläche, regelmäßiges Vieleck.	§. 99.
Unregelmäßiges Viereck.	§. 100.
Fünfeck.	§. 101.
Unregelmäßiges Vieleck.	§. 102.
Trapez.	§. 103—104.
Kreisabschnitt.	§. 105—108.
Gewölbbogen zwischen concentrischen Kreis-	
bogen.	§. 109—111.
Kreisabschnitt.	§. 112—113.
Jede symmetrische Fläche.	§. 114—115.
Allgemeine Bestimmung für jede Fläche.	§. 116—117.
Parabelfläche.	§. 118.
Hyperbelfläche.	§. 119.
Elliptischer Abschnitt.	§. 120—122.
Elliptischer Gewölbbogen.	§. 123.
Abschnitt einer Cykloide.	§. 124.
Kettenfläche.	§. 125.
Jede unregelmäßige Fläche.	§. 126—127.

(III.) Vom Schwerpunkte der Körper.

Cylinder. Prismen.	§. 128.
Pyramide. Regel.	§. 129. 130.
Abstand dieses Schwerpunkts von einer Ebene.	§. 131.
Abgekehrte Pyramide.	§. 132. 133.
Wenn solche ausgehöhlt ist.	§. 134—136.

Schief abgeschnittenes Prisma.	§. 137 — 138.
Schief abgeschnittenes Parallelepiped.	§. 139.
Halbkugel.	§. 140.
Kugelgewölbe.	§. 141.
Allgemeine Bestimmung.	§. 142 — 144.
Kugelabschnitt.	§. 145.
Kugelausschnitt.	§. 146.
Parabolisches Konoid.	§. 147.
Ausschnitt desselben.	§. 148.
Hyperbolisches Konoid.	§. 149.
Elliptisches Konoid.	§. 150.
Kettenkonoid.	§. 151.
Jeder unregelmäßige Körper.	§. 152 — 153.
Jeder Scheibe.	§. 154.
Guldins Regel.	§. 155.

(IV.) Vom Schwerpunkte der Oberfläche eines Körpers.

Prisma. Cylinder. Pyramide. Kegel.	§. 156.
Kugelabschnitt.	§. 157.
Allgemeine Bestimmung.	§. 158.
Kettenkonoid	§. 159.

V. Kapitel. Von der Stabilität der Körper.

Erklärung.	§. 160.
Die Stabilität eines jeden Körpers zu finden.	§. 161.
Einer Mauer.	§. 162.
Mit Strebepfeiler.	§. 163 — 164.
Wenn der Querschnitt ein Trapez ist.	§. 165.
Mauer mit Plinthe.	§. 166 — 167.
Pfeiler. Cylinder.	§. 168.
Kugel.	§. 169.

XVI **Inhalt des ersten Bandes.**

VI. Kapitel. Von der Rolle, dem materiellen Hebel und der Wage.

(I.) Von der Rolle.

Rolle. Spannung.	§. 170.
Feste und bewegliche Rolle.	§. 171.
Druck auf den Zapfen.	§. 172.

(II.) Vom materiellen Hebel.

Mathematischer und physischer Hebel.	§. 173.
Abstand des Stützpunkts.	§. 174.
Druck auf die Stützen.	§. 175.
Länge des Hebels. Kleinste Kraft.	§. 176.

(III.) Von der Wage.

Gleicharmige und Schnellwage. Römische und schwedische Wage. Ausschlag.	§. 177.
Eigenschaften.	§. 178.
Vermehrung des Ausschlags einer fertigen Wage.	§. 179.
Rasche Wagen.	§. 180.
Ungleiche Länge der Arme. Tarirung.	§. 181.
Schnellwage.	§. 182.
Vorhängegewicht.	§. 183.

VII. Kapitel. Von der Reibung.

Erklärung.	§. 184.
Reibung der Ruhe, der Bewegung. Schiebende, drehende und rollende Reibung.	§. 185.
Resultate über die gleitende Reibung.	§. 186.
Reibungskoeffizient und Tafeln.	§. 187.
Reibung als Kraft.	§. 188.
Zusammenhängen der Schmiere.	§. 189.
Wälzende Reibung.	§. 190.

VIII. Kapitel. Von der schiefen Ebene, dem Reile und der Schraube.

(I.) Von der schiefen Ebene.

Neigungswinkel. Grundlinie. Höhe. Normaldruck.

Relatives Gewicht. §. 191.

Größe des Normaldrucks und relativen Gewichts. §. 192—195.

Mit Rücksicht auf Reibung; zum Erheben. §. 196—198.

Zum Erhalten. §. 199.

Ruhewinkel. Reibungswinkel. §. 200.

Kleinste mögliche Kraft. §. 202.

Wenn die Kraft nicht durch den Schwerpunkt geht. §. 203—206.

Nach der Lehre vom Hebel. §. 207.

Nach dem Grundgesetze der Statik. §. 208.

Gleichgewicht für den Viertelkreis und Kreisbogen. §. 209—210.

Bedingungsgleichungen, wenn am Untertheile des Körpers

außer der Reibung keine andere Kraft wirkt. §. 211—213.

Die Leiter §. 214—215.

(II.) Vom Reile.

Erklärungen. Bedingungen für das Gleichgewicht. Re-

gel des Borelli, Mercenni und de la Hire. §. 216—217.

Mit Rücksicht auf Reibung. §. 218—219.

Eingeklemmte Körper. §. 220.

(III.) Von der Schraube.

Erklärungen. §. 221.

Mittelwerth für die Neigung der Schraubengänge. §. 222.

Bedingungen des Gleichgewichts. §. 223—224.

Schraube ohne Ende. §. 225.

Bestimmung der Reibung. §. 226.

IX. Kapitel. Vom Rade an der Welle.

Erklärungen. §. 227.

Verhältniß der Kraft zur Last. §. 228.

Lauftrad. §. 229.

Haspel mit Reibung.	§. 230—235.
Anwendung auf die feste Rolle.	§. 236.
Auf die bewegliche Rolle.	§. 237.
Verkürzung der Rechnung.	§. 238.
Reibung am stehenden Zapfen.	§. 239.
Tretscheibe.	§. 240.
Mit Reibung.	§. 241—242.

X. Kapitel. Vom Räderwerke und der Gestalt der Zähne, Rämme und Daumen.

Erklärungen.	§. 243.
Gleichgewicht am Räderwerke.	§. 244—245.
Bedingungen für die beste Gestalt der Zähne und Rämme.	§. 246.
Stirnrad mit Zähnen und Getriebe mit Stöcke.	§. 247—249.
Zusammenstellung der Gleichungen zur Bestimmung der Größen bei der Anordnung der Zähne.	§. 250.
Die Länge des Zahns zu finden.	§. 251.
Lehre (Chablone) zu den Zähnen.	§. 252—253.
Reibung zwischen Zahn und Stock.	§. 254—255.
Gestalt der Stäbe und Zähne, wenn ein Kumpf vom Stirnrad getrieben wird.	§. 256—257.
Länge des Zahns.	§. 258.
Gestalt der Zähne und Stäbe, wenn ein Stirnrad vom Kumpfe umgetrieben wird.	§. 259.
Länge des Stabes.	§. 260.
Reibung zwischen den Zähnen.	§. 261—262.
Reibung gegen den Span der Zähne.	§. 263.
Gestalt der Zähne, wenn ein Getriebe durch ein Stirn- rad bewegt wird, und die erste Berührung vor der Mittelpunktslinie erfolgt.	§. 264.
Wenn ein Stirnrad durch ein Getriebe bewegt wird.	§. 265.
Kammrad und Trilling.	§. 266.
Gestalt der Rämme und Stöcke, wenn ein Trilling durch ein Kammrad getrieben wird.	§. 267.

Reibung zwischen den Rämmen und Stäben.	§. 268.
Rammrad und Getriebe mit Zähnen. . . .	§. 269.
Gestalt der Zähne dieser Räder. . . .	§. 270.
Reibung zwischen Zahn und Ramm. . . .	§. 271.
Gezähnte Stange. Rammbaum. . . .	§. 272.
Gestalt der Zähne und Stöcke beim Rammbaum, welcher einen Trilling bewegt. . . .	§. 273.
Reibung.	§. 274.
Gestalt der Zähne und Stöcke, wenn der Trilling vom Rammbaume getrieben wird. . . .	§. 275.
Reibung.	§. 276.
Gestalt der Zähne, wenn ein Getriebe einen Ramm- baum treibt.	§. 277.
Reibung.	§. 278.
Stampfer, Hebezapfen, Hebedaumen. . . .	§. 279.
Anordnung der Daumen.	§. 280—281.
Reibung an den Scheidelatten und Daumen. .	§. 282—283.
Theilung der Daumen.	§. 284.
Gestalt der Daumen, wenn die Theilung und Erhe- bungshöhe gegeben sind.	§. 285.
Wenn die Last nicht vertikal gehoben wird. .	§. 286.
Die Last soll auf dem Daumen wieder herabsinken.	§. 287.
Gestalt der Daumen bei einer drehenden Bewegung des Widerstandes.	§. 288—291.
Wenn eine Stange einen Hebel drehen soll. .	§. 292.
Gestalt der Einschnitte eines horizontalen Rades zur Bewegung eines Hebels.	§. 293.
Anmerkung.	§. 294.

XI. Kapitel. Von den gespannten Seilen.

(I.) Von der Seilmaschine.

Erklärungen.	§. 295.
Drei Kräfte.	§. 296.
Der Ort wo ein Gewicht am aufgehängten Seile in Ruhe kommt.	§. 297—298.

Von drei Gewichten an einem Seile hängen zwei über Rollen.	§. 299.
Drei Kräfte und eben so viel Punkte in ihrer Richtung sind gegeben, man sucht die Richtungen.	§. 300.
Pressungen welche ein ziehendes Pferd leidet. §. 301—302.	
Mehrere Kräfte welche an einem Seile nach verschiedenen Richtungen wirken.	§. 303.
Die Größe zweier Gewichte an einer Seilmaschine zu bestimmen. Seilwage.	§. 305.
Mehrere Kräfte nach parallelen Richtungen.	§. 306.
Gebogenes Seil. Kettenlinie.	§. 308.
Ort wo ein Gewicht am aufgehängten Seile in Ruhe kommt, wenn das eine Ende über eine Rolle geht. §. 309.	
(II.) Von der Reibung eines um einen Cylinders gespannten Seils.	
Bestimmung der Kraft.	§. 311—312.
(III.) Von der Steifigkeit der Seile.	
Erklärungen.	§. 313.
Allgemeiner Ausdruck für die Steifigkeit.	§. 314.
Amontons's und Coulomb's Versuche.	§. 315—316.
Folgerungen.	§. 317—319.
Ausdruck zur Berechnung der Steifigkeit.	§. 320.
Bei einer festen Rolle.	§. 321.
Bei einer beweglichen Rolle.	§. 322.
Masse Seile.	§. 323.
(IV.) Von den Rollen- und Flaschenzügen.	
Erklärungen.	§. 324.
Kraft am Rollenzuge.	§. 325.
Mit Reibung.	§. 327.
Kraft am Flaschenzuge.	§. 329.
Mit Reibung.	§. 330.
Wenn die Durchmesser der Rollen verschieden sind. §. 331.	

S t a t i k
der
f e s t e n K ö r p e r.

E r s t e r B a n d.

E i n l e i t u n g.

§. 1.

Die Ursache, durch welche ein Körper bewegt wird oder ein Bestreben zur Bewegung erhält, heißt Kraft (*Vis, Force*). Wirkt eine Kraft beständig auf einen Körper, so kann die Bewegung des Körpers durch einen Widerstand (*Resistentia, Résistance*) aufgehoben werden, nicht die Kraft. Das was alsdann der Widerstand leidet, heißt Druck (*Pressio, Pression*), und die grade Linie, nach welcher die Kraft den Körper bewegen würde, die Richtung (*Directio, Direction*) der Kraft oder des Drucks.

Sind mehrere Kräfte so an einem Körper angebracht, daß sich ihre Wirkungen aufheben und keine Bewegung des Körpers erfolgt, so sagt man: die Kräfte sind im Gleichgewicht (*Aequilibrium, Equi-*

libre). Die Wissenschaft, welche die Gesetze angiebt, nach welchen das Gleichgewicht unter mehrern an einem Körper angebrachten Kräften erfolgt, heißt die Statik (*Statica, Statique*), und wenn solche auf feste Körper eingeschränkt wird, die Geostatik oder Statik der festen Körper.

Unter festen Körpern werden hier solche verstanden, deren Theile so stark unter einander zusammen hängen, daß sie durch die angebrachten Kräfte nicht aus ihrer Verbindung oder Lage gebracht werden können. Dasselbe gilt von festen Ebenen und Linien.

Dasjenige was den Raum (*Spatium, Espace*) eines Körpers ausfüllt, nennt man seine Materie, und die Menge der Materie, welche in dem Körper enthalten ist, seine Masse.

So ist bei einer goldenen Kugel, Gold die Materie, die Kugel der Körper, und die Menge des Goldes die Masse.

§. 2.

Die Körper, mit welchen wir Versuche anstellen können, verursachen gegen ihre Unterlagen einen Druck, und wenn diese Unterlage weggenommen wird, so fallen sie. Die Ursache dieses Drucks und der Bewegung ist eine Kraft, welche die Schwere (*Gravitas, Gra-*

vité) genannt wird, so wie die Größe des Drucks, welchen ein Körper, vermöge der Schwere gegen seine Unterlage ausübt, sein Gewicht (*Pondus*, *Poids*) heißt.

Schwere und Gewicht sind demnach wie Ursache und Wirkung verschieden, daher in den Wissenschaften die Verwechselung dieser Wörter zu vermeiden ist, obgleich solche im gemeinen Leben sehr häufig vorkommt. Nach dem Sprachgebrauche sagt man von einem Körper, welcher mehr Gewicht als ein anderer hat, er sey schwerer; dieser uneigentliche Ausdruck, welcher ohne Einführung eines neuen Wortes nicht vermieden werden kann, muß daher nicht unrichtig verstanden werden. Anstatt schwerer könnte man besser gewichtiger sagen.

Wäre der Druck, welchen ein Gewicht gegen seine Unterlage äußert, eben so groß als die Wirkung irgend einer Kraft (einer Stahlfeder u. dgl.) gegen eben diese Unterlage, so ist es in Absicht der Wirkung auf diese Unterlage einerlei, ob das Gewicht oder die Kraft angebracht wird. In dieser Rücksicht kann man ein Gewicht als eine Kraft ansehen oder ihr gleich setzen, und nach der Größe des Drucks welchen eine Kraft gegen einen Widerstand ausübt, die Größe der Kraft welche diesen Druck verursacht ausmessen, so daß sich hiernach Kräfte durch Gewichte ausdrücken lassen. Es

wird daher eine Kraft welche unter übrigens gleichen Umständen einen n mal so großen Druck auf einen Widerstand verursacht als eine andere, auch n mal so groß seyn.

Die Richtung, nach welcher ein Körper frei fällt, oder die Linie, welche ein sehr dünner Faden anzeigt, an welchem ein Körper frei herabhängt, heißt eine **vertikale**, **lothrechte**, **bleirechte** oder **senkrechte Linie**. Eine Ebene durch diese Linie gelegt, heißt eine **Vertikalebene**, so wie eine auf der Vertikallinie unter einem rechten Winkel stehende Linie, eine **horizontale** oder **wagerechte Linie** heißt. **Horizontalebenen** bilden also mit der Vertikallinie rechte Winkel.

Man pflegt auch jede Linie, welche mit einer andern nicht wagerechten einen rechten Winkel bildet, eine **senkrechte** oder **lothrechte Linie** zu nennen. Es würde aber zweckmäßiger seyn, sie **winkelrechte** oder **Normallinien** zu heißen, um sie nicht mit den Vertikallinien zu verwechseln, welche nur allein auf einer Horizontalebene winkelrecht oder normal stehen.

§. 3.

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper nach parallelen Richtungen, so wird eine Ebene, welche auf einer dieser Richtungen winkelrecht steht, auch auf allen übrigen winkelrecht seyn, weil man sich eine jede Rich-

tung nach Belieben verlängert vorstellen kann. Strebt nun jede Kraft für sich, diese Ebene nach einerlei Seite fort zu bewegen, so sagt man von den Kräften: daß sie an verschiedenen Punkten nach einerlei Richtung angebracht sind. Wären die Richtungen parallel, aber einige von diesen Kräften strebten die Ebene nach der entgegengesetzten Seite fort zu bewegen, so sagt man, diese Kräfte wirken mit den übrigen nach einerlei, aber entgegengesetzten Richtungen. Fallen die entgegengesetzten Richtungen zweier Kräfte in einerlei grade Linie, so sind die Richtungen dieser Kräfte einander gerade entgegengesetzt.

Bei den folgenden Untersuchungen wird vorausgesetzt, daß die Masse eines Körpers unter allen Umständen einerlei Gewicht behalte, oder daß die Schwere eine unveränderliche Kraft sey. Eben so werden die Richtungen der Schwere oder die Vertikallinien als parallel mit einander angenommen:

Wenn gleich die Schwere nicht als eine unveränderliche Kraft angesehen werden kann, weil sie von den Polen nach dem Aequator und in größeren Abständen vom Mittelpunkt der Erde abnimmt: so kann solche doch für die Abstände derjenigen Körper unter einander, welche bei den folgenden Untersuchungen in Betrachtung kommen, als unveränderlich angesehen werden. Um einigermaßen zu beur-

theilen, wiewfern die angenommene Voraussetzung statthaft ist, so folgt aus Gründen, welche hier nicht auseinander gesetzt werden können, daß derselbe Körper, welcher in Berlin seine Unterlage mit einem Gewichte von 100000 Pfund drückt, in Paris nur einen Druck von 99969, und unter dem Aequator nur von 99638 Pfund ausüben wird; dagegen dieser Körper unter den Polen einen Druck von etwa 100178 Pfund verursacht. Die Voraussetzung paralleler Vertikallinien in der Statik, läßt sich eben so leicht rechtfertigen. Denn so fern sich zwei Vertikallinien im Mittelpunkt der Erde schneiden, so ist doch für die Abstände, unter welchen hier Körper betrachtet werden, der Durchschnittspunkt so weit entfernt, daß man diese Vertikalen ohne Bedenken als parallel annehmen kann.

Erstes Kapitel.

Grundlehren der Statik, oder vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

§. 4.

Im Punkte A Figur 1. der graden, festen, unbiegsamen und gewichtlosen Linie AB, sey eine Kraft P nach der Richtung AB angebracht. Befindet sich nun am Ende B der Linie AB irgend ein Widerstand MN, welcher verhindert, daß sich diese Linie nicht fortbewegen kann, so wird der Punkt B so stark gegen den Widerstand in B drücken, als wenn die Kraft P unmittelbar in B nach derselben Richtung angebracht wäre. Wollte man annehmen, der Druck bei B sey kleiner als bei A, so müßte ein Theil der Kraft P vernichtet worden seyn, wozu kein Grund vorhanden ist. Eben so wenig läßt sich annehmen, daß der Druck bei B größer als bei A sey, weil es an einer Ursache zur Vergrößerung dieses Drucks fehlt. Es ist daher

Taf. I.

Fig. 1.

in Absicht auf den Druck bei B einerlei, in welchem Punkte der Linie AB die Kraft P nach der Richtung AB wirkt.

Verlängert man die Richtung AB nach BC, und BC ist eine feste, gewichtlose Linie oder ein unausdehnbarer, gewichtloser Faden, welcher mit dem Punkte B unzertrennlich verbunden ist, so wird aus gleichen Gründen, wenn die Kraft P im Punkte C nach der Richtung AC angebracht wird, der Punkt B nach der Richtung BC eben so stark gedrückt werden, als wenn die Kraft P unmittelbar im Punkte B nach der Richtung AC angebracht wäre.

Hieraus folgt, daß bei unveränderter Richtung, die Wirkung einer Kraft auf einerlei Punkt eines festen Körpers unverändert bleibt, in welchem Punkte ihrer Richtung diese Kraft auch angebracht werden mag, wenn nur der Punkt, an welchem die Kraft unmittelbar wirkt, mit dem festen Punkte des Körpers in eine unzertrennliche Verbindung gesetzt ist.

§. 5.

Mehrere Kräfte, welche nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt wirken, erhalten den Punkt in Ruhe, wenn sie im Gleichgewichte sind. Wäre kein Gleichgewicht vorhanden, so muß sich der Punkt bewegen, und weil einerlei Punkt in derselben Zeit nur einerlei Weg durchlaufen kann, so kann auch die Richtung des Drucks, welche aus sämtlichen Kräften entspringt, nur nach einerlei Linie gehen.

§. 6.

Zwei gleiche Kräfte, welche auf einen Punkt oder auf einen festen Körper nach grade entgegengesetzten Richtungen wirken, heben sich auf oder halten einander im Gleichgewicht, weil durchaus kein Grund vorhanden ist, weshalb eine Kraft die andere überwältigen sollte. Findet man umgekehrt, daß zwei Kräfte in grade entgegengesetzten Richtungen, ohne Mitwirkung einer dritten Kraft, einander im Gleichgewicht halten, so kann man hieraus auf die Gleichheit der Kräfte schließen.

Diese Gleichheit der Kräfte muß aber nur von ihren Wirkungen verstanden werden, wovon hier allein die Rede ist.

Sind die beiden Kräfte, welche auf einen gemeinschaftlichen Punkt in grade entgegengesetzter Richtung wirken, ungleich, so kann kein Gleichgewicht erfolgen. Soll daher ein Punkt, auf welchen eine Kraft wirkt, in Ruhe bleiben, so muß eine eben so große Kraft nach grade entgegengesetzter Richtung wirken. Findet dies nicht statt, so kann auch kein Gleichgewicht erfolgen.

§. 7.

Mehrere Kräfte, welche nach einerlei Richtung auf einen gemeinschaftlichen Punkt wirken, vereinigen sich zu einer einzigen Kraft, welche der Summe dieser Kräfte gleich ist; daher wird auch eine einzige eben so große Kraft, nach grade entgegengesetzter Richtung angebracht, mit sämtlichen Kräften im Gleichgewichte seyn. Verursacht z. B. die eine Kraft einen Druck nP , und die andere nach derselben Richtung einen

Druck mP , so ist der gesammte Druck $(n + m)P$ und eine Kraft $= (n + m)P$ nach gerade entgegengesetzter Richtung angebracht, ist mit den beiden Kräften nP und mP im Gleichgewichte.

§. 8.

Wenn verschiedene an einem freien Punkte angebrachte Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind, und man fügt neue Kräfte hinzu, welche ebenfalls unter sich das Gleichgewicht halten, so müssen sämtliche Kräfte unter einander im Gleichgewichte seyn, weil kein Grund vorhanden ist, weshalb dasselbe gestört werden sollte. Eben so läßt sich einsehen, daß, wenn mehrere Kräfte im Gleichgewichte sind, und man einige von denselben, die unter sich im Gleichgewichte stehen, wegnimmt, hiedurch das Gleichgewicht der übrig bleibenden Kräfte nicht gestört werden könne.

§. 9.

Findet unter mehrern nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften ein Gleichgewicht statt, so muß dasselbe auch noch bestehen, wenn jede einzelne Kraft doppelt oder gleichvielfach wirkt, oder wenn von jeder einzelnen Kraft die Hälfte oder ein bestimmter Theil des Ganzen genommen wird. Dieses läßt sich sogleich mit Hülfe des vorigen §. einsehen, es folgt daher ganz allgemein, daß wenn sich mehrere Kräfte im Gleichgewichte befinden, so werden auch andere Kräfte im Gleichgewichte seyn, wenn sie den erstern proportional sind, und in eben den Richtungen gegen einander wirken.

Wären die drei Kräfte P , Q , R , welche nach verschiedenen Richtungen an einem Punkte wirken, mit einander im Gleichgewichte, so wird dies auch von den Kräften p , q , r gelten, wenn sie nach gleichen Richtungen an einem Punkte angebracht sind, und wenn sich $p : q : r$ wie $P : Q : R$ verhalten.

Auch ist es leicht, wenn eine von den Kräften p , q , r gegeben ist, die beiden übrigen mit Hülfe der bekannten Kräfte P , Q , R zu finden. Wenn z. B. r gegeben wäre, so hat man

$R : P = r : p$ und $R : Q = r : q$, daher ist

$$p = \frac{r}{R} P \text{ und } q = \frac{r}{R} Q.$$

§. 10.

Zwei Kräfte P , Q die nach Richtungen GP , GQ , Figur 2. a, welche nicht in eine grade Linie fallen, auf einen Punkt G wirken, können einander nicht im Gleichgewichte erhalten; denn setzt man voraus daß sie im Gleichgewichte wären, so müßte jede dritte Kraft P' welche auf diesen Punkt wirkte, denselben nach ihrer Richtung fort bewegen (§. 5.). Nimmt man nun $P' = P$ und bringt P' in grade entgegengesetzter Richtung von P an, so sind P und P' im Gleichgewichte (§. 6.), daher muß sich der Punkt G nach der Richtung der Kraft Q bewegen. Da er sich aber auch nach der Richtung der Kraft P' bewegen, also zwei ganz verschiedene Richtungen durchlaufen soll, welches unmöglich ist, so folgt hieraus, daß sich die Kräfte P und Q unter dem Winkel PGQ nicht im Gleichgewichte halten können. Es muß daher von beiden Kräften ein Druck nach irgend einer Richtung GR entste-

Zaf.
Fig. 2.

Fig. 2.

hen, und weil die Richtungen beider Kräfte P , Q in einerlei Ebenen fallen, so muß auch die Richtung GR in derselben Ebene liegen. Denn wollte man annehmen, daß die Richtung GR mit der Ebene in welcher die Kräfte P , Q wirken, einen Winkel einschließt, so müßte aus gleichen Gründen auch auf der andern Seite der Ebene eine Richtung wie GR entstehen. Weil aber einerlei Punkt G nicht zugleich verschiedene Wege durchlaufen kann, so muß die Richtung GR mit den Richtungen der Kräfte P , Q in einerlei Ebene liegen.

Die Richtung GR nach welcher sich der Punkt G durch die Wirkung der beiden Kräfte P , Q fort zu bewegen strebt, heißt die *mittlere Richtung* dieser Kräfte, und eine dritte Kraft R , welche den Punkt G nach der Richtung GR eben so drückt als die beiden Kräfte P , Q , heißt die *Mittelkraft* (*Vis composita. Force résultante*) von den *Seitenkräften* (*Vires componentes. Forces composantes.*) P , Q .

Der Winkel $PGR = \phi$, welchen die Richtung der Mittelkraft R mit der Richtung der Seitenkraft P einschließt, heißt ein *Richtungswinkel* der Mittelkraft und der Winkel PGQ , der Richtungswinkel der Seitenkräfte.

Weil die Mittelkraft R den Punkt G eben so stark nach GR drückt wie die Seitenkräfte P , Q , so muß auch eine Kraft $R' = R$, welche nach einer der Mittelkraft grade entgegengesetzten Richtung RG angebracht wird, den Punkt G in Ruhe erhalten, wenn

an demselben keine anderen Kräfte als P und Q wirken. Die Kraft R' welche sich mit den Kräften P, Q im Gleichgewichte befindet, heißt die **Gegenkraft**, um sie von der gleich großen Mittelkraft zu unterscheiden. Daher sind unter diesen Umständen die drei Kräfte P, Q, R' am Punkt G im Gleichgewichte; oder die **Seitenkräfte** sind mit der **Gegenkraft** im Gleichgewichte, wenn letztere an dem gemeinschaftlichen Punkte G nach grade entgegengesetzter Richtung der Mittelkraft angebracht wird. Eben so folgt aus dem Vorhergehenden, daß man in Absicht des Drucks auf den Punkt G, anstatt der Seitenkräfte P, Q die Mittelkraft R nach ihrer Richtung G R, oder anstatt dieser die **Seitenkräfte** P, Q nach ihren Richtungen anbringen kann.

Weil die **Gegenkraft** R' der Mittelkraft R gleich ist, aber eine grade entgegengesetzte Lage hat, so muß in den Fällen wo durch Rechnung die **Gegenkraft** aus der Mittelkraft bestimmt werden soll, $R' = -R$ gesetzt werden.

Findet man aus den **Seitenkräften** die Mittelkraft, so nennt man dies die **Mittelkraft aus den Seitenkräften zusammensetzen** (*Compositio virium. Composition des Forces*). Werden hingegen aus der Mittelkraft die **Seitenkräfte** gefunden, so sagt man die **Mittelkraft ist in die Seitenkräfte zerlegt worden** (*Resolutio virium. Décomposition des Forces*).

Wird hier und in der Folge nicht besonders erinnert daß die Richtungen der Kräfte in einerlei Ebene liegen, so wird dies jedesmal vorausgesetzt. Auch soll

jeder Punkt auf welchen Kräfte wirken, als ein frei beweglicher Punkt gelten, wenn nicht das Gegentheil angeführt wird.

§. 11.

Zaf. 1.
Fig. 3.

Aufgabe. Die beiden Seitenkräfte P , Q Figur 3. wirken auf den Punkt G nach Richtungen GP , GQ , welche sich unter dem rechten Winkel PGQ schneiden. Man fragt wie groß die Gegenkraft R seyn wird, welche den gegebenen Seitenkräften das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Es sey RG die Richtung der Gegenkraft R , welche mit der Seitenkraft P irgend einen Winkel $PRG = \varphi$ einschließt. Man ziehe durch G auf GR die Linie qp' winkelrecht, so ist der Winkel $qGP = RGQ = 90^\circ - \varphi$. Da nun die Linie GP gegen GR und Gq eben die Lage hat, wie GR gegen GP und GQ , und weil R mit P und Q im Gleichgewichte ist, also auch nach entgegengesetzter Richtung als Mittelkraft von P , Q angenommen werden kann, so müssen sich auch zwei Kräfte p , q nach den Richtungen GR , Gq angeben lassen, welche eben so viel wirken als die Kraft P nach der Richtung GP , oder P läßt sich in die Kräfte p , q zerlegen. Denn eben so wie R die Gegenkraft, oder in entgegengesetzter Richtung die Mittelkraft von P , Q ist, so läßt sich P als Mittelkraft von p , q ansehen, und weil R gegen P , Q eben die Lage hat, wie P gegen p , q , so verhält sich (§. 9.).

$$R : P = P : p \text{ also ist } p = \frac{P^2}{R} \text{ und}$$

$$R : Q = P : q \text{ also ist } q = \frac{P \cdot Q}{R}$$

Ferner ist der Winkel $Q G p' = \varnothing$; man kann daher auch Q als eine Mittelloft ansehen, und solche in die Seitenkräfte p' , q' nach $G p'$, $G R$ zerlegen, weil Q gegen p' , q' eben die Lage hat wie R gegen P , Q . Hienach verhält sich

$$R : P = Q : p' \text{ also ist } p' = \frac{P \cdot Q}{R} \text{ und}$$

$$R : Q = Q : q' \text{ also ist } q' = \frac{Q^2}{R}.$$

Wenn daher R mit P , Q im Gleichgewichte ist, so können die Kräfte P und Q weggenommen und anstatt derselben die Kräfte p , q und p' , q' angebracht werden, ohne das Gleichgewicht zu stören (§. 10.). Es ist aber $q = p'$ weil beide $= \frac{P \cdot Q}{R}$ sind, daher können auch diese beide Kräfte weggenommen werden (§. 8.), und es müssen noch die Kräfte p und q' , welche nach $G R$ wirken, der Kraft R , welche ihnen grade entgegen nach $R G$ wirkt, das Gleichgewicht halten und ihr gleich seyn, (§. 5.) daher ist

$$R = p + q' = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R} = \frac{P^2 + Q^2}{R} \text{ oder}$$

$$R^2 = P^2 + Q^2.$$

Hieraus folgt, daß wenn sich die Richtungen der Seitenkräfte unter einem rechten Winkel schneiden, so muß das Quadrat der Mittelloft oder der Gegenkraft, der Summe von den Quadraten der Seitenkräfte gleich seyn.

§. 12.

Zaf. I.
Fig. 4.

Die Größen und Richtungen mehrerer Kräfte lassen sich bequem durch Längen und Lagen grader Linien vorstellen, und so oft die für sämtliche Kräfte gemeinschaftliche Einheit in jeder einzelnen Kraft enthalten ist, so oft muß auch irgend eine grade Linie, welche als Einheit angenommen wird, in jeder der Linien, welche die einzelnen Kräfte darstellen, enthalten seyn. Stellt z. B. die Linie GA Figur 4. die Größe und Richtung einer Kraft P und GB einer Kraft Q vor, so ist, wenn $GB = \frac{2}{3} GA$ ist, auch $Q = \frac{2}{3} P$, und überhaupt $P:Q = GA:GB$.

Hieraus sieht man, wie fern es erlaubt ist, AG mit der Kraft P zu verwechseln, und $AG = P$ und $BG = Q$ zu setzen.

Auch kann man zur Vergleichung der Kräfte untereinander, die Größe derselben durch Zahlen ausdrücken, welche sich auf eine gemeinschaftliche Einheit beziehen.

§. 13.

Zaf. I.
Fig. 5.

Zwei gleiche Kräfte P, Q , deren Größe und Richtung durch die Linien GP, GQ Figur 5. ausgedrückt werden, wirken unter einem rechten Winkel PGQ auf den Punkt G ; man zeichne das Quadrat $PGQR$, so wird die Diagonale GR die Größe und Richtung der Mittelkraft R vorstellen.

Beweis. Aus §. 11. folgt, daß GR die Größe der Mittelkraft R ist. Ferner sind die Kräfte P, Q einander gleich, also muß hier von der Wirkung, welche

P hervorbringt, eben das gelten, was von der Wirkung der Kraft Q gilt, daher muß auch die Richtung GP gegen GR eben die Lage haben wie GQ gegen GR, oder die Winkel PGR und QGR müssen einander gleich seyn. Wollte man annehmen, RG wäre nicht die gesuchte Richtung, so müßte eine von den beiden Kräften P, Q den Punkt G mehr nach sich ziehen als die andere, welches aber aus gleichen Gründen von der andern Kraft gelten müßte. Daher, weil einerlei Punkt nicht verschiedene Wege zugleich durchlaufen kann (§. 5.), so kann die mittlere Richtung GR nur eine solche Lage erhalten, daß sie mit den Richtungen der Seitenkräfte gleiche Winkel bildet; folglich ist jeder von den beiden Richtungswinkeln der Mittelkraft, die Hälfte eines rechten Winkels oder $PGR = RGR = 45^\circ$.

§. 14.

Die Richtungen zweier Seitenkräfte P, Q, welche im Punkte G Figur 4. nach GA und GB wirken, schneiden sich unter einem rechten Winkel AGB. Man nehme $GA = P$ und $GB = Q$, ziehe AB, so ist im rechtwinklichten Dreieck AGB, $AB^2 = AG^2 + GB^2$, daher wenn R die Größe der Mittelkraft von P, Q bezeichnet, so ist $AB = R$ (§. 11.) Man kann also durch das rechtwinklichte Dreieck die Größe der Kräfte P, Q, R für das Gleichgewicht darstellen, nur bleibt die Lage von der Richtung der Mittelkraft gegen die Richtungen der Seitenkräfte noch ungewiß.

Zaf. 1.
Fig. 4.

Wird im rechtwinklichten Dreieck ABC der Winkel, welchen die Seitenkraft $GA = P$ mit der Hypothenuse AB einschließt, oder $GAB = \alpha$ gesetzt, so ist

$$GA = AB \cos \alpha \text{ und } GB = AB \sin \alpha \text{ oder}$$

$$P = R \cos \alpha \text{ und } Q = R \sin \alpha.$$

Es kann daher, wenn der Winkel α bekannt ist, welchen die Seitenkraft P mit der Hypothenuse des rechtwinklichten Dreiecks einschließt, welches aus den Kräften P, Q, R entsteht, mit Hülfe der Mittelkraft R , eine jede von den Seitenkräften P, Q gefunden werden, vorausgesetzt, daß letztere unter einem rechten Winkel wirken.

Zur Abkürzung soll der Winkel α ein Hypothenusenwinkel heißen. Ist daher für drei Kräfte P, Q, R die Kraft $P = R \cos \alpha$ und $Q = R \sin \alpha$, so ist α der Hypothenusenwinkel dieser Kräfte.

§. 15.

Es werde vorausgesetzt, daß an dem Punkte G Taf. I. Figur 6. die Seitenkräfte P, Q nach den auf einander winkelrechten Richtungen GP, GQ angebracht, und durch R ihre Mittelkraft nach der Richtung GR bezeichnet werde, wenn die Kraft R mit P den Richtungswinkel $PGR = \varphi$ einschließt. Ist nun ferner für die gegebenen Kräfte P, Q, R der Hypothenusenwinkel $= \alpha$ (§. 14.), so läßt sich für den Fall, daß die Mittelkraft R in die beiden auf einander winkelrechten Seitenkräfte P' und Q' unter dem Richtungs-

winkel $P'GR = 2\phi$ gelegt werde, der zu den Kräften P' , Q' , R gehörige Hypothenusenwinkel finden.

Es ist der Winkel $PGP' = PGR = \phi$ und wenn $P'G$ nach q' verlängert wird, so sind, wenn GQ' auf $P'q'$ winkelrecht steht, $P'GQ'$, $Q'Gq'$ rechte Winkel, und man kann mittelst des bekannten Verhältnisses der Kräfte P , Q , R , die Kraft P als Mittelkraft, in die Seitenkräfte p , q nach GP' , GQ' und Q als Mittelkraft, in die Seitenkräfte p' , q' nach GQ' , Gq' zerlegen. Alsdann ist (§. 8.)

$$R : P = P : p \text{ also } p = \frac{P^2}{R}$$

$$R : Q = P : q \quad q = \frac{P \cdot Q}{R}$$

$$R : P = Q : p' \quad p' = \frac{P \cdot Q}{R}$$

$$R : Q = Q : q' \quad q' = \frac{Q^2}{R}$$

Da nun die Kräfte p , q , p' , q' eben die Wirkung wie P , Q hervorbringen (§. 10.), so kann man P , Q wegnehmen, und dafür die Kräfte p , q , p' , q' nach den angegebenen Richtungen anbringen, von welchen alsdann R die Mittelkraft ist. Man setze

$$p - q' = P' \text{ und } q + p' = Q'$$

so ist auch R die Mittelkraft von P' , Q' und bildet mit der Seitenkraft P' den Richtungswinkel $RGP' = 2\phi$.

Es ist aber

$$P' = p - q' = \frac{P^2 - Q^2}{R} \text{ und}$$

$$Q' = q + p' = \frac{2P \cdot Q}{R}$$

Nach §. 14. ist ferner

$$P = R \cos \alpha \text{ und } Q = R \sin \alpha, \text{ daher}$$

$$P^2 - Q^2 = R^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = R^2 \cos 2 \alpha \text{ und}$$

$$2 P Q = 2 R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin 2 \alpha \text{ oder}$$

$$P' = R \cos 2 \alpha \text{ und } Q' = R \sin 2 \alpha$$

daher ist (§. 14.) 2α der Hypothenusenwinkel für die Kräfte P' , Q' , R .

Es folgt also hieraus daß wenn eine Mittelkraft R den Richtungswinkel Φ und Hypothenusenwinkel α mit einer Seitenkraft P einschließt, so wird dieselbe Mittelkraft R , wenn solche mit einer andern Seitenkraft P' den Richtungswinkel 2Φ bildet, auch den Hypothenusenwinkel 2α einschließen müssen.

Auch läßt sich eben so beweisen, daß wenn dieser Satz für $n \Phi$ gilt, er auch für $(n + 1) \Phi$ gelten müsse, wo n jede ganze Zahl bedeuten kann. Denn wenn für die Seitenkräfte P , Q Figur 7. die zugehörigen Richtungs- und Hypothenusenwinkel Φ und α sind, und wenn $n \Phi$ und $n \alpha$ ebendasselbe für die Kräfte P' und Q' bei einerlei Mittelkraft R bedeuten, so ist §. 14.

$$P = R \cos \alpha, \quad Q = R \sin \alpha;$$

$$P' = R \cos n \alpha, \quad Q' = R \sin n \alpha.$$

Für jede zwei andere Seitenkräfte P'' , Q'' sei $(n + 1) \Phi$ der Richtungswinkel, so erhält man auf eine ähnliche Art wie oben, wenn die Kräfte P' und Q' in die Seitenkräfte p , q und p' , q' zerlegt werden

$$R : P = P' : p \text{ und } R : P = Q' : p'$$

$$R : Q = P' : q \quad R : Q = Q' : q' \text{ also}$$

$$p - q' = \frac{PP' - QQ'}{R} = P'' \text{ und}$$

$$q + p' = \frac{QP' + PQ'}{R} = Q'' \text{ oder}$$

$$PP' - QQ' = R^2 (\cos \alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \sin n\alpha) = R^2 \cos (n+1)\alpha$$

und

$$QP' + PQ' = R^2 (\sin \alpha \cos n\alpha + \cos \alpha \sin n\alpha) = R^2 \sin (n+1)\alpha$$

folglich

$$P'' = R \cos (n+1)\alpha \text{ und } Q'' = R \sin (n+1)\alpha.$$

Nun gilt dieser Satz für $n = 2$, daher auch für $n + 1 = 3$, also auch für $n = 4$, u. s. w.

Dieser Beweis welcher für jede zwei ganze Zahlen gilt, muß auch für alle mögliche Brüche gelten, weil diese auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, als ganze Zahlen von kleinerer Einheit angesehen werden können. Er muß aber auch für irrationale Zahlen gelten, weil sich diese durch Brüche ausdrücken lassen, welche der Wahrheit so nahe kommen als erforderlich ist.

Es ist nun ganz allgemein erwiesen, daß wenn die Richtungs- und Hypothenusenwinkel zweier Seitenkräfte Φ und α sind, so werden zwei andere Seitenkräfte bei ungeänderter Mittellkraft noch im Gleichgewichte bleiben, wenn ihre Richtungs- und Hypothenusenwinkel $n\Phi$ und $n\alpha$ sind. Man setze $n\Phi = \Phi'$ und $n\alpha = \alpha'$, so verhält sich

$$\Phi : \alpha = \Phi' : \alpha' \text{ oder es ist } \frac{\Phi}{\alpha} = \frac{\Phi'}{\alpha'}$$

Da nun dieser Satz ganz allgemein gilt, Φ mag so groß oder klein als man nur immer will angenommen werden, so folgt, daß wenn in irgend einem Falle

das Verhältniß zwischen Φ und α' bekannt ist, daraus für jeden andern Fall das Verhältniß zwischen Φ und α gefunden wird. Für $\Phi' = 45^\circ$ ist $\alpha' = 45^\circ$ (§. 13.) oder $\frac{\Phi'}{\alpha'} = 1$, daher ist ganz allgemein $\frac{\Phi}{\alpha} = 1$ oder $\Phi = \alpha$.

Es muß daher die Richtung der Mittelkraft R mit den Richtungen ihrer Seitenkräfte P, Q eben die Winkel bilden, welche entstehen, wenn man diese drei Kräfte in ein Dreieck zusammenstellt, vorausgesetzt, daß sich die Richtungen der Seitenkräfte unter einem rechten Winkel schneiden.

Taf. I.
Fig. 8.

Wenn daher im Rechteck GPRQ Figur 8. die Linien GP, GQ die Größen und Richtungen der Seitenkräfte P, Q vorstellen, so ist die Diagonale RG die Größe und Richtung der Mittelkraft R. Man kann also mit Hülfe eines Rechtecks aus den Seitenkräften die Mittelkraft, und aus der Mittelkraft die Seitenkräfte finden, wenn vorausgesetzt wird, daß die Richtungen der Seitenkräfte auf einander winkelrecht stehen.

§. 16.

Fig. 9. 10.

Unter irgend einem Winkel PGQ Figur 9. und 10. wirken die Seitenkräfte $P = GP$ und $Q = GQ$; wird nun das Parallelogramm PGQR aus den Seiten GP, GQ ergänzt, so ist die Diagonale GR die Größe und Richtung der Mittelkraft R.

Beweis. Man ziehe AB durch G, PD aus P, QE aus Q auf GR winkelrecht, und PA, QB mit DG parallel, so ist $\triangle DPR = \triangle GEQ$, daher $GB = EQ = PD = AG$ und $GE = RD$.

Nun zerlegt sich $GP = P$ in die Seitenkräfte GA und GD , und $GQ = Q$ in die Seitenkräfte GB und GE . Aber die Kräfte GA und GB heben sich auf, weil sie einander gleich und grade entgegengesetzt sind, daher bleibt noch $GD + GE = GR$ die Größe und Richtung einer Kraft, welche eben so viel wie P und Q wirkt; es ist daher die Kraft $GR = R$ die den Seitenkräften P, Q entsprechende Mittelkraft, welche nach der Richtung GR wirkt, oder wenn man die Kraft R nach entgegengesetzter Richtung RG anbringt, so ist $GR = R$ als Gegenkraft mit den Seitenkräften P, Q im Gleichgewichte.

Fällt die winkelsechte Linie AB unterhalb der Linie GQ Figur 11., so muß EG von GD abgezogen werden, weil die Kräfte EG und GD nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und sich zum Theil aufheben. Alsdann ist $GD - GE = GR = R$.

Zaf. 8.
Fig. 11.

§. 17.

Zusatz. Wenn umgekehrt die Richtungen GP und GQ , Figur 9. der unbekannten Seitenkräfte, und die Richtung GR ihrer unbekannten Mittelkraft gegeben sind, und man zeichnet mittelst dieser drei Richtungen das Parallelogramm $GPRQ$, so kann man behaupten, daß die den Richtungen GP und GQ entsprechenden Seitenkräfte P und Q , sich wie die Seiten GP und GQ des Parallelogramms verhalten; oder daß

Zaf. 8.
Fig. 9.

$$P : Q = GP : GQ.$$

Wollte man annehmen, daß sich P zu Q nicht wie

GP zu GQ verhalte, sondern wie $Gp : GQ$, so zeichne man das Parallelogramm $GprQ$ und ziehe die Diagonale Gr , so ist diese die mittlere Richtung der Seitenkräfte P, Q ; welches der Voraussetzung, daß GR die mittlere Richtung sey, offenbar widerspricht. Hieraus folgt, daß man mit Hülfe eines Parallelogramms, welches hier das Parallelogramm der Kräfte (Parallelogrammum virium) genannt wird, die Bedingungen angeben kann, unter welchen drei auf einen Punkt wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, weil jedesmal zwei Seiten des Parallelogramms die Größe und Richtung der Seitenkräfte, und diejenige Diagonale, welche mit beiden Seiten einen gemeinschaftlichen Punkt hat, die Größe und Richtung der Gegenkraft für das Gleichgewicht angiebt. Hiernach kann man eben so leicht, wenn die Kräfte durch Linien ausgedrückt werden, aus den beiden Seitenkräften und ihrem Richtungswinkel, die Größe und Richtung der Gegen- oder Mittelkraft mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte finden, wie man aus den Richtungen der beiden Seitenkräfte und der gegebenen Mittelkraft, die Größe der Seitenkräfte durch eine leichte Zeichnung finden kann.

Auch folgt hieraus, daß sich eine jede Kraft, deren Größe und Richtung gegeben ist, nach unzähligen Richtungen, jedesmal in zwei Seitenkräfte zerlegen läßt, weil man eine unzählige Menge Parallelogramme über einer als Diagonale gegebenen Linie beschreiben kann.

Anmerkung. Man pflegt gewöhnlich die Lehre vom Parallelogramm der Kräfte aus der Lehre vom Hebel abzuleiten, wie dies von de la Hire, Kästner, Karsten u. in ihren Lehrbüchern geschehen ist. Die hier gegebene Darstellung ist ein Versuch, diesen Satz ohne Hülfe des Hebels zu beweisen. Zu den vorzüglichsten Bemühungen, den Beweis dieses Satzes unabhängig vom Hebel zu geben, kann man die von Dan. Bernoulli ⁽¹⁾, Lambert ⁽²⁾, d'Alembert ⁽³⁾, Foncenex ⁽⁴⁾, de la Place ⁽⁵⁾ und Du:Chayla ⁽⁶⁾ zählen.

§. 18.

Aufgabe. Die Größen dreier Kräfte P, Q, R sind durch die Linien AB, CD, EF, Figur 12. gegeben; man soll die Richtungen dieser Kräfte für das Gleichgewicht durch eine Zeichnung finden. Auf. I.
Fig. 12.

Auflösung. Aus den drei gegebenen Linien beschreibe man das Dreieck GHI, indem $GI = AB$,

⁽¹⁾ Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Acad. Petropol. Tom. I. A. 1724. p. 126.

⁽²⁾ Beiträge zum Gebrauche der Mathematik. 2. Theil. 2. Abschnitt. Berlin 1770. S. 468.

⁽³⁾ Opuscles Mathemat. T. I. Paris 1761. p. 169. Démonstration du principe de la composition des Forces. Opusc. Math. T. VI. Paris 1773. p. 360. Nouvelle Démonstration du Parallélogramme des Forces.

⁽⁴⁾ Sur les principes fondamentaux de la Mécanique. Miscellanea Taurinensis Tom. II. (1760—1761.) p. 299.

⁽⁵⁾ Mechanik des Himmels, übersetzt von Wurfhardt. Berlin 1800. 1. Theil. S. 2. u.

⁽⁶⁾ Démonstration du parallélogramme des forces. Correspondance sur l'école polytechnique, par Hachette. Tome I. Paris 1808. No. 4. p. 83.

$IH = CD$ und $GH = EF$ angenommen wird. Zu dem Dreiecke GHI ergänze man das Parallelogramm $GIHK$, so ist GI die Richtung der Kraft P , GK der Kraft Q und HG der Kraft R (§. 17.).

So fern aus den drei Seiten AB , CD , EF kein Dreieck zusammengesetzt werden kann, welches der Fall ist, wenn zwei Seiten kleiner als die dritte sind, so kann auch kein Parallelogramm der Kräfte entstehen, oder es ist unter drei gegebenen Kräften kein Gleichgewicht möglich, wenn zwei davon kleiner sind als die dritte.

§. 19.

Aufgabe. Die Bedingungen anzugeben, unter welchen drei Kräfte P , Q , R mit Bezug auf ihre Richtungswinkel im Gleichgewichte sind.

Taf. I.
Fig. 9.
α
β
δ

Auflösung. Man setze Figur 9. den Richtungswinkel der Kräfte P , R oder $PGR = \alpha$
 Q , R oder $QGR = \beta$
 P , Q oder $PGQ = \delta$

so ist $\alpha + \beta = \delta$. Nun verhält sich im Dreiecke GPR

$$GP : GR = \sin GRP : \sin GPR \text{ oder}$$

$$P : R = \sin \beta : \sin (180^\circ - \delta)$$

oder weil

$$\sin (180^\circ - \delta) = \sin \delta \text{ ist, so erhält man}$$

$$R \sin \beta = P \sin \delta. \quad [I]$$

Ferner verhält sich

$$GP : PR = \sin PRG : \sin PGR \text{ oder}$$

$$P : Q = \sin \beta : \sin \alpha \quad \text{daher ist auch}$$

$$P \sin \alpha = Q \sin \beta. \quad [II]$$

Aus dieser und der Gleichung [I] erhält man folgende Ausdrücke

$$(I) \quad P = \frac{Q \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{R \sin \beta}{\sin \delta}$$

$$(II) \quad Q = \frac{P \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{R \sin \alpha}{\sin \delta}$$

$$(III) \quad R = \frac{P \sin \delta}{\sin \beta} = \frac{Q \sin \delta}{\sin \alpha}$$

welche dazu dienen, wenn für das Gleichgewicht dreier Kräfte zwei Richtungswinkel und eine Kraft gegeben sind, die übrigen Kräfte durch Rechnung zu finden. Auch sieht man, wie aus einem Richtungswinkel und zwei Kräften die übrigen Richtungswinkel leicht bestimmt werden können.

Weil $GD = GP \cos \alpha$ und $RD = PR \cos \beta$, so ist $GR = GD + RD = GP \cos \alpha + PR \cos \beta$, oder man findet die Mittelkraft, wenn die beiden Seitenkräfte nebst ihren Richtungswinkeln gegeben sind

$$(IV) \quad R = P \cos \alpha + Q \cos \beta$$

Ferner ist nach [II] $P \sin \alpha = Q \sin \beta$. Aber

$\beta = \delta - \alpha$, also $\sin \beta = \sin \delta \cos \alpha - \cos \delta \sin \alpha$ daher

$$P \sin \alpha = Q \sin \delta \cos \alpha - Q \cos \delta \sin \alpha \text{ oder}$$

$$Q \sin \delta = \frac{P \sin \alpha + Q \cos \delta \sin \alpha}{\cos \alpha} = P \operatorname{tg} \alpha + Q \cos \delta \operatorname{tg} \alpha$$

folglich findet man die Tangente des Winkels, welchen die Seitenkraft P mit der Mittelkraft R einschließt, oder

$$(V) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q \sin \delta}{P + Q \cos \delta}$$

und es kann daher aus beiden Seitenkräften und ihrem Richtungswinkel, die Richtung der Mittelkraft gefunden werden.

Zaf.
Fig.

Aus (V) und (II) erhält man

$$P + Q \cos \delta = \frac{Q \sin \delta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = R \cos \alpha$$

oder quadriert

$$P^2 + 2 P Q \cos \delta + Q^2 \cos^2 \delta = R^2 \cos^2 \alpha; \text{ aber (II) } \\ Q^2 \sin^2 \delta = R^2 \sin^2 \alpha$$

wenn nun beide Gleichungen addirt und $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ sowohl als $\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$ gesetzt werden, so ist

$$P^2 + 2 P Q \cos \delta + Q^2 = R^2$$

und man erhält hieraus die **Mittelkraft**

$$(VI) \quad R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos \delta}$$

so daß aus den beiden **Seitenkräften** und ihrem **Richtungswinkel** die **Mittelkraft** gefunden werden kann: Nur ist dabei zu bemerken, daß $\cos \delta$, also auch das Produkt $2 P Q \cos \delta$, negativ wird, wenn der Winkel δ stumpf ist.

Endlich erhält man aus (VI) den **Cosinus** des Winkels, welchen die **Seitenkräfte** einschließen, oder

$$(VII) \quad \cos \delta = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2 P Q}$$

Es wird kaum nöthig seyn hier zu bemerken, daß wenn man die für das **Gleichgewicht** erforderliche **Gegenkraft** sucht, alsdann die gefundene **Mittelkraft** nach grade entgegengesetzter Richtung angebracht werden muß.

1. **Beispiel.** Von zwei **Seitenkräften** P und Q schließt die erste mit der **Mittelkraft** einen Winkel von 70 Grad 53 Minuten, und die zweite mit eben dieser **Mittelkraft** einen Winkel von 49 Grad 7 Minuten ein. Die Kraft $P = 40$ Pfund ist gegeben, man soll Q finden.

Hier ist nach (II) $\alpha = 70^\circ 53'$ und $\beta = 49^\circ 7'$ daher

$$Q = \frac{P \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ 53'}{\sin 49^\circ 7'} \quad \text{oder wenn man mit}$$

Logarithmen rechnet

$$\text{Log } 40 = 1,6020600$$

$$\text{Log } \sin 70^\circ 53' = 9,9753648$$

$$11,5774246$$

$$\text{Log } \sin 49^\circ 7' = 9,8785470$$

$$1,6988776 = \text{Log } 49,9894 = \text{Log } Q$$

Es ist daher die Seitenkraft $Q = 49,9894$ Pfund.

2. Beispiel. Zwei Kräfte, $P = 40$ und $Q = 50$ Pfund wirken unter einem Winkel von 120 Grad $= \delta$ auf einen Punkt; man fragt, wie groß ist die Mittelfraft R , welche den Kräften P , Q das Gleichgewicht hält?

Weil $\cos \delta = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0,5$, so ist nach (VI) die Mittelfraft

$$R = \sqrt{1600 + 2500 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 0,5} = 45,83 \text{ Pfund.}$$

Wollte man auch den Richtungswinkel der Mittelfraft finden, so ist (V)

$$\text{tg } \alpha = \frac{50 \cdot 0,5 \sqrt{3}}{40 - 50 \cdot 0,5} = \frac{1}{2} \sqrt{3} = \text{tg } 70^\circ 53' 36'' = \text{tg } 250^\circ 53' 36''$$

und weil $\alpha < \delta$ seyn muß, so schließt die Kraft R mit P einen Richtungswinkel von 70 Grad 53 Minuten 36 Sekunden ein.

3. Beispiel. Aus den beiden Seitenkräften $P = 50$ und $Q = 64$ nebst der Mittelfraft $R = 58,26$ Pfund, den Richtungswinkel δ der beiden Seitenkräfte zu finden, wird nach (VII)

$$\cos \delta = \frac{58,26^2 - 50^2 - 64^2}{2 \cdot 50 \cdot 64} = -0,5002769$$

$$= -\cos 59^\circ 59' 6'' = \cos 120^\circ 0' 54'', \text{ daher}$$

$$\delta = 120^\circ 0' 54''.$$

§. 20.

1. Zusatz. Schneiden sich die Richtungen der Seitenkräfte P , Q unter einem rechten Winkel, so wird nach dem Vorhergehenden $\delta = 90^\circ$; $\beta = 90^\circ - \alpha$, daher $\sin \delta = 1$; $\sin \beta = \cos \alpha$ folglich

$$(I) \quad P = Q \cot \alpha = R \cos \alpha$$

$$(II) \quad Q = P \operatorname{tgt} \alpha = R \sin \alpha$$

$$(III) \quad R = P \sec \alpha = Q \operatorname{cosec} \alpha$$

$$(IV) \quad R = P \cos \alpha + Q \sin \alpha$$

$$(V) \quad \operatorname{tgt} \alpha = \frac{Q}{P}$$

$$(VI) \quad R = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

§. 21.

2. Zusatz. Sind die Seitenkräfte P , Q einander gleich, also $P = Q$, so sind, weil (I) §. 19. $P \sin \alpha = Q \sin \beta$ ist, also $\sin \alpha = \sin \beta$, auch die Winkel α , β , welche die Seitenkräfte mit der Mittelfkraft einschließen, gleich groß, und man erhält $\delta = 2\alpha$, also $\sin \delta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ daher

$$(I) \quad P = \frac{R \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2} R \sec \alpha$$

$$(II) \quad R = \frac{P \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 P \cos \alpha$$

$$(III) \quad \cos \alpha = \frac{R}{2 P}$$

$$(IV) \quad \cos 2\alpha = \frac{R^2 - 2 P^2}{2 P^2}$$

§. 22.

Wenn die Kräfte P , Q , R im Gleichgewichte sind, indem die Seitenkräfte P , Q den Richtungswinkel δ einschließen, so ist P mit Q auch am Richtungs-