Des

Apollonius von Perga

sieben Bücher über Kegelschnitte

nebst dem durch Halley wieder hergestellten

achten Buche.

Deutsch bearbeitet

von

H. Balsam.

Dabei ein Anhang,

enthaltend:

Die auf die Geometrie der Kegelschnitte bezüglichen Sätze aus Newton's „philosophiae naturalis principia mathematica."

Mit 31 Figurentafeln.

Berlin, 1861.

Verlag von Georg Reimer.

Einleitung.

Apollonius ist zu Perga, einer einst berühmten Stadt Pamphyliens, geboren zur Zeit des Ptolemäus Euergetes, Königs von Aegypten, der 247 v. Chr. zur Regierung kam; so berichtet uns Heraklius, der Verfasser einer Lebensbeschreibung des Archimedes nach dem Zeugniss des Eutocius. Bei den Schülern des Euklid in Alexandrien hat er dann lange Zeit mathematischen Studien obgelegen und unter dem Philopator, der im siebzehnten Jahre seiner Regierung, im Jahre 205 v. Chr., starb, war er nach dem Zeugniss des Ptolemäus Hephästion von grosser Berühmtheit, so dass man annehmen kann, dass er ungefähr vierzig Jahr jünger ist als Archimedes und nicht lange vor Geminus Rhodius, der sicher älter als Hipparch ist, gelebt habe. Geminus aber bezeugt, dass er wegen seines ausgezeichneten Werkes über die Kegelschnitte unter den Mathematikern seiner Zeit den Namen des grossen Geometers erlangt habe. In wie hoher Achtung er bei den Alten gestanden hat, erkennen wir übrigens nicht nur aus Vitruv Buch I. Cap. 1., wo er in der Aufzählung der Mathematiker der Reihenfolge nach sogar vor dem Archimedes genannt wird, sondern auch aus der grossen Anzahl von Commentatoren, die er bei den Griechen gefunden hat, dem Pappus, der Hypatia, dem Serenus und dem Eutocius. Der Commentar des Eutocius besteht in Anmerkungen hinter den einzelnen Lehrsätzen, die theils Unterscheidungen der verschiedenen Fälle, die ein Satz zulässt, theils eine andere Art des Beweises, theils Auflösungen von Hülfsaufgaben enthalten, die Apollonius als bekannt voraussetzt. Am Anfang des ersten und vierten Buches giebt er einige historische Notizen und am Ende des ersten eine Inhaltsübersicht für dieses Buch, die bei den andern Büchern fehlt. Im Ganzen ist der Werth des Commentars von geringer Bedeutung für das Verständniss des Autors, und ein Gleiches gilt von den siebzig Lemmen des Pappus, die er im 7. Buche seiner Sammlungen als für die Kegelschnitte des Apollonius bestimmt uns hinterlassen hat. Diese Lemmen enthalten zum Theil nach unsern heutigen Vorstellungen allzu leicht Beweisbares, zum Theil lässt sich der materielle Inhalt derselben in den Gang der Beweise der apollonischen Lehrsätze recht gut aufnehmen, ohne dieselben allzu sehr zu verlängern, zum Theil endlich kann man nicht recht erkennen, für welche Lehrsätze sie als Hülfssätze erfordert werden, so dass man beim Studium des Apollonius selbst ein eigentliches Bedürfniss nach diesen Lemmen nicht empfindet. An sich jedoch haben dieselben als Uebungssätze vielleicht zum Gebrauch des Unterrichts wohl ein Interesse und können namentlich im Zusammenhang mit den zahlreichen Lemmen zu den andern zum Theil verloren gegangenen Schriften des Apollonius wohl als eine werthvolle Hinterlassenschaft betrachtet werden. In vorliegender Ausgabe ist das Nöthige daraus unmittelbar bei den zugehörigen Sätzen des Apollonius eingeschaltet worden, doch ist ein Gleiches nicht mit einigen Lemmen des Abdolmelek von Schiras zum siebenten Buche geschehen, die im Ganzen einen direkteren Zusammenhang mit den Apollonischen Beweisen haben als die des Pappus und die deshalb besonders angeführt sind. Aber auch bei den orientalischen Völkern hat im Mittelalter unser Autor die gleiche Aufmerksamkeit erweckt als bei den Griechen und ist mehrfach bearbeitet worden, bei den Arabern von Thebit ben Corah unter dem Chalifen Almamun um's Jahr 830 und von Beni Moses; bei den Persern von Abalphat von Ispahan unter dem Chalifen Abucalighiar um's Jahr 994 und von Abdolmelek, welche beide Auszüge von ihm verfassten und von jenem grossen persischen Mathematiker Nasireddin von Tus, der um's Jahr 1250 alle seine Werke herausgab und mit Noten versah. In Europa hatte zuerst Regiomontanus um die Mitte des fünfzehnten Jahrhunderts das Vorhaben geäussert, die vier ersten Bücher des Apollonius über Kegelschnitte herauszugeben, allein der Tod hinderte ihn an der Ausführung dieses Vorhabens, und so verdanken wir die erste lateinische Ausgabe vom Jahre 1537 dem Memmius, einem edlen Venetianer, dessen Sohn dieselbe nach dem Tode seines Vaters herausgab. Diese Ausgabe hat jedoch nur geringen Werth und Commandinus der Erklärer und Herausgeber so vieler alten Mathematiker veranstaltete 1566 eine bessere, in die er sowohl die Commentarien des Eutocius als die Lemmata des Pappus aufnahm, und welche dann wiederholt neu aufgelegt worden ist, so dass sie noch jetzt durchaus nicht selten ist.

Bis um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts waren die übrigen Bücher des Apollonius über Kegelschnitte nicht bekannt geworden, und es hatte deshalb Maurolicus, ein sicilianischer Geometer, den aus dem Pappus im Allgemeinen bekannten Inhalt des fünften und sechsten Buches in Form eines Supplementes zum Apollonius bearbeitet, welches Borelli im Jahre 1654 veröffentlichte. Während dieser Zeit hatte auch Vincenz Viviani, einer der berühmtesten Schüler des Galiläi, an einer Wiederherstellung des fünften Buches der Kegelschnitte gearbeitet, und da es mittlerweile bekannt geworden, dass in Florenz ein arabisches Manuscript der bisher für verloren gehaltenen Bücher aufgefunden sei, so gab er 1659 unter einer besondern Bescheinigung des Erzherzogs Leopold, Bruder des Grossherzogs Ferdinand II. von Toscana, dass ihm die wiederaufgefundene Handschrift des Apollonius noch nicht bekannt gewesen sei, seine „divinatio in quintum librum conicorum Appollonii" heraus, die theils durch einfachere Beweise von bekannten Lehrsätzen der vier ersten Bücher, theils durch eine selbständige und zum Theil erweiterte Auffassung der Aufgaben über die Normalen an Kegelschnitten sich vortheilhaft auszeichnet. Zu dieser Zeit aber und schon etwas früher hatte Golius unter vielen andern Handschriften auch die der sieben ersten Bücher des Apollonius mit aus dem Orient gebracht und an den Grossherzog von Toscana verkauft, worüber wir schon im Jahre 1644 eine Notiz beim Pater Mersenna finden. Allein demohnerachtet hielten die Mathematiker die drei letzten Bücher noch immer für verloren, bis Borelli im Jahre 1658 durch Florenz reisend die Bibliothek der Medicäer durchforschte, das erwähnte Manuscript, das die Bearbeitung des Abalphat von Ispahan enthielt, auffand, und vom Grossherzog Ferdinand II. die Erlaubniss erhielt, dasselbe mit nach Rom zu nehmen, um es dort übersetzen zu lassen. Er gewann daselbst den Abraham von Echelles, Professor der orientalischen Sprachen, für das Unternehmen, und indem er seine mathematischen Kenntnisse mit den Sprachkenntnissen dieses letzteren verband, brachten sie in verhältnissmässig kurzer Zeit eine lateinische Ausgabe zu Stande. Abraham erzählt in seiner Vorrede selbst, wie grosse Schwierigkeit der Mangel der diakritischen Punkte, welche den arabischen Consonanten erst ihren unzweifelhaften Werth geben, das gleichartige Aussehen der zwar elegant, aber doch sehr cursorisch geschriebenen Buchstaben und noch bei weitem mehr die Dunkelheit in der Bedeutung der Worte und dem Inhalt selbst ihm bereitet haben und dass Borelli oft aus einem kleinen Bruchstück sofort eine ganze Schlussreihe beinahe mit denselben Worten herausgebracht, wie er sie nachher in der arabischen Handschrift erkannt habe, ein Umstand, dessen Richtigkeit den Mathematikern leicht begreiflich sein wird.

Die so entstandene Ausgabe erschien zu Florenz 1661; sie enthält im Anschluss an die schon von den arabischen Interpreten vorgenommenen Aenderungen eine etwas andere Anordnung der Lehrsätze als die des Apollonius, dessen Reihenfolge jedoch sich daraus noch erkennen lässt, und eine Anzahl neuer Definitionen, die ihren Zweck, die Beweise zu verkürzen und deutlicher zu machen, nicht immer glücklich erreichen; doch ist es wohl möglich, nach dieser Ausgabe eine genügende Kenntniss des Inhalts der Apollonischen Bücher zu gewinnen.

Bis zum Jahre 1710 existirte jedoch noch keine griechische Ausgabe der Kegelschnitte des Apollonius, weshalb Halley in Verbindung mit Gregory sich zur Herstellung einer solchen möglichst vollständigen Ausgabe des ganzen Werkes entschloss. Der letztere Gelehrte bearbeitete die vier ersten Bücher, die in lateinischer Ausgabe allgemein verbreitet waren, nach einem griechischen Codex der Bibliothek des Savilius und einem zweiten vom Dekan Baynard zu dem Zweck dargeliehenen, während er den griechischen Commentar des Eutocius aus dem Baroccianischen Exemplar der Bodlejanischen Bibliothek entnahm, und er verbesserte zugleich die lateinische Uebersetzung des Commandinus, um eine Ausgabe in beiden Sprachen vorzubereiten. Als aber diese Arbeit unter der Presse schon bis zur vier und vierzigsten Seite vorgeschritten war, ereilte ihn der Tod und Halley übernahm die fernere Besorgung auch dieses Theils, wie er von Anfang an die Bearbeitung der letzten Bücher des Apollonius sich vorgesetzt hatte. Die Quellen, welche ihm dabei zu Gebote standen, sind nach seiner Angabe folgende: 1) Die Bodlejanische Abschrift eines arabischen Codex, der von einer in ziemlich früher Zeit von Thebit ben Corah gemachten und um's Jahr 1260 von Nasir-eddin verbesserten Uebersetzung herrührt (nähere Angaben hierüber finden sich noch am Anfang des fünften Buches); 2) ein anderer arabischer Bodlejanischer Codex, der einen von Abdolmelek aus Schiras um 1210 gemachten, von Christian Ravius aus dem Orient mitgebrachten Auszug enthält; 3) die vorerwähnte Florentinische Ausgabe des von Abalphat von Ispahan herrührenden Auszugs von Abraham von Echelles und Borelli; 4) das älteste Golianische Exemplar, das der Erzbischof Narcissus Marsh von Armacha von den Erben des Golius gekauft und aus Irland dem Halley zusandte, als dieser schon den grössten Theil seiner Arbeit beendet hatte.

In allen diesen Handschriften und Ausgaben fehlte jedoch das achte Buch, das seit dem Eutocius, der etwa 480 nach Christo lebte, niemand mehr gesehen zu haben scheint. Aus der Inhaltsangabe des Apollonius selbst im Anfange des ganzen Werks, sowie aus dem Umstand, dass Pappus, welcher, wie oben erwähnt ist, zu allen übrigen Büchern einzeln Lemmata erdacht und im siebenten Buch seiner Sammlungen uns hinterlassen hat, die für das siebente und achte Buch bestimmten zusammenfasst, glaubte Halley schliessen zu dürfen, dass die Lehrsätze des siebenten Buchs die Determinationen für die im achten behandelten Aufgaben enthielten und dass es sonach möglich wäre, aus diesen Lehrsätzen, die die Gränzen angeben, bis zu welchen gewisse Eigenschaften der Kegelschnitte Statt finden, und welche deshalb „διοριστικά“ genannt werden, sowohl den Gegenstand als selbst die Reihenfolge der Aufgaben des achten Buches zu errathen. Er fügte demnach das von ihm wiederhergestellte achte Buch seiner Ausgabe der Kegelschnitte hinzu und brachte so ein Werk zu Stande, das an Vollständigkeit des Inhalts und Klarheit der Darstellung in der That nichts zu wünschen übrig lässt. Diese Ausgabe ist aber selten und darum ziemlich kostbar geworden, weshalb der Herausgeber der vorliegenden Arbeit schon aus diesem Grunde glaubt auf die Nachsicht der Mathematiker rechnen zu dürfen, wenn er den Versuch macht, den möglichst vollständigen Inhalt des Apollonischen Meisterwerks in deutscher Sprache zugänglich zu machen, wozu er noch besonders durch eine Bemerkung Chasles in seiner Geschichte der Geometrie ermuthigt wird, die uns erzählt, dass Peyrard in der Einleitung zur Uebersetzung des Archimedes auch eine französische Uebersetzung der Kegelschnitte des Apollonius angekündigt hatte und dass der Tod ihn hinwegnahm, als schon die ersten Bogen dieser Arbeit gedruckt waren. In Betreff der besondern Art der Bearbeitung, welche der Verfasser der vorliegenden Ausgabe für die beste gehalten hat, erlaubt er sich noch folgende Bemerkung zu machen. Die mathematischen Wahrheiten haben eine solche innere Kraft und Festigkeit, dass sie in der That der Beeinflussung durch die Sprache und die besondere Darstellungsform weniger unterworfen sind, als das in andern Wissenschaften der Fall ist, woraus denn folgt, dass bei der Uebertragung eines Autors aus einer Sprache in eine andere man sich grössere Freiheit erlauben darf, ohne den Inhalt wesentlich zu entstellen, als anderswo. Während daher im Folgenden der Wortlaut der Lehrsätze möglichst genau beibehalten ist, auch auf die Gefahr hin, dass dem deutschen Ausdruck hie und da Schwerfälligkeit vorgeworfen werden kann, hat der Verfasser geglaubt, besonders bei denjenigen Beweisen, die durch die grosse Zahl von Proportionen, durch welche sie ohne Ruhepunkt fortschreiten, der Lektüre eine ziemlich grosse Schwierigkeit entgegensetzen, eine etwas übersichtlichere und der jetzt üblichen sich anschliessende Form der Darstellung anwenden zu dürfen, bei der die Hauptmomente des Beweises durch besonders numerirte Zeilen hervorgehoben sind und dem Leser so die Uebersicht über das Ganze erleichtert wird. Möge nun die Arbeit für sich selbst reden.

Stettin, den 7. April 1860.

Balsam.

Apollonius grüsst den Eudemos.

Wenn du gesund bist und deine übrigen Angelegenheiten sich nach deinem Wunsch verhalten, ist es mir lieb. Mir geht es gut. Da ich mich zu Pergamus befand, sah ich, dass du begierig warst, die von mir bearbeiteten Sätze über die Kegelschnitte kennen zu lernen. Ich schicke dir daher das erste Buch, wie ich es nunmehr verbessert habe, und werde dir die übrigen der Reihe nach schicken, wenn ich Musse finden kann. Du wirst wohl dich dessen, was ich dir hierüber schon mitgetheilt habe, erinnern; dass ich nämlich diese Bücher auf die Bitte des Geometers Naucrates zu schreiben unternahm, zu der Zeit, als dieser in Alexandrien bei uns war, und weshalb ich auf die acht so entstandenen Bücher jetzt einen grösseren Fleiss verwende. Denn da Naucrates sobald als möglich zur See gehen wollte, habe ich dieselben damals nicht verbessert, sondern, was sich mir darbot, niedergeschrieben, in der Absicht, es nach der Beendigung wieder vorzunehmen. Weil ich nun Zeit habe, gebe ich heraus, was ich verbessert habe. Da einige von denen, die bei mir gewesen sind, das erste und zweite Buch vor der Verbesserung erhalten haben, so wundere dich nicht, wenn du Einiges findest, das sich anders verhält. Von den acht Büchern nun enthalten die vier ersten die Elemente dieser Disciplin. Das erste umfasst die Erzeugung der drei Kegelschnitte und derer, die man entgegengesetzte Schnitte nennt; und ihre hauptsächlichsten Eigenschaften, die ich ausführlicher und allgemeiner behandelt habe als die andern, die über denselben Gegenstand geschrieben haben. Das zweite Buch behandelt dasjenige, was sich auf die Durchmesser, die Achsen, und gewisse andere Linien bezieht, die mit dem Schnitt nicht zusammenkommen, und die die Griechen Asymptoten nennen; dann enthält es Anderes, das von allgemeinem Nutzen und nothwendig für die Aufgabenbestimmungen ist. Was ich aber Durchmesser und Achsen nenne, wirst du in diesem ersten Buche erklärt finden. Das dritte Buch enthält viele und bewundernswerthe Sätze, welche sowohl für die Construction der körperlichen Oerter, als auch für die Aufgabenbestimmungen von Nutzen sind, und von denen viele sehr schön und neu sind. Indem ich dies durchdachte, bemerkte ich, dass Euclid die Art und Weise, Oerter zu drei und vier Linien zu construiren nicht festgestellt habe, sondern nur einen kleinen Theil, uud auch diesen nicht besonders glücklich; denn diese Construction konnte nicht richtig geschehen, ohne das, was ich erfunden habe. Das vierte Buch lehrt, auf wie viele Arten Kegelschnitte unter sich und mit der Kreislinie sich schneiden können, und vieles andere, was zur vollständigen Lehre gehört, wovon nichts von meinen Vorgängern behandelt ist, in wie viel Punkten nämlich ein Kegelschnitt oder ein Kreis oder die entgegengesetzten Schnitte mit den entgegengesetzten Schnitten sich schneiden. Die übrigen vier Bücher gehören zu einer vollständigeren Wissenschaft. Das fünfte handelt zum grossen Theil von den grössten und kleinsten Linien, die von einem Punkt an einem Kegelschnitt gezogen werden können. Das sechste von den gleichen und ähnlichen Kegelschnitten. Das siebente enthält Sätze, die die Kraft des Bestimmens von Aufgaben haben. Das achte bestimmte Aufgaben über die Kegelschnitte. Nachdem diese alle herausgegeben sein werden, wird ein Jeder, der sie liest, nach seiner Herzensmeinung darüber urtheilen können. Lebe wohl.

Erste Erklärungen.

Wenn von einem Punkte nach dem Umfang eines Kreises, der nicht in derselben Ebene mit dem Punkt liegt, eine gerade Linie gezogen und nach beiden Seiten verlängert wird, und, indem der Punkt fest bleibt, im Umfang des Kreises herumgeführt wird, bis sie wieder an den Ort zurückkehrt, von wo sie sich zu bewegen anfing, so nenne ich die von der geraden Linie beschriebene Oberfläche, welche aus zwei Theilen besteht, die am Scheitel unter sich zusammenhängen, und welche beide in's Unendliche fortgehen, da ja die erzeugende gerade Linie in's Unendliche verlängert ist,

1. Die Kegeloberfläche.
2. Den Scheitel derselben den festen Punkt.
3. Die Achse die gerade Linie, welche durch den festen Punkt und den Mittelpunkt des Kreises gezogen wird*).
4. Kegel nenne ich den Körper, der von dem Kreis und dem Theil der Kegeloberfläche, der zwischen dem Kreis und dem Scheitel liegt, begränzt wird.
5. Scheitel des Kegels den Punkt, der auch Scheitel der Kegelfläche ist.
6. Achse die Linie, welche vom Scheitel nach dem Mittelpunkt des Kreises gezogen wird.
7. Grundfläche den Kreis selbst.
8. Gerade Kegel nenne ich diejenigen, deren Achse senkrecht auf der Grundfläche steht.
9. Schiefe Kegel, deren Achse nicht senkrecht auf der Grundfläche steht.

---

*) Diese Erklarung der Achse stimmt für den schiefen Kegel nicht überein mit der der neuern Geometer, welche unter der Achse eines schiefen Kegels diejenige Verbindungslinie des Scheitels mit dem Mittelpunkt eines Schnitts verstehen, welche senkrecht auf der Ebene dieses Schnittes steht.

10. Von jeder in einer Ebene befindlichen krummen Linie nenne ich einen Durchmesser eine solche Gerade, welche, von der krummen Linie ausgehend, alle mit einer gewissen Linie parallelen Sehnen, die in derselben gezogen werden, halbirt.
11. Scheitel den Endpunkt des Durchmessers, der sich in der krummen Linie befindet.
12. Jede der erwähnten parallelen Linien eine zu dem Durchmesser gehörige Ordinate.
13. Auf ähnliche Weise nenne ich auch, wenn zwei in einer Ebene liegende krumme Linien gegeben sind, einen Querdurchmesser eine solche Linie, die alle in jeder derselben einer gewissen Geraden parallel gezogenen Sehnen halbirt.
14. Scheitel der Linien nenne ich die Endpunkte der Durchmesser auf ihnen.
15. Längsdurchmesser zweier solcher Curven nenne ich eine solche Gerade, die, zwischen beiden liegend, alle mit einer gewissen Geraden parallelen von beiden Curven begränzten Linien halbirt*).
16. Conjugirte Durchmesser einer und zweier Curven nenne ich zwei solche Linien, von denen jede ein Durchmesser ist, und die der andern parallel gezogenen Linien halbirt.
17. Achse einer und zweier Curven nenne ich eine solche Linie, die ein Durchmesser ist, und senkrecht auf den von ihr halbirten Linien steht.
18. Conjugirte Achsen einer oder zweier Curven nenne ich gerade Linien, die conjugirte Durchmesser sind, und senkrecht auf einander stehen.

§. 1. **Lehrsatz 1.** Die geraden Linien, welche vom Scheitel einer Kegeloberfläche nach solchen Punkten, die auf ihr liegen, gezogen werden, befinden sich ganz in ihr.

*) Der Verfasser der deutschen Bearbeitung braucht auch die Ausdrucke erster und zweiter Durchmesser für zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnitts, wovon ersterer bei der Hyperbel immer der Querdurchmesser ist, sowie grosse und kleine Achse, deren erstere bei der Hyperbel immer die die Hyperbel schneidende Achse bedeutet, auch wenn sie kleiner ist als die zweite.

Sei eine Kegelfläche mit dem Scheitel A gegeben und in ihr ein Punkt B angenommen, sei ferner die gerade Linie ACB gezogen; so wird behauptet, dass ACB auf der Oberfläche liegt. Angenommen, sie liege nicht darin; so seie DE die gerade Linie, die die Fläche erzeugt, FE der Kreis, durch den sie geführt wird. Wenn nun A fest bleibt und die gerade Linie DE durch den Kreis EF herumgeführt wird, muss sie einmal den Punkt B treffen. Dann hätten also zwei gerade Linien dieselben zwei Endpunkte, was unmöglich ist. Also liegt die von A nach B gezogene Linie nicht ausserhalb der Kegelfläche und folglich in derselben. Fig. 1.

§. 2. **Lehrsatz** 2. Wenn in einer der beiden am Scheitel zusammenstossenden Flächen zwei Punkte angenommen und durch eine gerade Linie verbunden werden, diese aber weder selbst, noch in ihrer Verlängerung den Scheitel trifft, so liegt sie innerhalb der Oberfläche, ihre Verlängerung aber ausserhalb derselben.

Sei eine Kegelfläche mit dem Scheitel A gegeben, der Kreis, indem die erzeugende Linie herumgeführt wird, sei BC, und in einer der beiden am Scheitel zusammenstossenden Flächen seien zwei Punkte D und E angenommen und durch eine gerade Linie verbunden, so behaupte ich, dass DE innerhalb der Fläche liegt, ihre Verlängerung aber ausserhalb. Man ziehe AD, AE und verlängere sie, bis sie den Grundkreis in den Punkten B,C schneiden, und ziehe BC, so wird BC innerhalb des Kreises, also auch innerhalb der Kegelfläche liegen. Man nehme nun in DE einen beliebigen Punkt F an, verbinde AF und verlängere es, bis es BC im Punkte G trifft. Weil nun G innerhalb der Kegelfläche liegt, wird auch AG und also auch der Punkt F innerhalb derselben liegen müssen; und auf die nämliche Weise wird gezeigt werden können, dass alle andern Punkte von DE innerhalb der Kegelfläche liegen; daher liegt also DE selbst innerhalb. Man verlängere nun DE zum Punkte H, so wird behauptet, dass EH ausserhalb der Kegelfläche sich befinde. Sei, wenn es möglich ist, ein Punkt H derselben nicht ausserhalb, und werde AH gezogen, so muss dieselbe verlängert, entweder den Umfang des Kreises oder innerhalb desselben die Ebene treffen; was nicht geschehen kann, denn sie trifft die ver- Fig. 2.

längerte *BC* hier im Punkte *K*. Also liegt *EH* ausserhalb der Kegelfläche. Die Linie *DE* selbt nun liegt also innerhalb, ihre Verlängerung ausserhalb der Kegelfläche.

§. 3. **Lehrsatz 3.** Wenn ein Kegel von einer durch den Scheitel gelegten Ebene geschnitten wird, so ist der Schnitt ein Dreieck.

Fig. 2. Sei ein Kegel mit dem Scheitel *A* gegeben, die Grundfläche der Kreis *BC*, und werde derselbe von einer Ebene durch den Scheitel *A* geschnitten, welche in der Kegelfläche die Linien *AB,AC* bildet, und in der Grundfläche die gerade Linie *BC*; so wird behauptet, dass *ABC* ein Dreieck sei. Die gerade Linie zwischen *A* und *B* muss aber nach §. 1. in der Kegelfläche und zugleich auch in der schneidenden Ebene liegen nach der Erklärung der Ebene; also ist sie der Durchschnitt der beiden Flächen, auf dieselbe Weise *AC*, und *BC* ist eine gerade Linie als Durchschnitt zweier Ebenen; also ist *ABC* ein Dreieck. Wenn also ein Kegel von einer Ebene durch den Scheitel geschnitten wird, so ist der Durchschnitt ein Dreieck.

§. 4. **Lehrsatz 4.** Wenn eine der beiden Flächen, die am Scheitel zusammenstossen, durch eine der Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so wird der Theil der Ebene, der innerhalb der Kegelfläche liegt, ein Kreis sein, dessen Mittelpunkt in der Achse ist; der Körper aber, der von diesem Kreise und demjenigen Theil der Kegelfläche begränzt wird, welcher zwischen der schneidenden Ebene und dem Scheitel liegt, ist ein Kegel.

Fig. 3. Es sei eine Kegelfläche mit dem Scheitel *A* und dem Grundkreis *BC* gegeben, und es werde dieselbe durch eine dem Kreis *BC* parallele Ebene geschnitten, welche die Kegelfläche in der Linie *DE* durchschneidet; so wird behauptet, dass *DE* ein Kreis sei, der seinen Mittelpunkt in der Achse hat. Es sei der Mittelpunkt *F* des Kreises *BC* genommen und von *F* nach *A* gezogen, welche Linie der schneidenden Ebene in *G* begegne, ferner durch *AF* eine Ebene gelegt, welche den Grundkreis in der geraden Linie *BC*, die schneidende Ebene in der geraden *DE* trifft; endlich nehme man in der Linie *DE* auf der Kegelfläche einen beliebigen Punkt *H*, ziehe *AH*, verlängere es, bis es dem Grundkreis

in K begegnet und ziehe GH und FK. Da nun die Ebenen DHE und BKC parallel sind, werden auch die in denselben befindlichen Durchschnittslinien DE und BC, sowie GH und FK parallel sein, weshalb

$$1)\ FA : GA = FB : GD$$
$$2)\ FA : GA = FK : GH$$
$$3)\ FA : GA = FC : GE$$

also:

$FB : GD = FK : GH = FC : GE$, und da nun $FB = FK = FC$, muss auch $GD = GH = GE$ sein.

Da nun dasselbe von allen in DE auf der Kegelfläche angenommenen Punkten gezeigt werden kann, so ist bewiesen, dass die Durchschnittslinie DE ein Kreis ist und ihren Mittelpunkt in der Achse AF hat.

Es erhellt ausserdem aus der Erklärung, dass der von dem Kreis DE und demjenigen Theil der Kegelfläche, der zwischen diesem Kreis und dem Scheitel A liegt, eingeschlossene Körper ein Kegel ist, und es ist zugleich gezeigt, dass der gemeinschaftliche Durchschnitt der schneidenden Ebene und des durch die Achse gelegten Dreiecks ein Durchmesser des in der schneidenden Ebene befindlichen Kreises ist.

§. 5. **Lehrsatz 5.** Wenn ein schiefer Kegel durch eine Ebene geschnitten wird, die durch die Achse geht und senkrecht auf der Grundfläche steht und dann von einer zweiten, die senkrecht auf der ersten steht, und von dem durch die erste gebildeten Achsendreieck ein ähnliches Dreieck dergestalt abschneidet, dass die Winkel an der Grundlinie verwechselt liegen, so ist der Durchschnitt der zweiten Ebene mit dem Kegel ein Kreis. Man nennt diesen Kreis einen Wechselschnitt.

Es sei ein schiefer Kegel mit dem Scheitel A und der Grundfläche BC gegeben; derselbe werde durch eine auf der Grundfläche senkrechte und durch die Achse gehende Ebene geschnitten, welche das Achsendreieck ABC giebt, ferner durch eine zweite auf der Ebene ABC senkrechte Ebene, welche von dem Dreieck ABC nach dem Scheitel A zu ein ähnliches Dreieck AGK abschneidet, dessen Winkel an der Grundlinie aber verwechselt liegen, so nämlich, dass der $\angle AKG = \angle ABC$ ist, und es sei der Durchschnitt Fig. 4.

dieser zweiten Ebene mit der Kegelfläche die Linie *GHK*; so wird behauptet, dass *GHK* ein Kreis ist.

Man nehme in den Linien *GHK*, *BC* zwei beliebige Punkte *H*,*L* an und fälle von ihnen auf die zuerst gelegte Ebene des Dreiecks *ABC* Lothe, so müssen diese, weil die Ebenen lothrecht stehen, die Durchschnittslinien *BC*,*GK* der beiden Ebenen *BC* und *GHK* mit *ABC* treffen. Seien also diese Lothe *HF* und *LM*. Es werde nun durch *F* mit *BC* eine Parallele *DFE* gezogen, so wird die durch *FH* und *DE* gelegte Ebene mit der Grundfläche parallel und also ihr Schnitt *DHE* in dem Kegel ein Kreis sein, dessen Durchmesser *DE* ist, also ist:

$$1)\ HF^2 = DF \cdot FE.$$

Da ferner nach Annahme $\angle AKG = \angle ABC$, und $\angle ABC = \angle ADE$ ist, ist das $\triangle EFK \backsim \triangle GFD$, und also muss

$$EF : GF = FK : DF \text{ oder}$$

2) $EF \cdot DF = GF \cdot FK$ sein, also ist $HF^2 = GF \cdot FK$.

Da nun dasselbe für alle Punkte des Schnitts *GHK* bewiesen werden kann, ist gezeigt, dass dieser ein Kreis, und dass sein Durchmesser *GK* ist.

§. 6. **Lehrsatz 6.** Wenn ein Kegel von einer durch die Achse gehenden Ebene geschnitten und von einem Punkt der Kegelfläche, der nicht in dieser schneidenden Ebene liegt, eine Parallele mit einem auf der Grundlinie des entstandenen Achsendreiecks in der Grundfläche errichteten Loth gezogen wird, so trifft diese Parallele die Ebene des Achsendreiecks, und wird, über diesen Durchschnitt hinaus bis wieder an die Kegelfläche verlängert, von derselben halbirt.

Fig. 5. Sei ein Kegel mit dem Scheitel *A* und dem Grundkreis *BC* gegeben und werde derselbe von einer durch die Achse gelegten Ebene geschnitten, so dass das Achsendreieck *ABC* entsteht; wird ferner von einem beliebigen Punkt *M* im Umfang des Grundkreises die Linie *MN* senkrecht gegen *BC*, und von einem beliebigen in der Kegelfläche angenommenen Punkt *D* die Linie *DE* parallel mit *MN* gezogen, so wird behauptet, dass *DE* der Ebene des Achsendreiecks *ABC* begegnet und, nach der andern Seite bis zu ihrem Durchschnitt mit der Kegelfläche verlängert, durch die Ebene des Dreiecks *ABC* halbirt werde.

Man ziehe AD, verlängere es, bis es dem Umfang des Grundkreises in K begegnet, und fälle von K auf BC das Loth KHL, so wird KH parallel MN, also auch parallel DE sein. Man ziehe nun AH; da nun in dem Dreieck AHK DE parallel mit HK gezogen ist, muss es, verlängert, AH treffen und da AH in der Ebene ABC liegt, ist bewiesen, dass DE dieser Ebene begegnet; sei nun der Durchschnittspunkt F, und werde DF verlängert, bis es der Kegelfläche in G begegnet, so ist noch zu zeigen, dass $DF = FG$ ist. Da aber die Punkte G und L sowohl in der Kegelfläche, als in der Ebene des Dreiecks AKH liegen, welche durch den Scheitel A des Kegels geht, müssen sie sich mit diesem in gerader Linie befinden. Nun ist aber in dem Dreieck AKL DG parallel der Basis gezogen, also $KH : HL = DF : FG$ und da $KH = HL$, ist auch $DF = FG$. q. e. d.

§. 7. **Lehrsatz 7.** Wenn ein Kegel von einer durch die Achse gelegten Ebene und zugleich von einer andern Ebene, deren Durchschnittslinie mit der Grundfläche senkrecht auf der Grundlinie des durch die erste Ebene entstandenen Achsendreiecks oder ihrer Verlängerung steht, geschnitten wird, so werden diejenigen Linien, welche vom Umfang des durch die zweite Ebene entstandenen Kegelschnitts, parallel der in der Grundfläche befindlichen Durchschnittslinie gezogen werden, die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der beiden gelegten Ebenen treffen, und auf der andern Seite bis zur Kegelfläche verlängert, von dieser Durchschnittslinie halbirt werden. Wenn der Kegel gerade ist, so steht die in der Grundfläche befindliche Linie senkrecht auf der Durchschnittslinie der schneidenden Ebene und des Achsendreiecks, ist aber der Kegel schief, so ist das nur dann der Fall, wenn die Ebene des Achsendreiecks senkrecht auf der Grundfläche des Kegels steht.

Sei ein Kegel mit dem Scheitel A und dem Grundkreis BC gegeben, und werde derselbe von einer durch die Achse gelegten Ebene in dem Dreieck ABC und von einer zweiten Ebene geschnitten, deren Durchschnittslinie DE mit dem Grundkreis senkrecht auf BC oder seiner Verlängerung steht. Sei nun der durch die zweite Ebene erzeugte Kegelschnitt DFE und FG ihr Durchschnitt mit der Ebene des Achsen- Fig. 6.

dreiecks, und werde endlich von einem beliebigen Punkt *H* des Kegelschnitts eine Parallele *HK* mit *DE* gezogen, so wird behauptet, dass *HK* die Linie *FG* schneidet, und darüber hinaus bis zum Kegelschnitt verlängert durch *FG* halbirt werde.

Die Linie *HK* erfüllt genau die Voraussetzung des vorigen Lehrsatzes, weshalb die Richtigkeit der Behauptung erhellt. Es ist nun entweder der Kegel ein gerader, oder das Achsendreieck *ABC* senkrecht auf der Ebene des Grundkreises *BC*, oder keines von beiden der Fall.

Sei nun erstens der Kegel ein gerader, so steht die Ebene *ABC* auf der Grundfläche *BC* senkrecht, und da *DG* senkrecht auf *BC* steht, muss es auf der Ebene *ABC* und also auf *FG* rechtwinklig sein. Derselbe Schluss wird noch Statt finden, wenn der Kegel nicht gerade, aber die Ebene des Achsendreiecks *ABC* senkrecht auf der Grundfläche *BC* ist. Ist nun aber keins von beiden der Fall, so kann *DG* nicht senkrecht auf *FG* stehen. Denn wäre *DGF* ein Rechter, so müsste, da *DGB* nach Annahme ein Rechter ist, *DG* ein Loth auf der Ebene *ABC* und also auch die Ebene *BDC* lothrecht auf *ABC* sein, was gegen die Annahme ist.

Zusatz. Hieraus erhellt, dass die Linie *FG* ein Durchmesser des Kegelschnitts *DFE* ist, da sie alle in demselben einer gegebenen Richtung parallel gezogenen Linien halbirt; und es erhellt zugleich, dass ein Durchmesser die parallelen Linien, die er halbirt, unter schiefem Winkel durchschneiden könne.

§. 8. **Lehrsatz 8.** Wenn ein Kegel von einer durch die Achse gelegten Ebene und von einer zweiten Ebene so geschnitten wird, dass die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit der Grundfläche senkrecht auf einander stehen, der Durchmesser aber des durch die zweite Ebene entstandenen Kegelschnitts mit einer der an den Scheitel anstossenden Seiten des in der ersten Ebene liegenden Achsendreiecks entweder parallel ist oder jenseit des Scheitels des Kegels zusammentrifft, und wenn sowohl die Kegelfläche als die schneidenden Ebenen in's Unendliche erweitert werden, so setzt sich auch der Kegelschnitt ohne Ende fort und eine von einem beliebigen Punkt desselben mit der in der

Grundfläche befindlichen Durchschnittslinie gezogene Parallele schneidet auf dem Durchmesser vom Scheitel an gerechnet immer eine gewisse Länge ab.

Sei ein Kegel mit dem Scheitel *A* und der Grundfläche *BC* gegeben, und werde derselbe von einer durch die Achse gelegten Ebene so geschnitten, dass das Achsendreieck *ABC* entsteht und von einer zweiten Ebene, deren Durchschnitt *DE* mit der Grundfläche senkrecht auf *BC* steht, und welche mit der Kegelfläche die Durchschnittslinie *DFE* hat; der Durchmesser dieses Kegelschnitts sei *FG*, welcher mit *AC* entweder parallel ist, oder jenseit des Scheitels *A* zusammentrifft, so wird behauptet, dass sich der Kegelschnitt *DFE* in's Unendliche fortsetze, wenn die Kegelfläche und die schneidende Ebene in's Unendliche erweitert werden. Man verlängere zugleich die Linien *AB*, *AC*, *FG*, so werden nach Voraussetzung *AC*, *FG* über *C* und *G* verlängert niemals zusammentreffen. Sei nun *H* ein beliebiger Punkt der verlängerten *FG* und werde durch *H* die Linie *KHL* parallel mit *BC* und *MHN* parallel mit *DE* gezogen, so wird die durch *KL*, *MN* gelegte Ebene parallel der durch *BC*, *DE* gehenden Grundfläche des Kegels, und folglich ihr Durchschnitt mit der Kegelfläche ein Kreis sein. Da nun die Punkte *D*, *E*, *M*, *N* sowohl in der zweiten schneidenden Ebene als in der Kegelfläche liegen, so ist gezeigt, dass der Kegelschnitt bis zu den Punkten *M*, *N* sich fortsetzt, und also auch in's Unendliche sich fortsetzen wird, wenn sowohl die Kegelfläche als die schneidende Ebene gehörig erweitert werden. Fig. 7.

Es erhellt zugleich, dass es möglich ist, in dem Kegelschnitt durch eine Parallele mit *DE* jede beliebige Länge, vom Durchmesser *FH* von *F* gerechnet, abzuschneiden. Denn sei *FX* irgend eine gegebene Länge, so wird die durch *X* mit *DE* gezogene Parallele, wie eben von der durch *H* gelegten gezeigt ist, den Kegelschnitt in zwei Punkten schneiden müssen.

§. 9. **Lehrsatz 9.** Wenn ein Kegel von einer Ebene, die beide Schenkelseiten eines Achsendreiecks trifft, und weder der Grundlinie parallel noch ein Wechselschnitt ist, durchschnitten wird, so ist der entstandene Kegelschnitt kein Kreis.

Fig. 8. Sei ein Kegel mit dem Scheitel A und der Grundfläche BC gegeben, und werde derselbe von einer Ebene, die weder der Grundfläche parallel noch ein Wechselschnitt ist, geschnitten, so dass der Kegelschnitt DKE entsteht, so wird behauptet, dass DKE kein Kreis sei. Angenommen er wäre ein Kreis, so erweitere man die schneidende Ebene, bis sie die Grundfläche in der Linie FG schneidet, und fälle vom Mittelpunkt H der Grundfläche BC ein Loth HG auf diese Durchschnittslinie; dann lege man durch HG und die Achse des Kegels eine Ebene, welche die Kegelfläche in den Geraden AB und AC trifft, so werden die Punkte D, E, in denen diese Geraden die schneidende Ebene DKE treffen, mit G in gerader Linie liegen, da sie in der Durchschnittslinie der Ebenen ABC, DKE liegen müssen. Sei nun K ein beliebiger Punkt des Kreises DKE, und werde durch K eine Parallele KL mit FG gezogen, so wird dieselbe nach §. 7. in ihrem Durchschnittspunkt M mit DE halbirt, und da dieses von allen mit FG parallel gezogenen Sehnen des Kreises DKE gilt, muss DE ein Durchmesser dieses Kreises sein. Da also DE auf KM und folglich auch auf FG lothrecht steht, ist FG und deshalb auch die Ebene DKE lothrecht auf der Ebene ABC. Man ziehe nun noch durch M die Parallele NMX mit BC, so wird, da auch KL parallel FG ist, die durch KL, MX gelegte Ebene der Grundfläche parallel und also ein Kreis sein. Nun wäre:

$KM^2 = NM \cdot MX = DM \cdot ME$, also $\triangle NMD$ ähnlich $\triangle MXE$ und Winkel ANX gleich Winkel AED, also der Schnitt DKE ein Wechselschnitt, was gegen die Annahme ist. Also ist gezeigt, dass DKE nicht ein Kreis sein kann.

§. 10. **Lehrsatz 10.** Wenn in einem Kegelschnitt zwei Punkte angenommen werden, so wird ihre Verbindungslinie innerhalb des Kegelschnitts und deren Verlängerung ausserhalb desselben fallen.

Nach §. 2. fällt eine solche Verbindungslinie innerhalb des Kegels, also auch innerhalb des Kegelschnitts.

§. 11. **Lehrsatz 11.** Wenn ein Kegel von einer durch die Achse gelegten Ebene und von einer zweiten Ebene so geschnitten wird, dass die Durchschnittslinien der beiden Ebenen mit der Grundfläche senkrecht auf einander stehen und wenn der Durchmesser des durch die zweite Ebene erhaltenen Kegelschnitts einer Schenkelseite des Achsendreiecks parallel ist, so ist das Quadrat einer von einem beliebigen Punkt des Kegelschnitts in der zweiten Ebene parallel der in der Grundfläche befindlichen Durchschnittslinie bis zum Durchmesser hin gezogenen Linie gleich dem Rechteck aus dem durch diese Linie vom Durchmesser nach dem Scheitel hin abgeschnittenen Stück und einer andern Länge, welche sich zu dem den Scheitel des Kegels mit dem des Kegelschnitts verbindenden Stück ebenso verhält wie das Quadrat der Grundlinie des Achsendreiecks zu dem Rechteck aus den beiden übrigen Seiten. Ein Kegelschnitt dieser Art heisst eine Parabel.

Sei ein Kegel mit dem Scheitel A und der Grundfläche Fig. 9. BC gegeben und werde derselbe von einer durch die Achse gelegten Ebene, die das Achsendreieck ABC bildet, und von einer zweiten Ebene geschnitten, deren Durchschnitt DE mit der Grundfläche senkrecht auf der Grundlinie BC des Achsendreiecks steht, und welche in der Kegelfläche die Linie DFE bildet, deren Durchmesser FG parallel der Seite AC des Achsendreiecks ist; werde ferner in der zweiten Ebene von F aus unter rechtem Winkel gegen FG eine Linie FH gezogen, so dass $FH : FA = BC^2 : BA \cdot CA$ ist, und endlich von einem beliebigen Punkte K des Kegelschnitts bis zum Durchmesser hin eine Parallele KL mit der Linie DE; so wird behauptet:

$$KL^2 = FL \cdot FH.$$

Man ziehe noch durch L die Parallele MN zu der Linie BC, so wird die durch KL, MN gelegte Ebene der Grundfläche parallel und ihr Durchschnitt mit der Kegelfläche ein Kreis sein; da nun nach Annahme DE senkrecht auf BC, ist auch KL senkrecht auf LM und also $KL^2 = ML \cdot LN$. Es ist aber

1) $ML : FL = BC : AC,$

2) $LN : FA = BC : AB,$ woraus:

3) $ML \cdot LN : FL \cdot FA = BC^2 : AC \cdot AB$ oder nach Annahme

4) $ML \cdot LN : FL \cdot FA = FH : FA$, und also:

5) $KL^2 = ML \cdot LN = FL \cdot FH$ q. e. d.

Die Linie FH oder die constante Seite des Rechtecks, dessen andere Seite die Abscisse ist, und welches dem Quadrat der Ordinate gleich ist, heisst Latus rectum oder Parameter.

§. 12. **Lehrsatz 12.** Wenn ein Kegel von einer durch die Achse gelegten Ebene und von einer zweiten Ebene geschnitten wird, so dass die Durchschnittslinien beider Ebenen mit der Grundfläche senkrecht auf einander stehen, und wenn der Durchmesser des durch die zweite Ebene entstandenen Kegelschnitts mit der einen Schenkelseite des in der ersten befindlichen Achsendreiecks jenseit des Scheitels des Kegels zusammentrifft, so wird das Quadrat einer von einem Punkt des Kegelschnitts bis zum Durchmesser hin parallel mit der in der Grundfläche befindlichen Durchschnittslinie gezogenen Ordinate gleich sein einem Rechteck, zu dessen einer Seite (der Länge) das Stück des verlängerten Durchmessers, das von dem Aussenwinkel des Achsendreiecks am Scheitel des Kegels abgeschnitten wird, dasselbe Verhältniss hat, als das Quadrat einer vom Scheitel des Kegels parallel dem Durchmesser des Kegelschnitts bis zur Grundfläche gezogenen Linie zu dem Rechteck der hierdurch in der Grundlinie des Achsendreiecks gebildeten Abschnitte, und dessen andere Seite (die Breite) die von der Ordinate auf dem Durchmesser abgeschnittene Abscisse ist, wenn dieses Rechteck noch vermehrt wird um ein anderes von gleicher Breite, das ähnlich und ähnlich gelegen ist mit einem andern, dessen Seiten das auf dem Durchmesser vom Aussenwinkel an der Spitze des Achsendreiecks abgeschnittene Stück und die Länge des vorerwähnten Rechtecks sind. Ein Kegelschnitt dieser Art heisst eine Hyperbel.

Anm. Dieser etwas weitlaufige Ausdruck ist beibehalten, weil gerade auf der Hinzufügung des zweiten Rechtecks der Name „Hyperbel" beruht; sonst kann einfacher gesagt werden: das Quadrat der Ordinate verhalt sich zu dem Rechteck aus den Abscissen, die vom Fusspunkt der Ordinate bis zu den Scheiteln des Kegelschnitts und seines Gegenschnitts gerechnet werden, wie das Quadrat der vom Kegelscheitel nach der Grundfläche parallel dem Durchmesser gezogenen Linie zu dem Rechteck der durch dieselbe auf der Grundlinie des Achsendreiecks entstandenen Abschnitte.

Sei ein Kegel mit dem Scheitel A und der Grundfläche BC gegeben, und werde er von einer Ebene durch die Achse geschnitten, welche das Achsendreieck ABC bildet, und von einer zweiten, welche die Grundfläche in der Linie DE senkrecht auf BC und die Kegelfläche in der Linie DFE durchschneidet, deren Durchmesser GF verlängert mit der Seite AC des Achsendreiecks jenseit des Scheitels in H zusammentrifft. Werde ferner vom Scheitel A mit FG die Parallele AK bis zu ihrem Durchschnitt mit BC und in F in der schneidenden Ebene DFE ein Loth FL auf FG gezogen, so dass $AK^2 : BK \cdot CK = FH : FL$ ist; sodann von einem beliebigen Punkte M des entstandenen Kegelschnitts bis zum Durchmesser hin die Linie MN parallel mit DE, endlich von N parallel mit FL die Linie NOX, welche von der Verbindungslinie HL in X getroffen wird, und durch L und X die Linien LO, XP parallel mit FN, so wird behauptet: Fig. 10.

$$MN^2 = FN \cdot XN.$$

Man ziehe noch durch N die Linie RS parallel mit BC, so wird die durch MN, RS gelegte Ebene parallel der Grundfläche, also ihr Durchschnitt mit der Kegelfläche ein Kreis, und da nach Annahme DE senkrecht auf BC, also auch MN senkrecht auf RS ist, 1) $MN^2 = RN \cdot NS$ sein. Nun ist

2) $$RN : FN = BK : AK,$$

3) $$NS : HN = CK : AK,$$ also

4) $RN \cdot NS : FN \cdot HN = BK \cdot CK : AK^2$, aber nach Annahme $BK \cdot CK : AK^2 = LF : HF = XN : HN$, also

5) $$RN \cdot NS : FN \cdot HN = XN : HN,$$ und

6) $$MN^2 = RN \cdot NS = FN \cdot XN.$$ q. e. d.

Die Linie LF heisst der Parameter oder das Latus rectum, die Linie HF das Latus transversum.

§. 13. **Lehrsatz 13.** Wenn ein Kegel von einer durch die Achse gelegten Ebene und von einer zweiten Ebene geschnitten wird, die beide Schenkelseiten des durch die erste entstandenen Achsendreiecks trifft und weder parallel der Grundfläche noch ein Wechselschnitt ist, und wenn die Durchschnittslinien der beiden Ebenen mit der nöthigenfalls erweiterten Grundfläche senkrecht auf einander stehen, so ist das Quadrat einer von einem beliebigen Punkt des Kegelschnitts parallel der in der Grundfläche befindlichen Durchschnittslinie bis zum Durchmesser gezogenen Ordinate gleich einem Rechteck, zu dessen einer Seite (der Länge) der Durchmesser des Kegelschnitts dasselbe Verhältniss hat, als das Quadrat einer vom Scheitel des Kegels parallel mit dem Durchmesser bis zu der erweiterten Grundfläche gezogenen Linie zu dem Rechteck aus den beiden Abschnitten, welche durch diese auf der verlängerten Grundlinie des Achsendreiecks entstehen, und dessen andere Seite (die Breite) eine der beiden zu der Ordinate gehörigen Abscissen ist, wenn dieses Rechteck noch vermindert wird um ein anderes von gleicher Breite, das ähnlich und ähnlich gelegen ist mit dem zwischen dem Durchmesser und der vorerwähnten Länge des ersten Rechtecks enthaltenen. Ein Kegelschnitt dieser Art heisst eine Ellipse.

Fig. 11. Sei ein Kegel mit dem Scheitel A und der Grundfläche BC gegeben und werde derselbe von einer durch die Achse gelegten Ebene, welche das Achsendreieck ABC bildet, und von einer zweiten Ebene geschnitten, die mit den beiden Seiten AB,AC oder ihren über B und C hinaus gehenden Verlängerungen in den Punkten E und D zusammentrifft, und weder der Grundfläche parallel noch ein Wechselschnitt ist, und deren Durchschnittslinie GF mit der nöthigenfalls erweiterten Grundfläche senkrecht auf der nöthigenfalls verlängerten BC steht. Sei ELD der hierdurch entstandene Kegelschnitt und ED sein Durchmesser, und werde in E in der Ebene ELD ein Loth EH errichtet, so dass, wenn AK eine von dem Scheitel des Kegels parallel mit ED bis zur Grundfläche gezogene Linie ist, $ED : EH = AK^2 : BK \cdot CK$ ist, ferner von einem beliebigen Punkt L des Kegelschnitts die Ordinate LM parallel mit der Durchschnittslinie FG gezogen und endlich in M eine Parallele mit EH, die der von D nach H gezogenen Verbindungslinie in X begegnet, und in X und H die Parallelen XO und HN mit DE, so wird behauptet:

$$ML^2 = EOXM.$$

Man ziehe noch durch M die Linie PR parallel mit BC, so ist ähnlich wie in den früheren Sätzen:

1) $$LM^2 = PM \cdot MR,$$

2) $$PM : EM = BK : AK,$$

3) $\underline{MR : DM = CK : AK,}$ also

4) $PM \cdot MR : EM \cdot DM = BK \cdot CK : AK^2$, da aber nach Annahme $BK \cdot CK : AK^2 = EH : ED = XM : DM$, ist

5) $PM \cdot MR : EM \cdot DM = XM : DM$, und also

6) $LM^2 = PM \cdot MR = EM \cdot XM$. q. e. d.

Die Linie EH heisst der Parameter oder das Latus rectum, die Linie ED das Latus transversum.

Anm. Die beiden letzten Lehrsätze über Hyperbel und Ellipse lassen folgenden Ausdruck zu: „Werden von beliebigen Punkten eines Kegelschnitts Ordinaten bis zu dem zugehorigen Durchmesser gezogen, so verhält sich bei Ellipse und Hyperbel das Quadrat jeder Ordinate zu dem Rechteck aus den Abschnitten, die sie auf dem Querdurchmesser bildet, wie das zugehörige latus rectum zum latus transversum. Bei der Parabel entsteht durch jede Ordinate auf dem Durchmesser nur ein Abschnitt und verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die zugehörigen Abschnitte. Von dieser Form der Satze 11—13 machen wir im Folgenden häufig Gebrauch.

§. 14. **Lehrsatz 14.** Wenn die am Scheitel zusammenstossenden Kegelflächen von einer nicht durch den Scheitel gehenden Ebene geschnitten werden, so entsteht in jeder der Flächen ein Schnitt, der Hyperbel heisst, und beide Schnitte haben denselben Durchmesser, die Parameter, die zu den Ordinaten gehören, welche der Grundfläche des Kegels parallel sind, sind in beiden gleich, das latus transversum, nämlich die Verbindungslinie der beiden Scheitel, ist beiden gemeinschaftlich. Solche Schnitte heissen Gegenschnitte.

Sei ein Kegel mit dem Scheitel A und der Grundfläche BC gegeben und werde derselbe von einer nicht durch den Scheitel gehenden Ebene, die beide am Scheitel zusammenstossende Kegelflächen trifft, geschnitten, so dass in der einen derselben der Schnitt DEF, in der andern KHG entsteht, so wird behauptet, dass beide Schnitte Hyperbeln sind, die einen gemeinschaftlichen Durchmesser und ein gemeinschaftliches latus transversum so wie gleiche Parameter haben. Fig. 12.

Man lege eine der Grundfläche parallele Ebene jenseit des Scheitels, die die zweite Kegelfläche in dem Kreis $XKOG$ trifft, ferner fälle man vom Mittelpunkt L der Grundfläche ein Loth LM auf die Durchschnittslinie DF dieser Grundfläche mit der Schnittebene, und lege durch ML und A eine Ebene, die also auch den Mittelpunkt Y des Kreises

XKOG trifft, und in der untern Kegelfläche das Achsendreieck *ABC*, in der oberen *AOX* bildet, so wird auch der Durchmesser *OX* senkrecht auf der Durchschnittslinie *KG* der Schnittebene mit der Ebene des Kreises *XKOG* stehen, ferner wird die zuletzt gelegte Ebene die Schnittebene längs der Geraden *MEHN* und die Kegelflächen in den Geraden *BEAO*, *CAHX* treffen. Zieht man nun noch durch *A* die Parallele *SAT* mit *MN* und errichtet in den Punkten *E* und *H* der Schnittebene Lothe auf *MN*, *EP* und *HR*, so dass

1) $EH : EP = AS^2 : BS \cdot SC$ und

2) $EH : HR = AT^2 : XT \cdot OT$ ist, so werden nach §. 12. *EP* und *HR* die Parameter der Hyperbeln *DEF* und *GHK*, die Gerade *MN* ihr gemeinschaftlicher Durchmesser und *EH* das ebenfalls gemeinschaftliche latus transversum. Da aber

3) $AS : SB = AT : TO,$

4) $AS : SC = AT : TX$

aus Aehnlichkeit der betreffenden Dreiecke, ist auch

5) $AS^2 : SB \cdot SC = AT^2 : TO \cdot TX,$

und also, wenn man (1) und (2) vergleicht, $EP = HR$. q. e. d.

Anm. Nun lässt sich die in Anm. zu §. 13. angegebene Eigenschaft auch auf zwei Gegenschnitte ausdehnen, und lautet also: Wird in einem Gegenschnitt zu irgend einem Durchmesser eine beliebige Ordinate gezogen und in dem andern Gegenschnitt für denselben Durchmesser eine andere, so verhalten sich die Quadrate dieser Ordinaten wie die Rechtecke aus den durch eine jede derselben auf dem Durchmesser entstandenen Abschnitten.

§. 15. **Lehrsatz 15.** Wenn in einer Ellipse von dem Mittelpunkt eines Durchmessers eine zugehörige Ordinate gezogen und nach beiden Seiten bis zum Durchschnitt mit derselben verlängert wird, und wenn sich die so erhaltene ganze Linie zum Durchmesser verhält wie der Durchmesser zu einer dritten Linie, so ist das Quadrat der geraden Linie, die von einem beliebigen Punkt der Ellipse parallel dem Durchmesser bis zur Ordinate gezogen wird, gleich einem Rechteck aus der vorerwähnten dritten Proportionale und dem Stück der Ordinate von der Ellipse bis zu den zuletzt gezogenen Parallelen vermindert um ein anderes Rechteck von derselben Breite, das ähnlich und ähnlich gelegen ist dem aus der verdoppelten Ordinate und der erwähnten dritten Proportionale. Verlängert man diese Parallele über die Ordinate hinaus bis zu ihrem zweiten Durchschnitt mit der Ellipse, so wird sie durch die Ordinate halbirt.

Sei eine Ellipse mit dem Durchmesser AB gegeben und durch die Mitte C des Durchmessers eine zugehörige Ordinate DCE nach beiden Seiten hin bis an den Umfang gezogen. In D errichte man ein Loth DF auf CD, so dass Fig. 13.

$$DE : AB = AB : DF \text{ ist,}$$

und ziehe EF; dann ziehe man von einem beliebigen Punkt G der Ellipse eine Parallele mit AB, bis sie DE in H und verlängert die Ellipse zum zweiten Male in V schneidet, vollende nun das Rechteck HDF zur Ecke K und ziehe durch den Schneidungspunkt L von EF und HK eine Parallele LM mit HD, so wird behauptet:

1) $$GH^2 = DHLM,$$
2) $$GH = HV.$$

Beweis. Nach Anm. zu §. 13. ist

1) $$GX^2 : DC^2 = AX \cdot XB : AC^2, \text{ oder da}$$
$$AX \cdot XB = AC^2 - CX^2,$$

2) $GX^2 : DC^2 = AC^2 - CX^2 : AC^2$, woraus dividendo.

3) $$DC^2 - GX^2 : DC^2 = CX^2 : AC^2, \text{ da aber}$$
$$GX = CH, \text{ ist } DC^2 - GX^2 = DH \cdot EH,$$

also 4) $DH \cdot EH : DC^2 = CX^2 : AC^2$ oder

$DH \cdot EH : DE^2 = CX^2 : AB^2$, da nun $EH : DE = HL : DF$,

und $$AB^2 = DE \cdot DF \text{ ist, ergiebt sich}$$

5) $$DH \cdot HL : DE \cdot DF = CX^2 : AB^2, \text{ oder}$$
$$DH \cdot HL = CX^2 = GH^2. \text{ q. e. d.}$$

Um nun zu zeigen, dass $GH = HV$ ist, ziehe man von V noch die Ordinate VQ, dann ist $VQ = GX$, also

$$AX \cdot XB = AQ \cdot QB \text{ oder}$$

$AC^2 - CX^2 = BC^2 - CQ^2$, da aber $AC = BC$, ist also auch

$$CX = CQ \text{ d. h. } GH = HV.$$

§. 16. **Lehrsatz 16.** Wenn durch den Punkt, welcher den Querdurchmesser zweier Gegenschnitte halbirt, eine Linie parallel den zugehörigen Ordinaten gezogen wird, so ist dieselbe ein Durchmesser, der dem ersten zugeordnet (conjugirt) genannt wird.

Seien zwei Gegenschnitte GA, HB mit dem Durchmesser AB gegeben und in der Mitte C des letzteren die den zuge- Fig. 14.

hörigen Ordinaten parallele CD gezogen, so wird behauptet, dass CD ein dem AB zugeordneter Durchmesser ist.

Man nehme in einem der Schnitte einen beliebigen Punkt G und ziehe von da eine Parallele mit AB, bis sie den andern Schnitt in H trifft, ziehe in G und H die zugehörigen Ordinaten GK, HL. Da nun nach Anm. zu §. 14. $GK^2 : HL^2 = KA \cdot KB : LA \cdot LB$, GK aber gleich HL, ist auch

1) $KA \cdot KB = LA \cdot LB$, oder

2) $KC^2 - AC^2 = CL^2 - BC^2$ und da $AC = BC$,

auch $KC = LC$ oder $GX = XH$. q. e. d.

Zweite Reihe von Erklärungen.

1) Der Punkt, welcher einen Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel halbirt, heisst der Mittelpunkt des Kegelschnitts.
2) Eine Linie, die vom Mittelpunkt nach dem Umfang gezogen wird, heisst ein Radius oder Halbmesser desselben.
3) Auf ähnliche Weise heisst auch der Punkt, welcher das latus transversum zweier Gegenschnitte halbirt, der Mittelpunkt derselben.
4) Eine Linie, die vom Mittelpunkt parallel den einem gegebenen Durchmesser zugehörigen Ordinaten gezogen wird, gleich der mittleren Proportionale zwischen dem latus rectum und transversum ist und im Mittelpunkt halbirt wird, heisst der zweite oder conjugirte Durchmesser.
5) Das Rechteck aus dem latus transversum und dem latus rectum, die zu einem Durchmesser gehören, heisst das zum Durchmesser gehörige Rechteck.
6) Die Linie, welche die Berührungspunkte zweier Tangenten verbindet, heisst die Berührungssehne.

Anm. Für die am Schluss der §§. 11, 12, 13 erklärten Längen des latus transversum und latus rectum werden der Abkürzung halber im Folgenden die Buchstaben t und r gebraucht, wobei zu erwähnen ist, dass diese Namen selbst nichts weiter bedeuten, als wagrechte und senkrechte Seite des zu einem Durchmesser gehörigen Rechtecks. Aus diesem letzteren Grunde ist auch der Ausdruck „latus rectum“ statt des in neuerer Zeit üblichen „Parameter“ in der vorliegenden Arbeit meistens beibehalten worden.

Die Erkl. 5. und 6. hat der Uebersetzer zur Bequemlichkeit des Ausdrucks hinzugefügt.

§. 17. **Lehrsatz 17.** Wenn vom Endpunkt eines Durchmessers in einem Kegelschnitt eine Linie parallel den zugehörigen Ordinaten gezogen wird, so fällt dieselbe ganz ausserhalb des Kegelschnitts.

Sei ein Kegelschnitt mit dem Durchmesser AB gegeben, Fig. 15.
so wird behauptet, dass die vom Scheitel A den zugehörigen Ordinaten parallel gezogene Linie ausserhalb des Kegelschnitts fällt. Denn wäre dies nicht der Fall und schnitte sie den Kegelschnitt in C, so würde, da von einem beliebigen Punkt C des Kegelschnitts die Ordinate CA gezogen ist, diese von dem Durchmesser halbirt werden müssen, also A zugleich Mitte und Endpunkt von CA sein, was unmöglich ist.

§. 18. **Lehrsatz 18.** Wenn eine Linie einem Kegelschnitt (Parabel oder Hyperbel) begegnet und verlängert nach beiden Seiten zu ausserhalb desselben liegt, und wenn von einem innerhalb desselben befindlichen Punkt eine Parallele mit dieser Linie gezogen wird, so schneidet diese, gehörig verlängert, an beiden Seiten den Kegelschnitt.

Sei ein Kegelschnitt und die ihn treffende Linie AEB, Fig. 16.
welche verlängert an beiden Seiten ausserhalb des Kegelschnitts fällt, gegeben, und werde von einem innerhalb desselben befindlichen Punkt C eine Parallele mit AB gezogen, so behaupte ich, dass CD gehörig verlängert an beiden Seiten dem Kegelschnitt begegne. Man nehme irgend einen Punkt F auf dem Kegelschnitt und verbinde E mit F. Weil nun AB der Linie CD parallel ist, und EF die Linie AB trifft, muss sie auch CD treffen. Wenn nun der Durchschnittspunkt zwischen E und F fällt, ist klar, dass CD nachher den Kegelschnitt treffen muss, da EF ein begränztes Segment desselben abschneidet, wenn aber ausserhalb E, muss CD den Kegelschnitt schon vorher getroffen haben. Also trifft CD nach der Richtung EB zu verlängert den Kegelschnitt. Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, dass sie auch nach der Seite EA hin demselben begegne, wozu nur nöthig ist eine Sehne EF, auf der andern Seite des Punktes C zu ziehen und dann ebenso wie oben zu schliessen. Folglich schneidet CD gehörig verlängert an beiden Seiten den Kegelschnitt.

§. 19. **Lehrsatz 19.** In einem Kegelschnitt trifft jede gerade Linie, die vom Durchmesser aus parallel den zugehörigen Ordinaten gezogen wird, den Kegelschnitt.

Fig. 17. Sei ein Kegelschnitt mit dem Durchmesser AB gegeben und werde ein beliebiger Punkt B darauf angenommen, und von B eine Linie BC parallel den zu diesem Durchmesser gehörigen Ordinaten gezogen, so wird behauptet, dass BC, gehörig verlängert, den Kegelschnitt trifft. Man nehme einen beliebigen Punkt D im Kegelschnitt, so wird die von A nach D gezogene Linie innerhalb des Kegelschnitts fallen. Weil aber die von A aus den zum Durchmesser AB gehörigen Ordinaten parallel gezogene Linie (nach §. 17.) ausserhalb des Kegelschnitts liegt, AD aber denselben trifft, wird eine von B aus den Ordinaten parallel gezogene Linie BC mit AD zusammentreffen müssen. Wenn dies nun zwischen A und D geschieht, wird BC nachher den Kegelschnitt treffen müssen, wenn aber jenseit D, muss sie schon vorher den Kegelschnitt geschnitten haben. Also schneidet die von einem beliebigen Punkt des Durchmessers den zugehörigen Ordinaten parallel gezogene Linie den Kegelschnitt.

§. 20. **Lehrsatz 20.** Die Quadrate zweier Ordinaten, die an denselben Durchmesser einer Parabel gezogen sind, verhalten sich wie die Abschnitte desselben vom Scheitel bis zu den Fusspunkten.

Wendet man Zeile 5. des Beweises von §. 11. auf zwei verschiedene Punkte K, K_1 an, so hat man $KL^2 = FL. FH$ und $K_1L_1{}^2 = FL_1 \cdot FH$, woraus $KL^2 : K_1L_1{}^2 = FL : FL_1$. q. e. d.

Anm. d. Eutoc. Fig. 18. Hieraus ergiebt sich ein Mittel für die Construction der Parabel durch einzelne Punkte. Man ziehe eine gerade Linie mit dem festen Endpunkt A und von beliebigen Punkten derselben B,C unter beliebigem Winkel die Parallelen BD,CE, so dass $BD^2 : CE^2 = BA : CA$, so sind D,E zwei Punkte der Parabel, deren Scheitel A ist.

§. 21. **Lehrsatz 21.** Wenn in einer Hyperbel oder Ellipse oder in einem Kreis Ordinaten gezogen werden, so verhält sich das Quadrat einer jeden derselben zu dem Rechteck der Abschnitte, die sie auf dem latus transversum bildet, wie das latus rectum zum latus transversum; also die Quadrate zweier Ordinaten unter sich wie die Rechtecke aus den auf dem latus transversum entstandenen Abschnitten.

Setzt man in Zeile 5. des Beweises zu §. 12. statt $RN \cdot SN$ seinen Werth MN^2 und statt $XN : HN$ das gleiche Verhältniss $LF : HF$, so erhält man den ersten Theil der Behauptung für die Hyperbel, und wenn man diesen auf zwei beliebige Punkte der Hyperbel anwendet, durch Vergleichung leicht den zweiten Theil. Auf ähnliche Weise verfährt man mit Zeile 5. in §. 13., dann hat man den Satz auch für die Ellipse.

Anm. 1. des Eutocius. Beim Kreis ist das latus rectum gleich dem latus transversum und die Ordinaten stehen senkrecht auf dem Durchmesser.

Anm. 2. desselben. Aus dem Lehrsatz ergiebt sich die folgende Construction Fig. 19. einer Hyperbel. Sei AB eine gerade Linie, die uber A hinaus beliebig verlängert wird, in A die Lange AC senkrecht dagegen gezogen, und B mit C verbunden. In beliebigen Punkten E, G der verlängerten BA errichte man Lothe EH, GK, bis sie die verlängerte BC in H, K schneiden, und ziehe unter beliebigem Winkel von E und G die Parallelen ED, GF, so dass $DE^2 = AE \cdot EH$ und $FG^2 = AG \cdot GK$ ist, so sind D, F Punkte der Hyperbel. Auf ähnliche Weise verfahrt man bei der Ellipse.

§. 22. **Lehrsatz 22.** Jede Sehne einer Parabel oder Hyperbel, die den Durchmesser nicht innerhalb des Kegelschnitts schneidet, trifft ihn ausserhalb.

Sei eine Parabel oder Hyperbel mit dem Durchmesser Fig. 20 a. AB, und eine Sehne CD, die den Durchmesser nicht innerhalb trifft, gegeben, so wird behauptet, dass die verlängerte CD ausserhalb des Kegelschnitts mit AB zusammentrifft. Man ziehe von C und D die Ordinaten CE, DB und betrachte zuerst die Parabel. Dann ist $CE^2 : DB^2 = AE : AB$, da aber $AE > AB$, muss auch $CE > DB$, also kann nicht CD parallel AB sein, und da es nicht innerhalb mit AB zusammentrifft, muss es ausserhalb des Kegelschnitts geschehen.

Betrachtet man nun die Hyperbel, deren latus transver- Fig 20 b. sum AF sei, so ist $CE^2 : DB^2 = AE \cdot FE : AB \cdot FB$, und da $AE \cdot FE > AB \cdot FB$, auch $CE > DB$, weshalb CD mit AB zusammentreffen muss, und da es nicht innerhalb geschehen kann, so muss also CD ausserhalb des Kegelschnitts mit AB zusammentreffen.

Anm. Bei der Hyperbel ist leicht zu zeigen, dass CD zwischen A und der Mitte M des latus transversum die Linie AB durchschneiden muss. Denn man verwandelt obige Proportion leicht in $CE^2 : DB^2 = ME^2 - MA^2 : MB^2 - MA^2$ und da $ME > MB$, muss $CE^2 : DB^2 > ME^2 : MB^2$ (wenn man zu

Zähler und Nenner eines unächten Bruchs Gleiches addirt, wird der Bruch kleiner), also auch $CE : DB > ME : MB$, woraus die Behauptung erhellt.

§. 23. **Lehrsatz 23.** Jede Sehne einer Ellipse, welche zwei conjugirte Durchmesser innerhalb der Ellipse nicht schneidet, trifft dieselben ausserhalb.

Fig. 21. Sei eine Ellipse mit den conjugirten Durchmessern AB, CD gegeben, und zwischen den Endpunkten A und C derselben zwei Punkte E und F in dem Umfang angenommen und durch eine gerade Linie verbunden, so wird behauptet, dass EF, verlängert, beide Durchmesser ausserhalb des Kegelschnitts treffe. Man ziehe von den Punkten E und F gegen den Durchmesser AB hin die Ordinaten EG, FH, und gegen CD hin EK, FL, so ist

1) $EG^2 : FH^2 = AG \cdot BG : AH \cdot BH,$

2) $FL^2 : EK^2 = CL \cdot LD : CK \cdot KD.$

Da aber H weiter von der Mitte M von AB entfernt liegt als G, ist $AG \cdot BG > AH \cdot BH$, und da K weiter von der Mitte M von CD entfernt liegt als L, ist $CL \cdot LD > CK \cdot KD$, folglich auch $EG > FH$ und $FL > EK$, weshalb EF weder mit AB noch mit CD parallel sein kann, und da es innerhalb die Durchmesser nicht mehr schneiden kann, muss es sie ausserhalb treffen.

§. 24. **Lehrsatz 24.** Wenn eine gerade Linie einer Parabel oder Hyperbel in einem Punkte begegnet und nach beiden Seiten hin ausserhalb des Kegelschnitts liegt, so wird dieselbe den Durchmesser schneiden.

Fig. 22. Sei eine Parabel oder Hyperbel mit dem Durchmesser AB gegeben, und begegne ihr die gerade Linie CDE im Punkte D, so dass sie zu beiden Seiten von D ausserhalb des Kegelschnitts fällt, so wird behauptet, dass CDE den Durchmesser AB schneidet. Man nehme auf der von D aus dem Scheitel abgewandten Seite des Kegelschnitts den Punkt F beliebig an und ziehe FD, so wird diese Linie nach §. 22. den Durchmesser schneiden. Sei A der Durchschnittspunkt. Da nun CDE mit dem Theile DE zwischen die Gerade DA und den Kegelschnitt fällt, muss sie den Durchmesser zwischen dem Scheitel und dem Punkt A treffen.

§. 25. **Lehrsatz 25.** Wenn eine gerade Linie einer Ellipse zwischen den Endpunkten zweier conjugirten Durchmesser in einem Punkte begegnet und zu beiden Seiten desselben ausserhalb der Ellipse fällt, so wird sie beide Durchmesser schneiden.

Sei eine Ellipse mit den conjugirten Durchmessern *AB* und *CD* gegeben, und werde dieselbe zwischen den Endpunkten *A* und *C* der Durchmesser von der Geraden *EF* im Punkte *G* so getroffen, dass diese Linie zu beiden Seiten von *G* ausserhalb des Kegelschnitts liegt, so wird behauptet, dass *EF*, verlängert, beide Durchmesser ausserhalb des Kegelschnitts schneidet. Man ziehe von *G* auf der dem Scheitel *A* abgewandten Seite die Sehne *GH*, so dass *H* zwischen *G* und *C* liegt, dann schneidet nach §. 23. die verlängerte *HG* den Durchmesser *BA*; da nun *EF* mit dem Theile *GF* zwischen die verlängerte *HG* und die Ellipse fällt, muss sie den verlängerten Durchmesser *BA* noch früher schneiden. Ein Gleiches kann in Bezug auf den Durchmesser *CD* durch eine nach der andern Seite gezogene Sehne bewiesen werden. Fig. 23.

§. 26. **Lehrsatz 26.** Wenn in einer Parabel oder Hyperbel eine gerade Linie parallel mit dem Durchmesser des Schnitts gezogen wird, so trifft dieselbe den Kegelschnitt in einem und nicht in mehreren Punkten.

Sei zuerst eine Parabel mit dem Durchmesser *AB* und dem latus rectum *AD* gegeben, und *EF* parallel dem Durchmesser gezogen, so wird behauptet, dass *EF* die Parabel schneidet. Seie *E* ein Punkt ausserhalb der Parabel und werde *EG* parallel den zum Durchmesser gehörigen Ordinaten gezogen, ferner nehme man in *AB* einen Punkt *C* so an, dass $AD \cdot AC > EG^2$ ist, und ziehe in *C* die Ordinate *CH*, so wird also auch $CH^2 > EG^2$, also muss *EF*, ehe sie *HC* trifft, den Kegelschnitt getroffen haben. Sei *K* der Schneidungspunkt, so wird behauptet, dass kein zweiter möglich ist. Denn wäre ein solcher, etwa *L*, vorhanden, so müsste nach §. 22. die gerade Linie *LK* den Durchmesser *AB* ausserhalb treffen, was gegen die Annahme ist. Fig. 24.

Sei zweitens eine Hyperbel mit dem latus rectum *AD* und dem latus transversum *AB* gegeben; man verfahre wie oben, ziehe von *C* parallel mit *AD* die Linie *CM*, bis sie die verlängerte *BD* in *M* schneidet, so wird, da $DA \cdot AC > EG^2$ nach Annahme und $CM \cdot AC > DA \cdot AC$, wie leicht Fig. 25.

erhellt, und endlich $HC^2 = AC \cdot CM$, auch $HC^2 > EG^2$ sein, woraus, wie oben, die Behauptung weiter gefolgert werden kann.

§. 27. **Lehrsatz 27.** Wenn eine gerade Linie den Durchmesser einer Parabel schneidet, so trifft sie gehörig verlängert an beiden Seiten den Kegelschnitt.

Fig. 26. Sei eine Parabel mit dem Durchmesser AB und eine gerade Linie CD, die den Durchmesser innerhalb des Kegelschnitts in D schneidet, gegeben, so wird behauptet, dass CD, gehörig verlängert, an beiden Seiten den Kegelschnitt schneidet. Man ziehe vom Scheitel A die Linie AE parallel den zugehörigen Ordinaten, so wird AE nach §. 17. ausserhalb des Kegelschnitts fallen. Es wird nun CD entweder mit AE parallel sein oder nicht. Im ersten Fall ist CD also den Ordinaten parallel und trifft deshalb nach §. 19. den Kegelschnitt. Ist sie aber nicht parallel, so verlängere man sie, bis sie AE im Punkte E schneidet, dann wird CD, ehe sie AE schneidet, den Kegelschnitt schon getroffen haben müssen. Es wird nun noch behauptet, dass CD auch nach der andern Seite hin verlängert, den Kegelschnitt schneiden muss. Sei AM das latus rectum und werde von dem schon nachgewiesenen Schneidungspunkt zwischen CD und dem Kegelschnitt die Ordinate GF gezogen, auf AB ein Punkt B bestimmt, so dass $AD^2 = AF \cdot AB$, und in B den Ordinaten parallel die Linie BK gezogen, bis sie die gegebene CD in C trifft, so wird behauptet, dass C der zweite Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden CD mit der Parabel ist.

Es ist

1) $GF : BC = DF : BD$, und da nach Annahme $AF : AD = AD : AB$ auch dividendo $DF : BD = AD : AB$, also

2) $$GF^2 : BC^2 = AD^2 : AB^2.$$

Aus $AF : AD = AD : AB$ hat man aber $AF : AB = AD^2 : AB^2$, also

3) $GF^2 : BC^2 = AF : AB$ und folglich, da G auf der Parabel liegt, befindet sich auch C auf derselben. q. e. d.

Eutocius sagt, dass in einigen Ausgaben der folgende Beweis des 27. Lehrsatzes gestanden habe, von dem man leicht erkennt, dass er ein Mittel zur Construction der Durchschnittspunkte einer Geraden mit einer Parabel an die

Hand giebt, während der vorige nur aus dem schon vorhandenen ersten Durchschnittspunkt den zweiten finden lehrt.

Zweiter Beweis. Sei eine Parabel mit dem Durchmesser AB nnd der den Durchmesser schneidenden Linie CD gegeben, so wird behauptet, dass CD verlängert den Kegelschnitt an beiden Seiten schneide. Man ziehe in A den Ordinaten parallel AE; ist nun CD parallel AE, so schneidet es nach §. 17. den Kegelschnitt; ist es aber nicht parallel, so schneidet es AE in E; dann sei AM das latus rectum nach derselben Seite als AE gezogen, und auf der verlängerten MA das Stück AF dergestalt abgeschnitten, dass $AE^2 : \triangle AED = AM : AF$; ferner ziehe man durch F die Parallele FG mit AB, welche DC in G schneidet, verlängere EA, bis es die Parallele in L trifft, und bestimme eine Parallele CB mit AE dergestalt, dass das durch dieselbe von dem Winkel EGL oder seinem Scheitelwinkel abgeschnittene Dreieck GCK gleich dem Viereck $LADG$ ist, so wird behauptet, dass der Punkt C, in welchem diese Parallele die Gerade DC trifft, sich auf der Parabel befindet. Sei zuerst die Parallele durch den Scheitelwinkel von EGL gelegt, und schneide sie FG in K. Man vollende noch das Rechteck $FABX$. Nun ist: Fig. 27.

1) $EA^2 : \triangle EAD = CB^2 : \triangle CBD$, und da $\triangle CGK = LADG$ und $EA^2 : \triangle EAD = AM : AF$, auch $ALKB = AFXB$, so ist

2) $CB^2 : AFXB = AM : AF$, also

3) $CB^2 = AM \cdot AB$, und folglich liegt der Punkt C auf der Parabel.

Ebenso leicht ist es zu zeigen, wenn die Parallele den Winkelraum EGF selbst durchschneidet.

§. 28. **Lehrsatz** 28. Wenn eine gerade Linie den einen von zwei Gegenschnitten berührt, und durch einen innerhalb des andern angenommenen Punkt damit eine Parallele gezogen wird, so wird diese, gehörig verlängert, an beiden Seiten mit dem Gegenschnitt zusammentreffen.

Seien zwei Gegenschnitte mit den Scheiteln A und B, und in dem einen, dessen Scheitel A ist, eine Tangente CD gegeben, und werde in dem andern ein Punkt E angenommen und durch denselben eine Parallele EF mit CD gezo- Fig. 28.

gen, so wird behauptet, dass *EF* an beiden Seiten mit dem Kegelschnitt zusammentreffe.

Da bewiesen ist, dass *CD*, gehörig verlängert, den Durchmesser schneidet (s. §. 24.), und *EF* parallel *CD* ist, wird auch *EF* denselben treffen; sei *G* der Schneidungspunkt, und werde in dem andern Schnitt *AH* gleich *GB* genommen, durch *H* eine Parallele *HK* mit *CD* gezogen, bis sie den Kegelschnitt in *K* trifft, und von *K* die Ordinate *KL* gezogen. Man setze nun $GM = HL$ und ziehe von *M* eine Parallele mit *KL*, bis sie *FE* in *N* schneidet. Da nun $\triangle KLH$ congruent $\triangle NMG$ ist, wird $KL = MN$, und da $LA \cdot LB = MA \cdot MB$ ist, liegt der Punkt *N* auf dem Kegelschnitt. Auf dieselbe Weise wird gezeigt, dass *FE* an der andern Seite den Kegelschnitt trifft.

§. 29. **Lehrsatz 29.** Wenn in zwei Gegenschnitten eine durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie dem einen Schnitt begegnet, so trifft sie auch den andern.

Fig. 29. Seien zwei Gegenschnitte mit dem Durchmesser *AB* und der durch das Centrum gehenden Geraden *CD* gegeben, welche den einen Schnitt mit dem Scheitel *A* in *D* trifft, so wird behauptet, dass *CD*, gehörig verlängert, auch den andern Schnitt treffe.

Man ziehe von *D* die Ordinate *DE*, setze $CF = CE$ und ziehe von *F* die Parallele *FG* mit *DE*, welche die verlängerte *DC* in *G* schneidet; da nun $DE = FG$ und $EA \cdot EB = FA \cdot FB$, wird der Punkt *G* auf dem Kegelschnitt sich befinden.

§. 30. **Lehrsatz 30.** Wenn in zwei Gegenschnitten oder in einer Ellipse eine gerade Linie durch den Mittelpunkt gezogen wird, und, verlängert, an beiden Seiten dem Kegelschnitt begegnet, so wird sie im Mittelpunkt halbirt werden.

Fig. 29 u. 30. Wenn alles wie im vorigen Satz eingerichtet ist, so folgt aus der Congruenz der Dreiecke *CDE* und *CFG* leicht, dass $DC = CG$. Und auf gleiche Weise wird es auch für die Ellipse bewiesen.

§. 31. **Lehrsatz 31.** Wenn im latus transversum einer Hyperbel ein Punkt jenseit des Mittelpunkts angenommen und von da eine gerade Linie gezogen wird, die den Kegelschnitt trifft, so wird ihre Verlängerung über diesen Durchschnittspunkt innerhalb der Hyperbel liegen.

Fig. 31. Sei eine Hyperbel mit dem Durchmesser *AB* gegeben,

und werde von dem Mittelpunkt C desselben eine Linie CD gezogen, die den Kegelschnitt in D trifft, so wird behauptet, dass die Verlängerung von CD innerhalb des Kegelschnitts fällt.

Sie falle, wenn möglich, ausserhalb und sei E ein Punkt in ihr. Man ziehe von D die Ordinate DH und von E die Parallele EG, die den Kegelschnitt in F trifft, so ist

1) $EG^2 : DH^2 > GA \cdot GB : HA \cdot HB$, da aber $EG : DH = CG : CH$ und $GA \cdot GB = GC^2 - CB^2$, $HA \cdot HB = HC^2 - CB^2$, müsste

2) $CG^2 : CH^2 > CG^2 - CB^2 : CH^2 - CB^2$ sein, was unmöglich ist, denn wenn von Zähler und Nenner eines unächten Bruchs gleiche Stücke subtrahirt werden, so wird derselbe grösser. Also kann die Verlängerung von CD nicht ausserhalb des Kegelschnitts fallen, und wenn deshalb jenseit des Mittelpunkts C ein Punkt angenommen und mit D verbunden wird, kann die Verlängerung dieser Geraden noch weniger ausserhalb der Hyperbel liegen.

Zusatz. Aus dem schon Bewiesenen folgt, dass eine Tangente der Hyperbel den Durchmesser zwischen dem Scheitel und dem Mittelpunkt schneiden muss.

§. 32. **Lehrsatz 32.** Wenn durch den Scheitel eines Kegelschnitts eine Linie parallel den zugehörigen Ordinaten gezogen wird, so berührt sie den Kegelschnitt und in den Raum zwischen dem Kegelschnitt und dieser Geraden kann keine andere gerade Linie fallen.

Sei zuerst eine Parabel mit dem Durchmesser AB gegeben, und werde von dem Scheitel A eine den Ordinaten parallele Linie AC gezogen, so fällt AC nach §. 17. ausserhalb des Kegelschnitts. Es wird behauptet, dass in dem Raum zwischen AC und dem Kegelschnitt von A aus keine zweite Gerade gezogen werden kann. Denn wäre das möglich, so sei AD eine solche Gerade; und werde von dem beliebigen Punkte D derselben den Ordinaten parallel DE gezogen, welche den Kegelschnitt in G schneidet. Ist nun AF das latus rectum, so wird Fig. 32.

1) $DE^2 : AE^2 > GE^2 : AE^2$, und da $GE^2 = AE \cdot AF$,

2) $DE^2 : AE^2 > AF : AE$.

Man bestimme nun den Punkt H auf dem Durchmesser AB, so dass

3) $$DE^2 : AE^2 = AF : AH$$ und ziehe von H den Ordinaten parallel die Linie HK bis zum Durchschnitt K mit AD, so ist, da $DE^2 : AE^2 = HK^2 : AH^2$, wenn man dies in (3) einsetzt,

4) $HK^2 : AH^2 = AF : AH$ oder $HK^2 = AH \cdot AF$.
also liegt der Punkt K auf der Parabel und die Linie AK liegt innerhalb derselben gegen die Annahme.

Fig. 33 u. 34. Sei zweitens der Schnitt eine Hyperbel oder Ellipse oder ein Kreis mit dem Durchmesser AB, AF das latus rectum, und werde BF gezogen. Zieht man nun in A die Linie AC den Ordinaten parallel, so fällt dieselbe ausserhalb des Kegelschnitts nach §. 17. Es wird behauptet, dass in den Raum zwischen der Geraden AC und dem Kegelschnitt eine zweite Gerade nicht fallen könne. Denn wäre dies möglich, so sei AD eine solche Gerade, und von einem beliebigen Punkte D derselben werde den Ordinaten parallel die Linie DE an den Durchmesser gezogen, welche den Kegelschnitt in G trifft. In E ziehe man EM parallel mit AF, bis zum Durchschnitt N mit BF. Nun ist

1) $DE^2 : AE^2 > GE^2 : AE^2$, und da $GE^2 = AE \cdot EM$,

2) $$DE^2 : AE^2 > EM : AE.$$ Man verlängere daher EM bis zum Punkt N, so dass

3) $$DE^2 : AE^2 = EN : AE,$$ ziehe AN, welche BF in X schneidet, ziehe von X die Linie XH parallel mit AF bis zum Durchmesser und von H den Ordinaten parallel HK bis zum Durchschnitt K mit der Geraden AD; da nun $DE^2 : AE^2 = KH^2 : AH^2$ und $EN : AE = HX : AH$, so giebt dies in (3) eingesetzt:

4) $KH^2 : AH^2 = HX : AH$ oder $KH^2 = AH \cdot HX$; also liegt der Punkt K auf dem Kegelschnitt und die Gerade AK innerhalb desselben gegen die Annahme.

§. 33. **Lehrsatz 33.** Wenn von einem Punkt einer Parabel an einen Durchmesser eine Ordinate gezogen, und dieser Durchmesser über seinen Scheitel um ein ebenso grosses Stück, als zwischen dem Scheitel und der Ordinate liegt, verlängert wird, so ist die Verbindungslinie des so erhaltenen Punktes mit dem Parabelpunkt eine Tangente.

Sei eine Parabel mit dem Durchmesser AB gegeben, und von einem beliebigen Punkt C derselben die Ordinate CD gezogen, und DA um sich selbst verlängert bis zum Punkte E, so wird behauptet, dass EC eine Tangente sei. Wäre sie es nicht, so müsste entweder ihre Verlängerung CF innerhalb fallen, oder zwischen E und C ein Schneidungspunkt statt finden. Fig. 35.

Fiele also erstens die Verlängerung von EC innerhalb, so sei F ein Punkt derselben und werde von F den Ordinaten parallel die Gerade FB bis zum Durchmesser gezogen, welche die Parabel in G trifft. Dann ist

1) $GB^2 : CD^2 > FB^2 : CD^2$ und da $FB^2 : CD^2 = BE^2 : DE^2$ und $GB^2 : CD^2 = BA : DA$, ist auch

2) $$BA : DA > BE^2 : DE^2,$$ oder wenn man das erste Verhältniss mit 4 AE erweitert:

3) $4\,BA \cdot AE : 4\,DA \cdot AE > BE^2 : DE^2$, da aber $DE^2 = 4\,DA \cdot AE$, müsste $4\,BA \cdot AE > BE^2$ sein, was unmöglich ist, da $4\,AD\,(AD + DB) < (2\,AD + DB)^2$ ist.

Läge zweitens zwischen E und C ein Schneidungspunkt H mit der Parabel, so ziehe man die Ordinate HK, dann müsste, da $CD^2 : HK^2 = DE^2 : KE^2$ und auch $CD^2 : HK^2 = DA : KA$, also $DE^2 : KE^2 = DA : KA$, oder wenn man das zweite Verhältniss mit 4 AE erweitert: $DE^2 : KE^2 = 4\,AE \cdot DA : 4\,AE \cdot KA$, und da $DE^2 = 4\,AE \cdot DA$, müsste auch $KE^2 = 4\,AE \cdot KA$ sein, was unmöglich ist, da A nicht die Mitte von KE ist.

Anm. Es ist übrigens leicht, diesem Beweis die indirekte Form zu nehmen, welche in der That nur scheinbar ist, da es darauf ankommt, direkt zu beweisen, dass $FB < GB$ ist. Dies thut Viviani in seiner Divin. in quintum Apollonii.

§. 34. **Lehrsatz 34.** Wenn auf einer Hyperbel oder Ellipse oder einem Kreisumfang ein Punkt angenommen und von ihm eine Ordinate gezogen wird, und wenn auf dem Durchmesser zu den beiden Endpunkten des latus transversum und dem durch die Ordinate erhaltenen Punkt der letzterem zugeordnete vierte harmonische Punkt genommen wird, so ist die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem zuerst auf dem Kegelschnitt angenommenen eine Tangente.

Sei eine Hyperbel oder eine Ellipse oder ein Kreisumfang mit dem Durchmesser AB gegeben, und auf dem Kegel- Fig. 36 u. 37.

schnitt ein Punkt C angenommen; ferner von C die Ordinate CD gezogen, und auf AB ein Punkt E so bestimmt, dass $AE:BE = AD:BD$ ist, so wird behauptet, dass die Gerade CE den Kegelschnitt berühre.

Wird also von einem andern Punkt F der Geraden EC die Linie FG parallel den Ordinaten nach dem Durchmesser hin gezogen, welche den Kegelschnitt in H schneidet, so ist zu beweisen:

$$FG > HG.$$

Man ziehe von A und B die Linien AL, BK parallel mit EC, und die Gerade CG, bis sie die Parallelen in O, M trifft, so wie CB, bis sie AL in X schneidet, verlängere CD, bis sie AL in N, BM in K schneidet. Da nun $AD:BD = AN:BK$, $AE:BE = CX:CB = XN:BK$, nach Annahme aber $AD:BD = AE:BE$, ist $AN:BK = XN:BK$ und also $AN = NX$. Mithin ist $AN \cdot NX > AO \cdot OX$ oder $\frac{AN}{AO} > \frac{OX}{NX}$ oder, da $\frac{OX}{NX} = \frac{BM}{BK}$, $\frac{AN}{AO} > \frac{BM}{BK}$ d. h. $AN \cdot BK > BM \cdot AO$.

Nun ist aber wegen Aehnlichkeit der Dreiecke CDE, NDA und KDB

$$NA \cdot BK : CE^2 = AD \cdot BD : DE^2$$

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke CGE, OGA und MGB

$$OA \cdot BM : CE^2 = AG \cdot BG : GE^2, \text{ also}$$

$$AD \cdot BD : DE^2 > AG \cdot BG : GE^2,$$

oder, da $DE^2 : GE^2 = DC^2 : GF^2$, ist $AD \cdot BD : DC^2 > AG \cdot BG : GF^2$, da aber $AD \cdot BD : DC^2 = AG \cdot BG : HG^2$, ist $AG \cdot BG : HG^2 > AG \cdot BG : GF^2$, und also $FG > HG$, und F ausserhalb des Kegelschnitts, was zu beweisen war.

Fig. 38. Anderer Beweis. Seien zwei Punkte G, D in einer begränzten Geraden AB angenommen, so dass $DA < DB$ und $GB > GA > DA$, von ihnen Parallelen GH, DC gezogen, und in der verlängerten BA ein Punkt E bestimmt, so dass 1) $GH^2 : GA \cdot GB = CD^2 : DA \cdot DB$ und 2) $AE:BE = AD:BD$, und die Gerade EC gezogen, welche GH in F trifft, so wird behauptet, $GF > GH$.

Bew. Da $GF^2 : CD^2 = GE^2 : DE^2$ und

$\underline{GH^2 : CD^2 = AG \cdot BG : AD \cdot BD}$, bleibt zu zeigen

$GE^2 : DE^2 > AG \cdot BG : AD \cdot BD$. Nun ist, wenn

M die Mitte zwischen A und B ist, $AD \cdot BD = MA^2 - MD^2 = MD \cdot ME - MD^2 = MD \cdot DE$, und $AG \cdot BG = MA^2 - MG^2$. Setzt man dies ein, vertauscht die inneren Glieder und hebt mit DE, so erhält man:

$GE^2 : MA^2 - MG^2 > DE : MD$, oder componendo $GE^2 + MA^2 - MG^2 : GE^2 > ME : DE$.

Nun ist $GE^2 - MG^2 = ME \cdot (GE - MG)$ und $MA^2 = MD \cdot ME$, also eingesetzt und mit ME gehoben $GE - MG + MD : GE^2 > 1 : DE$ oder $GE + GD : GE > GE : GE - GD$, was einleuchtet. Mithin ist bewiesen, dass $GE^2 : DE^2 > AG \cdot BG : AD \cdot BD$ und also auch, dass $GF > GH$.

Anm. Ein anderer Beweis findet sich in Viviani divinatio in V. conicorum Ap.

§. 35. **Lehrsatz 35.** Wenn eine gerade Linie eine Parabel berührt und bis zu ihrem Durchschnittspunkt mit einem Durchmesser derselben verlängert wird, so wird die vom Berührungspunkt an den Durchmesser gezogene Ordinate auf diesem vom Scheitel an gerechnet ein ebenso grosses Stück abschneiden, als das zwischen dem Scheitel und dem Durchschnittspunkt mit der Tangente befindliche, und in den Raum zwischen der Tangente und dem Kegelschnitt kann vom Berührungspunkt aus keine zweite Gerade gezogen werden.

Sei eine Parabel mit dem Durchmesser AB gegeben, Fig. 39. auf ihr ein Punkt C angenommen und in diesem eine Tangente CA und die Ordinate CB gezogen; ist nun G der Scheitel, so wird behauptet, dass $AG = GB$ ist.

Wäre AG nicht gleich GB, so sei $GE = AG$ und in E die Ordinate EF gezogen, dann wird die gerade Linie AF den Kegelschnitt in F berühren nach §. 33. und also verlängert mit AC zusammen treffen müssen, also hätten die geraden Linien AC und AF zwei verschiedene Schneidungspunkte, was unmöglich ist. Also ist AG nicht ungleich GB. Ferner wird behauptet, dass in den Raum zwischen CA und dem Kegelschnitt keine andere gerade Linie von C aus gezogen werden kann. Denn wäre CD eine solche Gerade, so setze man $GE = GD$, ziehe in E die Ordinate EF, dann wird die Gerade DF den Kegelschnitt in F berühren, also ihre Verlängerung ausserhalb des Kegelschnitts liegen, und deshalb mit DC zusammentreffen müssen, also hätten die beiden Geraden DF,DC zwei verschiedene Schneidungspunkte, was unmöglich ist, mithin fällt in den Raum zwischen AC und dem Kegelschnitt keine andere gerade Linie.

§. 36. **Lehrsatz 36.** Wenn eine gerade Linie eine Hyperbel, Ellipse oder einen Kreisumfang berührt, und den verlängerten Querdurchmesser schneidet, und wenn vom Berührungpunkt an denselben Durchmesser eine Ordinate gezogen wird, so verhalten sich auf diesem die beiden Stücke von den Scheiteln des Kegelschnitts bis zum Durchschnittspunkt der Tangente ebenso wie die beiden Stücke vom Fusspunkt der Ordinate bis zu den Scheiteln in derselben Ordnung genommen; und in den Raum zwischen der Tangente und dem Kegelschnitt kann vom Berührungspunkt aus keine andere Gerade gezogen werden.

Fig. 40 u. 41. Sei eine Hyperbel oder eine Ellipse oder der Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser AB gegeben, und im Punkte C derselben die Tangente CD und die Ordinate CE gezogen, so wird behauptet, dass $AD:BD = AE:BE$. Denn wäre das nicht der Fall, so sei $AD:BD = AG:BG$ und in G die Ordinate GF gezogen, dann würde DF den Kegelschnitt in F berühren nach §. 34. und deshalb verlängert mit DC zusammentreffen müssen, also hätten zwei gerade Linien zwei verschiedene Durchschnittspunkte, was unmöglich ist. Ferner wird behauptet, dass in den Raum zwischen dem Kegelschnitt und der Tangente CD von C aus keine andere gerade Linie gezogen werden könne. Denn wäre z. B. CH eine solche, so nehme man den Punkt G dergestalt, dass $AG:BG = AH:BH$, und ziehe in G die Ordinate GF, dann würde HF nach §. 34. den Kegelschnitt in F berühren und also, verlängert, mit HC zusammentreffen müssen, also hätten die beiden Geraden HC, HF zwei verschiedene Durchschnittspunkte, was unmöglich ist. Mithin lässt sich von C in den Raum zwischen dem Kegelschnitt und der Tangente CD keine andere gerade Linie ziehen.

§. 37. **Lehrsatz 37.** Wenn eine Tangente an einer Hyperbel, Ellipse oder einem Kreisumfang mit einem Durchmesser zusammentrifft, und von dem Berührungspunkte aus an diesen die Ordinate gezogen wird, so ist das Rechteck aus den beiden Abschnitten des Durchmessers vom Mittelpunkt des Kegelschnitts bis zu den Durchschnittspunkten der

Tangente und Ordinate gleich dem Quadrat des halben latus transversum. Das Rechteck aber aus dem Abschnitt zwischen Mittelpunkt und Ordinate und dem zwischen Ordinate und Tangente hat zum Quadrat der Ordinate dasselbe Verhältniss als das latus transversum zum latus rectum.

Ist eine Hyperbel, Ellipse oder ein Kreisumfang mit dem Fig. 42 u. 43.
latus transversum AB und dem Centrum F gegeben, und von einem Punkt D derselben die Ordinate CE und die Tangente CD gezogen, so wird behauptet:

1) $FB^2 = FD \cdot FE,$

2) $FE \cdot ED = AE \cdot BE.$ (siehe §. 12. u. 13.)

Es verhält sich nach §. 36:

1) $AD : BD = AE : BE,$ woraus bei der Hyperbel durch Addition der Glieder eines Verhältnisses, bei der Ellipse und dem Kreis durch Subtraction:

2) $AB : BD = AE \pm BE : BE,$ und wenn man von den Vordergliedern die Hälften nimmt:

3) $FB : BD = FE : BE,$ woraus bei der *Hyperbel* durch Subtraction, bei Ellipse und Kreis durch Addition der Glieder eines Verhältnisses:

4) $FD : FB = FB : FE$ oder $FB^2 = FD \cdot FE.$

Addirt man in (3) die correspondirenden Glieder bei der Hyperbel oder subtrahirt sie bei Ellipse und Kreis, so erhält man:

$$AE : FE = DE : BE \text{ oder } FE \cdot DE = AE \cdot BE.$$

Anm. des Uebers. Diese Satze sind jetzt als Elementarsätze in der Lehre von den harmonischen Punkten hinreichend bekannt.

Anm. des Eutoc. Aus diesen letzten Sätzen erhellt, wie man von einem Punkt auf dem Durchmesser eines Kegelschnitts oder im Scheitel selbst eine Tangente an denselben ziehen kann.

§. 38. **Lehrsatz 38.** Wenn an eine Hyperbel, Ellipse oder einen Kreisumfang eine Tangente, die mit dem zweiten Durchmesser zusammentrifft, und vom Berührungspunkt nach diesem Durchmesser hin eine Parallele mit dem ersten Durchmesser gezogen wird, so ist das Rechteck aus den beiden Abschnitten auf dem zweiten Durchmesser vom Mittelpunkt des Kegelschnitts an bis zu der erwähnten Parallele und bis zu der Tangente, gleich dem Quadrat des halben zweiten Durchmessers; das Rechteck aber aus den beiden Abschnitten zwischen dem Mittelpunkt und jener Parallele und zwischen dieser Parallele und der Tangente verhält sich zu dem Quadrat der Parallelen wie das latus rectum zum latus transversum.

Fig. 44 u. 45. Sei eine Hyperbel oder Ellipse oder ein Kreisumfang mit dem Durchmesser AGB und dem zweiten Durchmesser CGD und eine Tangente ELF, die in E berührt, in L den ersten, in F den zweiten Durchmesser schneidet, gegeben, und von E parallel dem ersten Durchmesser die Linie EH bis zum zweiten Durchmesser gezogen, so wird, wenn r das latus rectum bedeutet, behauptet:

1) $$GC^2 = GF \cdot GH,$$

2) $$GH \cdot HF : EH^2 = r : AB.$$

Beweis. Zieht man noch von E die Ordinate EM, so ist

1) $$EM^2 : GM \cdot LM = r : AB \text{ nach §. 37.}$$

Aber da nach Nr. 4. der zweiten Reihe von Erklär. $r : CD = CD : AB$, so hat man $r : AB = CD^2 : AB^2 = CG^2 : AG^2$; und ersetzt man nun noch das in dem ersten Theile von 1. enthaltene Verhältniss $EM : LM$ durch das gleiche Verhältniss $GF : GL$, und schreibt statt des übrigen EM, HG, so erhält man

2) $HG \cdot GF : GM \cdot GL = CG^2 : AG^2$; da aber nach §. 37. $GM \cdot GL = AG^2$, ist auch $HG \cdot GF = CG^2$, q. e. d.

Ersetzt man aber in 1. das Verhältniss $EM : LM$ durch das gleiche $HF : HE$, schreibt statt des übrigen EM das gleiche HG und statt GM, HE, so hat man

$$HF \cdot HG : HE^2 = r : AB, \text{ q. e. d.}$$

Anm. 1. Hieraus zeigt man leicht, dass die Endpunkte des zweiten Durchmessers, der Fusspunkt der Tangente und der vom Berührungspunkt aus auf denselben gezogenen Ordinate harmonische Punkte sind.

Anm. 2. Aus dem Gesagten erhellt, dass die Linie EF den Kegelschnitt berührt, wenn entweder das Rechteck $FG \cdot GH$ gleich dem Quadrat von GC oder wenn das Rechteck $FH \cdot HG$ zu dem Quadrat von HE sich wie das latus rectum zum latus transversum verhalt, welches beides indirekt leicht gezeigt werden kann.

§. 39. **Lehrsatz 39.** Wenn eine Tangente an einer Hyperbel, Ellipse oder einem Kreisumfang den Durchmesser schneidet, und vom Berührungspunkt eine Ordinate gezogen wird, so hat zu einem jeden der beiden Abschnitte des Durchmessers, die zwischen der Ordinate und dem Mittelpunkt des

Schnitts und zwischen der Ordinate und Tangente liegen, die Ordinate ein Verhältniss, das zusammengesetzt ist aus dem Verhältniss des andern jener beiden Abschnitte zur Ordinate und dem des latus rectum zum latus transversum.

Der Apollonische Beweis ist folgender:

Sei AB das latus transversum eines Kegelschnitts mit dem Centrum F, und im Punkte C desselben die Ordinate CE, so wie die Tangente CD gezogen, und sei G eine Linie von der Beschaffenheit, dass $FE \cdot ED = CE \cdot G$ oder $G : FE = ED : CE$ ist, so hat man, da $CE^2 : FE \cdot ED$, also auch $CE^2 : CE \cdot G$, also $CE : G = r : AB$, Fig. 42 u. 43.

1) $CE : G = r : AB$,

2) $G : FE = ED : CE$,

woraus durch Zusammensetzung die Behauptung sich ergiebt.

Die Richtigkeit des Satzes erhellt übrigens unmittelbar aus §. 37., da hiernach das Quadrat der Ordinate zum Rechteck aus den erwähnten beiden Abschnitten sich wie das latus rectum zum latus transversum verhält, indem man nur einmal die Ordinate aus dem ersten Glied in's vierte und einen der beiden Abschnitte aus dem zweiten Glied in's dritte rückt, wodurch die Richtigkeit der Proportion nicht leidet.

§. 40. **Lehrsatz 40.** Wenn eine Tangente an einer Hyperbel, Ellipse oder einem Kreisumfang den zweiten Durchmesser schneidet und vom Berührungspunkt an diesen Durchmesser eine Parallele mit dem andern Durchmesser gezogen wird, so wird einer der beiden Abschnitte auf dem zweiten Durchmesser, die zwischen dem der Parallelen und dem Mittelpunkt des Schnitts und zwischen derselben und der Tangente liegen, zu der Parallelen ein Verhältniss haben, das zusammengesetzt ist aus dem Verhältniss des jedesmaligen andern Abschnitts zur Parallelen und dem des latus transversum zum latus rectum.

Die Richtigkeit des Satzes erhellt auf dieselbe Weise aus §. 38. als die des vorigen aus §. 37.

§. 41. **Lehrsatz 41.** Wenn in einer Hyperbel oder Ellipse oder einem Kreisumfang eine Ordinate gezogen wird und über der Ordinate und dem Halbmesser gleichwinklige Parallelogramme beschrieben werden, und die Ordinate zu der andern Seite des über ihr beschriebenen Parallelogramms ein Verhältniss hat, das zusammengesetzt ist aus dem Verhältniss des Halbmessers zu der andern Seite des über ihm beschriebenen Parallelogramms und dem des latus rectum zum latus transversum, und wenn noch ein Parallelogramm über dem Abschnitt des Durchmessers vom Mittelpunkt bis zur Ordinate, ähnlich dem über dem Halbmesser befindlichen, construirt wird, so ist bei der Hyperbel das über dem Halbmesser befindliche Parallelogramm gleich dem Unterschied zwischen dem zuletzt erhaltenen und dem über der Ordinate, bei Ellipse und Kreis aber gleich der Summe dieser selben Parallelogramme.

Fig. 46 u. 47. Sei eine Hyperbel mit dem latus transversum AB, dem Mittelpunkt E gegeben, von einem beliebigen Punkt C derselben die Ordinate CD gezogen und über EA ein beliebiges Parallelogramm $EAIF$, über CD aber damit ein gleichwinkliges $CDKG$ construirt, so dass: $CD : CG = EA \cdot r : EF \cdot AB$, wo r das latus rectum bedeutet; so wird behauptet, dass, wenn über ED ein mit $AEFI$ ähnliches Parallelogramm $DELM$ gezeichnet wird:

$$AEFI = DELM - CDKG.$$

Beweis. Nach §. 21. ist $CD^2 : DA \cdot DB$ oder $CD^2 : DE^2 - EA^2 = r : AB$; ersetzt man nun in der Voraussetzung das Verhältniss $r : AB$ durch das gleiche $CD^2 : DE^2 - EA^2$, so erhält man

$$CD : CG = CD^2 \cdot EA : (DE^2 - EA^2) \cdot EF,$$

oder wenn man das Produkt der innern gleich dem Produkt der äussern Glieder setzt und mit $CD \cdot EA$ dividirt:

$$CG \cdot CD = \frac{EF}{EA} \cdot DE^2 - EF \cdot EA$$

und setzt man endlich statt $\frac{EF}{EA} \cdot DE$ das gleiche EL, so erhält man

$$CG \cdot CD = EL \cdot ED - EF \cdot EA,$$

welches, da sich die Inhalte gleichwinkliger Parallelogramme, wie die Rechtecke aus ihren anstossenden Seiten verhalten, mit der Behauptung gleichbedeutend ist.

Auf ganz gleiche Weise erhält man bei gehöriger Aenderung der Zeichen bei der Ellipse

$$CG \cdot CD = EF \cdot EA - EL \cdot ED.$$