SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 703

FUNKTIONENTHEORIE

von

PROF. DR. KONRAD KNOPP †
ehem. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen

II

ANWENDUNGEN UND WEITERFÜHRUNG DER ALLGEMEINEN THEORIE

Elfte Auflage

Mit 7 Figuren

WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
BERLIN 1965

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende Bände von Prof. Dr. Konrad Knopp:

Elemente der Funktionentheorie (Bd. 1109)

Funktionentheorie:

I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen (Bd. 668)

II: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie (Bd. 703)

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie:

I: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie (Bd. 877)

II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie (Bd. 878)

— Archiv-Nr. 7713642. — Druck: Lindemann & Lüdecke, Berlin 36.

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis.

Seite
Einleitung 5

Erster Abschnitt.
Eindeutige Funktionen.

1. Kapitel. Ganze Funktionen.
§ 1. Der Weierstraßsche Produktsatz 8
§ 2. Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes 13
§ 3. Beispiele zum Weierstraßschen Produktsatze 25

2. Kapitel. Meromorphe Funktionen.
§ 4. Der Mittag-Lefflersche Teilbruchsatz 34
§ 5. Beweis des Mittag-Lefflerschen Satzes 38
§ 6. Beispiele zum Mittag-Lefflerschen Satze 41

3. Kapitel. Periodische Funktionen.
§ 7. Die Perioden analytischer Funktionen 53
§ 8. Einfach-periodische Funktionen 60
§ 9. Doppelt-periodische, insbesondere elliptische Funktionen 67

Zweiter Abschnitt.
Mehrdeutige Funktionen.

4. Kapitel. Wurzel und Logarithmus.
§ 10. Vorläufiges über mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen 83
§ 11. Die Riemannschen Flächen für $\sqrt[p]{z}$ und $\log z$ 89
§ 12. Die Riemannschen Flächen für die Funktionen $w = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_k)}$ 98

5. Kapitel. Algebraische Funktionen.
§ 13. Problemstellung 103
§ 14. Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Wurzeln 105
§ 15. Die algebraische Funktion 110

6. Kapitel. Das analytische Gebilde.
§ 16. Die monogene analytische Funktion 118
§ 17. Die Riemannsche Fläche 122
§ 18. Das analytische Gebilde 125

Register 129

Literatur

Für die hier behandelten Teile der Funktionentheorie, sowie zur Weiterführung und Vertiefung des Studiums sind außer den in „I" genannten Werken über die allgemeine Theorie (insbesondere denen von L. Bieberbach, C. Carathéodory, G. Doetsch, W. F. Osgood sowie den Cours d'analyse von É. Goursat, C Jordan und É. Picard) noch die folgenden zu nennen:

É. Borel, Leçons sur les fonctions entières. 2. Aufl. Paris 1921.

É. Borel, Leçons sur les fonctions méromorphes. Paris 1903.

H. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen. Zweiter Teil: Elliptische Funktionen. 3. Aufl. (hrsgeg. v. G. Faber). Berlin und Leipzig 1920.

C. Carathéodory, Funktionentheorie II, Basel 1950.

P. Dienes, The Taylor Series, Oxford 1931.

R. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. I. Teil, Leipzig 1916, II. Teil, Leipzig 1922.

P. Appel und E. Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. 2. Aufl., 2 Bände, Paris 1930.

F. Lösch und F. Schoblik, Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen, Leipzig 1951.

R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen. 2. Aufl., Springer-Verlag 1953.

E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford 1932.

E. C. Titchmarsh, The Zeta-Function of Riemann, Cambridge 1930.

F. Tricomi, Funzioni analitiche. Bologna 1936.

F. Tricomi, Funzioni ellitiche. Bologna 1937.

H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 23. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart 1954.

E. T. Whittaker und G. N. Watson, A course of modern analysis. 4. Aufl. Cambridge 1927

Die Anwendungen der Funktionentheorie behandeln:

J. Heinold, Theorie und Anwendung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, München 1949.

R. Rothe, F. Ollendorff und K. Pohlhausen, Funktionentheorie und ihre Anwendungen in der Technik. Berlin 1931.

Einleitung.

In dem einführenden Bändchen „Elemente der Funktionentheorie" und im ersten Teil dieser Funktionentheorie[1]) wurden die Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen gelegt und die sog. elementaren Funktionen (Elem., 5. Abschn.) eingehender behandelt. Daneben wurden aber auch schon zwei besondere Klassen von Funktionen, die rationalen (I, § 35) und die ganzen Funktionen (I, § 27 u. 28), näher betrachtet. Solche mehr ins Einzelne und tiefer gehenden Untersuchungen von Funktionenklassen sollen jetzt in den Vordergrund treten. Dabei wird sich zeigen, daß die Unterscheidung von eindeutigen und mehrdeutigen Funktionen, die schon in I, § 24, S. 104/6 bei dem Versuch einer vollständigen Erklärung des Begriffs der analytischen Funktionen angedeutet wurde, durchaus grundlegend ist. Sie soll daher für die ganze folgende Darstellung maßgebend sein.

Aus diesen beiden Hauptklassen greifen wir wieder einige besonders charakteristische und wichtige Typen von Funktionen heraus. Da uns Vollständigkeit in dem engen Rahmen dieses Büchleins versagt bleibt, ist eine gewisse Willkür hierbei unvermeidlich. Doch werden wir dieser Gefahr am ehesten entgehen, wenn wir von den elementaren Funktionen (den ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen, von e^z, $\sin z$, und deren Umkehrungen) als den wichtigsten ausgehen und das Wesentliche und Allgemeingesetzliche an ihren Haupteigenschaften zu erkennen suchen[2]).

[1]) „Elemente der Funktionentheorie", 5. Aufl. Berlin 1959. Sammlung Göschen Nr. 1109. — „Funktionentheorie" Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen, 10. Aufl., Berlin 1961. Sammlung Göschen Nr. 668. — Im folgenden werden diese Bändchen kurz mit „Elem." bzw. „I" unter Angabe von Kapitel oder Paragraph zitiert.

[2]) Es kann sich im folgenden durchaus nur um eine Auswahl handeln. Der Leser möge darum den Inhalt dieses Bändchens nicht dem der Funktionentheorie gleichsetzen.

Die **ganzen rationalen Funktionen** (Elem., § 39), in vielem die einfachsten und durchsichtigsten Funktionen, sind „rein funktionentheoretisch" dadurch charakterisiert (I, S. 139), daß sie in der ganzen Ebene regulär sind und im Punkt ∞ einen Pol haben. Läßt man die letztere Eigenschaft außer acht, so gelangt man zu der allgemeineren Klasse der **ganzen Funktionen**, der die rationalen und transzendenten als Sonderfälle angehören und die also allein durch die Eigenschaft, in der ganzen Ebene (ausschl. ∞) regulär zu sein, charakterisiert sind. Sie erschienen uns in I, § 29 auch deshalb als die einfachsten, weil ihre für einen beliebigen Mittelpunkt angesetzte Potenzreihenentwicklung in der ganzen Ebene konvergiert und also die Funktion darstellt. Da dann von analytischer Fortsetzung gar nicht mehr die Rede ist, sind sie eindeutig; und sie sind in ihrer Gesamtheit identisch mit der Gesamtheit aller beständig konvergenten Potenzreihen der Form

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

und erscheinen auch so als eine unmittelbare Verallgemeinerung der ganzen rationalen Funktionen.

Wir wollen im ersten Kapitel an diese Funktionen mit der Frage herantreten: Welche der Grundeigenschaften der ganzen rationalen Funktionen besitzt auch noch die übergeordnete Klasse der ganzen Funktionen und welche nicht?

Die **gebrochenen rationalen Funktionen** (Elem. § 40) sind nach I, § 35, Satz 1 und 2 rein funktionentheoretisch dadurch vollständig charakterisiert, daß sie in der ganzen Ebene und im Punkt ∞ keine andern Singularitäten haben als Pole. Läßt man auch hier die letzte auf den Punkt ∞ bezügliche Eigenschaft außer acht, so gelangt man wieder zu einer allgemeineren Funktionenklasse, den sog. **meromorphen Funktionen**, die nun allein durch die Eigenschaft, in der ganzen Ebene (ausschl. ∞) keine anderen Singularitäten als Pole zu haben, charakterisiert sind.

Im zweiten Kapitel wollen wir an diese Funktionen, die sich auch als eindeutig erweisen werden, mit der analog zu formulierenden Frage herantreten wie soeben.

Die funktionentheoretisch interessanteste Eigenschaft der Funktionen e^z, $\sin z$, u. a. ist ihre Periodizität. Wir werden im dritten Kapitel diese ihre Eigenschaft, losgelöst von der besonderen Natur jener Funktionen, rein funktionentheoretisch näher untersuchen. Wir gelangen so zu den Klassen der einfach- und der doppelt-periodischen Funktionen. Innerhalb der letzteren treffen wir dann insbesondere die elliptischen Funktionen an. — Mit diesen Typen aus dem Reich der eindeutigen Funktionen müssen wir uns genug sein lassen.

Bei den mehrdeutigen Funktionen wird es sich vor allem darum handeln müssen, den Begriff derselben klar herauszuschälen, was in I, § 24 noch nicht möglich war, und eine deutliche Anschauung von dem Wesen der Mehrdeutigkeit zu geben. Das gelingt im vierten Kapitel durch eine sehr einfache, aber eben deshalb als besonders genial zu bewertende Hilfsvorstellung, die Riemannschen Flächen. An den einfachsten mehrdeutigen Funktionen, wie

$$\sqrt[p]{z}\,,\ \log z\,,\ \sqrt{(z-a_1)\,(z-a_2)\cdots(z-a_k)}\,,$$

wird die Bildung dieser Flächen erläutert und im fünften Kapitel eine besonders wichtige und darum auch besonders gut durchforschte Klasse von mehrdeutigen Funktionen ausführlicher behandelt: die algebraischen Funktionen.

Unter Zuhilfenahme des hierbei gewonnenen Begriffs der algebraischen Singularitäten werden endlich im sechsten Kapitel die Lücken, die unsere in I, S. 104/6 gegebene Definition der vollständigen analytischen Funktion bzw. des analytischen Gebildes noch hatte, ausgefüllt und damit der Begriff des analytischen Gebildes in seiner vollen Allgemeinheit gewonnen, — dieser wunderbare, von allem An fang im Mittelpunkt unserer Betrachtungen stehende, doch keineswegs im ersten Anlauf zu bezwingende Begriff, der zu den schönsten und tiefsten in den gesamten mathematischen Wissenschaften gehört.

Erster Abschnitt.

Eindeutige Funktionen.

1. Kapitel. Ganze Funktionen.

§ 1. Der Weierstraßsche Produktsatz.

Die wichtigste funktionentheoretische Eigenschaft der ganzen rationalen Funktionen findet im Fundamentalsatz der Algebra (Elem. § 39 u. I, S. 115 und 140) ihren Ausdruck: *Jede (nicht konstante) ganze rationale Funktion besitzt Nullstellen.* Da z. B. e^z (wegen $e^z \cdot e^{-z} = 1$) keine Nullstellen hat, so scheint unsere oben formulierte Fragestellung sogleich zur Unfruchtbarkeit verurteilt. Doch werden wir bei näherem Eingehen auf den Kern der Sache bald sehen, daß dem nicht so ist. Ist nämlich

$$g_0(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m,$$
$$(m \geqq 1, \quad a_m \neq 0)$$

eine beliebige, nicht konstante ganze rationale Funktion, so folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra genauer, daß $g_0(z)$ in der Form

$$(1) \qquad g_0(z) = a_m (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \cdots (z - z_k)^{\alpha_k}$$

dargestellt werden kann, wenn $z_1, z_2, \ldots, z_k$ die sämtlichen untereinander verschiedenen Nullstellen von $g_0(z)$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ deren Ordnungen bedeuten. — Wir drücken dies so aus:

(A) *Für jede ganze rationale Funktion gibt es eine* ***Produktdarstellung****, die ihre Nullstellen nach Lage und Ordnung erkennen läßt*[1]).

Aus ihr liest man sofort weiter ab, daß jede andre ganze rationale Funktion $g(z)$, die dieselben Nullstellen in derselben Ordnung hat, sich von $g_0(z)$ nur durch den Faktor a_m unterscheiden kann; und ferner, daß man diesen Nullstellen jede Lage und jede Ordnung geben kann, m. a. W.:

(B) *Es lassen sich stets ganze rationale Funktionen bilden, deren Nullstellen nach Lage und Ordnung vorgeschrieben sind*[2]), *— und zwar in Form eines* ***Produktes****, das diese Nullstellen erkennen läßt. Aus einer Funktion dieser Art geht die allgemeinste durch Hinzufügung eines willkürlichen von* 0 *verschiedenen Faktors hervor („durch eine multiplikativ hinzutretende ganze rationale Funktion ohne Nullstellen“).*

Deutet man durch diese beiden Feststellungen (A) und (B) den Inhalt des Fundamentalsatzes der Algebra, so werden wir sehen, daß sich dies Wort für Wort auf beliebige ganze Funktionen übertragen läßt.

Dazu legen wir uns zunächst, als grundlegend für das folgende, die der zweiten Feststellung entsprechende **Aufgabe** vor, nämlich zu untersuchen, ob und wie man ganze Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen[3]) bilden kann, und inwieweit dadurch eine ganze Funktion bestimmt ist.

Soll die zu bildende ganze Funktion gar keine Nullstellen besitzen, so ist z. B. die Konstante 1 oder die Funktion e^z oder e^{z^2} oder allgemeiner $e^{h(z)}$ eine Lösung des Problems, wenn hierin $h(z)$ eine völlig beliebige **ganze** Funktion bedeutet.

---

[1]) Dies gilt auch für ganze rationale Funktionen „ohne Nullstellen“, d. h. solche 0-ten Grades (also die von 0 verschiedenen Konstanten), für die die Produktdarstellung nur aus dem Faktor $a_m (= a_0 \neq 0)$ bestehen würde. — Für die Konstante 0 dagegen gelten unsere Betrachtungen natürlich nicht mehr

[2]) Natürlich dürfen für eine ganze rationale Funktion nur **endlich** viele Nullstellen vorgeschrieben werden.

[3]) D. h. die Funktion soll in genau vorgeschriebenen Punkten Nullstellen von genau vorgeschriebener Ordnung haben, — **und in allen übrigen Punkten** $\neq 0$ **sein**.

Die letzte Antwort ist aber auch schon die **allgemeinste** Lösung des Problems, d. h. es ist (bei beliebigem ganzem $h(z)$) nicht nur $e^{h(z)}$ stets eine ganze Funktion ohne Nullstellen, sondern es läßt sich auch umgekehrt jede solche Funktion in der Form $e^{h(z)}$ darstellen. Wir sagen dafür kürzer:

Satz 1. *Bedeutet $h(z)$ eine beliebige ganze Funktion, so ist $e^{h(z)}$ die* ***allgemeinste ganze Funktion ohne Nullstellen***[1]).

Beweis: Wir haben nur noch zu zeigen, daß, wenn $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ eine gegebene ganze Funktion ohne Nullstellen ist, eine andre ganze Funktion $h(z) = b_0 + b_1 z + \cdots$ angegeben werden kann, so daß $e^{h(z)} = g(z)$ ist. Nun ist wegen $g(z) \neq 0$ insbesondere $a_0 = g(0) \neq 0$, und es kann daher b_0 so gewählt werden, daß $e^{b_0} = a_0$ ist; denn e^z nimmt jeden von 0 verschiedenen Wert an (Elem. § 41, 6). Ferner ist aus demselben Grunde $\frac{1}{g(z)}$ eine überall reguläre, also ganze Funktion. Da dasselbe von $g'(z)$ gilt, so ist auch

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

eine ganze Funktion, die neue Reihe also beständig konvergent. Letzteres gilt dann auch von der Reihe

$$b_0 + c_0 z + \frac{c_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{c_{n-1}}{n} z^n + \cdots$$
$$= b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots,$$

die somit eine ganze Funktion $h(z)$ darstellt. Mit ihr ist aber

---

1) Bei Benutzung der mehrdeutigen Funktion log erscheint dieser Satz fast trivial. Denn ist $g(z)$ eine ganze Funktion, die stets $\neq 0$ ist, so ist $h(z) = \log g(z)$, z. B. durch die Festsetzung, daß $h(0)$ der Hauptwert von $\log g(0)$ sein soll, eine ebenfalls in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes reguläre Funktion von z. Ihre dortige Entwicklung $h(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ hat also einen positiven Konvergenzradius. Dieser muß aber (auf Grund von I, § 24, Satz 1 oder § 25) $+\infty$ sein, da $\log g(z)$ nur da singulär sein kann, wo $g(z)$ singulär oder $= 0$ ist, also nirgends im Endlichen.

$g(z) = e^{h(z)}$. Denn $g(z)e^{-h(z)}$ hat die Ableitung $(g' - g \cdot h')e^{-h}$, die wegen $h' = g'/g$, $g \neq 0$, überall $= 0$ ist. Daher ist $g \cdot e^{-h}$ konstant und zwar, wie man für $z = 0$ erkennt, gleich 1, w. z. b. w. [1]).

Nachdem wir so unsere Aufgabe für den Fall, daß gar keine Nullstellen vorgeschrieben sind, schon vollständig gelöst haben, ist es leicht zu sehen, inwieweit eine ganze Funktion überhaupt durch ihre Nullstellen bestimmt ist. Sind nämlich $G_0(z)$ und $G(z)$ zwei ganze Funktionen, die in ihren Nullstellen nach Lage und Ordnung übereinstimmen, so ist (vgl. I, § 21, Satz 4) der Quotient beider wieder eine ganze Funktion, jedoch ohne Nullstellen. $G(z)$ und $G_0(z)$ unterscheiden sich also (vgl. die Feststellung (B)) höchstens durch eine multiplikativ hinzutretende ganze Funktion ohne Nullstellen; und umgekehrt ändert das Hinzutreten einer solchen zu $G_0(z)$ offenbar nichts an der Lage und Ordnung der Nullstellen. In Verbindung mit Satz 1 drücken wir dies so aus:

Satz 2. *Ist $G_0(z)$ eine gegebene ganze Funktion, so ist, wenn $h(z)$ eine beliebige ganze Funktion bedeutet,*

$$G(z) = e^{h(z)}\ G_0(z)$$

die allgemeinste ganze Funktion, deren Nullstellen nach Lage und Ordnung mit denen von $G_0(z)$ übereinstimmen.

Hiernach bleibt nur noch die Frage zu erledigen, ob und wie man überhaupt eine ganze Funktion mit irgendwie vorgeschriebenen Nullstellen bilden kann.

Ohne jede Einschränkung ist dies offenbar nicht möglich. Denn da eine ganze Funktion nirgends im Endlichen eine singuläre Stelle hat, so können nach I, §21, Satz 1 in jedem endlichen Gebiete nur endlich viele Nullstellen derselben liegen. Die

[1]) Der durchgeführte Beweis lehrt allgemeiner: Sind zwei Funktionen $f(z)$ und $f_1(z)$ in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ eindeutig, regulär und von 0 verschieden und stimmen dort ihre logarithmischen Ableitungen $f' : f$ und $f_1' : f_1$ überein, so unterscheiden sich beide höchstens um einen konstanten Faktor, — der natürlich $= 1$ sein muß, falls f und f_1 an irgendeiner Stelle von $\mathfrak{G}$ den gleichen Wert haben.

vorgeschriebenen Punkte dürfen sich also nirgends im Endlichen häufen. Macht man aber lediglich diese in der Natur der Sache gelegene Einschränkung, so werden wir sehen, daß sich stets eine ganze Funktion der in Rede stehenden Art bilden läßt. Diese wird dabei (ähnlich wie in (1) für die ganzen rationalen Funktionen) in Form eines Produktes aufgestellt werden können, das die Lage und Ordnung ihrer Nullstellen erkennen läßt. Es gilt also folgender nach seinem Entdecker benannter

Weierstraßscher Produktsatz. *Wird irgendeine (endliche oder unendliche), sich nirgends im Endlichen häufende Punktmenge vorgeschrieben und wird jedem ihrer Punkte eine bestimmte positive ganze Zahl als Ordnung zugeordnet, so gibt es stets eine ganze Funktion, die genau an den vorgeschriebenen Punkten Nullstellen von der vorgeschriebenen Ordnung besitzt und sonst von 0 verschieden ist. Dieselbe läßt sich in Form eines Produktes aufstellen*[1]*), aus dem die Lage und die Ordnung der Nullstellen (ähnlich wie bei* (1)*) wieder abgelesen werden kann. Und ist* $G_0(z)$ *eine solche Funktion, so ist*

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot G_0(z)$$

die allgemeinste den Bedingungen des Problems genügende Funktion, wenn hierin $h(z)$ *eine beliebige ganze Funktion bedeutet*[2]*).*

Sehen wir diesen grundlegenden Satz für den Augenblick einmal als bewiesen an, so folgt aus ihm sofort, daß auch die erste unserer beiden Feststellungen über ganze rationale Funktionen sich auf beliebige ganze Funktionen übertragen läßt.

Ist nämlich $G(z)$ eine beliebig vorgelegte ganze Funktion, so hat die Menge ihrer Nullstellen nirgends im Endlichen eine

---

[1]) Die fertige Formel s. u. S. 22.

[2]) Soll die zu bildende ganze Funktion gar keine Nullstellen haben, so ist der Faktor $G_0(z)$ fortzulassen, d. h. durch 1 zu ersetzen, — also doch auch durch eine ganze Funktion mit den vorgeschriebenen Nullstellen.

Häufungsstelle. Nach dem Weierstraßschen Satze wird man daher eine andre ganze Funktion $G_0(z)$ bilden können, deren Nullstellen nach Lage und Ordnung genau dieselben sind, — und zwar in Form eines Produktes, welches sie erkennen läßt. Dann ist aber nach Satz 2, wenn $h_0(z)$ eine passende ganze Funktion bedeutet, notwendig

$$G(z) = e^{h_0(z)} \cdot G_0(z),$$

womit in der Tat eine Produktdarstellung der vorgelegten ganzen Funktion $G(z)$ gewonnen wäre, aus der ihre Nullstellen nach Lage und Ordnung abgelesen werden können. — Wie behauptet, wären damit die beiden Feststellungen (A) und (B) über ganze rationale Funktionen Wort für Wort auf beliebige ganze Funktionen übertragen.

Dem nun allein noch fehlenden Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes ist der nächste Paragraph gewidmet.

Aufgaben: 1. $\dfrac{\sin iz}{e^{2z}-1}$ ist eine ganze Funktion ohne Nullstellen (Beweis?). Nach Satz 1 kann sie also auf die Form $e^{h(z)}$ gebracht werden. Wie hat man $h(z)$ hierzu zu wählen?

2. $\cos iz$ und $e^{2z}+1$ haben nach Lage und Ordnung dieselben Nullstellen (Beweis?). Nach Satz 2 geht also die zweite aus der ersten durch Hinzufügung eines Faktors der Form $e^{h(z)}$ hervor. Wie hat man $h(z)$ hierzu zu wählen?

§ 2. Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes.

1. Unendliche Produkte. Die den Bedingungen des Weierstraßschen Satzes genügende ganze Funktion wird, wie schon angedeutet, in Form eines Produktes — und zwar im allgemeinen eines unendlichen Produktes — aufgestellt werden. Wie bei den unendlichen Reihen wollen wir dabei auch aus der Lehre von den unendlichen Produkten mit konstanten Faktoren die einfachsten Tatsachen als bekannt voraussetzen.

Da diese indessen nicht so allgemein bekannt zu sein pflegen, und um doch für das Weitere eine feste Grundlage zu haben, lassen wir ganz kurz die wichtigsten Erklärungen und Sätze, deren wir bedürfen, ohne Beweis folgen[1]).

Erklärung 1. *Das unendliche Produkt*

$$(1) \qquad u_1 \cdot u_2 \cdots u_\nu \cdots = \prod_{\nu=1}^{\infty} u_\nu ,$$

bei dem die Faktoren beliebige komplexe Zahlen bedeuten, soll dann und nur dann (eigentlich) ***konvergent*** *heißen, wenn von einem Index an — etwa für alle $\nu > m$ — kein Faktor verschwindet und wenn*

$$\lim_{n\to\infty} (u_{m+1} \cdot u_{m+2} \cdots u_n)$$

vorhanden ist und einen endlichen und von 0 verschiedenen Wert hat. Bezeichnet man diesen mit U_m, so wird die offenbar von m unabhängige Zahl

$$U = u_1 \cdot u_2 \cdots u_m \cdot U_m$$

als ***Wert*** *des unendlichen Produktes (1) angesehen*[2]).

Für solche konvergenten unendlichen Produkte gelten die leicht zu beweisenden Sätze:

Satz 1. *Ein konvergentes Produkt hat dann und nur dann den Wert 0, wenn einer seiner Faktoren verschwindet.*

Satz 2. *Das unendliche Produkt (1) ist dann und nur dann konvergent, wenn sich nach Wahl eines beliebigen $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 so bestimmen läßt, daß für alle $n > n_0$ und alle $r \geqq 1$ stets*

$$|u_{n+1} \cdot u_{n+2} \cdots u_{n+r} - 1| < \varepsilon$$

bleibt (Elem. § 26, Satz 1, und I, § 3, Satz 4).

Da auf Grund dieses Satzes (man setze $r = 1$ und $n + 1 = \nu$) notwendig $\lim\limits_{\nu\to\infty} u_\nu = 1$ sein muß, setzt man die Faktoren u_ν des Pro-

---

[1]) Ausgeführte Beweise findet man in meinem I, S. 5 genannten Lehrbuch „Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen", 4. Aufl. Berlin 1947, Springer-Verlag, sowie in meiner dort ebenfalls genannten H. v. Mangoldtschen „Einführung in die höhere Mathematik", Bd. II

[2]) In Anlehnung an die entsprechende Erklärung bei unendlichen Reihen könnte man geneigt sein, das Produkt (1) schon immer dann konvergent mit dem Werte U zu nennen, wenn

$$\lim_{n\to\infty} (u_1 \cdot u_2 \ldots u_n) = U$$

ist. Dann wäre aber ersichtlich jedes Produkt konvergent und immer mit dem Werte 0, bei dem nur ein einziger Faktor verschwindet; desgleichen wäre z. B. auch jedes Produkt konvergent und auch immer mit dem Werte 0, bei dem für alle $\nu > m$ stets $|u_\nu| \leqq \vartheta < 1$ bleibt. Um diese Fälle auszuschließen, benutzt man zweckmäßiger die obige Erklärung und erinnert — falls nötig — durch den Zusatz „eigentlich" an die dabei gemachte Einschränkung.

duktes gewöhnlich $= 1 + c_\nu$, so daß es sich statt um (1) um Produkte der Form

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + c_\nu) \tag{2}$$

handelt. Für diese ist also $c_\nu \to 0$ eine notwendige Konvergenzbedingung (die aber keineswegs hinreicht!). — Ferner benutzen wir die

Erklärung 2. *Das Produkt* (2) *soll* ***absolut konvergent*** *genannt werden, wenn*

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + |c_\nu|)$$

konvergiert[1]). — Es gilt dann weiter der

Satz 3. *Die absolute Konvergenz ist hinreichend für die gewöhnliche Konvergenz; oder: Aus der Konvergenz von* $\Pi\,(1 + |c_\nu|)$ *folgt diejenige von* $\Pi(1 + c_\nu)$.

Auf Grund dieses Satzes wird es für unsere Zwecke genügen, Konvergenzkriterien für absolut konvergente Produkte zu besitzen. Für diese gelten die die Konvergenzfrage vollständig erledigenden beiden Sätze:

Satz 4. *Das Produkt* $\Pi(1 + \gamma_\nu)$ mit $\gamma_\nu \geqq 0$ *ist dann und nur dann konvergent, wenn die Reihe* $\Sigma\gamma_\nu$ *konvergiert.*

Satz 5. *Damit* $\Pi(1 + c_\nu)$ *absolut konvergiert, ist es notwendig und hinreichend, daß* Σc_ν *absolut konvergiert*[2]).

Ähnlich wie bei Reihen gilt auch der

Satz 6. *Verändert man in einem* ***absolut*** *konvergenten Produkte die Reihenfolge der Faktoren in ganz beliebiger Weise, so bleibt es konvergent und zwar mit demselben Werte.* Anders ausgedrückt: *Für* ***absolut*** *konvergente unendliche Produkte (aber auch nur für diese) gilt das* ***Kommutationsgesetz*** *uneingeschränkt.*

Das *Assoziationsgesetz* wiederum gilt zwar für alle konvergenten Produkte, jedoch nicht uneingeschränkt. Vielmehr gilt hier der

Satz 6a. *Bei jedem konvergenten Produkt darf man in beliebiger Weise aufeinanderfolgende Faktoren durch eine Klammer zu einem*

---

[1]) Die zunächst näherliegende Definition „Πu_ν soll absolut konvergent heißen, wenn $\Pi\,|u_\nu|$ konvergiert" ist unzweckmäßig, da ja dann **jedes** konvergente Produkt zugleich absolut konvergieren würde.

[2]) Hiernach ist z. B. $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right)$ für jeden Wert von z absolut konvergent, da die Reihe $\Sigma\left|\frac{z^2}{\nu^2}\right| = |z|^2\,\Sigma\frac{1}{\nu^2}$ konvergiert.

einzigen Faktor zusammenfassen. Dagegen darf man solche Klammern nur dann weglassen, wenn das dadurch entstehende neue Produkt konvergent ausfällt.

Neben diesen Produkten mit konstanten Faktoren bedürfen wir noch — ganz entsprechend den Betrachtungen in I, Kap. 6 — solcher Produkte, deren Faktoren Funktionen einer komplexen Veränderlichen z sind, und die wir darum in der Form

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+f_\nu(z)) \tag{3}$$

schreiben wollen. Ganz analog den dortigen Festsetzungen bezeichnen wir als Konvergenzgebiet eines solchen Produktes die Menge $\mathfrak{M}$ aller derjenigen Punkte z, die erstlich zum Definitionsbereich aller $f_\nu(z)$ gehören, und für die zweitens das Produkt (3) konvergent ist[1]). Da hiernach das Produkt für jedes z aus $\mathfrak{M}$ einen bestimmten Zahlenwert liefert, so sagen wir wie damals: das Produkt stellt in $\mathfrak{M}$ eine bestimmte (eindeutige) Funktion dar. Für unsere funktionentheoretischen Zwecke ist es nun wieder (vgl. I, § 19, Satz 3) besonders wichtig, brauchbare Bedingungen kennen zu lernen, unter denen ein solches Produkt im Konvergenzgebiet eine analytische Funktion darstellt. Für uns ausreichend ist der folgende

Satz 7. *Es sei $f_1(z), \ldots, f_\nu(z), \ldots$ eine unendliche Folge von Funktionen; es existiere ein Gebiet $\mathfrak{G}$, in dem alle diese Funktionen regulär sind, und es sei $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(z)|$ in jedem kompakten Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ desselben (vgl. I, S. 76) gleichmäßig konvergent. Dann ist das Produkt (3) im ganzen Gebiet $\mathfrak{G}$ konvergent und stellt eine dort reguläre Funktion $f(z)$ dar. Diese hat überdies nach Satz 1 in denjenigen Punkten von $\mathfrak{G}$ — und nur in diesen — eine Nullstelle, in denen mindestens einer der*

---

[1]) Z. B. für $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)$ ist nach der vorletzten Fußnote das Konvergenzgebiet die ganze z-Ebene.

Faktoren $= 0$ *ist. Und die Ordnung einer solchen Nullstelle ist gleich der Summe der Ordnungen, mit denen diese Faktoren*[1]) *daselbst verschwinden.*

Beweis. Ist z_0 ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{G}$, so bezeichne $\mathfrak{G}'$ eine abgeschlossene Kreisscheibe um z_0, die einschließlich ihres Randes in $\mathfrak{G}$ liegt. Dann genügt es zu zeigen, daß das Produkt (3) in $\mathfrak{G}'$ konvergiert und daß es dort eine Funktion darstellt, die in z_0 regulär ist und über deren etwaiges Verschwinden in z_0 die weitere Behauptung des Satzes gilt. Da nun in $\mathfrak{G}'$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(z)| \quad \text{auch} \quad \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |f_\nu(z)|$$

für jedes $m \geqq 0$ gleichmäßig konvergiert, so ist nach Satz 5 zunächst jedenfalls das Produkt

$$\prod_{\nu=m+1}^{\infty} (1 + f_\nu(z)) \tag{4}$$

in $\mathfrak{G}'$ absolut konvergent und stellt dort also eine gewisse Funktion dar, die $F_m(z)$ heißen möge. Die Zahl m soll nun hierbei so gewählt werden — was nach I, § 18 geschehen kann —, daß für alle $n \geqq m$, alle $r \geqq 1$ und alle z aus $\mathfrak{G}'$ stets

$$|f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \cdots + |f_{n+r}(z)| < \tfrac{1}{2} \tag{5}$$

bleibt. Dann ist $F_m(z)$ sogar eine im Innern von $\mathfrak{G}'$ reguläre und von 0 verschiedene Funktion. Denn es ist, wenn wir zur Abkürzung für $n > m$

$$\prod_{\nu=m+1}^{n} (1 + f_\nu(z)) = P_n \quad \text{und} \quad P_m = 0$$

setzen,

$$F_m(z) = \lim_{n\to\infty} P_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} [(P_{m+1} - P_m) + (P_{m+2} - P_{m+1}) + \cdots + (P_n - P_{n-1})],$$

---

[1]) Es kommen, wie aus dem Beweis hervorgehen wird, nur endlich viele der Faktoren in Betracht.