de Gruyter Lehrbuch

Bauer · Wahrscheinlichkeitstheorie

Heinz Bauer

Wahrscheinlichkeitstheorie
und
Grundzüge der Maßtheorie

3., neubearbeitete Auflage

Walter de Gruyter · Berlin · New York · 1978

Dr. phil. nat. *Heinz Bauer*
o. Professor für Mathematik und Vorstand am Mathematischen Institut
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
o. Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

CIP-Kurzaufnahme der Deutschen Bibliothek

Bauer, Heinz:

Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie. - 3., neubearb. Aufl. - Berlin, New York: de Gruyter, 1978. (De-Gruyter-Lehrbuch)

ISBN 3-11-007698-5

Satz und Druck: J. J. Augustin, Glückstadt – Printed in Germany.
ISBN 3110076985

Meinem verehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Dr. h.c. mult. Otto Haupt

in Dankbarkeit

gewidmet

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

(August 1968)

Das vorliegende Buch soll dem Studierenden als Wegführer in die Wahrscheinlichkeitstheorie dienen. Der Leser soll dabei mit den wichtigsten Ideen, Methoden und Resultaten dieser sich heute schnell entwickelnden und verzweigenden mathematischen Theorie bekanntgemacht werden. Der einführende Charakter und der begrenzte Umfang des Buches erlaubten zwar vornehmlich nur die Behandlung derjenigen Teile der Theorie, die heute schon wieder als „klassisch" angesprochen werden. Immerhin werden aber auch die Anfangsgründe des im Mittelpunkt der neueren Untersuchungen stehenden und zugleich auch für außermathematische Anwendungen so wichtigen Gebietes der stochastischen und speziell der Markoffschen Prozesse erörtert.

Da heutzutage die Wahrscheinlichkeitstheorie unlöslich mit der Maß- und Integrationstheorie verbunden ist, verfolgt das Buch zugleich aber auch ein zweites Ziel, nämlich den Leser mit den Grundzügen der Maßtheorie vertraut zu machen. Diese wird aber im wesentlichen nur so weit vorangetrieben, als dies für die zu behandelnden wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragestellungen notwendig ist. Viele wichtige Kapitel der Maßtheorie, wie etwa die Theorie Radonscher Maße auf lokal-kompakten Räumen ohne jede Abzählbarkeitsbedingung, die Desintegration oder die Theorie des Haarschen Maßes fehlen daher. Dagegen wird aber die Maßtheorie unabhängig von wahrscheinlichkeitstheoretischen Vorstellungen entwickelt. Der allein maßtheoretisch interessierte Leser kann daher die Kapitel I—III sowie VII—VIII unabhängig von den übrigen, rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Teilen des Buches studieren.

Das Buch ist aus zweisemestrigen, einführenden Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie entstanden, die ich für Hörer vom 3. Fachsemester aufwärts an der Universität Hamburg hielt. Die ersten zwei Teile des Buches erschienen, von Detailänderungen abgesehen, unter demselben Titel erstmals 1964 als Band 1216/1216a in der Sammlung Göschen.

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage

(Juni 1973)

Die zweite Auflage meines Buches unterscheidet sich von der ersten vornehmlich durch die bislang fehlenden, den Text begleitenden Übungsaufgaben. Dem Leser werden nunmehr über 200 Aufgaben angeboten, die ihn zu eigener mathematischer Betätigung herausfordern und ihm die Möglichkeit zum tieferen Eindringen in den behandelten Stoff geben sollen.

Der bisherige Text des Buches ist zwar weitgehend beibehalten, aber einer gründlichen Revision unterzogen worden. An vielen Stellen sind Vereinfachungen der Beweise, Änderungen und Ergänzungen didaktischer Art sowie Hinweise auf weiterführende Entwicklungen eingearbeitet worden. Die größten Änderungen haben die Paragraphen 36 und 41 erfahren, Änderungen, welche sich bereits in den neuen Überschriften dieser Paragraphen ankündigen. Während in § 36 bislang die Ungleichung von Hájek-Rényi im Mittelpunkt der Betrachtung stand, wird jetzt ausgehend von einer Ungleichung von O. Frank ein einfacher Zugang nicht nur zur Ungleichung von Hájek-Rényi sondern auch zu Ungleichungen der Martingal-Theorie aufgezeigt. In § 41 wurde als Anwendung der Regularität von Maßen der Satz von Lusin über den Zusammenhang zwischen Meßbarkeit und Stetigkeit aufgenommen.

Vorwort zur dritten Auflage

Bei der Neubearbeitung meines Buches ließ ich mich von der Idee leiten, Bewährtes zu erhalten, aber Verbesserungen dort anzubringen, wo sich Fehler eingeschlichen hatten, wo durchsichtigere Beweise möglich und Ergänzungen wünschenswert waren. So unterscheidet sich die Neuauflage global gesehen nur wenig, in Details aber doch deutlich von der zweiten Auflage. Die einschneidendsten Änderungen hat der Paragraph 66 erfahren, welcher die Beziehungen zwischen translationsinvarianten Markoff-Prozessen und stochastischen Prozessen mit stationären und unabhängigen Zuwächsen betrifft.
Wertvolle Anregungen verdanke ich Gesprächen mit Kollegen, vor allem mit den Herren B. Anger (Erlangen), W. Hackenbroch (Regensburg) und H. Witting (Freiburg). Besonders dankbar bin ich Herrn E. Siebert (Tübingen) für den hübschen Beweis der Invarianz des Lebesgueschen Maßes gegenüber Bewegungen. Darüber hinaus sind mir von Lesern Hinweise auf Druckfehler zugegangen. Allen, die so zum Gelingen der Neuauflage beigetragen haben, sei hierfür an dieser Stelle gedankt.
Dem Verlag Walter de Gruyter danke ich für die nunmehr langjährige, faire Partnerschaft. Besonderen Dank schulde ich Herrn Verlagsdirektor W. Schuder. Er hat mich seinerzeit ermuntert, dieses Buch zu schreiben. Die Verwirklichung meiner Wünsche bei der Gestaltung der Neuauflagen hat er verständnisvoll und tatkräftig gefördert.

Erlangen, im November 1977 HEINZ BAUER

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie verdankt ihr Entstehen dem Wunsche, mathematische Modelle für das Studium eines vom Zufall gesteuerten Geschehens zu entwickeln. Die Frage nach mathematischen Modellen, welche das Studium des uns umgebenden Raumes gestatten, steht am Beginn der Entwicklung der Geometrie. Während aber die Geometrie schon seit langem ihre durch die ursprüngliche Fragestellung abgegrenzte Entwicklungsbahn verlassen hat und ihre im Laufe der Entwicklung ständig verfeinerten Begriffe und Methoden zur Erforschung andersartiger, z. B. algebraischer und topologischer Sachverhalte herangezogen wurden, hat die Wahrscheinlichkeitstheorie erst in jüngerer Zeit eine ähnliche Entwicklung durchlaufen. Wenn diese Theorie auch durch die von den mannigfachen Anwendungsmöglichkeiten ausgehenden Impulse geprägt wurde, so hat sie sich doch als eigenständige Disziplin festes Bürgerrecht innerhalb der Mathematik erworben. Dies ist nicht zuletzt den vor allem erst in den letzten Jahren erfolgten kräftigen Brückenschlägen hinüber zu anderen Teilen der Mathematik, wie etwa zur Zahlentheorie, Ergodentheorie, Funktionentheorie und zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, zuzuschreiben. Entscheidend für den Erwerb dieses Bürgerrechtes war jedoch der Nachweis, daß die Theorie den heute in der Mathematik üblichen Anforderungen an Strenge in Grundlegung und Aufbau genügt.

Diesen Nachweis erbrachte A. N. Kolmogoroff [50] durch seinen 1933 vorgeschlagenen und heute allgemein bewährten axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie. Durch ihn wird sie in der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie verankert.

Der erste Teil des Buches bringt daher zunächst eine Einführung in die Maß- und Integrationstheorie. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Motivierung wird dabei zugunsten einer mehr geometrischen zunächst zurückgestellt. Erst anschließend und somit in weitgehender Übereinstimmung mit der historischen Entwicklung wird dann gezeigt, daß die bedeutsamsten maßtheoretischen Begriffe auch eine wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung zulassen. Im zweiten Teil folgt der Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie, die in den Erörterungen über das Gesetz der großen Zahlen einem ersten Höhepunkt zugeführt wird.

Im dritten Teil wird die Maß- und Integrationstheorie fortgesetzt. Hier wird zunächst der funktional-analytische Aspekt der Integrationstheorie durch eine Erörterung des Satzes von Daniell-Stone behandelt. Sodann werden Maße auf topologischen Räumen, insbesondere auf lokal-kompakten und polnischen Räumen behandelt. Jedoch werden hierbei nur die elementarsten Kenntnisse aus der allgemeinen Topologie vorausgesetzt. Ein kurzes Kapitel über Fourier-Analyse, das nur die wichtigsten Ergebnisse für den Fall des euklidischen Raumes $\boldsymbol{R}^n$ vermittelt, beschließt diesen Teil.

Im vierten Teil werden sodann die wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen weitergeführt. Nach einem Kapitel über Grenzwertsätze wird der Be-

griff der bedingten Erwartung eingeführt und damit der Zugang zur Theorie der stochastischen Prozesse geöffnet. Aus dieser Theorie werden vornehmlich die Martingale (meist mit diskretem Parameterbereich) und das Wechselspiel zwischen Markoffschen Prozessen und Markoffschen Halbgruppen behandelt.
Die Darstellung folgt weitgehend den bewährten Wegen. Trotzdem hoffe ich, in Details auch dem Kenner einiges Neue zu bieten. Insbesondere dürfte die konsequente Heranziehung der Dynkin-Systeme an Stelle der sonst üblichen, aber weniger schmiegsamen und ertragreichen monotonen Systeme neu sein. Bei der Darstellung der Integrationstheorie bin ich nach reiflicher Überlegung dem klassischen Weg gefolgt, der zuerst zur Maß- und dann zur Integrationstheorie führt. Dieser Weg scheint mir immer noch am besten den Bedürfnissen der Wahrscheinlichkeitstheorie zu entsprechen. Jedoch habe ich die Diskussion des Integralbegriffes so anzulegen versucht, daß sich der Leser im dritten Teil ohne Mühe in den funktional-analytischen Aufbau der Theorie einarbeiten kann.
Die in die Darstellung häufig eingeflochtenen Beispiele haben vielfach den Charakter von Übungsaufgaben, deren genaues Durcharbeiten dem Leser ebenso dringend empfohlen wird wie das Lösen der nahezu einen jeden Paragraphen beschließenden Aufgaben. Nicht nur hierbei, sondern auch bei der Lektüre des eigentlichen Textes wird der Leser zu Papier und Bleistift greifen müssen, um gelegentlich nur skizzierte Gedankengänge in allen Details zu verfolgen und zu Ende zu führen.

Bezeichnungen

Mit $\boldsymbol{R}$ soll im folgenden stets der Körper der reellen Zahlen mit seiner üblichen Topologie, also die *Zahlengerade*, bezeichnet werden. Durch Hinzunahme von $(+)\infty$ und $-\infty$ entsteht aus $\boldsymbol{R}$ die *kompaktifizierte Zahlengerade* $\overline{\boldsymbol{R}}$. Mit den uneigentlichen Zahlen $\pm\infty$ soll in der üblichen Weise gerechnet werden. Nicht generell üblich ist die Festsetzung

$$0\cdot(+\infty) = 0\cdot(-\infty) = (+\infty)\cdot 0 = (-\infty)\cdot 0 = 0,$$

die von nun an gemacht werden soll. Sie erweist sich bei allen maß- und wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen als zweckmäßig. $\boldsymbol{R}_+$ bzw. $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ bezeichnet die Menge aller Zahlen $x \in \boldsymbol{R}$ bzw. $x \in \overline{\boldsymbol{R}}$ mit $x \geqq 0$.

Wie üblich werden für die *mengentheoretischen Operationen* die Symbole $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$ und $\complement$ verwendet. $A \subset B$ bedeutet, daß A Teilmenge von B ist; $A = B$ ist hierbei zugelassen. Für die *Differenzmenge* $A \cap \complement B$ zweier Mengen A und B, also die Menge aller $x \in A$ mit $x \notin B$, schreiben wir auch $A \setminus B$. Die *leere Menge* wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Das Symbol $f\colon A \to B$ bedeutet, daß f eine Abbildung der Menge A in die Menge B ist. Im Spezialfall $B = \boldsymbol{R}$ bzw. $B = \overline{\boldsymbol{R}}$ soll von einer *reellen* bzw. *numerischen Funktion* gesprochen werden. Die *Restriktion* (Einschränkung) einer Abbildung $f\colon A \to B$ auf eine Teilmenge $A' \subset A$ wird mit $\mathrm{Rest}_{A'} f$ bezeichnet.

Bei einer *Folge* $a_1, a_2, \ldots$ von Elementen einer Menge A handelt es sich um eine Abbildung der stets mit $\mathbf{N}$ zu bezeichnenden Menge aller natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$ in die Menge A. Wir schreiben daher Folgen in der Form $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ oder $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ oder auch nur (a_n). Liegt jedoch eine andere Indizierung, etwa $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$, vor, so wird dies stets erwähnt. Ebenso erscheinen *endliche Folgen* in der Schreibweise $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ usw.

Sind f und g reelle Funktionen auf einer Menge A, so bedeutet $f+g$, fg usw. die durch $x \mapsto f(x) + g(x)$, $x \mapsto f(x)\,g(x)$ usw. definierte Funktion. Analog verfahren wir auch mit numerischen Funktionen; nur muß dann z. B. $f(x) + g(x)$ für alle $x \in A$ definiert sein. Entsprechend bedeutet $\sum f_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ für eine Folge (f_n) numerischer Funktionen die Funktion $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Eine auf einer Teilmenge von $\overline{\boldsymbol{R}}$ definierte numerische Funktion f wird *isoton* bzw. *antiton* genannt, wenn sie in der üblichen Terminologie monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. Allgemeiner benützen wir diese Terminologie auch dann, wenn der Definitionsbereich eine durch eine Relation $\leqq$ geordnete ($=$ teilweise geordnete) Menge A ist und aus $x \leqq y\,(x,y \in A)$ stets $f(x) \leqq f(y)$ bzw. $f(y) \leqq f(x)$ folgt. Folgt aus $x < y$ $(x,y \in A)$ stets $f(x) < f(y)$ bzw. $f(y) < f(x)$, so sprechen wir von *strenger* Isotonie bzw. Antitonie.

Topologische Begriffsbildungen werden stets im Sinne der Terminologie von N. Bourbaki verwendet. Insbesondere trifft dies auf den Kompaktheitsbegriff zu.

Dort, wo es zweckmäßig erscheint, verwenden wir die Schreibweise $A := B$, um anzudeuten, daß das Objekt A *definitionsgemäß* gleich dem Objekt B ist.

Das Zeichen $\lrcorner$ deutet das *Ende eines Beweises* an.

Erster Teil

Maß- und Integrationstheorie

I. Maßtheorie

Geometrisch einfachen Teilmengen der Zahlengeraden, der Ebene und des dreidimensionalen Raumes ordnet man in der Elementargeometrie Länge, Fläche und Volumen genannte „Maßzahlen" zu. Von der Anschauung her ist dabei zunächst nur klar, wie man die Länge einer Strecke, die Fläche eines Rechtecks und das Volumen eines Quaders zu definieren hat. Hiervon ausgehend kann man mit elementar-geometrischen Methoden Länge, Fläche bzw. Volumen komplizierterer Mengen bestimmen, indem man gewisse Rechenregeln für den Umgang mit solchen Maßzahlen akzeptiert.

Denkt man etwa an die elementar-geometrische Bestimmung der Fläche eines offenen Dreiecks, so zerlegt man dieses durch eine seiner Höhenstrecken in zwei rechtwinklige, offene Dreiecke und in die Höhenstrecke. Ferner beachtet man, daß jedes rechtwinklige Dreieck durch Ziehen der Diagonale in einem geeigneten Rechteck entsteht. Folgende zwei Rechenregeln führen dann zur Bestimmung der Fläche von Dreiecken:

(a) besitzt eine Menge A die Maßzahl α und ist B eine zu A kongruente Menge, so besitzt auch B die Maßzahl α;

(b) sind A, B fremde Mengen mit den Maßzahlen α bzw. β, so besitzt die Menge $A \cup B$ die Maßzahl $\alpha + \beta$.

Die Grenzen der elementar-geometrischen Betrachtungsweise werden bereits bei der elementar-geometrischen Definition der Fläche einer offenen Kreisscheibe K erreicht. Man geht etwa so vor: K wird eine Folge (E_n) offener, regelmäßiger $3 \cdot 2^{n-1}$-Ecke E_n einbeschrieben ($n = 1, 2, \ldots$). E_1 ist ein offenes gleichseitiges Dreieck. E_{n+1} entsteht aus E_n durch Halbierung der Winkel, welche die Verbindungsstrecken zweier aufeinander folgender Ecken von E_n mit dem Kreismittelpunkt miteinander bilden. Dann aber entsteht E_{n+1} aus E_n auch durch Aufsetzen von $3 \cdot 2^{n-1}$ Dreiecken auf die Kanten von E_n. Da K die Vereinigung aller E_n ist, erscheint damit K als ein „Dreiecks-Mosaik", d. h. als Vereinigung einer Folge paarweise fremder offener Dreiecke und Strecken (nämlich gemeinsamer Dreiecksseiten). Folgende erweiterte Fassung von (b) führt daher zu einer Definition der Fläche der Kreisscheibe K:

(c) ist (A_n) eine Folge paarweise fremder Mengen A_n mit der Maßzahl α_n ($n = 1, 2, \ldots$), so besitzt die Menge $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ die Maßzahl $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Ersetzen wir K und jedes E_n durch die entsprechenden abgeschlossenen Gebilde, so würde diese Methode nicht zu einer plausiblen Definition der Fläche einer abgeschlossenen Kreisscheibe K' führen, da K' nicht die Vereinigung der nach obigem Gedanken konstruierten, aber abgeschlossenen $3 \cdot 2^{n-1}$-Ecke E'_n ist. Ein Merkmal und Nachteil der elementar-geometrischen Betrachtungsweise ist gerade die Notwendigkeit der Wahl einer speziellen, auf die betrachtete Menge A zugeschnittenen Methode, um zu einer brauchbaren Definition der Maßzahl für A zu kommen.

Die Frage nach einer allgemeinen Methode, mit deren Hilfe „möglichst vielen" Teilmengen des p-dimensionalen Raumes $\boldsymbol{R}^p$ für beliebige Dimension p in natürlicher Weise ein p-dimensionales Volumen als Maßzahl zugeordnet werden kann, hat letzten Endes die Entwicklung der Maßtheorie genannten mathematischen Disziplin in Gang gebracht. Die Antwort der Maßtheorie auf die genannte Frage stellt den Hauptinhalt dieses Kapitels dar. Es wird sich zeigen, daß der Schlüssel zu der Antwort in der Rechenregel (c) liegt und daß dieselbe Rechenregel für wesentlich allgemeinere „Maßzahlen" erfüllt ist, welche in anderen, von der geometrischen Anschauung weitgehend losgelösten, Situationen auftreten. Gerade hierdurch erklären sich die mannigfachen Anwendungsmöglichkeiten der Maßtheorie.

§ 1. σ-Algebren und ihre Erzeuger

Es sei Ω eine beliebige Menge und $\mathfrak{P}(\Omega)$ deren *Potenzmenge*, d. h. das System aller Teilmengen von Ω. Dann liegen mit jeder Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen aus $\mathfrak{P}(\Omega)$ auch deren Vereinigung $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ und deren Durchschnitt $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$. Ferner enthält $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit jeder Menge A deren Komplement $\complement A$. Im folgenden interessieren uns Mengensysteme $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$, die mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ diese Eigenschaften wenigstens für abzählbare Indexmengen I gemeinsam haben.

1.1 Definition. *Ein System $\mathfrak{A}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt σ-Algebra (in Ω), wenn es folgende Eigenschaften besitzt:*

(1.1) $$\Omega \in \mathfrak{A};$$

(1.2) $$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \complement A \in \mathfrak{A};$$

(1.3) *für jede Folge (A_n) von Mengen aus $\mathfrak{A}$ liegt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ in $\mathfrak{A}$.*

Beispiele. 1. Stets ist $\mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

2. Für jede Menge Ω ist das System aller Mengen $A \subset \Omega$, für welche entweder A oder $\complement A$ abzählbar*) ist, eine σ-Algebra. Die Eigenschaft (1.3) ergibt sich dabei wie folgt: Sind alle Mengen A_n abzählbar, so ist auch $\bigcup A_n$ abzählbar; ist ein A_{n_0} nicht abzählbar, so ist $\complement \bigcup A_n = \bigcap \complement A_n$ in $\complement A_{n_0}$ enthalten und daher abzählbar.

3. Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in einer Menge Ω und Ω' eine Teilmenge von Ω, so ist

(1.4) $$\Omega' \cap \mathfrak{A} := \{\Omega' \cap A : A \in \mathfrak{A}\}$$

*) Abzählbar heißt: endlich oder abzählbar unendlich.

eine σ-Algebra in Ω'. Sie heißt die Spur von $\mathfrak{A}$ in Ω'. Liegt Ω' in $\mathfrak{A}$, so besteht $\Omega' \cap \mathfrak{A}$ aus allen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Teilmengen von Ω'.

4. Seien Ω und Ω' Mengen, $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra in Ω' und $T:\Omega \to \Omega'$ eine Abbildung von Ω in Ω'. Dann ist das Mengensystem

$$T^{-1}(\mathfrak{A}') := \{T^{-1}(A') : A' \in \mathfrak{A}'\} \tag{1.5}$$

eine σ-Algebra in Ω. Dies folgt aus dem bekannten Verhalten der mengentheoretischen Operationen bei inversen Abbildungen (wie hier T^{-1}).

Jede σ-Algebra $\mathfrak{A}$ besitzt folgende zu (1.1) und (1.3) duale Eigenschaften:

$$\emptyset \in \mathfrak{A}; \tag{1.6}$$

(1.7) *für jede Folge* (A_n) *von Mengen aus* $\mathfrak{A}$ *liegt* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *in* $\mathfrak{A}$.

Wegen $\emptyset = \complement\Omega$ und $\bigcap A_n = \complement \bigcup A_n'$ mit $A_n' := \complement A_n$ folgt dies aus (1.1)—(1.3). Nun ist

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$$

und

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap \Omega \cap \Omega \cap \ldots .$$

Daher enthält $\mathfrak{A}$ auch mit *je endlich vielen* Mengen deren Vereinigung und Durchschnitt. Hieraus und aus (1.2) folgt noch:

$$A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap \complement B \in \mathfrak{A}. \tag{1.8}$$

Für die Konstruktion von σ-Algebren ist der folgende Satz wichtig:

1.2 Satz. *Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ-Algebren in einer Menge Ω ist selbst wieder eine σ-Algebra in Ω.*

Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachprüfen der Eigenschaften (1.1) bis (1.3).

Es folgt nun, daß zu jedem System $\mathfrak{E}$ von Teilmengen von Ω eine *kleinste, $\mathfrak{E}$ enthaltende σ-Algebra* $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ existiert; d. h. $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ ist eine σ-Algebra mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{E})$, und für jede σ-Algebra $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{A}'$ gilt $\mathfrak{A}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{A}'$. Zum Beweis betrachte man das System $\sum$ aller σ-Algebren $\mathfrak{A}'$ in Ω mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{A}'$; beispielsweise ist $\mathfrak{P}(\Omega)$ ein Element von $\sum$. Dann ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{A}' \in \sum$, welcher gemäß 1.2 alle gewünschten Eigenschaften besitzt.

Man nennt $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ auch die von $\mathfrak{E}$ (in Ω) erzeugte σ-Algebra und $\mathfrak{E}$ einen Erzeuger von $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$.

Beispiele. 5. Ist $\mathfrak{E}$ selbst eine σ-Algebra in Ω, so ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}(\mathfrak{E})$.

6. Besteht $\mathfrak{E}$ nur aus einer Menge $A \subset \Omega$, so ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ die σ-Algebra der vier Mengen $\emptyset$, A, $\complement A$ und Ω.

Als Erzeuger einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ werden vielfach Systeme $\mathfrak{E}$ von Teilmengen von Ω auftreten, die bereits teilweise mit den Eigenschaften einer σ-Algebra ausgestattet sind. Von besonderem Interesse sind Ringe von Teilmengen von Ω.

1.3 Definition. *Ein System $\mathfrak{R}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt ein Ring (in Ω), wenn es folgende Eigenschaften besitzt:*

$$\emptyset \in \mathfrak{R}; \tag{1.9}$$

$$A, B \in \mathfrak{R} \ \Rightarrow \ A \setminus B \in \mathfrak{R}; \tag{1.10}$$

$$A, B \in \mathfrak{R} \ \Rightarrow \ A \cup B \in \mathfrak{R}. \tag{1.11}$$

Wird zusätzlich noch

$$\Omega \in \mathfrak{R} \tag{1.12}$$

gefordert, so heißt $\mathfrak{R}$ eine Algebra (in Ω).

Jeder Ring $\mathfrak{R}$ enthält mit je zwei (und damit mit je endlich vielen) Mengen nicht nur deren Vereinigung, sondern auch deren *Durchschnitt*. Für je zwei Mengen $A, B \in \mathfrak{R}$ ist nämlich $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

1.4 Satz. *Ein System $\mathfrak{R}$ von Teilmengen einer Menge Ω ist genau dann eine Algebra, wenn es die Eigenschaften* (1.1), (1.2) *und* (1.11) *besitzt.*

Beweis. Jede Algebra besitzt gemäß Definition die Eigenschaften (1.1) und (1.11). Aus (1.10) folgt (1.2). — Die Umkehrung ergibt sich aus der für beliebige Mengen A, B gültigen Gleichheit

$$A \setminus B = A \cap \complement B = \complement(\complement A \cup B)$$

sowie aus $\emptyset = \complement\Omega$. ⌟

Beispiele. 7. Jede σ-Algebra ist eine Algebra.

8. Für jede unendliche Menge Ω ist das System aller Mengen $A \subset \Omega$, für welche entweder A oder $\complement A$ endlich ist, eine Algebra, jedoch keine σ-Algebra.

9. Das System aller endlichen Teilmengen einer Menge Ω ist ein Ring, jedoch nur für endliches Ω eine Algebra.

10. Der kleinste in einer Menge Ω existierende Ring besteht nur aus $\emptyset$.

Aufgaben

1. Für jedes System $\mathfrak{E}$ von Teilmengen einer Menge Ω existiert ein kleinster Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ in Ω, welcher $\mathfrak{E}$ enthält. Dieser *Ring* $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ heißt von $\mathfrak{E}$ *erzeugt*.

Man beweise die Existenz von $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$. Man bestimme $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ für den Fall, daß $\mathfrak{E}$ aus zwei beliebig gegebenen Teilmengen A und B von Ω besteht. Wann gilt $\mathfrak{R}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ in diesem Spezialfall, und wann für beliebiges $\mathfrak{E}$?

2. Für je zwei Mengen A und B heißt

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die *symmetrische Differenz* von A und B.

Man beweise folgende Rechenregeln (für je drei Mengen A, B, C):

(a) $$A \triangle B = B \triangle A;$$

(b) $$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C);$$

(c) $$A \triangle A = \emptyset;$$

(d) $$A \triangle \emptyset = A;$$

(e) $$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$

3. Man folgere aus Aufgabe 2: Eine Menge $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ist genau dann ein Ring in einer Menge Ω, wenn $\mathfrak{R}$ bezüglich der Operationen $\triangle$ (als Addition) und $\cap$ (als Multiplikation) ein kommutativer Ring im Sinne der Algebra ist.

4. Eine Teilmenge $\mathfrak{N}$ eines Ringes $\mathfrak{R}$ in der Menge Ω heißt ein *Ideal* in $\mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{N}$ folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $$\emptyset \in \mathfrak{N};$$

(b) $$N \in \mathfrak{N},\ M \subset N,\ M \in \mathfrak{R} \Rightarrow M \in \mathfrak{N};$$

(c) $$M, N \in \mathfrak{N} \Rightarrow M \cup N \in \mathfrak{N}.$$

Man beweise: $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{R}$ ist genau dann ein Ideal in $\mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{N}$ im Sinne der Algebra ein Ideal in dem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ (vgl. Aufgabe 3) ist. Jedes Ideal in $\mathfrak{R}$ ist ein Ring in Ω.

§ 2. Dynkinsche Systeme

Es ist oft schwierig, auf direktem Wege festzustellen, ob ein vorgegebenes Mengensystem eine σ-Algebra ist. Der Umgehung solcher Schwierigkeiten dient die folgende, auf E. B. Dynkin [41] zurückgehende Begriffsbildung*):

2.1 Definition. *Ein System $\mathfrak{D}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt ein Dynkin-System (in Ω), wenn es folgende Eigenschaften besitzt:*

(2.1) $$\Omega \in \mathfrak{D};$$

(2.2) $$D \in \mathfrak{D} \Rightarrow \complement D \in \mathfrak{D};$$

(2.3) *für jede Folge (D_n) paarweise fremder Mengen aus $\mathfrak{D}$ liegt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ in $\mathfrak{D}$.*

Jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}$ enthält somit auch die *leere Menge* $\emptyset = \complement\Omega$. Gemäß (2.3) liegt daher auch mit je endlich vielen, paarweise fremden Mengen aus $\mathfrak{D}$ deren Vereinigung in $\mathfrak{D}$.

Beispiele. 1. Jede σ-Algebra ist offenbar ein Dynkin-System.

2. Sei Ω eine endliche Menge mit einer geraden Anzahl $2p$ von Elementen ($p \in \mathbf{N}$). Dann ist das System $\mathfrak{D}$ aller Mengen $D \subset \Omega$ mit einer geraden Anzahl $2q$ von

*) In [41] wird die Bezeichnung „λ-System" verwendet. Im Ansatz findet sich die Begriffsbildung bereits bei W. Sierpiński [58].

Elementen ($q = 0, 1, \ldots, p$) ein Dynkin-System. Im Falle $p > 1$ ist $\mathfrak{D}$ keine Algebra und damit auch keine σ-Algebra.

Der genaue Zusammenhang zwischen den beiden Begriffsbildungen σ-Algebra und Dynkin-System soll durch die folgenden Betrachtungen geklärt werden:

2.2. Lemma. *Jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}$ ist stabil bezüglich der Bildung eigentlicher Komplemente, d.h. es besitzt die Eigenschaft*

$$D, E \in \mathfrak{D},\ D \subset E \Rightarrow E \setminus D \in \mathfrak{D}. \tag{2.2'}$$

Beweis. Nach dem im Anschluß an die Definition 2.1 Gesagten liegt die Menge $D \cup \complement E$ als Vereinigung der fremden Mengen D und $\complement E$ in $\mathfrak{D}$. Dann aber gehört auch das Komplement dieser Menge bezüglich Ω, also die Menge $E \cap \complement D = E \setminus D$ zu $\mathfrak{D}$. ⌟

Dynkin-Systeme können somit auch durch die Eigenschaften (2.1), (2.2′) und (2.3) definiert werden.

2.3 Satz. *Ein Dynkin-System $\mathfrak{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn mit je zwei Mengen aus $\mathfrak{D}$ auch deren Durchschnitt zu $\mathfrak{D}$ gehört.*

Beweis. Zu zeigen ist nur, daß jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}$, welches mit je zwei Mengen deren Durchschnitt enthält, eine σ-Algebra ist. Die Eigenschaften (1.1) und (1.2) einer solchen folgen unmittelbar aus (2.1) und (2.2). Die Eigenschaft (1.3) ergibt sich so: Gemäß (2.2′) und der Voraussetzung liegt $A \setminus B = A \setminus A \cap B$ für je zwei Mengen $A, B \in \mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D}$. Wegen $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ und $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ enthält somit $\mathfrak{D}$ mit je zwei und damit mit je endlich vielen Mengen deren Vereinigung. Für jede Folge (D_n) von Mengen aus $\mathfrak{D}$ gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (D'_{n+1} \setminus D'_n),$$

wenn dabei

$$D'_0 := \emptyset \text{ und } D'_n := D_1 \cup \ldots \cup D_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird. Die Mengen $D'_{n+1} \setminus D'_n$ sind paarweise fremd und liegen nach dem bereits Bewiesenen sowie nach (2.2′) in $\mathfrak{D}$. Nach (2.3) liegt dann auch $\bigcup D_n$ in $\mathfrak{D}$. ⌟

Ebenso wie für σ-Algebren (oder entsprechend für Ringe bzw. Algebren) ergibt sich, daß zu jedem Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ein kleinstes, $\mathfrak{E}$ enthaltendes Dynkin-System $\mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ existiert. Es heißt entsprechend das von $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System.

Die Bedeutung der Dynkin-Systeme liegt vor allem im folgenden Satz:

2.4 Satz. *Für jedes Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$, welches mit je zwei Mengen deren Durchschnitt enthält, gilt:*

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{E}). \tag{2.4}$$

Beweis. Da jede σ-Algebra ein Dynkin-System ist, so ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ ein $\mathfrak{E}$ enthaltendes Dynkin-System und somit $\mathfrak{D}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{E})$. Ist umgekehrt $\mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ als σ-Algebra nachgewiesen, so folgt die hierzu duale Relation $\mathfrak{A}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$. Nach 2.3 muß hierfür nur gezeigt werden, daß $\mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ mit je zwei Mengen deren Durchschnitt enthält. Zum Beweis dieser Eigenschaft setzen wir für beliebiges $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$:

$$\mathfrak{D}_D := \{Q \in \mathfrak{P}(\Omega) : Q \cap D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})\}.$$

Eine leichte Rechnung ergibt, daß $\mathfrak{D}_D$ ein Dynkin-System ist. Für jedes $E \in \mathfrak{E}$ gilt gemäß der über $\mathfrak{E}$ gemachten Voraussetzung $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}_E$ und damit $\mathfrak{D}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{D}_E$. Für jedes $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ und jedes $E \in \mathfrak{E}$ ist also $E \cap D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$; d. h. aber, es ist $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}_D$ und damit $\mathfrak{D}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{D}_D$ für jedes $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$. Gerade dies ist jedoch die nachzuweisende Eigenschaft von $\mathfrak{D}(\mathfrak{E})$. $\lrcorner$

Mengensysteme $\mathfrak{E}$, welche mit je zwei Mengen deren Durchschnitt (bzw. Vereinigung) enthalten, sollen fortan auch $\cap$-stabil (bzw. $\cup$-stabil) genannt werden.

Aufgabe

Man bestimme das von $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ für den Fall eines aus zwei Teilmengen A und B von Ω bestehenden Systems $\mathfrak{E}$. Man zeige, daß $\mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ genau dann zusammenfallen, wenn $A \cap B$ oder $A \cap \complement B$ oder $\complement A \cap B$ oder $\complement A \cap \complement B$ leer ist.

§ 3. Inhalte und Prämaße

Durch Koppelung der Begriffe Ring und σ-Algebra mit den uns bereits einleitend begegneten Eigenschaften (b) und (c) von Länge, Fläche und Volumen gelangen wir nunmehr sowie in § 5 zur Einführung der Grundbegriffe der Maßtheorie.

3.1 Definition. *Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω und μ eine auf $\mathfrak{R}$ definierte, numerische Funktion. μ heißt ein Prämaß (auf $\mathfrak{R}$) wenn gilt:*

(3.1) $$\mu(\emptyset) = 0;$$

(3.2) $$\mu \geqq 0;$$

(3.3) *für jede Folge (A_n) paarweise fremder Mengen aus $\mathfrak{R}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ ist*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-Additivität})^{*)}.$$

Dagegen heißt μ ein Inhalt, wenn an Stelle von (3.3) nur gilt:

(3.3′) *für je zwei und damit für je endlich viele paarweise fremde Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{R}$ ist*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \text{ (endliche Additivität).}$$

---

*) Man spricht auch von *Total-Additivität*.

Wegen (3.1) ist jedes Prämaß offenbar ein Inhalt. Man hat nur in (3.3) $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ zu setzen. (Man vergleiche jedoch das nachfolgende Beispiel 3.)

Beispiele. 1. Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ in Ω und jeden Punkt $\omega \in \Omega$ ist folgende Funktion ε_ω ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$:

$$\varepsilon_\omega(A) := \begin{cases} 1, & \omega \in A; \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases} \tag{3.4}$$

ε_ω heißt das durch die Einheitsmasse in ω definierte Prämaß auf $\mathfrak{R}$.

2. Es sei $\mathfrak{A}$ die in § 1, Beispiel 2 definierte σ-Algebra in einer *nicht-abzählbaren* Menge Ω. Setzt man $\mu(A) = 0$ bzw. $= 1$, je nachdem, ob A oder $\complement A$ abzählbar ist, so ist μ ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$. Man beachte, daß von je zwei fremden Teilmengen von Ω höchstens eine ein abzählbares Komplement besitzen kann.

3. Für eine abzählbar-unendliche Menge Ω sei $\mathfrak{A}$ die in § 1, Beispiel 8, definierte Algebra. Setzt man $\mu(A) = 0$ bzw. $= +\infty$, je nachdem, ob A oder $\complement A$ endlich ist, so ist μ ein Inhalt, aber kein Prämaß.

4. Es sei $\mu_1, \mu_2, \ldots$ eine Folge von Inhalten (bzw. Prämaßen) auf einem Ring $\mathfrak{R}$; ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen $\geqq 0$. Dann ist auch

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$$

wieder ein Inhalt (bzw. Prämaß) auf $\mathfrak{R}$.

Jeder *Inhalt* μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ besitzt noch folgende Eigenschaften ($A, B, A_1, A_2, \ldots$ seien hierbei Mengen aus $\mathfrak{R}$):

(3.5) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$;

(3.6) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqq \mu(B)$ (Isotonie);

(3.7) $A \subset B, \mu(A) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ (Subtraktivität);

(3.8) $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ (Sub-Additivität);

(3.9) *für jede Folge* (A_n) *paarweise fremder Mengen aus* $\mathfrak{R}$ *mit* $\bigcup A_n \in \mathfrak{R}$ *gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Beweis. Für beliebige Mengen $A, B \in \mathfrak{R}$ ist

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \text{ und } B = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

Wegen der endlichen Additivität folgt hieraus

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \text{ und } \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$$

und weiter durch Addieren

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(B \setminus A).$$

Hieraus ergibt sich (3.5), wenn $\mu(B \setminus A)$ endlich ist. Falls $\mu(B \setminus A) = +\infty$ ist, so zeigen die für $\mu(A \cup B)$ und $\mu(B)$ soeben hergeleiteten Formeln, daß $\mu(A \cup B) = \mu(B) = +\infty$ und daher (3.5) ebenfalls richtig ist. — Im Falle $A \subset B$ lautet die für $\mu(B)$ hergeleitete Formel:

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Sie liefert also wegen $\mu \geqq 0$ sowohl (3.6) als auch (3.7). — Setzt man $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n := A_n \setminus A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$, so sind $B_1, \ldots, B_n$ paarweise fremde Mengen aus $\mathfrak{R}$, und somit ist $\mu(\bigcup B_i) = \sum \mu(B_i)$. Wegen $\bigcup B_i = \bigcup A_i$, $B_i \subset A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und der Isotonie von μ folgt hieraus (3.8). — Zum Beweis von (3.9) genügt es zu bemerken, daß für jede Folge (A_n) paarweise fremder Mengen aus $\mathfrak{R}$ mit $A := \bigcup A_n \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_m) = \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \leqq \mu(A) \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqq \mu(A). \lrcorner$$

Ist schließlich μ ein *Prämaß* auf $\mathfrak{R}$, so gilt für beliebige Mengen $A_0, A_1, \ldots \in \mathfrak{R}$:

$$(3.10) \qquad A_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu(A_0) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Wegen $A_0 = \bigcup (A_0 \cap A_n)$ und (3.6) kann $A_0 = \bigcup A_n$ angenommen werden. Dann setze man $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}), \ldots$ und schließe wie beim Beweis von (3.8).

Der folgende Satz kennzeichnet die Prämaße durch andere mit der σ-Additivität verwandte Eigenschaften. Seine Formulierung wird vereinfacht durch folgende

Bezeichnung: Es seien $E, E_1, E_2, \ldots$ Mengen. Wir drücken durch $E_n \uparrow E$ bzw. $E_n \downarrow E$ den Sachverhalt aus, daß $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ und $E = \bigcup E_n$ bzw. $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ und $E = \bigcap E_n$ gilt, daß also die Folge (E_n) isoton bzw. antiton gegen E „konvergiert".

3.2 Satz. *Für einen Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ betrachte man folgende Eigenschaften:*

(a) *μ ist ein Prämaß.*

(b) *Für jede Folge (A_n) von Mengen aus $\mathfrak{R}$ mit $A_n \uparrow A \in \mathfrak{R}$ gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A) \quad \text{(Stetigkeit von unten).}$$

(c) *Für jede Folge* (A_n) *von Mengen aus* $\Re$ *mit* $A_n \downarrow A \in \Re$ *und* $\mu(A_n) < +\infty$ *für alle* n *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \qquad \text{(Stetigkeit von oben).}$$

(d) *Für jede Folge* (A_n) *von Mengen aus* $\Re$ *mit* $A_n \downarrow \emptyset$ *und* $\mu(A_n) < +\infty$ *für alle* n *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0 \qquad (\emptyset\text{-Stetigkeit}).$$

Dann bestehen die folgenden Implikationen:

$$\text{(a)} \Longleftrightarrow \text{(b)} \Rightarrow \text{(c)} \Longleftrightarrow \text{(d)}.$$

Ist μ *auf* $\Re$ *endlich, gilt also* $\mu(A) < +\infty$ *für alle* $A \in \Re$, *so sind die Eigenschaften* (a) – (d) *sogar äquivalent.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Es kann $A_1 = \emptyset$ angenommen werden. Dann sind $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, paarweise fremde Mengen aus $\Re$ mit

$$A = \bigcup_{n=2}^{\infty} B_n \quad \text{und} \quad A_n = B_2 \cup \ldots \cup B_n.$$

Wegen der σ-Additivität von μ ist daher

$$\mu(A) = \sum_{n=2}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Es sei (A_n) eine Folge paarweise fremder Mengen aus $\Re$ mit $A := \bigcup A_n \in \Re$. Setzt man $B_n := A_1 \cup \ldots \cup A_n$, so gilt $B_n \uparrow A$ und daher $\mu(A) = \lim \mu(B_n)$. Zufolge der endlichen Additivität von μ ist

$$\mu(B_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$$

und daher $\mu(A) = \sum \mu(A_n)$. Somit ist μ σ-additiv und daher ein Prämaß.
(b) $\Rightarrow$ (c): Nach (3.7) gilt $\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ für alle $n = 1, 2, \ldots$. Aus $A_n \downarrow A$ folgt $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$, wobei alle hierbei auftretenden Mengen in $\Re$ liegen. Nach (b) ist somit

$$\mu(A_1 \setminus A) = \lim \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim \mu(A_n).$$

Hieraus folgt (c), da wegen $A \subset A_n$ auch $\mu(A) < +\infty$ und somit $\mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$ ist.
(c) $\Rightarrow$ (d): Hier ist nichts zu beweisen.

(d) $\Rightarrow$ (c): Aus $A_n \downarrow A$ folgt $A_n \setminus A \downarrow \emptyset$. Wegen $A_n \setminus A \subset A_n$ ist aber zufolge der Isotonie von μ auch $\mu(A_n \setminus A)$ stets endlich.
Abschließend werde μ als endlich vorausgesetzt. Dann zeigen wir
(c) $\Rightarrow$ (b): Ist nämlich (A_n) eine Folge von Mengen aus $\Re$ mit $A_n \uparrow A \in \Re$, so gilt $\complement A_n \downarrow \complement A$, und daher folgt (bei Beachtung der Endlichkeit von μ) $\lim \mu(\complement A_n) = \mu(\complement A)$. Da μ ein endlicher Inhalt ist, gilt weiter $\mu(\complement B) = \mu(\Omega) - \mu(B_n)$ für jede Menge aus $\Re$. Also folgt (b). ⌟

Bemerkung. Das Beispiel 3 dieses Paragraphen zeigt, daß ein $\emptyset$-stetiger Inhalt kein Prämaß zu sein braucht. Auf die Endlichkeitsvoraussetzung bei der Behauptung „(d) $\Rightarrow$ (a)“ kann also i.a. nicht verzichtet werden.

Aufgaben

1. Für eine endliche, nicht-leere Menge Ω betrachte man das Prämaß $\mu := \sum_{\omega \in \Omega} \varepsilon_\omega$ auf $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann ist $\mu(A)$ die Anzahl der Elemente einer jeden Menge $A \subset \Omega$. Man zeige, daß jedes Prämaß μ auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ von der Form $\mu = \sum_{\omega \in \Omega} \alpha_\omega \varepsilon_\omega$ ist mit $\alpha_\omega := \mu(\{\omega\})$.

2. Für eine beliebige Menge Ω und jede Teilmenge A von Ω definiere man:

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A, \text{ falls } A \text{ endlich ist;} \\ +\infty, \text{ falls } A \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$

Dann ist μ ein Prämaß auf $\mathfrak{P}(\Omega)$.

3. Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω. Es bezeichne $\mathfrak{N}_\mu$ die Menge aller sogenannten *μ-Nullmengen*, d. h. aller Mengen $N \in \mathfrak{R}$ mit $\mu(N) = 0$. Man weise folgende Eigenschaften von $\mathfrak{N}_\mu$ nach:

(a) $$\emptyset \in \mathfrak{N}_\mu;$$

(b) $$N \in \mathfrak{N}_\mu,\ M \subset N,\ M \in \mathfrak{R} \Rightarrow M \in \mathfrak{N}_\mu;$$

(c) für jede Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen in $\mathfrak{N}_\mu$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathfrak{N}_\mu$.

Teilmengen von $\mathfrak{R}$ mit diesen Eigenschaften heißen *σ-Ideale* in $\mathfrak{R}$. Somit ist $\mathfrak{N}_\mu$ stets ein σ-Ideal. Man zeige, daß $\mathfrak{N}_\mu$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$ ist, wenn μ nur als Inhalt vorausgesetzt wird. (Vgl. § 1, Aufgabe 4).

4. Jedes σ-Ideal $\mathfrak{N}$ in einem Ring $\mathfrak{R}$ ist das σ-Ideal $\mathfrak{N}_\mu$ aller μ-Nullmengen eines geeigneten Prämaßes μ auf $\mathfrak{R}$. Man betrachte hierzu

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \in \mathfrak{N} \\ +\infty, & A \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{N} \end{cases}.$$

5. Sei μ ein endlicher, d. h. reellwertiger Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Man zeige, daß

$$d_\mu(A,B) := \mu(A \triangle B) \qquad (A, B \in \mathfrak{R})$$

eine Pseudo-Metrik auf $\mathfrak{R}$ definiert, d. h. daß d_μ alle Eigenschaften einer Metrik auf $\mathfrak{R}$ mit einer eventuellen Ausnahme besitzt: aus $d_\mu(A,B) = 0$ folgt nicht notwendig $A = B$.

6. Für ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω definiere man

$$\tilde{\mathfrak{R}} := \{A \in \mathfrak{P}(\Omega) : A \cap R \in \mathfrak{R} \text{ für alle } R \in \mathfrak{R}\}$$

und

$$\tilde{\mu}(A) := \sup\{\mu(R) : R \subset A,\ R \in \mathfrak{R}\} \qquad (A \in \tilde{\mathfrak{R}}).$$

Dann ist $\tilde{\mathfrak{R}}$ eine Algebra in Ω mit $\mathfrak{R} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$; ferner ist $\tilde{\mu}$ ein Prämaß auf $\tilde{\mathfrak{R}}$, welches μ fortsetzt.

7. Für einen endlichen Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ beweise man die folgende Verallgemeinerung der Gleichheit (3.5):

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mu(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - + \ldots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

für alle $n \in \mathbf{N}$ und alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{R}$.

8. Eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von Prämaßen auf einem Ring $\mathfrak{R}$ sei isoton, d. h. $\mu_n(A) \leqq \mu_{n+1}(A)$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ und alle $n \in \mathbf{N}$. Dann wird durch $\mu(A) := \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \mu_n(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, ein Prämaß μ auf $\mathfrak{R}$ definiert.

§ 4. Lebesguesches Prämaß

Jetzt sei Ω speziell der p-dimensionale Zahlenraum $\boldsymbol{R}^p$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Für je zwei Punkte $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ und $b = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ des $\boldsymbol{R}^p$ mit Koordinaten α_i, β_i schreiben wir $a \leqq b$ bzw. $a \lhd b$, wenn $\alpha_i \leqq \beta_i$ bzw. $\alpha_i < \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, p$ gilt. *Nach rechts halboffenes Intervall* im $\boldsymbol{R}^p$ heiße jede Menge der Gestalt

$$[a, b[\; := \{x \in \boldsymbol{R}^p : a \leqq x \lhd b\}, \tag{4.1}$$

wenn hierbei a und b Punkte des $\boldsymbol{R}^p$ mit $a \leqq b$ sind. Geometrisch handelt es sich um achsenparallele, „nach rechts hin offene" Parallelotope. Offenbar ist $[a, b[$ genau dann nicht leer, wenn $a \lhd b$ ist; in diesem Falle bestimmt $[a, b[$ die Punkte a und b eindeutig.
Für jedes solche Intervall $[a, b[$ nennen wir die reelle Zahl

$$(\beta_1 - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\beta_n - \alpha_n) \tag{4.2}$$

seinen p-dimensionalen Elementarinhalt. Er ist genau dann gleich Null, wenn $[a, b[\; = \emptyset$, wenn also nicht $a \lhd b$ (wohl aber $a \leqq b$) gilt.
Mit $\mathfrak{J}^p$ soll fortan die Menge aller nach rechts halboffenen Intervalle im $\boldsymbol{R}^p$, mit $\mathfrak{F}^p$ das System aller Vereinigungsmengen von je endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{J}^p$ bezeichnet werden. Die Elemente von $\mathfrak{F}^p$ sollen p-dimensionale Figuren genannt werden. Es ist $\mathfrak{J}^p \subset \mathfrak{F}^p$.

4.1 Lemma. *Für je zwei Intervalle $I, J \in \mathfrak{J}^p$ ist $I \cap J \in \mathfrak{J}^p$ und $J \setminus I \in \mathfrak{F}^p$. Jede Figur ist die Vereinigung endlich vieler paarweise fremder Mengen aus $\mathfrak{J}^p$.*

Beweis. Sei $I = [a, b[$ und $J = [c, d[$ mit $a \leqq b$ und $c \leqq d$; die entsprechenden Koordinaten dieser Punkte seien $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ $(i = 1, \ldots, p)$. Setzen wir dann

$$e := (\max(\alpha_1, \gamma_1), \ldots, \max(\alpha_p, \gamma_p)) \text{ und } f := (\min(\beta_1, \delta_1), \ldots, \min(\beta_p, \delta_p)),$$

so ist $I \cap J = [e, f[$, falls $e \leqq f$, oder $I \cap J = \emptyset$, falls nicht $e \leqq f$ gilt. Stets liegt somit $I \cap J$ in $\mathfrak{J}^p$. Wegen $J \setminus I = J \setminus I \cap J$ und $I \cap J \in \mathfrak{J}^p$ kann also für den zweiten Teil der Behauptung $I \subset J$ sowie $I \neq \emptyset$ angenommen werden. Dann bestimmen I und J die Punkte a, b, c, d eindeutig, und es ist $c \leq a \lhd b \leq d$.

Man ersetze nun in $[a, b[$ mit $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ und $b = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ auf alle möglichen Arten α_i durch γ_i und zugleich β_i durch α_i oder aber α_i durch β_i und zugleich β_i durch δ_i, d. h. genauer, man nehme für die Stellen i jeder nicht leeren Teilmenge von $\{1, \ldots, p\}$ derartige Abänderungen vor. Auf diese Weise erhält man $3^p - 1$ paarweise fremde Intervalle aus $\mathfrak{J}^p$ mit $J \setminus I$ als Vereinigung. Also ist $J \setminus I$ eine Figur, welche sich als Vereinigung endlich vieler paarweise fremder Mengen aus $\mathfrak{J}^p$ darstellen läßt. Daß dies für jede Figur $F = I_1 \cup \ldots \cup I_n \in \mathfrak{F}^p$ mit $I_1, \ldots, I_n \in \mathfrak{J}^p$ zutrifft, folgt nun so: Es ist

$$F = I_1 \cup (I_2 \setminus I_1) \cup (I_3 \setminus I_1 \cup I_2) \cup \ldots \cup (I_n \setminus I_1 \cup \ldots \cup I_{n-1})$$

Vereinigung von n paarweise fremden Mengen, von denen jede die Gestalt $I \setminus J_1 \cup \ldots \cup J_m$ besitzt, wobei $I, J_1, \ldots, J_m$ Intervalle aus $\mathfrak{J}^p$ sind. Also genügt es zu zeigen, daß jede solche Menge die Vereinigung endlich vieler paarweise fremder Intervalle aus $\mathfrak{J}^p$ ist. Dies aber folgt aus

$$I \setminus J_1 \cup \ldots \cup J_m = \bigcap_{i=1}^{m} (I \setminus J_i),$$

indem man jedes $I \setminus J_i$ als Vereinigung endlich vieler paarweise fremder Intervalle aus $\mathfrak{J}^p$ schreibt und das distributive Gesetz sowie den ersten Teil der Behauptung anwendet. ⌋

4.2 Satz. *$\mathfrak{F}^p$ ist ein Ring in $\boldsymbol{R}^p$.*

Beweis. Nicht evident ist nur die Eigenschaft (1.10) eines Ringes, wonach mit je zwei Mengen $F, G \in \mathfrak{F}^p$ auch $F \setminus G$ in $\mathfrak{F}^p$ liegt. Definitionsgemäß existieren Intervalle

$$I'_1, \ldots, I'_m, I''_1, \ldots, I''_n \in \mathfrak{J}^p$$

mit

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} I'_i \text{ und } G = \bigcup_{j=1}^{n} I''_j.$$

Dann aber ist

$$F \setminus G = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcap_{j=1}^{n} (I'_i \setminus I''_j)\right)$$

und somit nur zu zeigen, daß jede der Mengen $\bigcap_{j=1}^{n} (I'_i \setminus I''_j)$ eine Figur ist. Nach 4.1 ist $I'_i \setminus I''_j$ stets eine Figur. Somit genügt es zu zeigen, daß der Durchschnitt zweier und damit je endlich vieler Figuren wieder eine Figur ist. Sind aber F und G zwei Figuren mit obiger Darstellung, so ist $F \cap G$ nach dem distributiven Gesetz die Vereinigung der Mengen $I'_i \cap I''_j$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$), also abermals nach 4.1 eine Figur. ⌋

Definitionsgemäß ist jede Figur die Vereinigung endlich vieler Intervalle aus $\mathfrak{J}^p$. Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ in $\boldsymbol{R}^p$ mit $\mathfrak{J}^p \subset \mathfrak{R}$ gilt daher $\mathfrak{F}^p \subset \mathfrak{R}$. Der Satz 4.2 besagt somit, daß $\mathfrak{F}^p$ der von $\mathfrak{J}^p$ in $\boldsymbol{R}^p$ *erzeugte Ring* ist.

Unsere geometrische Anschauung legt nun die Gültigkeit des folgenden Satzes nahe:

4.3 Satz. *Es existiert genau ein Inhalt λ auf $\mathfrak{F}^p$ derart, daß $\lambda(I)$ für jedes $I \in \mathfrak{J}^p$ gleich dem p-dimensionalen Elementarinhalt von I ist. Dieser Inhalt ist reellwertig.*

Beweis. Nach 4.1 besitzt jede Figur $F \in \mathfrak{F}^p$ eine Darstellung $F = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ als Vereinigung endlich vieler paarweise fremder Intervalle $I_1, \ldots, I_n \in \mathfrak{J}^p$. Für jeden Inhalt λ auf $\mathfrak{F}^p$ ist dann

$$\lambda(F) = \lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_n),$$

d. h. λ ist bereits eindeutig durch seine Werte auf $\mathfrak{J}^p$ festgelegt und reellwertig. Zu zeigen ist also nur die Existenz von λ. Hierzu definieren wir λ zunächst nur auf $\mathfrak{J}^p$: für jedes $I \in \mathfrak{J}^p$ sei $\lambda(I)$ der p-dimensionale Elementarinhalt von I. Dann gilt:

(a) Sei $I = [a, b[\in \mathfrak{J}^p$, $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ und $b = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ mit $a \leqq b$ und sei γ eine reelle Zahl mit $\alpha_i \leqq \gamma \leqq \beta_i$ für ein $i = 1, \ldots, p$. Die Hyperebene mit der Gleichung $\xi_i = \gamma$ zerlegt I in zwei fremde Intervalle $I_1 = [a', b[$, $I_2 = [a, b'[\in \mathfrak{J}^p$, wobei a' bzw. b' aus a bzw. b dadurch hervorgeht, daß man die i-te Koordinate in γ abwandelt. Aus (4.2) folgt dann $\lambda(I) = \lambda(I_1) + \lambda(I_2)$. — Durch vollständige Induktion ergibt sich:

(b) Zerlegt man ein $I = [a, b[\in \mathfrak{J}^p$ mittels endlich vieler Hyperebenen der in (a) beschriebenen Art in paarweise fremde Intervalle $I_1, \ldots, I_n \in \mathfrak{J}^p$, so ist $\lambda(I) = \lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_n)$. — Allgemeiner gilt:

(c) Für je endlich viele paarweise fremde $I_1, \ldots, I_n \in \mathfrak{J}^p$ mit $I_0 := I_1 \cup \ldots \cup I_n \in \mathfrak{J}^p$ ist $\lambda(I_0) = \lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_n)$. Offenbar kann jedes I_j als nicht leer angenommen werden; dann existieren Punkte $a_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jp})$ und $b_j = (\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jp})$ aus $\boldsymbol{R}^p$ mit $a_j \lhd b_j$ und $I_j = [a_j, b_j[$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Durch Schneiden von I_0 mit allen Hyperebenen mit den Gleichungen $\xi_i = \alpha_{ji}$ und $\xi_i = \beta_{ji}$ $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, n)$ zerfällt I_0 in paarweise fremde Intervalle $I'_1, \ldots, I'_m \in \mathfrak{J}^p$. Jedes $I_1, \ldots, I_n$ zerfällt in gewisse dieser $I'_1, \ldots, I'_m$. Zieht man also (b) $(n + 1)$-mal heran, so folgt die behauptete Gleichheit.

(d) Sind nun

$$F = I_1 \cup \ldots \cup I_n = J_1 \cup \ldots \cup J_m$$

zwei Darstellungen einer Figur $F \in \mathfrak{F}^p$ als Vereinigung paarweise fremder Intervalle, so ist

$$\lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_n) = \lambda(J_1) + \ldots + \lambda(J_m).$$

Es ist nämlich $I_j = I_j \cap F = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (I_j \cap J_i)$ eine Darstellung von I_j als Vereinigung der paarweise fremden Intervalle $I_j \cap J_1, \ldots, I_j \cap J_m$. Folglich ist nach (c):

$$\lambda(I_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(I_j \cap J_i) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Vertauscht man die Rollen von i und j, so erhält man analog

$$\lambda(J_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j \cap J_i) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Beide Gleichungen zusammen liefern $\sum \lambda(I_j) = \sum \lambda(J_i)$.

(e) Somit ist für jedes $F \in \mathfrak{F}^p$ die Zahl $\sum \lambda(I_j)$ unabhängig von der speziellen Darstellung

$$F = I_1 \cup \ldots \cup I_n$$

von F als Vereinigung endlich vieler paarweise fremder $I_1, \ldots, I_n \in \mathfrak{J}^p$. Durch die Festsetzung

$$\lambda(F) := \lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_n)$$

wird also λ zu einer auf $\mathfrak{F}^p$ definierten, reellen Funktion fortgesetzt, die wiederum mit λ bezeichnet werden soll. Diese Funktion ist $\geqq 0$ und wegen (d) endlich-additiv. Da außerdem $\emptyset \in \mathfrak{J}^p$ und $\lambda(\emptyset) = 0$ ist, liegt ein Inhalt mit den gewünschten Eigenschaften vor. $\lrcorner$

4.4 Satz. *Der Inhalt λ auf $\mathfrak{F}^p$ ist ein Prämaß.*

Beweis. Wegen der Endlichkeit von λ genügt es nach 3.2, die $\emptyset$-Stetigkeit von λ nachzuweisen. Sei also (F_n) eine antitone Folge von Figuren aus $\mathfrak{F}^p$. Wir zeigen, daß aus der Annahme

$$\delta := \lim \lambda(F_n) = \inf \lambda(F_n) > 0$$

folgt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Da F_n die Vereinigung endlich vieler paarweise fremder Intervalle $I_1, \ldots, I_m \in \mathfrak{J}^p$ ist, kann durch naheliegendes Verkleinern dieser Intervalle eine Figur $G_n \in \mathfrak{F}^p$ gewonnen werden mit $\overline{G}_n$ (= abgeschlossene Hülle von G_n) $\subset F_n$ und

$$\lambda(F_n) - \lambda(G_n) \leqq 2^{-n}\,\delta.$$

Setzen wir $H_n := G_1 \cap \ldots \cap G_n$, so ist (H_n) eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{F}^p$ mit $H_n \supset H_{n+1}$ und $\overline{H}_n \subset \overline{G}_n \subset F_n$. Wegen der Beschränktheit von F_n ist dann also $(\overline{H}_n)$ eine Folge kompakter Teilmengen des $\boldsymbol{R}^p$ mit $F_n \supset \overline{H}_n \supset \overline{H}_{n+1}$. Folglich*) ist $\bigcap \overline{H}_n \neq \emptyset$ und damit wie behauptet $\bigcap F_n \neq \emptyset$, falls jedes H_n nicht leer ist. Dies aber kann wie folgt eingesehen werden: Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ ist

(*) $$\lambda(H_n) \geqq \lambda(F_n) - \delta\,(1 - 2^{-n}),$$

*) Vgl. etwa Franz [43], Satz 23.2.

wie durch vollständige Induktion gezeigt werden soll. (*) ist richtig für $n = 1$, da $H_1 = G_1$ und $\lambda(F_1) - \lambda(G_1) \leqq 2^{-1}\,\delta$ ist. Aus der Richtigkeit von (*) für irgendein n folgt die Richtigkeit für $n + 1$. Hierzu beachtet man, daß $H_{n+1} = G_{n+1} \cap H_n$ und somit nach (3.5)

$$\lambda(H_{n+1}) = \lambda(G_{n+1}) + \lambda(H_n) - \lambda(G_{n+1} \cup H_n)$$

ist. Nach Induktionsannahme gilt $\lambda(H_n) \geqq \lambda(F_n) - \delta(1-2^{-n})$; nach Wahl von G_{n+1} gilt $\lambda(G_{n+1}) \geqq \lambda(F_{n+1}) - 2^{-n-1}\,\delta$ sowie $G_{n+1} \cup H_n \subset F_{n+1} \cup F_n = F_n$ und somit $\lambda(G_{n+1} \cup H_n) \leqq \lambda(F_n)$. Zusammengefaßt ergibt dies gerade

$$\begin{aligned} \lambda(H_{n+1}) &\geqq \lambda(F_{n+1}) - 2^{-n-1}\,\delta - \delta(1 - 2^{-n}) \\ &= \lambda(F_{n+1}) - \delta(1 - 2^{-n-1}). \end{aligned}$$

Beachtet man noch, daß $\lambda(F_n) \geqq \delta$ nach Definition von δ gilt, so liefert (*) die Abschätzung $\lambda(H_n) \geqq 2^{-n}\,\delta > 0$ und damit die noch fehlende Aussage $H_n \neq \emptyset$ ⌋.

4.5 Definition. *Das auf dem Ring $\mathfrak{F}^p$ der p-dimensionalen Figuren im $\boldsymbol{R}^p$ definierte Prämaß λ heißt Lebesguesches Prämaß im $\boldsymbol{R}^p$ oder p-dimensionales Lebesguesches Prämaß. Es soll fortan mit λ^p bezeichnet werden.*

Aufgabe

Man zeige, daß auf $\mathfrak{F}^1$ genau ein Inhalt μ existiert, welcher den nach rechts halboffenen Intervallen $[\alpha, \beta[$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \leqq \beta$, folgende Werte zuordnet:

$$\mu([\alpha, \beta[) = \begin{cases} 1, \text{ falls } \alpha < 0 \leqq \beta; \\ 0, \text{ in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Ist μ σ-additiv?

§ 5. Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß

Im folgenden bezeichnet Ω wieder eine beliebige Menge.

5.1 Definition. *Jedes auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω definierte Prämaß μ heißt ein Maß auf $\mathfrak{A}$.*

Für jede Menge $A \in \mathfrak{A}$ wird die Zahl $\mu(A)$ das *Maß von A* genannt.

Beispiele. 1. Das in § 3, Beispiel 2 definierte Prämaß ist ein Maß.

2. Wählt man für $\mathfrak{R}$ in § 3, Beispiel 1 eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω, so ist ε_ω ein Maß auf $\mathfrak{A}$; ε_ω heißt das durch die Einheitsmasse in ω definierte Maß auf $\mathfrak{A}$ oder kurz Einheitsmasse in ω. Diese Bezeichnung leitet sich aus der Vorstellung ab, ein Maß μ auf einer σ-Algebra in Ω als *Massen-* oder *Ladungsverteilung* auf Ω zu interpretieren. Dementsprechend ist dann $\mu(A)$ für jede Menge $A \in \mathfrak{A}$ als die auf A „verschmierte“ Masse bzw. Ladung anzusprechen.

3. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Algebra in einer Menge. Für jede Menge $A \in \mathfrak{A}$ sei $|A|$ die Anzahl ihrer Elemente. Dann ist $A \mapsto |A|$ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Es wird das Zählmaß auf $\mathfrak{A}$ genannt. (Vgl. §3, Aufgabe 2.)

4. Das Lebesguesche Prämaß λ^p ist *kein* Maß, da sein Definitionsbereich $\mathfrak{F}^p$ keine σ-Algebra ist. Beispielsweise liegt $\boldsymbol{R}^p$ nicht in $\mathfrak{F}^p$, da offenbar jede p-dimensionale Figur eine beschränkte Teilmenge von $\boldsymbol{R}^p$ ist.

Ist $\bar{\mu}$ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω und $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω mit $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}$, so ist die Restriktion μ von $\bar{\mu}$ auf $\mathfrak{R}$ ein Prämaß. Die Bezeichnung „Prämaß" wird dadurch nachträglich gerechtfertigt, daß wir umgekehrt zeigen: Zu jedem Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ existiert eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω mit $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}$ und ein Maß $\bar{\mu}$ auf $\mathfrak{A}$ mit $\mu = \mathrm{Rest}_{\mathfrak{R}}\, \bar{\mu}$. Offenbar genügt es, für $\mathfrak{A}$ die von $\mathfrak{R}$ in Ω erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ zu wählen.

5.2 Satz (Fortsetzungssatz). *Jedes Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω kann auf mindestens eine Weise zu einem Maß $\bar{\mu}$ auf die von $\mathfrak{R}$ in Ω erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Für jede Menge $Q \subset \Omega$ bezeichne $\mathfrak{U}(Q)$ die Menge aller Folgen $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{R}$ mit $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann kann folgende Funktion μ^* auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ definiert werden:

$$\mu^*(Q) := \begin{cases} \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : (A_n) \in \mathfrak{U}(Q) \}, \text{ falls } \mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset; \\ +\infty, \text{ falls } \mathfrak{U}(Q) = \emptyset. \end{cases} \tag{5.1}$$

Diese Funktion besitzt folgende Eigenschaften:

$$\mu^*(\emptyset) = 0; \tag{5.2}$$

$$\mu^* \geqq 0; \tag{5.3}$$

$$Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \mu^*(Q_1) \leqq \mu^*(Q_2); \tag{5.4}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) \tag{5.5}$$

für jede Folge (Q_n) von Mengen aus $\mathfrak{P}(\Omega)$.

Dabei folgt (5.3) unmittelbar aus (5.1); beim Beweis von (5.2) beachte man, daß die identische Folge $\emptyset, \emptyset, \ldots$ in $\mathfrak{U}(\emptyset)$ liegt. (5.4) ergibt der Hinweis, daß aus $Q_1 \subset Q_2$ folgt $\mathfrak{U}(Q_2) \subset \mathfrak{U}(Q_1)$. Für den Beweis von (5.5) kann $\mu^*(Q_n) < +\infty$, also insbesondere $\mathfrak{U}(Q_n) \neq \emptyset$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ angenommen werden. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbf{N}$ existiert dann eine Folge $(A_{nm})_{m \in \mathbf{N}}$ aus $\mathfrak{U}(Q_n)$ mit

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{nm}) \leqq \mu^*(Q_n) + 2^{-n}\, \varepsilon.$$

Die Doppelfolge $(A_{nm})_{n,m=1,2,\ldots}$ liegt in $\mathfrak{U}(\bigcup Q_n)$, und es gilt somit

$$\mu^*(\bigcup Q_n) \leqq \sum_{m,n} \mu(A_{nm}) \leqq \sum \mu^*(Q_n) + \varepsilon,$$

woraus (5.5) folgt.

Entscheidend für das Weitere ist nun die Bemerkung, daß für alle $A \in \mathfrak{R}$ gilt:

(5.6) $$\mu^*(Q) \geqq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap \complement A) \qquad \text{für jedes } Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$$

sowie

(5.7) $$\mu^*(A) = \mu(A).$$

Es kann dabei $\mu^*(Q) < +\infty$, also $\mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset$ angenommen werden. Zunächst gilt

$$\sum \mu(A_n) = \sum \mu(A_n \cap A) + \sum \mu(A_n \setminus A)$$

für jede Folge (A_n) aus $\mathfrak{U}(Q)$ wegen der endlichen Additivität von μ. Weiter liegt die Folge $(A_n \cap A)$ in $\mathfrak{U}(Q \cap A)$ und die Folge $(A_n \setminus A)$ in $\mathfrak{U}(Q \setminus A)$; folglich ist

$$\sum \mu(A_n) \geqq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

für jede derartige Folge (A_n). Hieraus folgt (5.6). Die Gleichheit (5.7) folgt einmal aus (3.10.), wonach $\mu(A) \leqq \mu^*(A)$ ist, und zum anderen aus der Bemerkung, daß die Folge $A, \emptyset, \emptyset, \ldots$ in $\mathfrak{U}(A)$ liegt.

Die Bedeutung des soeben Bewiesenen liegt darin, daß wir zeigen werden, daß das System $\mathfrak{A}^*$ aller Mengen $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ mit der Eigenschaft (5.6) eine σ-Algebra in Ω und $\mathrm{Rest}_{\mathfrak{A}^*}\mu^*$ ein Maß ist. Nach (5.6) ist $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}^*$ und somit $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{A}^*$. Nach (5.7) ist dann $\tilde{\mu} := \mathrm{Rest}_{\mathfrak{A}(\mathfrak{R})}\mu^*$ eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$. Eine solche wird aber gesucht. Der Beweis wird also durch den folgenden Satz und die zugehörige Definition zu Ende geführt.

5.3 Definition. *Äußeres Maß auf einer Menge Ω heißt jede numerische Funktion μ^* auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften* (5.2)—(5.5). *Eine Teilmenge A von Ω heißt μ^*-meßbar, wenn sie die Eigenschaft* (5.6) *besitzt.*

Die auf C. CARATHÉODORY zurückgehende Idee des Beweises des Fortsetzungssatzes besteht somit darin, einem Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ durch die Definition (5.1) ein äußeres Maß zuzuordnen und den nachfolgenden Satz heranzuziehen.

5.4 Satz. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω. Dann ist das System $\mathfrak{A}^*$ aller μ^*-meßbaren Mengen $A \subset \Omega$ eine σ-Algebra in Ω und die Restriktion von μ^* auf $\mathfrak{A}^*$ ein Maß.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß (5.6) und damit die Forderung $A \in \mathfrak{A}^*$ für jede Menge $A \subset \Omega$ gleichwertig ist mit

(5.6′) $$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \qquad \text{für alle } Q \in \mathfrak{P}(\Omega).$$

Aus der Eigenschaft (5.5), angewandt auf die Folge $Q \cap A, Q \setminus A, \emptyset, \emptyset, \ldots,$ folgt nämlich die Gültigkeit der zu (5.6) dualen Ungleichung für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Aus (5.6) oder (5.6′) folgt sofort, daß $\Omega \in \mathfrak{A}^*$ ist und daß wegen der Symmetrie in A und $\complement A$ das System $\mathfrak{A}^*$ mit jeder Menge A auch deren Komplement $\complement A$ enthält. Die folgende Überlegung zeigt, daß $\mathfrak{A}^*$ mit je zwei Mengen A, B auch

$A \cup B$ enthält, daß also $\mathfrak{A}^*$ eine Algebra ist. Für jedes $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt nämlich

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap B) + \mu^*(Q \setminus B).$$

Ersetzt man hierin Q einmal durch $Q \cap A$, zum anderen durch $Q \setminus A = Q \cap \complement A$, so erhält man zwei neue (für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gültige) Gleichungen, die, in (5.6′) eingesetzt, liefern:

$$\begin{aligned}\mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap \complement B)\\ &\quad + \mu^*(Q \cap \complement A \cap B) + \mu^*(Q \cap \complement A \cap \complement B).\end{aligned}$$

Ersetzt man hierin Q durch $Q \cap (A \cup B)$, so gewinnt man

(5.8) $$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap \complement B) + \mu^*(Q \cap \complement A \cap B),$$

was zusammen mit der vorhergehenden Gleichung

$$\begin{aligned}\mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap \complement(A \cup B))\\ &= \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(Q \setminus (A \cup B))\end{aligned}$$

ergibt. Da $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ hierbei beliebig war, ist also $A \cup B \in \mathfrak{A}^*$.
Nunmehr sei (A_n) eine Folge paarweise fremder Mengen aus $\mathfrak{A}^*$ und A deren Vereinigung. Wählt man in (5.8) $A = A_1$ und $B = A_2$, so ergibt sich

$$\mu^*(Q \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2).$$

Hieraus folgt durch vollständige Induktion

$$\mu^*(Q \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_i)$$

für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ und $n \in \mathbf{N}$. Berücksichtigt man, daß $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ nach dem bereits Bewiesenen in $\mathfrak{A}^*$ liegt und $Q \setminus B_n \supset Q \setminus A$, also $\mu^*(Q \setminus B_n) \geqq \mu^*(Q \setminus A)$ ist, so erhält man:

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap B_n) + \mu^*(Q \setminus B_n) \geqq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q \setminus A)$$

für $n = 1, 2, \ldots$. Hieraus folgt schließlich unter Verwendung von (5.5)

$$\mu^*(Q) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_n) + \mu^*(Q \setminus A) \geqq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

und damit nach der einleitenden Bemerkung sogar

$$\mu^*(Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_n) + \mu^*(Q \setminus A) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Also liegt A in $\mathfrak{A}^*$, und $\mathfrak{A}^*$ ist dann nach Satz 2.2 eine

σ-Algebra. Setzt man in der letzten Doppelgleichung speziell $Q = A$, so folgt noch

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Also ist Rest $_{\mathfrak{A}^*} \mu^*$ ein Maß. ⌋

Es soll nun noch gezeigt werden, daß in vielen wichtigen Fällen das Maß $\tilde{\mu}$ aus Satz 5.2 eindeutig bestimmt ist. Erstmals ziehen wir dazu die Technik der Dynkin-Systeme heran.

5.5 Satz (Eindeutigkeitssatz). *Sei $\mathfrak{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω, in welchem eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von Mengen existiert mit $E_n \uparrow \Omega$. Sind dann μ_1 und μ_2 Maße auf $\mathfrak{A}$ mit*

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \qquad \textit{für alle } E \in \mathfrak{E}$$

und mit

$$\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < +\infty \qquad \textit{für alle } n \in \mathbf{N},$$

so ist $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathfrak{A}$.

Beweis. Sei $E \in \mathfrak{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < +\infty$. Dann betrachte man das System

$$\mathfrak{D}_E := \{D \in \mathfrak{A} : \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)\}.$$

Es ist offenbar $\Omega \in \mathfrak{D}_E$. Aus $D \in \mathfrak{D}_E$ folgt gemäß (3.7):

$$\begin{aligned}\mu_1(E \cap \complement D) &= \mu_1(E \setminus E \cap D) = \mu_1(E) - \mu_1(E \cap D)\\ &= \mu_2(E) - \mu_2(E \cap D) = \mu_2(E \cap \complement D),\end{aligned}$$

also $\complement D \in \mathfrak{D}_E$. Dabei hat man zu beachten, daß aus Isotoniegründen mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < +\infty$ auch $\mu_1(E \cap D) < +\infty$ und $\mu_2(E \cap D) < +\infty$ gilt. Mittels der σ-Additivität von μ_1 und μ_2 zeigt man analog, daß $\mathfrak{D}_E$ auch die dritte, noch fehlende Eigenschaft (2.3) eines Dynkin-Systems besitzt. Da $\mathfrak{E}$ $\cap$-stabil ist, so ist $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}_E$ und somit $\mathfrak{D}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{D}_E$. Nach 2.4 gilt für das von $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ weiter: $\mathfrak{D}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{A}$. Wegen $\mathfrak{D}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{D}_E \subset \mathfrak{A}$ ist also $\mathfrak{D}_E = \mathfrak{A}$. Somit gilt

$$\mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D) \qquad \text{für alle } D \in \mathfrak{A}.$$

Der an E gestellten Endlichkeitsbedingung genügt jede der Mengen E_n. Folglich ist $\mu_1(E_n \cap D) = \mu_2(E_n \cap D)$ für $n = 1, 2, \ldots$ und alle $D \in \mathfrak{A}$. Nach 3.2 sind μ_1 und μ_2 von unten stetig. Aus $E_n \uparrow \Omega$ folgt $E_n \cap D \uparrow D$ und daher

$$\mu_1(D) = \lim_{n \to \infty} \mu_1(E_n \cap D) = \lim_{n \to \infty} \mu_2(E_n \cap D) = \mu_2(D)$$

für alle $D \in \mathfrak{A}$. Somit ist $\mu_1 = \mu_2$. ⌋

Um eine hinreichende Bedingung für die eindeutige Bestimmtheit des Maßes $\tilde{\mu}$ aus Satz 5.2 angeben zu können, definieren wir:

5.6 Definition. *Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω heißt σ-endlich, wenn eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{R}$ existiert mit $A_n \uparrow \Omega$ sowie mit $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbf{N}$.*

Beispiele. 5. Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω sei *endlich*, genüge also der Bedingung $\mu(A) < +\infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$. Die σ-Endlichkeit von μ ist dann äquivalent mit der Existenz einer Folge (A_n) in $\mathfrak{R}$ mit $A_n \uparrow \Omega$. Diese Bedingung ist nicht von selbst erfüllt; man wähle etwa $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathfrak{R} = \{\emptyset\}$.

6. Das *Lebesguesche Prämaß* im $\boldsymbol{R}^p$ ist σ-endlich (und endlich). Bezeichnet nämlich x_n für jedes $n \in \mathbf{N}$ denjenigen Punkt in $\boldsymbol{R}^p$, dessen sämtliche Koordinaten gleich n sind, so ist $I_n := [-x_n, x_n[$ ein Intervall aus $\mathfrak{J}^p$; es gilt $I_n \uparrow \boldsymbol{R}^p$.

7. Das in § 5, Beispiel 3, definierte Maß ist genau dann σ-endlich, wenn Ω abzählbar ist.

Zusammenfassend erhalten wir

5.7 Satz. *Jedes σ-endliche Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω kann auf genau eine Weise zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Nur die Eindeutigkeit von $\tilde{\mu}$ ist zu beweisen. Diese folgt aber unmittelbar aus 5.5, da vermöge der σ-Endlichkeit von μ der Ring $\mathfrak{R}$ offenbar alle Eigenschaften des dort betrachteten Erzeugersystems $\mathfrak{E}$ besitzt. ⌋

Bemerkung. Auf die Voraussetzung der σ-Endlichkeit von μ kann in 5.7 nicht verzichtet werden. Es genügt, wie in Beispiel 5, eine nicht leere Menge Ω und für $\mathfrak{R}$ den nur aus der leeren Menge bestehenden Ring zu wählen: Auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \{\emptyset, \Omega\}$ werden durch $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) := 0$ und $\mu(\Omega) := 0$ bzw. $\nu(\Omega) := 1$ zwei verschiedene Maße μ und ν definiert mit gleicher Restriktion auf $\mathfrak{R}$.

Schließlich geben wir noch eine zur σ-Endlichkeit eines Inhaltes äquivalente Bedingung an:

5.8 Lemma. *Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω ist genau dann σ-endlich, wenn eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ paarweise fremder Mengen in $\mathfrak{R}$ existiert mit den Eigenschaften*

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \tag{5.9}$$

und

$$\mu(B_n) < +\infty \qquad \textit{für alle } n \in \mathbf{N}. \tag{5.10}$$

Beweis. Sei μ σ-endlich und (A_n) eine Folge in $\mathfrak{R}$ mit $A_n \uparrow \Omega$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle n. Dann leistet die durch

$$B_n := \begin{cases} A_n \setminus A_{n-1}, & n \geq 2 \\ A_1, & n = 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

definierte Folge alles Verlangte; insbesondere sind die Mengen B_n paarweise fremd. — Ist umgekehrt (B_n) eine Folge in $\mathfrak{R}$ mit den Eigenschaften (5.9) und (5.10), so ist

$$A_n := B_1 \cup \ldots \cup B_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

eine Folge in $\mathfrak{R}$, welche gemäß (3.8) die in Definition 5.6 genannten Bedingungen erfüllt. ⌋

Aufgaben

1. Sei $\mu = \varepsilon_\omega$ das durch die Einheitsmasse in einem Punkt $\omega \in \Omega$ definierte Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω. Unter der Voraussetzung, daß sich $\{\omega\}$ als Durchschnitt und Ω als Vereinigung jeweils einer Folge von Mengen des Ringes $\mathfrak{R}$ darstellen lassen, zeige man: (1) Das zu μ im Sinne von (5.1) gehörige äußere Maß μ^* ordnet jeder Menge $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ den Wert 1 bzw. 0 zu, je nachdem ob ω in A oder in $\complement A$ liegt. — (2) Alle Teilmengen von Ω sind μ^*-meßbar. — (3) μ^* ist das Maß ε_ω auf $\mathfrak{P}(\Omega)$.

2. Man betrachte das Maß μ aus § 3, Beispiel 2, etwa für $\Omega = \boldsymbol{R}$, und beweise: (1) *Das zu μ gehörige äußere Maß μ^* ordnet jeder Menge $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$* den Wert 1 bzw. 0 zu, je nachdem ob A nichtabzählbar oder abzählbar ist. — (2) μ^* ist kein Maß, nicht einmal ein Inhalt auf $\mathfrak{P}(\Omega)$. — (3) Allein die Mengen der σ-Algebra $\mathfrak{A}$, auf welchen μ definiert ist, sind μ^*-meßbar.

3. Sei μ ein σ-endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω, und sei μ^* das zugehörige äußere Maß. Dann existiert zu jeder Menge $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Menge $A \in \mathfrak{A}$, genannt *meßbare Hülle* von Q, mit den Eigenschaften: $Q \subset A$, $\mu^*(Q) = \mu(A)$ und $\mu(B) = 0$ für alle $B \in \mathfrak{A}$ mit $B \subset A \setminus Q$. [*Anleitung*: Im Falle $\mu^*(Q) < +\infty$ zeige man die Existenz einer Folge (A_n) in $\mathfrak{A}$ mit $Q \subset A_n$ und $\mu(A_n) \leqq \mu^*(Q) + n^{-1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann leistet $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ das Verlangte.]

4. Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω bzw. das zugehörige — *Maßraum* genannte — Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn jede Teilmenge einer μ-Nullmenge zu $\mathfrak{A}$ gehört und somit selbst eine μ-Nullmenge ist. Man zeige:

(a) Das Maß $\mathrm{Rest}_{\mathfrak{A}^*}\, \mu^*$ aus Satz 5.4 ist vollständig.

(b) Das Maß aus § 3, Beispiel 2 ist vollständig.

(c) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in einer Menge Ω und sei ω ein Element aus Ω mit $\{\omega\} \in \mathfrak{A}$. Der Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \varepsilon_\omega)$ ist genau dann vollständig, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt.

5. (a) Man zeige: Jedes Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω kann *vervollständigt* werden. D. h. μ kann so zu einem vollständigen Maß μ_0 auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}$ in Ω fortgesetzt werden, daß jedes vollständige Maß μ' auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}$ in Ω, welches μ fortsetzt, eine Fortsetzung von μ_0 ist. Die σ-Algebra $\mathfrak{A}_0$ heißt die *μ-Vervollständigung* von $\mathfrak{A}$; das Maß μ_0 heißt die *Vervollständigung* von μ. Der Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ heißt entsprechend die Vervollständigung von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

(b) Bestimme die Vervollständigung des Maßraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, \varepsilon_\omega)$ in der Situation der Aufgabe 4, (c).

(c) Man zeige, daß die μ-Vervollständigung $\mathfrak{A}_0$ einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω aus allen Mengen $A \cup N$ besteht mit $A \in \mathfrak{A}$ und N Teilmenge einer μ-Nullmenge. Für alle diese Mengen gilt $\mu_0(A \cup N) = \mu(A)$.

(d) Man kennzeichne die Mengen aus $\mathfrak{A}_0$ wie folgt: Eine Menge $A_0 \subset \Omega$ liegt genau dann in $\mathfrak{A}_0$, wenn es Mengen $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ gibt mit $A_1 \subset A_0 \subset A_2$ und $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$.

6. Sei μ ein σ-endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω; ferner sei μ^* das zugehörige äußere Maß und $\mathfrak{A}^*$ die σ-Algebra aller μ^*-meßbaren Teilmengen von Ω. Mit Hilfe der Aufgaben 3 und 5 beweise man: $(\Omega, \mathfrak{A}^*, \mathrm{Rest}_{\mathfrak{A}^*}\, \mu^*)$ ist die Vervollständigung des Maßraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

§ 6. Borelsche Mengen und Lebesguesches Maß

Wir führen nun die Untersuchungen aus § 4 weiter. Es sei also wieder $\mathfrak{J}^p$ die Menge aller nach rechts halboffenen Intervalle im $\boldsymbol{R}^p$, $\mathfrak{F}^p$ der Ring aller p-dimensionalen Figuren und λ^p das Lebesguesche Prämaß auf $\mathfrak{F}^p$. Wir bemerkten bereits, daß λ^p σ-endlich ist. Nach 5.7 kann also λ^p auf genau eine Weise zu einem Maß auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{F}^p)$ fortgesetzt werden, welches von nun an ebenfalls wieder mit λ^p bezeichnet werden soll. Da jede Figur die Vereinigung endlich vieler $I \in \mathfrak{J}^p$ ist, gilt

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{F}^p) = \mathfrak{A}(\mathfrak{J}^p). \tag{6.1}$$

6.1 Definition. *Die Elemente der vom System $\mathfrak{J}^p$ der halboffenen Intervalle im $\boldsymbol{R}^p$ erzeugten σ-Algebra heißen die Borelschen Mengen des $\boldsymbol{R}^p$. Dementsprechend heißt $\mathfrak{A}(\mathfrak{J}^p)$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen des $\boldsymbol{R}^p$; sie wird mit $\mathfrak{B}^p$ bezeichnet.*

Das einleitend gewonnene Resultat können wir dann wegen 4.3 wie folgt aussprechen:

6.2 Satz. *Es gibt genau ein Maß λ^p auf $\mathfrak{B}^p$, welches jedem nach rechts halboffenen Intervall im $\boldsymbol{R}^p$ seinen p-dimensionalen Elementarinhalt zuordnet.*

6.3 Definition. *Das Maß λ^p aus Satz 6.2 heißt das Lebesgue-Borelsche Maß (kurz: L-B-Maß) im $\boldsymbol{R}^p$. Für jede Borelsche Menge $B \in \mathfrak{B}^p$ wird $\lambda^p(B)$ auch das p-dimensionale Lebesguesche Maß von B genannt.*

Es ist zweckmäßig, diese Definition noch wie folgt zu ergänzen:
Für jede Menge $C \in \mathfrak{B}^p$ besteht $C \cap \mathfrak{B}^p$ aus allen Borelschen Teilmengen von C (vgl. (1.4)). Die Restriktion λ^p_C von λ^p auf $C \cap \mathfrak{B}^p$ ist ein Maß. Dieses wird auch das L-B-Maß auf C genannt.

Das L-B-Maß λ^p ist als Fortsetzung des Lebesgueschen Prämaßes wie dieses *σ-endlich* (vgl. § 5, Beispiel 6). Allgemeiner gilt

$$\lambda^p(B) < +\infty \tag{6.2}$$

für jede *beschränkte* Menge $B \in \mathfrak{B}^p$, da diese in einem geeignet groß gewählten Intervall $I \in \mathfrak{J}^p$, z. B. einem der Intervalle I_n aus § 5, Beispiel 6, enthalten und somit $\lambda^p(B) \leq \lambda^p(I) < +\infty$ ist.
Erinnern wir uns nunmehr an die § 1 vorangestellte Frage, wie man möglichst vielen Teilmengen des $\boldsymbol{R}^p$ durch eine einheitliche Methode ein p-dimensionales Volumen als Maßzahl zuordnen kann. Wir werden schrittweise erkennen, daß diese Frage durch Satz 6.2 in sehr befriedigender Weise beantwortet ist: Für alle Borelschen Mengen B im $\boldsymbol{R}^p$ ist das p-dimensionale Lebesguesche Maß $\lambda^p(B)$ die gesuchte Maßzahl.

Zunächst erscheint es wünschenswert, tiefere Einblicke in die σ-Algebra $\mathfrak{B}^p$ der Borelschen Mengen zu gewinnen. Insbesondere erhebt sich die Frage, ob topologisch interessante Teilmengen wie offene, abgeschlossene und kompakte Mengen Borelsch sind. Die im folgenden Satz enthaltene diesbezügliche Kennzeichnung wird oft zur Definition von $\mathfrak{B}^p$ verwendet.

6.4 Satz. *Es bezeichne $\mathfrak{O}^p$ bzw. $\mathfrak{C}^p$ bzw. $\mathfrak{K}^p$ das System aller offenen bzw. abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen des $\boldsymbol{R}^p$. Dann ist*

$$\mathfrak{B}^p = \mathfrak{A}(\mathfrak{O}^p) = \mathfrak{A}(\mathfrak{C}^p) = \mathfrak{A}(\mathfrak{K}^p). \tag{6.3}$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{K}^p \subset \mathfrak{C}^p \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}^p)$ und somit $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}^p) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}^p)$. Jede Menge $C \in \mathfrak{C}^p$ ist die Vereinigung einer Folge von Mengen $C_n \in \mathfrak{K}^p$; bezeichnet nämlich K_n die kompakte Vollkugel vom Radius n um einen fest gewählten Punkt $a \in \boldsymbol{R}^p$, so kann man z. B. für C_n die Menge $C \cap K_n$ wählen. Somit gilt nach (1.3) $\mathfrak{C}^p \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{K}^p)$ und damit $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}^p) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{K}^p)$, also $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}^p) = \mathfrak{A}(\mathfrak{K}^p)$. Da die offenen Mengen die Komplemente der abgeschlossenen Mengen sind und umgekehrt, ist weiter $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}^p) = \mathfrak{A}(\mathfrak{C}^p) = \mathfrak{A}(\mathfrak{K}^p)$. Abschließend zeigen wir: $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}^p) = \mathfrak{B}^p$. Hierzu bezeichnen wir wie üblich als *offenes* beschränktes Intervall im $\boldsymbol{R}^p$ jede Menge

$$]\, a, b\, [:= \{x \in \boldsymbol{R}^p : a \lhd x \lhd b\}, \tag{6.4}$$

wobei a, b Punkte des $\boldsymbol{R}^p$ sind mit $a \leqq b$.*) Jedes nach rechts halboffene Intervall $[a, b\, [\in \mathfrak{J}^p$ ist dann der Durchschnitt einer Folge offener, beschränkter Intervalle, nämlich:

$$[a, b\, [= \bigcap_{n=1}^{\infty}\,]\, a_n, b\, [,$$

wenn dabei

$$a_n = (\alpha_1 - \frac{1}{n}, \ldots, \alpha_p - \frac{1}{n}) \text{ und } a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$$

ist. Daher gilt gemäß (1.7) $\mathfrak{J}^p \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{O}^p)$ und somit $\mathfrak{B}^p = \mathfrak{A}(\mathfrak{J}^p) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{O}^p)$. Jede offene Menge kann als Vereinigung abzählbar vieler offener, beschränkter Intervalle (z. B. solcher mit lauter rationalen Koordinaten der Eckpunkte) dargestellt werden. Jedes offene, beschränkte Intervall $]a, b[$ ist außerdem die Vereinigung einer Folge von Intervallen aus $\mathfrak{J}^p$, nämlich:

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b[,$$

wenn dabei

$$a_n := (\min(\alpha_1 + \frac{1}{n}, \beta_1), \ldots, \min(\alpha_p + \frac{1}{n}, \beta_p))$$

ist und $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_p$ die Koordinaten von a bzw. b bezeichnen. Jede offene Menge ist daher die Vereinigung einer Folge von Intervallen aus

*) Zur Definition von $\lhd$ vgl. § 4.

$\mathfrak{J}^p$, und daher $\mathfrak{O}^p \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{J}^p) = \mathfrak{B}^p$. Also folgt $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}^p) \subset \mathfrak{B}^p$ und daher wegen der bereits bewiesenen dualen Relation $\mathfrak{B}^p = \mathfrak{A}(\mathfrak{O}^p)$. ⌋

Einige tieferliegende Eigenschaften des L-B-Maßes werden wir in § 8 kennenlernen. Dort wird sich insbesondere die Existenz *nicht*-Borelscher Teilmengen des $\boldsymbol{R}^p$, also die Aussage

$$\mathfrak{B}^p \neq \mathfrak{P}(\boldsymbol{R}^p)$$

ergeben. Für den Augenblick begnügen wir uns mit der Berechnung von $\lambda^p(B)$ für einfache Borelsche Mengen $B \subset \boldsymbol{R}^p$.

Beispiele. 1. *Jede zu einer der Koordinatenachsen des $\boldsymbol{R}^p$ orthogonale Hyperebene H ist eine L-B-Nullmenge,* d. h. es gilt $\lambda^p(H) = 0$. Sei etwa H zur i-ten Koordinatenachse orthogonal und somit

$$H = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \boldsymbol{R}^p : \xi_i = \alpha\} \tag{6.5}$$

für ein geeignetes $\alpha \in \boldsymbol{R}$ $(i = 1, \ldots, p)$. H ist abgeschlossen und damit Borelsch. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ bezeichne x_n bzw. y_n denjenigen Punkt in $\boldsymbol{R}^p$, dessen sämtliche Koordinaten mit Ausnahme der i-ten gleich $-n$ bzw. $+n$ sind; die i-te Koordinate sei gleich α bzw. $\alpha + 2^{-n}(2n)^{1-p}\varepsilon$ bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$. Dann ist offenbar

$$H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n[$$

und

$$\lambda^p([x_n, y_n[) = 2^{-n}\varepsilon.$$

Nach (3.10) erhält man somit

$$\lambda^p(H) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^p([x_n, y_n[) = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $\lambda^p(H) = 0$.
Insbesondere ist damit wegen der Isotonie von Maßen $\lambda^p(B) = 0$ für alle Borelschen Teilmengen B derartiger Hyperebenen H.

2. *Jede abzählbare Teilmenge des $\boldsymbol{R}^p$ ist eine L-B-Nullmenge.*
Wegen der σ-Additivität von Maßen genügt es, den Fall einer einpunktigen Teilmenge $\{x\} \subset \boldsymbol{R}^p$ zu behandeln. Diese ist abgeschlossen und daher Borelsch; ferner gibt es Hyperebenen H der Gestalt (6.5) mit $\{x\} \subset H$.

3. Für Punkte $a, b \in \boldsymbol{R}^p$ mit $a \leqq b$ betrachte man die bereits definierten Intervalle $[a, b[$ und $]a, b[$ sowie das *kompakte* Intervall

$$[a, b] := \{x \in \boldsymbol{R}^p : a \leqq x \leqq b\} \tag{6.6}$$

und das im Gegensatz zu $[a, b[$ *nach links halboffene* Intervall

$$]a, b] := \{x \in \boldsymbol{R}^p : a \lhd x \leqq b\}. \tag{6.7}$$

Dann ist

$$\lambda^p([a, b[) = \lambda^p(]a, b[) = \lambda^p([a, b]) = \lambda^p(]a, b]). \tag{6.8}$$

Nach 6.4 sind zunächst die Intervalle $[a, b[$, $]a, b[$ und $[a, b]$ Borelsche Mengen. Ähnlich wie im Beweis von 6.4 zeigt man, daß $]a, b]$ der Durchschnitt einer Folge von Intervallen $]a, b_n[$, also offener Mengen ist. Abermals nach 6.4 ist dann auch $]a, b]$ Borelsch. Die Gleichheit (6.8) folgt nun wegen der Additivität von Maßen gemäß Beispiel 1, wenn man beachtet, daß sich aus $[a, b]$ alle übrigen drei Intervalle dadurch gewinnen lassen, daß man maximal $2p$ Borelsche Mengen von Randpunkten tilgt, welche jeweils in einer Hyperebene mit der Gleichung $\xi_i = \alpha_i$ bzw. $\xi_i = \beta_i$ enthalten sind $(i = 1, \ldots, p)$. Dabei bezeichnen wieder α_i bzw. β_i die Koordinaten von a bzw. b.
Die Wahl der nach rechts halboffenen Intervalle bei der Konstruktion von λ^p ist also allein dadurch begründet, daß diese Intervalle den einfach zu beschreibenden Ring $\mathfrak{F}^p$ der Figuren erzeugen.

Aufgabe

Man charakterisiere die L-B-Nullmengen wie folgt:
Eine Borelsche Menge $B \in \mathfrak{B}^p$ ist genau dann eine L-B-Nullmenge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine B überdeckende Folge (I_n) offener (bzw. kompakter bzw. halboffener) Intervalle I_n im $\boldsymbol{R}^p$ existiert mit $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^p(I_n) \leqq \varepsilon$. [Anleitung: Man benütze Formel (5.1).]

§ 7. Meßbare Abbildungen und Bildmaße

Die folgenden Betrachtungen lassen sich einfacher formulieren, wenn wir eine abkürzende Sprechweise einführen: Ist Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω, so sollen das Paar

$$(\Omega, \mathfrak{A})$$

ein Meßraum und die Mengen aus $\mathfrak{A}$ *meßbare Mengen* genannt werden.*) Ist auf $\mathfrak{A}$ zudem ein Maß μ definiert, so soll das Tripel

$$(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$$

ein Maßraum heißen. Dementsprechend soll $(\boldsymbol{R}^p, \mathfrak{B}^p)$ als der p-dimensionale *Borelsche Meßraum* und $(\boldsymbol{R}^p, \mathfrak{B}^p, \lambda^p)$ als der p-dimensionale *Lebesgue-Borelsche Maßraum* angesprochen werden.

Der Begriff des Meßraumes weist eine formale Analogie zum Begriff des topologischen Raumes auf. Auch ein topologischer Raum ist ein Paar, bestehend aus einer Menge und einem System von Teilmengen, nämlich dem der offenen Mengen. Im Sinne dieser Analogie entspricht der folgende Begriff der meßbaren Abbildung dem Stetigkeitsbegriff der Topologie.

---

*) Meßräume werden oft auch „meßbare Räume" genannt.

7.1 Definition. *Es seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ Meßräume, und es sei $T: \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung von Ω in Ω'. T heißt ($\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-) meßbar, wenn gilt:*

$$T^{-1}(A') \in \mathfrak{A} \quad \textit{für alle } A' \in \mathfrak{A}'. \tag{7.1}$$

Die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-Meßbarkeit von T drücken wir symbolisch auch durch

$$T: (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$$

aus; wir sprechen dann auch von einer meßbaren Abbildung des ersten Meßraumes in den zweiten. Mit Hilfe der in (1.5) eingeführten Bezeichnung schreibt sich (7.1) in der Form:

$$T^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}. \tag{7.1'}$$

Beispiele. 1. Jede *konstante Abbildung* $T: \Omega \to \Omega'$ ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$- meßbar.

2. Jede *stetige* Abbildung $T: \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^q (p, q = 1, 2, \ldots)$ ist $\mathfrak{B}^p$-$\mathfrak{B}^q$-meßbar, kurz: ist *Borel-meßbar*. Nach 6.4 ist das System $\mathfrak{O}^q$ aller offenen Teilmengen des $\boldsymbol{R}^q$ ein Erzeuger von $\mathfrak{B}^q$. Wegen der Stetigkeit von T gilt $T^{-1}(O) \in \mathfrak{O}^p \subset \mathfrak{B}^p$ für alle $O \in \mathfrak{O}^q$. Die Meßbarkeit von T folgt daher aus dem nächsten Satz.

7.2 Satz. *Es seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ Meßräume; ferner sei $\mathfrak{E}'$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}'$. Eine Abbildung $T: \Omega \to \Omega'$ ist genau dann meßbar, wenn gilt:*

$$T^{-1}(A') \in \mathfrak{A} \qquad \textit{für alle } A' \in \mathfrak{E}'. \tag{7.2}$$

Beweis. Das System $\mathfrak{Q}'$ aller Mengen $Q' \in \mathfrak{P}(\Omega')$ mit $T^{-1}(Q') \in \mathfrak{A}$ ist eine σ-Algebra in Ω'. Folglich gilt $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{Q}'$ genau dann, wenn $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{Q}'$ ist. $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{Q}'$ ist gleichbedeutend mit der Meßbarkeit von T; $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{Q}'$ ist gleichbedeutend mit (7.2). ⌋

Über das Zusammensetzen meßbarer Abbildungen gilt:

7.3 Satz. *Sind $T_1: (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $T_2: (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \to (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ meßbare Abbildungen, so ist die zusammengesetzte Abbildung $T_2 \circ T_1$ $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_3$-meßbar.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der für alle $A \subset \Omega_3$, also speziell für $A \in \mathfrak{A}_3$ gültigen Formel

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(A)). \lrcorner$$

Nunmehr sei eine Familie von Meßräumen $((\Omega_i, \mathfrak{A}_i))_{i \in I}$ und eine Familie $(T_i)_{i \in I}$ von Abbildungen $T_i: \Omega \to \Omega_i$ einer Menge Ω in die einzelnen Mengen Ω_i gegeben. Dann ist offenbar die von $\bigcup\limits_{i \in I} T_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)$ in Ω erzeugte σ-Algebra die kleinste σ-Algebra $\mathfrak{A}$, bezüglich welcher jedes T_i $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_i$-meßbar ist. Wir bezeichnen diese σ-Algebra mit $\mathfrak{A}(T_i; i \in I)$, setzen also

$$\mathfrak{A}(T_i; i \in I) := \mathfrak{A}\Big(\bigcup_{i \in I} T_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\Big); \tag{7.3}$$