Anfangsgründe

der

höheren Mechanik,

nach der antiken, rein geometrischen Methode

bearbeitet

von

Dr. Jacob Wilhelm Heinrich Lehmann.

Mit zwei Steindruck-Tafeln.

Berlin, 1831.
Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

Sinnentstellende Druckfehler.

Seite	30	Zeile	3	v. o.	statt	$2a$ lies 2α
=	37	=	10	v. u.	=	u_{k+1} l. u^{r}_{k+1}
=	38	=	10	= =	=	$q_{,,,}$ l. $q^{r}_{,,,}$
=	59	=	6	v. o.	=	$\frac{1.3..(2n-2)}{4.6..(2n+4)}$ l. $\frac{1.3..(2n-1)}{4.6..(2n+4)}$
=	167	=	11	= =	=	$(\mathrm{Sin.}^{k+m}\mathrm{Cos.}^{l}\varphi)$ l. $(\mathrm{Sin.}^{k+m}\mathrm{Cos.}^{l})\varphi$
=	228	=	6	= =	=	2ten l. 1sten
=	228	=	8	= =	=	1sten l. 2ten
=	256	=	7	= =	=	AH l. AF
=	300	=	10	v. u.	=	Punct B̄ l. Punct A
=	367	=	2	= =	=	D l. B
=	395	=	9	= =	=	$p_{,,,,}$ $p_{,,,,}$ l. $p_{,,,,}$ $p'_{,,,,}$

Vorrede.

Der Versuch, die höhere Mechanik nach der antiken Methode zu bearbeiten, ist nicht ganz neu. Abgesehen davon, daß bereits Archimedes in seinen statischen und hydrostatischen Schriften manche Lehren vom Gleichgewicht, welche einen wesentlichen Theil der Lehre von der Bewegung ausmachen, ohne alle Hülfe der neueren analytischen Operationen behandelt hat, von denen ja den Alten gar nichts bekannt war, so führte Newton in seinen principiis mathematicis philosophiae naturalis die Mechanik mit fast durchgängiger Befolgung der reingeometrischen Methode (welche nur hier und da durch Benutzung der in seiner Arithmetica universalis entwickelten arithmetischen Operationen, mit Zuziehung des Begriffs positiver und negativer Größen, unterbrochen ist) bis zu einem hohen Grade der Vollendung durch, so daß diese Schrift, wie so manche andere desselben Verfassers, unerschöpfliche Schätze enthält, welche auch selbst bei den

neueren Fortschritten der Wissenschaft immer ihren eigenthümlichen Werth behalten. In seine Fußstapfen traten Maclaurin, Varignon und andere Franzosen und Engländer, welche fortfuhren die Mechanik nach einer der antiken sich nähernden Methode zu bearbeiten, bis in der Mitte des vorigen Jahrhunderts der berühmte Euler, besonders durch seine theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, auf dem Wege der neueren Analysis die Mechanik viel allgemeiner als alle seine Vorgänger behandelte und mit unschätzbaren Entdeckungen bereicherte, — weshalb man von der Zeit an die Hoffnung aufgegeben zu haben scheint, die Lehre von der Bewegung einzelner Puncte und ganzer Körper auf reingeometrischem und synthetischem Wege dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft gemäß darstellen zu können. Ueberdies bewirkten die in der letzten Hälfte des vorigen Jahrhunderts immer mehr vervollkommten analytischen Methoden, wodurch man schnell von Entdeckung zu Entdeckung forteilte, eine lange dauernde Vernachlässigung des Studiums der Werke der griechischen Mathematiker. Die neueste Zeit scheint indessen dem Wiedererwachen dieses Studiums günstig zu sein; wenigstens ist schon viel von der Einseitigkeit verschwunden, wonach der antike Geist durch das Abstracte der neueren analytischen Operationen fast erdrückt wurde. Meine Ansichten über den Werth der alten und neuen mathematischen Methode und über ihr gegenseitiges Verhältniß darzulegen, dazu würde der Raum dieser Vorrede viel zu eng sein; ich berufe mich daher auf die im Jahre 1829 von mir herausgegebenen mathematischen Abhandlungen (Zerbst, in Commission

bei G. A. Kummer), mit der Bitte, manche darin vorkommende Bemerkungen, welche zu sehr auf das Extrem gehen, als Erguß eines jugendlichen Ungestüms anzusehen, der späterhin bei gereifterem Nachdenken einer ruhigen Mäßigung und einer Einschränkung in die goldene Mittelstraße Platz machen mußte. Besonders aber bitte ich, die in jenem Werke enthaltenen langen Abschnitte zur Begründung des Begriffs der geraden Linie und Ebene nicht als Hauptsache des Buches anzusehen, sondern nur gewissermaßen als ein Kunststück, wie man es machen könnte, wenn man in der Begründung der Grundbegriffe bis auf die allerschärfsten philosophischen Deductionen zurückgehen wollte. Der Anhang jenes Werks, welcher es versucht, die Keplerschen Gesetze und andere Gegenstände der höheren Mechanik auf antikem Wege zu entwickeln, möchte eher als Hauptsache des Buchs zu betrachten sein. Was dort nur in den ersten Grundlinien hingeworfen war, und zur vollendeten Deutlichkeit, besonders in den allgemeinen Sätzen von Tangential-, Normal- und Centralkräften, noch manches zu wünschen übrig ließ, erscheint in dem gegenwärtigen Werke schärfer begründet und weiter ausgeführt, so daß ich mir schmeicheln darf, es werden manche dort angeregte Hoffnungen, welche die geehrten Leser zu Zweifeln veranlassen konnten, hier realisirt erscheinen. Gegenwärtiges Werk über Mechanik bezieht sich indessen mit keiner Silbe auf die gedachten mathematischen Abhandlungen, sondern ist so abgefaßt, daß es ganz für sich allein, wenn man nur mit den Elementen des Euclides und mit einigen Sätzen des Archimedes und Apollonius sich vertraut ge-

macht hat, auch selbst bei völliger Unbekanntschaft mit der neueren Arithmetik, Algebra und Analysis (die Rechnungszeichen ausgenommen, welche als Abkürzungen statt der Worte dienen) verstanden werden kann; zur Erleichterung ist übrigens überall, wo es nöthig war, auf die betreffenden Stellen der 3 genannten Alten verwiesen worden. Das Buch ist daher hauptsächlich für eine gewisse Klasse von Lesern bestimmt, für diejenigen nämlich, welchen es schwer wird und schwer bleibt, sich in das Abstracte des neueren Calküls hineinzuarbeiten, die aber doch neben der Fähigkeit bei unmittelbar anschaulichen, räumlichen Gegenständen die Aufmerksamkeit scharf anzuspannen (ohne dabei allemal durch eine wirklich gezeichnete Figur unterstützt zu sein), ein lebhaftes Interesse haben die aus der neueren Analysis hervorgegangenen Entdeckungen in sich aufzunehmen und sich gründlich zu eigen zu machen. Daher habe ich mich bemüht die Betrachtung der imaginären Größen gänzlich zu umgehen, und überhaupt an die Stelle des allgemeinen Begriffs des Positiven und Negativen die jedesmalige genaue Betrachtung des speciellen Falls gesetzt; auch den allgemeinen Begriff der Einheit, welcher der reingeometrischen Methode fremd ist, bin ich mir bewußt ganz vermieden zu haben; daher sind denn überall, wo von Zahlen die Rede ist, nur ganze Zahlen und höchstens rationale Brüche, niemals aber Irrationalzahlen gemeint, wofür ich vielmehr die Betrachtuug irrationaler Verhältnisse eingeführt, und alle arithmetischen Operationen nach Art der Alten auf die Umwandlungen der Proportionen zurückgeführt habe. Das Unendlichkleine aber ist und wird immer ein delica-

ter Punct bleiben; der Sache nach läßt es sich bei höheren mathematischen und besonders bei mechanischen Untersuchungen nie abweisen; ich habe indessen den Ausdruck des Unendlichkleinen, so wie alles dasjenige zu vermeiden gesucht, was der gedachten Klasse von Lesern anstößig sein könnte, und statt dessen, wenn die Exhaustions-Methode der Alten nicht ausreichte oder zu große Weitläuftigkeit gab, mich bestrebt, an den jedem menschlichen Verstande inwohnenden, wenn auch nur allmälig zum Bewußtsein kommenden Begriff der Stetigkeit, des Werdens und Entstehens, der allmäligen Annäherung, so daß der Unterschied kleiner werden kann als jede gegebene Größe, zu appelliren; mit Einem Worte, ich habe mich der Newtonschen Ansicht von Fluxionen, von den ersten und letzten Verhältnissen angeschlossen; lieb wäre mirs indessen, wenn die von mir gebrauchten Ausdrücke den oben bezeichneten Lesern noch etwas klarer erschienen als die von Newton in seinen principiis . . . gebrauchten. Daher glaubte ich im ersten Eingang der mechanischen Lehren durch eine scharfe Entwickelung des Begriffs der Geschwindigkeit (der im Wesentlichen mit Newtons Fluxion übereinkommt) zu Hülfe kommen zu müssen; über die den archimedischen ähnlichen Annahmen aber, welche den Sprung von discreten zu stetigen Größen begleiten, habe ich mich in der Anmerkung Seite 426 des vorliegenden Werks hoffentlich hinreichend erklärt.

Wenn es nun bei der hier besprochenen Methode möglich gewesen ist, den gesammten Inhalt dessen, was im 1sten Buche der Laplace'schen Mechanik des Himmels

(Auseinandersetzung derjenigen allgemeinen mechanischen Lehren, welche in den 15 folgenden Büchern speciell auf das Weltsystem angewandt werden) enthalten ist, so wie den größten Theil dessen, was Poisson in seinem Traité de mécanique beibringt, mit Ausnahme der Bewegung der Flüssigkeiten, zu entwickeln, und zwar so, daß die Entwickelung nur ebensoviel oder noch weniger Raum einnimmt als in den genannten französischen Werken selbst mit den dazu nöthigen analytischen Vorbereitungen zusammengenommen, so ist das vielleicht ein kleiner Beleg zu der Behauptung, daß die antike mathematische Methode doch wohl etwas mehr zu leisten im Stande ist, als diejenigen meinen, welche sich hauptsächlich nur in die neuere Analysis hineingearbeitet haben. Auch glaube ich theils die geometrische Methode noch reiner erhalten zu haben als Newton in seinen principiis, theils hinsichtlich der Resultate weiter vorgeschritten zu sein als die früheren Bearbeiter der Mechanik auf antikem Wege; namentlich zweifle ich, daß die Theorie der Rotation fester Körper, der Hauptumdrehungsaxen, des sicheren und unsicheren Zustandes, u. s. w., welche Theorie den letzten und größten Abschnitt des vorliegenden Werks ausmacht, bisher anders als rein analytisch vorgetragen sei.

Ueber die einzelnen Theile des Buchs wäre noch folgendes zu bemerken. Der erste Theil enthält vorbereitende arithmetische Lehren. Der Ausdruck ist unpassend gewählt; doch wußte ich keinen besseren und dabei eben so kurzen. Denn da dieser Theil sich hauptsächlich mit Proportionen beschäftigt, so bezieht er sich nicht auf die Arithmetik im Sinne der Alten; das war die Ma-

thematik der discreten Größen; sondern auf die allgemeine Größenlehre. Der zweite Theil enthält vorbereitende geometrische Lehren, diejenigen nämlich, welche, ohne sich auf Bewegung zu beziehen, doch mit den Lehren des 1sten Theils zusammen zur Bearbeitung der eigentlichen Bewegungslehre unentbehrlich sind. Was in diesen beiden Theilen über Reihen vorkommt, wäre überflüssig gewesen, hätte ich nicht an dem Beispiel der Pendel-Theorie zeigen wollen, daß auch convergirende unendliche Reihen für die reine Geometrie und Synthesis der Alten zugänglich seien. Daß nach der antiken Betrachtungsweise die Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. nicht Zahlen, sondern wirkliche Linien sind, und daß dabei der Halbmesser nicht mit 1, sondern mit r bezeichnet wird, bedarf wohl kaum einer Erinnerung; aus diesem Gesichtspunct betrachtet werden aber auch die Bezeichnungen $\text{Sin.}^2\varphi$, $\text{Sin.}^3\varphi$... statt $\text{Sin.}\varphi^2$, $\text{Sin.}\varphi^3$... sich rechtfertigen. — Da sich der Lehre vom Schwerpunct auch eine reingeometrische Ansicht, ohne alle Beziehung auf Gleichgewicht und Bewegung, abgewinnen läßt, so ist schon in die vorbereitenden geometrischen Lehren ein Abschnitt vom Schwerpunct eingeschaltet; doch ist, zur Abkürzung des Vortrags, die Definition des Schwerpuncts eines Körpers bis zu den eigentlich mechanischen Abschnitten aufgespart worden. — Bei der Anordnung des dritten Theils, welcher die eigentlich mechanischen Lehren enthält, habe ich mich am meisten vom ersten Buche der Laplace'schen Mechanik des Himmels leiten lassen; vielleicht gelingt es mir, die Resultate dieses unsterblichen, bisher noch unübertroffenen Werks durch die von mir be-

folgte Methode für manche zugänglicher zu machen. Freilich mußte zum Behuf der antiken Behandlung die Ordnung in mehreren Puncten wesentlich verändert werden; ich habe indeß in Anmerkungen allemal auf die Stellen des Laplace verwiesen, wo seine Resultate mit den meinigen übereinkommen. — Manches, was zum vollständigen Beweise in antiker Form größerer Ausführlichkeit bedurft hätte, ist, der Kürze wegen, bloß angedeutet worden, und es bleibt dem denkenden Leser überlassen, die Schlußreihen zu vervollständigen. Dahin gehören denn auch manche Stellen, welche den sich selbst widersprechenden Begriff unendlichkleiner Größen zu enthalten scheinen, aber bei gründlicherem Nachdenken ihn nicht wirklich enthalten. — Daß die hier abgehandelte Mechanik eine rein mathematische Wissenschaft, und die Anwendungen auf die wirkliche Körperwelt und auf das Weltsystem bloße Beispiele sind, wo die bloß gedachten Bewegungen sich wiederfinden, — daß aber die Natur-Erscheinungen keineswegs den Stoff zu den ersten Principien der hier entwickelten Theorien geben, — wird man bald aus dem ganzen Vortrag ersehen. Bei dem so gewählten Gange fallen die unseligen Streitigkeiten über Maaß der Kräfte, Beweis des Princips von den Bedingungen des Gleichgewichts beim Hebel, Beweis des Princips des Parallelogramms der Kräfte, u. s. w., von selbst weg. Auch über die Haltbarkeit des atomistischen und dynamischen Systems in der Physik habe ich in der Anmerkung Seite 426 dasjenige gesagt, was mir für den Zweck dieses Werks nöthig schien. — Den Satz der kleinsten Wirkung, die Theorie der Bra-

chistochrona, so wie andere Gegenstände, welche sich auf die curvas maximi minimive proprietate gaudentes oder auf die Variationsrechnung beziehen, nach der antiken Methode zu begründen, ist mir bisher nicht gelungen. — Ueberall aber ging mein Streben dahin, den abgehandelten Gegenständen die möglichst vollkommenste räumliche Anschaulichkeit zu geben. Zur Beförderung dieser Anschaulichkeit sollten nicht sowohl die angehängten Zeichnungen, als vielmehr der im Text befolgte Gang beitragen; diese Bemerkung scheint mir besonders hinsichtlich des letzten Abschnitts, von der drehenden Bewegung der festen Körper und von den Hauptaxen und den bei der Rotation obwaltenden Perioden, von Wichtigkeit. — Bei der Begründung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten bin ich besonders Poisson und Grunert gefolgt, habe aber dabei alles vom Unendlichkleinen zu entkleiden gesucht, indem ich statt dessen den Begriff der Geschwindigkeit einführte; man sehe Seite 389 — 401 des Textes. — Anderes, was dazu beitragen kann, den Leser über den ganzen Geist des Werks zu orientiren, wird auch derjenige, welcher das Buch nur flüchtig ansehen will, leicht aus den mit kleinerer Schrift gedruckten Anmerkungen entnehmen können.

Inwiefern der hier gemachte Versuch auf schwierigere Gegenstände der Mechanik des Himmels, auf die Attraction der Ellipsoiden, auf das Problem der drei Körper und den Perturbations-Calkül, auf die Bewegung der Flüssigkeiten u. s. w. übergetragen werden könne, muß die Zeit lehren. Indessen würde ich mich freuen, wenn durch dieses Werk mancher mathematische Kopf,

welcher der Sache mehr gewachsen ist als ich, sich veranlaßt finden sollte in demselben Geiste die Untersuchungen der Himmels-Mechanik (die ja doch immer der größte Triumph des menschlichen Verstandes bleiben werden) weiter fortzuführen und bekannt zu machen.

Berlin, den 30sten April 1831.

W. Lehmann.

Inhaltsverzeichniß.

Seite

Erster Theil.

Vorbereitende arithmetische Lehren. . . 1—82

Erster Abschnitt. Vervollständigung der euclidischen Proportionslehre. . . . . 3—22

§. 1—7. Veränderungen der Proportionen, die sich durch Addition und Subtraction ergeben. . . . . 3—5

§. 8—28. Von zusammengesetzten Verhältnissen. . . . 6—12

§. 29—31. Von getheilten Verhältnissen. 13

§. 32—48. Theorie der ungleichen Verhältnisse. . . 14—22

Zweiter Abschnitt. Von den arithmetischen und geometrischen Reihen. . . . . 23—34

§. 1—3. Von den arithmetischen Reihen und ihrer Summirung. 23—24

§. 4—16. Die merkwürdigsten, in der Mechanik anwendbaren Eigenschaften der geometrischen Reihen. . . . . 24—31

§. 17—20. Summirung der endlichen und unendlichen geometrischen Reihen. . . . . 31—34

Dritter Abschnitt. Von den Facultäten. . . 35—61

§. 1—21. Merkwürdige Eigenschaften der Facultäten, welche bei der Ausdrückung der Potenzen der Sinus durch die Cosinus der vielfachen Winkel gebraucht werden. . . . 35—54

§. 22—30. Summirung der ersten, zweiten, dritten und vierten Potenzen der natürlichen Zahlen. . . . . 54—57

§ 31—33. Einige andere Sätze von Facultäten, die späterhin gebraucht werden. . . . . 57—61

Vierter Abschnitt. Von den convergirenden Reihen. 62—82

§. 1—12. Allgemeine Sätze von convergirenden Reihen. . 62—68

§. 13—31. Bestimmung der Näherungswerthe derjenigen convergirenden Reihen, welche in der Theorie der Pendelschwingung gebraucht werden. . . . . 68—82

Seite

Zweiter Theil.

Vorbereitende geometrische Lehren. . . 83—196

Erster Abschnitt. Von den Tangenten, Normalen, der Osculation und dem Maaße der Krümmung bei Curven im Allgemeinen . . . . . 85—110

§. 1—34. Begriffsentwickelung der Tangente, Normale, Krümmungsebene, des Krümmungshalbmessers, der unendlichkleinen und unendlichgroßen Krümmung, der Evolute und Evolvente bei Curven von einfacher und doppelter Krümmung. 85—100

§. 35—47. Merkwürdige Eigenschaften der Krümmungshalbmesser und projicirten Curven, so weit sie in der Mechanik gebraucht werden. . . . . 100—110

Zweiter Abschnitt Von den Krümmungshalbmessern der Kegelschnitte insbesondere. . . 111—136

§. 1—21 Bestimmung des Krümmungshalbmessers für jeden Punct eines Kegelschnitts. . . . . 111—124

§. 22—31. Lehrsätze und Aufgaben von den Krümmungshalbmessern der Kegelschnitte, welche in der Theorie der Centralbewegungen gebraucht werden. . . . . 124—136

Dritter Abschnitt. Vom Schwerpunct zwischen jeder beliebigen Anzahl Puncte im Raume. 137—159

§ 1—7. Begriffsentwickelung des Schwerpuncts zwischen jeder beliebigen Anzahl Puncte im Raume. . . . 137—141

§. 8—13. Bestimmung des Schwerpuncts in Beziehung auf 3 einander schneidende Ebenen. . . . . 141—145

§. 14. 15. Bestimmung des Schwerpuncts in Beziehung auf 3 feste Puncte im Raume, die nicht in gerader Linie liegen. 145—159

Vierter Abschnitt. Von den goniometrischen Linien. . . . . 160—193

§. 1—10. Begriffsbestimmung und die einfachsten Lehrsätze von goniometrischen Linien. . . . . 160—164

§. 11—13. Vom Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel. 164—167

§. 14—21. Ausdrückung der Potenzen der Sinus durch die Cosinus der vielfachen Winkel, zum Behuf der convergirenden Reihe für die Pendelschwingung. . . . . 167—193

Fünfter Abschnitt. Von der Cykloide oder Radlinie. . . . . 194—196

§. 1—4. Entstehung der Cykloide. 194 195

§. 5. 6. Ziehung einer Tangente an einer Cykloide, zum Behuf der Theorie der Tautochrona. 195 196

Dritter Theil.

Mechanische Lehren. . . . . 197—620

Erster Abschnitt. Entwickelung des Begriffs der Geschwindigkeit und der beschleunigenden oder

Seite

verzögernden Kraft bei geradlinigen und krummlinigen Bewegungen. . . . . 199—237

§. 1—3. Theorie der gleichförmigen Bewegung. . . 199 200

§. 4—18. Begriffsentwickelung der Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung. . . . . 200—210

§. 19—56. Begriffsentwickelung der beschleunigenden und verzögernden Kraft. Theorie des freien Falls schwerer Körper. 210—234

§. 57—62. Allgemeine Sätze von ungleichförmig-beschleunigten Bewegungen. . . . . 234—237

Zweiter Abschnitt. Von der Zusammensetzung mehrerer geradliniger und krummliniger Bewegungen zu Einer Bewegung, und von den dabei obwaltenden Kräften. . . . . 238—264

§. 1. 2. Begriffsentwickelung der progressiven und drehenden Bewegung, der augenblicklichen Umdrehungsaxe und Winkel-Umdrehungsgeschwindigkeit. . . . . 238—244

§. 3—11. Zusammensetzung mehrerer Bewegungen in Eine. 244—247

§. 12—28. Begriffsentwickelung und einfachste Sätze von der Curvenkraft, Tangential- und Normalkraft. . . 247—264

Dritter Abschnitt. Von Central-Bewegungen. 264—291

§. 1—11. Allgemeine Sätze von Central-Bewegungen. . 264—273

§. 12—18. Herleitung des Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen und der Keplerschen Gesetze aus dem Gravitationsgesetz. . . . . 273—282

§. 19—22. Von der Bewegung des Schwerpuncts eines Systems von Puncten. . . . . 282—287

§. 23—26. Das Problem der zwei Körper. Berichtigung der Keplerschen Theorie durch die gegenseitige Anziehung der Sonne und eines Planeten. . . . . 287—291

Vierter Abschnitt. Von der Anziehung kugelförmiger Körper, welche in gleichen Entfernungen vom Mittelpunct gleiche Dichtigkeit haben, gegen einzelne Puncte. . . . . 291—312

§. 1—11. Vorbereitende Sätze von veränderlichen Linien und Flächenräumen. . . . . 291—297

§. 12. 13. Von der Anziehung einer Kugelfläche gegen einen außerhalb oder innerhalb befindlichen Punct. . . 297—301

§. 14—19. Allgemeine Sätze von Körpern mit gleichförmiger und ungleichförmiger Dichtigkeit. . . . . 301—304

§. 20—25. Von der Anziehung hohler oder nicht hohler Kugeln und ihrer Stücke gegen Puncte, welche theils außerhalb theils in die Masse theils innerhalb gestellt sind. Bei Kugeln von gleichförmiger Dichtigkeit verhält sich die Anziehung im Innern direct wie die Entfernung vom Mittelpunct. . . . . 304—312

Seite

Fünfter Abschnitt Von den Bewegungen auf vorgeschriebenem Wege. . . . . 312—387

§. 1—8. Allgemeine Sätze von den Bewegungen auf vorgeschriebenem Wege. . . . . 312—320

§. 9—13. Bestimmung der Geschwindigkeit in jedem Punct einer vorgeschriebenen Bahn eines von der Schwere getriebenen Punctes. . . . . 320—323

§. 14—21. Bestimmung des Drucks in jedem Punct einer solchen Bahn. . . . . 323—332

§. 22—25. Allgemeine Sätze von der Bewegung eines von der Schwere getriebenen Puncts in einer Kugelfläche. . 332—335

§. 26. 27. Von der Bewegung eines solchen Puncts in einem Horizontalkreis. . . . . 335—339

§. 28—38. Allgemeine Sätze von der doppelt-gekrümmten Bewegung eines von der Schwere getriebenen Puncts in einer Kugelfläche. . . . . 339—351

§. 39—63. Theorie der Pendelschwingung, des Ueberschwungs und der doppelt-gekrümmten Bewegung eines von der Schwere getriebenen Puncts. Entwickelung der dabei vorkommenden convergirenden Reihen zur Bestimmung der Zeit. . . . . 351—380

§. 64—70. Rectification der Cykloide mit Hülfe mechanischer Begriffe, und Theorie der Tautochrona. . . . . 380—386

§. 71—73. Einige allgemeine Sätze von der Schwingung in widerstehender Luft. . . . . 386—387

Sechster Abschnitt. Vom Gleichgewicht eines Systems von Pnncten. . . . . 388—424

§. 1—4. Vorbereitende Sätze vom Gleichgewicht eines Systems von Puncten. . . . . 388—392

§. 5—7. Allgemeiner Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten und der Umkehrung desselben. . . 393—401

§. 8—10. Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf die Theorie des Hebels. . . . . 401—406

§. 11—26. Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf ein System von Puncten, welche gezwungen sind ihre Entfernungen von einander sämmtlich unverändert zu behalten. Hauptlehrsätze von statischen und mechanischen Momenten. . . . . 406—421

§. 27—30. Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die Schwere allein wirkt. . . . . 421—424

Siebenter Abschnitt. Vom Gleichgewicht der festen Körper. . . . . 424—431

§. 1. 2. Bestimmung des Begriffs eines festen Körpers und des Gleichgewichts desselben. 424 425

§. 3—14. Bedingungen des Gleichgewichts eines festen Körpers, wenn die Schwere allein wirkt. Begriffsentwickelung

Seite

des Schwerpuncts eines Körpers und mehrerer Körper zusammen. Von der Bewegung des Schwerpuncts eines Körpers und eines Systems von Körpern. . . 425—431

Achter Abschnitt. Von der Anziehung einzelner Puncte gegen kugelförmige feste Körper, welche in gleichen Entfernungen vom Mittelpunct gleiche Dichtigkeit haben. . . . . 431—436

§. 1—3. Vorbereitende Sätze von der Anziehung eines Systems fest mit einander verbundener und symmetrisch vertheilter Puncte. . . . . 431—434

§. 4—6. Von der gegenseitigen Anziehung kugelförmiger fester Körper. . . . . 434—436

Neunter Abschnitt. Allgemeine Gesetze der Bewegung eines Systems von Puncten. . . 437—474

§. 1—4. Allgemeiner Beweis des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte. . . . . 437—442

§. 5—8. Einige Sätze von der Bewegung des Schwerpuncts eines Systems von Puncten und von den mechanischen Momenten. . . . . 442—444

§. 9—23. Allgemeiner Beweis des Princips der Erhaltung der Flächenräume. Bestimmung der Lage der unveränderlichen Ebene in einem System von Puncten. . . 444—455

§. 24—34. Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Flächenräume bei der relativen Bewegung in Beziehung auf den Schwerpunct und bei der relativen Bewegung aller einzelnen Puncte eines Systems in Beziehung auf einander. . . . . 455—474

Zehnter Abschnitt. Allgemeine Gesetze von der drehenden Bewegung der festen Körper. . 474—620

§. 1. 2. Bewegung des Schwerpuncts eines sich drehenden und von der Schwere allein getriebenen festen Körpers. 474 475

§. 3—12. Theorie der Pendelschwingung und des Ueberschwungs des zusammengesetzten Pendels. Begriffsentwickelung des Moments der Trägheit bei einem System von Puncten und bei einem Körper. . . . . 475—482

§. 13—18. Bestimmung des Moments der Trägheit bei einer Kugel von gleichförmiger Dichtigkeit. . . . 482—488

§. 19—45. Begriffsbestimmung des geometrischen Moments. Die merkwürdigsten Eigenschaften der Momente der Trägheit und der geometrischen Momente bei einem System von Puncten und bei einem Körper. . . 489—505

§. 46—57. Begriffsentwickelung der Hauptaxen und Zusammenhang derselben mit den Momenten der Trägheit. 505—516

§. 58—60. Vergleichung der Momente der Trägheit der durch den Schwerpunct gehenden Linien mit den Momenten der Trägheit der nicht durch den Schwerpunct gehenden Linien. 516—518

Seite

§. 61. 62. Beweis, daß jede Hauptaxe eine freie Rotationsaxe ist, und umgekehrt. . . . . 518—521

§. 63—66. Merkwürdige Sätze von der Winkel-Umdrehungsgeschwindigkeit. . . . . 521—523

§. 67—72. Von den Hauptaxen runder Körper und solcher Körper, die aus symmetrischen Stücken zusammengesetzt sind. 523—529

§. 73—90. Uebertragung der Principe der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Flächenräume auf die drehende Bewegung fester Körper. Von der bei der drehenden Bewegung fester Körper vorkommenden unveränderlichen Ebene. 529—541

§. 91—95. Vollständige Theorie der freien Rotation eines festen Körpers, welcher unzählige in Einer Ebene liegende Hauptaxen und außerdem noch eine einzelne Hauptaxe hat. 541—556

§. 96—123. Begriffsbestimmung des Rotationsmoments und der Curven gleicher Momente der Trägheit, wie auch der Curven gleicher Rotations-Momente. Beweis derjenigen diese Curven betreffenden Sätze, welche zur Theorie der Rotation nöthig sind. 556—585

§. 124—169. Theorie der freien Rotation eines festen Körpers, welcher in Beziehung auf den als fest betrachteten Punct nur drei Hauptaxen hat. Von den dabei vorkommenden Perioden. Loxodromische Bewegung in dem Fall, wenn die Umdrehungsaxe sich in der Ebene des mittleren Rotationsmoments befindet. . . . . 585—619

§. 170. 171. Allgemeine Bemerkungen über die drehende Bewegung fester Körper. Einfluß der Schwere und Gravitation auf die Rotation. 619 620

Erster Theil.

Vorbereitende arithmetische Lehren.

Erster Abschnitt.

Vervollständigung der euclidischen Proportions-Lehre.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn zwei Verhältnisse gleichartiger Größen einander gleich sind, so hat die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder dasselbe Verhältniß.

Beweis. Die vier gleichartigen Größen seien a, b, c, d, und es verhalte sich $a:b=c:d$; auch sei $a>c$, und folglich $b>d$. Man nehme zu a, b und $a-c$ das vierte Proportionalglied x, so verhält sich

$$\begin{array}{l} a:b=c \quad :d \\ a:b=a-c:x \\ \hline a:b=a \quad :d+x. \end{array} \text{ (Eucl. 5,12)}$$

Also ist (Eucl. 5,9) $d+x=b$, folglich $x=b-d$, und es verhält sich $a:b=a-c:b-d$.

§. 2. Zusatz.

Wenn man diesen Satz und den Satz Eucl. 5,12 wiederholt anwendet, so beweist man folgenden Satz: Wenn mehrere Verhältnisse gleichartiger Größen einander gleich sind, und man nimmt mit den Vorder- und Hintergliedern, wie man will, doch in einerlei Ordnung, abwechselnd Additionen und Subtractionen

vor, so erhält man wieder dasselbe Verhältniß. Z. B. wenn $a:b=c:d=e:f=g:h$, so ist $a-c-e+g:b-d-f+h=a:b$.

§. 3. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz wie die Summe der beiden letzten Glieder zu ihrer Differenz.

Beweis. Die Proportion sei $a:b=c:d$, und es sei

1) $a>b$, also auch $c>d$. Man mache $a+b:a-b=c+d:x$, so ist verbunden (Eucl. 5,18) $2a:a+b=c+d+x:c+d$. Aber aus $a:b=c:d$ folgt verbunden $2a:a+b=2c:c+d$. Folglich ist (Eucl. 5,9) $c+d+x=2c$, also $x=c-d$. Folglich ist $a+b:a-b=c+d:c-d$.

2) Es sei $a<b$, und $c<d$. Dann folgt aus $a:b=c:d$ umgekehrt (Eucl. 5,4) $b:a=d:c$, und daraus, nach dem, was in No. 1) bewiesen, $a+b:b-a=c+d:d-c$.

§. 4. Zusatz.

Folglich verhält sich auch umgekehrt: Die Differenz des 1. und 2. Gliedes zu ihrer Summe wie die Differenz des 3. und 4. Gliedes zu ihrer Summe.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn zwei Proportionen die 2ten und 4ten Glieder gemein haben, so verhält sich die Differenz der 1sten Glieder zum 2ten wie die Differenz der 3ten Glieder zum 4ten.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $e:b=f:d$, und $a>e$, also auch $c>f$. Man mache $b:a-e=d:x$, so wird umgekehrt

$$a-e:b=x:d. \quad \text{Da aber}$$
$$e:b=f:d$$

so wird (Eucl. 5, 24) $a \quad :b=x+f:d$.

Und da auch $a:b=c:d$, so ist $x+f=c$, also $x=c-f$, und $a-e:b=c-f:d$.

§. 6. Zusatz.

Wenn man diesen Satz und den Satz Eucl. 5, 24 wiederholt anwendet, so beweist man folgenden Satz: Wenn in mehreren Proportionen die 2ten und 4ten Glieder gleich sind, und man nimmt mit den 1sten und 3ten Gliedern, wie man will, doch in einerlei Ordnung, abwechselnd Additionen und Subtractionen vor, und läßt dagegen die 2ten und 4ten Glieder unverändert, so erhält man wieder eine richtige Proportion. Z. B. wenn

$$a : b = c : d$$
$$e : b = f : d$$
$$g : b = h : d$$
$$i : b = k : d$$

so ist $a - e - g + i : b = c - f - h + k : d$.

§. 7. Zusatz.

Hieraus, in Verbindung mit Eucl. 5, 4 fließt folgender Satz: Wenn mehrere Proportionen die ersten und dritten Glieder gemein haben, und man nimmt mit den 2ten und 4ten Gliedern, wie man will, doch in einerlei Ordnung, abwechselnd Additionen und Subtractionen vor, und läßt dagegen die 1sten und 3ten Glieder unverändert, so erhält man wieder eine richtige Proportion. Z. B. aus $a : b = c : d$

$$a : e = c : f$$
$$a : g = c : h$$
$$a : i = c : k$$

folgt $a : b - e + g - i = c : d - f + h - k$.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn man zwei Größen nach einerlei Verhältniß verändert, die dadurch sich ergebenden Größen wieder nach einerlei Verhältniß verändert, u. s. w., so oft man will, so verhält sich die anfängliche erste Größe zu dem Werth, den sie zuletzt erhalten, wie die anfängliche 2te Größe zu dem Werth, den sie zuletzt erhalten.

Beweis. Die anfänglichen Größen seien a und b. Man verwandle a in c, und b in d, so daß $a:c = b:d$, alsdann c in e, und d in f, so daß $c:e = d:f$

so wird ordinatim ex aequo (Eucl. 5,22) $a:e = b:f$. Man verwandle e in g, und f in h, so daß $e:g = f:h$,

so wird ord. ex aeq. $a:g = b:h$. So kann man fortfahren zu schließen, so weit man will.

§. 9. Erklärung.

Wenn man auf die angezeigte Art eine Größe nach mehreren Verhältnissen successive verändert, so heißt das Verhältniß der anfänglichen Größe zu der zuletzt erhaltenen das aus allen einzelnen Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß, und man bezeichnet das aus mehreren Verhältnissen $a:b$, $c:d$, $e:f$ zusammengesetzte Verhältniß durch $(a:b)+(c:d)+(e:f)$. Werden 2 gleiche Verhältnisse zusammengesetzt, so heißt das daraus entstandene das doppelte Verhältniß des anfänglichen, und man bezeichnet es, wenn $a:b$ das einfache Verhältniß ist, durch $2(a:b)$; werden drei gleiche Verhältnisse zusammengesetzt, so heißt das daraus sich ergebende das dreifache Verhältniß des anfänglichen, und man bezeichnet es durch $3(a:b)$, u. s. w.

§. 10. Lehrsatz.

Werden 2 ungleiche Verhältnisse zusammengesetzt, so kann man sie in beliebiger Ordnung zusammensetzen, ohne das sich ergebende Verhältniß zu verändern.

Beweis. Die beiden zusammenzusetzenden Verhältnisse seien $a:b$ und $c:d$. Man nehme eine beliebige Größe e, und mache $a:b = e:f$, und $c:d = f:g$, so ist $e:g = (a:b)+(c:d)$. Man mache $c:d = e:h$, nnd $a:b = h:i$. Da nun auch $a:b = e:f$, so folgt

simpliciter ex aequo (Eucl. 5,11) $e:f = h:i$, und eben so aus $c:d = f:g$, und $c:d = e:h$ simpl. ex aeq. $f:g = e:h$

perturbatim ex aeq. (Eucl. 5,23) $e:g = e:i$,

d. i. $(a:b)+(c:d) = (c:d)+(a:b)$.

§. 11. Lehrsatz.

Werden drei Verhältnisse zusammengesetzt, so kann man sie in beliebiger Ordnung zusammensetzen, ohne das sich ergebende Verhältniß zu ändern.

Beweis. Es seien die Verhältnisse a:b, c:d und e:f zusammenzusetzen. Nach dem vorigen Satze ist (a:b) + (c:d) + (e:f) = (a:b) + (e:f) + (c:d), aber auch = (c:d) + (a:b) + (e:f), und dies = (c:d) + (e:f) + (a:b), dies = (e:f) + (c:d) + (a:b), und dies = (e:f) + (a:b) + (c:d).

§. 12. Lehrsatz.

Werden vier Verhältnisse zusammengesetzt, so kann man sie in beliebiger Ordnung zusammensetzen, ohne das sich ergebende Verhältniß zu ändern.

Beweis. Die 4 Verhältnisse seien a:b, c:d, e:f, g:h. Nach dem vorigen Satz kann man, während g:h in der 4ten Stelle bleibt, die 3 ersten Verhältnisse beliebig verwechseln, ohne das aus allen vieren zusammengesetzte Verhältniß zu ändern. Dadurch kommt nach und nach jedes der 3 ersten Verhältnisse in die 3te Stelle. Das in der 3ten Stelle stehende Verhältniß aber kann man, nach dem vorigen Satz, allemal in die 4te Stelle, und statt dessen das Verhältniß g:h in die 3te Stelle setzen. Dadurch kommt nach und nach jedes der 4 Verhältnisse in die 4te Stelle. Während aber ein Verhältniß in der 4ten Stelle bleibt, kann man allemal die in den 3 ersten Stellen stehenden in beliebige Ordnung setzen. Folglich kann man 4 Verhältnisse in beliebige Ordnung setzen, ohne das zusammengesetzte Verhältniß zu ändern.

§. 13. Zusatz.

Auf ähnliche Art macht man von 4 Verhältnissen den Schluß auf 5, von 5 auf 6, u. s. w. Folglich kann man, so viele Verhältnisse man will, in beliebige Ordnung setzen, ohne das aus allen zusammengesetzte Verhältniß zu ändern.

§. 14. Zusatz.

Anstatt ein Verhältniß mit mehreren andern nach der Reihe zusammenzusetzen, kann man es gleich mit dem aus allen Verhältnissen zusammengesetzten Verhältniß zusammensetzen. Z. B. $(a:b)+(c:d)+(e:f)+(g:h)=(a:b)+[(c:d)+(e:f)+(g:h)]$.

§. 15. Erklärung.

Was es heißt, eine Größe mit einer ganzen Zahl multipliciren, ist bekannt. Eine Größe mit einem Bruch multipliciren, heißt, sie in soviel gleiche Theile theilen, als der Nenner anzeigt, und einen solchen Theil mit dem Zähler multipliciren. Man bezeichnet die Multiplication einer Größe mit einem Bruch dadurch, daß man vor das Zeichen der Größe den Bruch schreibt, und zwischen beide einen Punct setzt, welcher Punct aber auch, wenn die zu multiplicirende Größe nicht selbst eine bestimmte Zahl oder ein Bruch ist, weggelassen werden kann.

§. 16. Zusatz.

Wird eine Größe mit einem Bruch multiplicirt, so wird sie im Verhältniß des Nenners zum Zähler verändert.

§. 17. Lehrsatz.

Wenn ein Bruch einer ganzen Zahl gleich ist, z. B. $\frac{21}{7}=3$, so ist es einerlei, ob man eine Größe mit der ganzen Zahl, oder ob man dieselbe Größe mit dem Bruch multiplicirt.

Beweis. Es sei a mit der ganzen Zahl b, und auch a mit dem Bruch $\frac{c}{d}$ zu multipliciren, welcher $=$ b ist. Alsdann ist $c=d.b$, also a mit $\frac{d.b}{d}$ zu multipliciren, d. i. der dte Theil von a mit d.b zu multiplicieren, oder, was dasselbe sagt, der dte Theil von a mit d, und was herauskommt, mit b zu multipliciren. Da aber der dte Theil von a, mit d multiplicirt, $=$ a ist, so heißt a mit $\frac{c}{d}$ multipliciren soviel als a mit b multipliciren.

§. 18. Lehrsatz.

Wenn 2 Brüche mit verschiedenen Zahlen geschrieben, doch ihrem Werth nach gleich sind, z. B. $\frac{12}{8} = \frac{21}{14}$, so verhält sich der Nenner des einen zu seinem Zähler wie der Nenner des andern zu seinem Zähler.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist, wenn man beiderseits mit $b.d$ multiplicirt, $a.d = b.c$. Nun verhält sich $b.d : a.d = b : a$, d. i. $b.d : b.c = b : a$, d. i. $d : c = b : a$.

§. 19. Zusatz.

Aus §. 18. und 16. folgt, daß, wenn 2 Brüche, mit verschiedenen Zahlen geschrieben, doch ihrem Werth nach gleich sind, es einerlei ist, ob man eine Größe mit dem einen, oder ob man dieselbe Größe mit dem andern Bruche multiplicirt.

§. 20. Lehrsatz.

Anstatt eine Größe mit einem Bruche, und das Product mit einem andern Bruche zu multipliciren, kann man sie gleich mit einem Bruche multipliciren, dessen Zähler = dem Product der beiden ersteren Zähler, und dessen Nenner = dem Product der beiden ersteren Nenner ist.

Beweis. Es sei $\frac{b}{c} a = d$, und $\frac{e}{f} d = g$, so verhält sich nach §. 16. $c : b = a : d$, und $f : e = d : g$, also (§. 9.) $a : g = (c : b) + (f : e) = (c.f : b.f) + (b.f : b.e) = c.f : b.e$; folglich ist $g = \frac{b.e}{c.f} a$.

§. 21. Zusatz.

Aus der Beweisführung des letzten Satzes geht hervor, daß das Verhältniß zweier Producte, deren jedes aus 2 ganzen Factoren besteht, aus den Verhältnissen der einzelnen Factoren zusammengesetzt ist. Und hieraus geht wieder hervor, daß das Verhältniß zweier Producte, deren jedes aus 3 oder 4 ganzen Factoren besteht, u. s. w., aus den Verhältnissen der einzelnen

Factoren, der Reihe nach, zusammengesetzt ist. Z. B. 4.5.6.8 :11.13.2.3 = (4:11) + (5:13) + (6:2) + (8:3).

§. 22. Lehrsatz.

Anstatt eine Größe mit einem Bruche, und das Product mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, kann man die anfängliche Größe gleich mit einem Bruche multipliciren, dessen Zähler das Product des anfänglichen Zählers und der ganzen Zahl, und dessen Nenner der anfängliche Nenner ist.

Beweis. Es sei $\frac{b}{c}a = d$, und $e.d = f$, so ist $c:b = a:d$, also $c:e.b = a:e.d = a:f$, also ist $f = \frac{e.b}{c}a$.

§. 23. Lehrsatz.

Anstatt eine Größe mit einer ganzen Zahl, und das Produrt mit einem Bruche zu multipliciren, kann man die anfängliche Größe gleich mit einem Bruche multipliciren, dessen Zähler das Product des anfänglichen Zählers und der ganzen Zahl, und dessen Nenner der anfängliche Nenner ist.

Beweis. Es sei $b.a = c$, und $\frac{d}{e}c = f$, so ist $c:d = c:f$, d. i. $c:d = b.a:f$, aber

$$\begin{array}{l} d:b.d = a:b.a \\ \hline e:b.d = a:f, \text{ also } f = \frac{b.d}{e}a. \end{array} \quad \text{pert. ex aeq.}$$

§. 24. Zusatz.

Aus §. 13. und 16. folgt, daß, wenn eine Größe mit einer ganzen Zahl oder einem Bruch, das Product wieder mit einer ganzen Zahl oder einem Bruch multiplicirt werden soll, u s. w., daß man alsdann die Ordnung der Factoren, womit di anfängliche Größe multiplicirt werden soll, wie viele ihrer auc sein mögen, beliebig verwechseln kann, ohne das zuletzt sich ergi bende Product zu ändern.

§. 25. Zusatz.

Durch wiederholte Anwendung der Sätze §. 20. 22. 23. und 24. beweist man, daß man, anstatt eine Größe mit einer ganzen Zahl oder einem Bruch, das Product wieder mit einer ganzen Zahl oder einem Bruch zu multipliciren, u. s. w., die anfängliche Größe gleich mit einem Bruche multipliciren kann, dessen Zähler das Product aller einzelnen Zähler und ganzen Zahlen, und dessen Nenner das Product aller einzelnen Nenner ist. Z. B. $i\left(\frac{g}{h}\left(\frac{e}{f}\left(d\left(\frac{b}{c}a\right)\right)\right)\right) = \frac{bdegi}{cfh}a.$

§. 26. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse zusammengesetzt werden, davon das eine das umgekehrte des andern ist, so erhält man das Verhältniß der Gleichheit. Und wenn 2 Verhältnisse, zusammengesetzt, das Verhältniß der Gleichheit hervorbringen, so ist das eine das umgekehrte des andern.

Beweis. Die beiden Verhältnisse seien $a:b$ und $b:a$. Man wähle eine beliebige Größe c, und mache $a:b = c:d$, und $b:a = d:e$, so wird umgekehrt $a:b = e:d$, also simpl. ex aeq. $c:d = e:d$, also $c = e$, folglich $(a:b) + (b:a) = c:c$.

Ist aber $(a:b) + (b:c) = a:a$, so ist (§. 9.) $a:c = a:a$, also $c = a$.

§. 27. Lehrsatz.

Wenn mehrere Verhältnisse zusammengesetzt werden sollen, so kann man die Vorderglieder unter sich und die Hinterglieder unter sich in beliebige Ordnung setzen ohne das sich ergebende Verhältniß zu ändern, wenn nur zusammengesetzte Vorder- und Hinterglieder gleichartig bleiben.

Beweis. 1) Wenn 2 Verhältnisse, $a:b$ und $c:d$, zusammenzusetzen sind, wo a, b, c und d gleichartige Größen sind, so ist $(a:b) + (c:d) = (a:d) + (d:b) + (c:d) = (a:d) + (c:d) + (d:b) = (a:d) + (c:b)$.

2) Wenn drei Verhältnisse zusammenzusetzen sind, so daß

die Glieder zweier Verhältnisse unter sich gleichartig, aber den Gliedern des 3ten Verhältnisses ungleichartig sind, so ist der Beweis schon in Nr. 1) enthalten. Sind alle 6 Glieder gleichartig, so ist, nach dem, was in Nr. 1) bewiesen, $(a:b) + (c:d) + (e:f) = (a:b) + (c:f) + (e:d)$, aber auch $= (a:d) + (c:b) + (e:f) = (a:d) + (c:f) + (e:b) = (a:f) + (c:d) + (e:b) = (a:f) + (c:b) + (e:d)$.

3) Wenn vier Verhältnisse zusammenzusetzen sind, und es sind nicht sämmtliche Glieder aller Verhältnisse gleichartig, so ist der Beweis schon in Nr. 1) und 2) enthalten. Sind aber alle 8 Glieder gleichartig, so können in dem zusammengesetzten Verhältnisse $(a:b) + (c:d) + (e:f) + (g:h)$, während die Vorderglieder a, c, e, g in ihren Stellen bleiben, die 3 ersten Hinterglieder b, d, f zufolge Nr. 2) beliebig verwechselt werden. Dadurch kommt nach und nach jedes der Glieder b, d, f in die Stelle des 3ten Verhältnisses, kann also, wie gleichfalls aus Nr. 2) hervorgeht, in die Stelle des 4ten Verhältnisses gesetzt werden, wenn man nur statt dessen h in die Stelle des 3ten Verhältnisses setzt. Auf diese Art kommt nach und nach jedes der 4 Glieder b, d, f, h in die Stelle des 4ten Verhältnisses. Während nun alle Vorderglieder in ihren Stellen, und ein Hinterglied in der Stelle des 4ten Verhältnisses bleibt, können allemal die 3 ersten Hinterglieder beliebig verwechselt werden. Folglich können, während die 4 Vorderglieder in ihren Stellen bleiben, die 4 Hinterglieder unter sich beliebig verwechselt werden.

4) Auf ähnliche Art schließt man von 4 Verhältnissen auf 5, von 5 auf 6, u. s. w.; und man kann überdies, während jedes Vorderglied mit seinem Hinterglied verbunden bleibt, nach §. 13. die Ordnung der Verhältnisse beliebig verwechseln.

§. 28. Erklärung.

Diese Eigenschaft der zusammenzusetzenden Verhältnisse wollen wir, wegen der Analogie mit bekannten chemischen Erscheinungen, die Wahlverwandtschaft (Affinität) nennen.

§. 29. Erklärung.

Wenn zwischen 2 gleichartige Größen eine gewisse Anzahl mittlerer stetiger Proportionalgrößen eingeschaltet werden, so heißt das Verhältniß der ersten anfänglichen Größe zur ersten eingeschalteten ein getheiltes Verhältniß, und zwar das halbe Verhältniß, wenn Ein Glied, das gedrittheilte Verhältniß, wenn 2 Glieder, das geviertheilte Verhältniß, wenn 3 Glieder eingeschaltet sind, u. s. w., und man bezeichnet das halbe Verhältniß zwischen a und b durch $\frac{1}{2}(a:b)$, das gedrittheilte Verhältniß durch $\frac{1}{3}(a:b)$, u. s. w. Hieraus wird auch klar, was man unter einem gebrochenen Verhältniß im Allgemeinen versteht; so heißt z. B. $\frac{5}{13}(a:b)$ das Verhältniß der Größe a zur 5ten unter den 12 mittleren stetigen Proportionalen zwischen a und b, und wenn man die stetigen Proportionalen über b hinaus fortsetzt, $\frac{15}{23}(a:b)$ das Verhältniß der Größe a zu der 22sten unter den nach b folgenden Größen.

§. 30. Zusatz.

Wenn ein Bruch, seinem Werth nach, einer ganzen Zahl gleich ist, so ist das durch jenen Bruch ausgedruckte gebrochene Verhältniß = dem durch die ganze Zahl ausgedruckten Vielfachen des einfachen Verhältnisses. Z. B. $\frac{39}{13}(a:b) = 3(a:b)$.

§. 31. Lehrsatz.

Wenn 2 Brüche ihrem Werth nach gleich sind, so ist das durch den einen Bruch ausgedruckte gebrochene Verhältniß = dem durch den andern Bruch ausgedruckten, zu demselben einfachen Verhältniß gehörigen, gebrochenen Verhältniß.

Beweis. Die beiden gebrochenen Verhältnisse seien $\frac{c}{d}(a:b)$ und $\frac{e}{f}(a:b)$, wo $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, also $cf = de$. Dann ist $\frac{c}{d}(a:b) = \frac{cf}{df}(a:b)$, wie man leicht aus dem Begriff eines gebrochenen Verhältnisses einsieht. Folglich ist $\frac{c}{d}(a:b) = \frac{de}{df}(a:b) = \frac{e}{f}(a:b)$.

§. 32. Erklärung.

Das Verhältniß $a:b$ heißt $>c:d$, wenn a sich zu b verhält wie eine Größe, welche $>c$ ist, zu d. Dagegen heißt das Verhältniß $a:b<c:d$, wenn a sich zu b verhält wie eine Größe, welche $<c$ ist, zu d.

§. 33. Lehrsatz.

Wenn 2 ungleiche Größen ebensoviel von einander verschieden sind als 2 andere ihnen gleichartige, die aber einzeln genommen größer sind, so hat die kleinere Größe zur größeren im ersten Paar ein kleineres Verhältniß als im zweiten Paar.

Beweis. Die 4 Größen seien a, $a+b$, $a+c$ und $a+c+b$. Man mache $a:a+b=a+c:x$, so ist, weil $a+b>a$, auch $x>a+c$, und weil $a+c>a$, auch $x>a+b$. Folglich ist in der letzteren Proportion das letzte Glied das größte, und das erste das kleinste; folglich ist (Eucl. 5,25) $a+x>2a+b+c$, also $x>a+b+c$. Daher ist $a:a+b<a+c:a+b+c$.

§. 34. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes, so ist die 4te Proportionale zu den 3 ersten Gliedern $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}$ als das 4te Glied, die 4te Proportionale zum 3ten, 4ten und 1sten Glied $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als das 2te Glied, und die 4te Proportionale zum 4ten, 3ten und 2ten Glied $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}$ als das 1ste Glied.

Beweis. Es sei $a:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d$, so verhält sich nach §. 32. a zu b wie eine Größe, welche $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c$, zu d, also $a:b$ wie c zu einer Größe, welche $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}d$. Da eine Größe, welche $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c$, sich zu d verhält wie a zu b, so verhält sich c zu d wie a zu einer Größe, welche $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}b$, oder umgekehrt, d zu c wie eine

Größe, welche $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ b, zu a, also d:c wie b zu einer Größe, welche $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}$ a.

§. 35. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes, so ist dieses $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}$ als das erste.

Beweis. Es sei $a:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d$, so verhält sich (§. 32.) eine Größe, welche $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ c ist, zu d wie a:b, also c:d wie eine Größe, welche $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}$ a ist, zu b.

§. 36. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes, so ist das umgekehrte des ersten Verhältnisses $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}$ als das umgekehrte des andern.

Beweis. Es sei $a:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d$. Man mache $b:a=d:e$, so ist (§. 32.) $e\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c$, also (§. 34.) $b:a\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}d:c$.

§. 37. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse einander gleich sind, und ein drittes ist $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als eins von beiden, so ist es auch $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als das andere.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, aber $e:f\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}a:b$. Man mache $a:b=e:g$, so ist (§. 34.) $g\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}f$. Aus $a:b=c:d$ und $a:b=e:g$ folgt simpl. ex aeq. $e:g=c:d$; also ist (§. 34.) $e:f\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d$.

§. 38. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes, und dieses $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als ein drittes, so ist auch das erste $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als das dritte.

Beweis. Es sei $a:b \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} c:d$, und $c:d \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} e:f$. Man mache $c:d = e:g$, so ist (§. 34.) $g \left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\} f$. Aber aus $a:b \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} c:d$ und $c:d = e:g$ folgt (§. 37.) $a:b \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} e:g$, also um so mehr $a:b \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} e:f$.

§. 39. Lehrsatz.

Wenn mehrere Verhältnisse, einzeln genommen, entweder sämmtlich $>$ oder sämmtlich $<$ sind als ein und dasselbe Verhältniß (worunter aber auch gleiche Verhältnisse vorkommen können), so steht die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder in einem Verhältniß, welches $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als jenes einzelne Verhältniß.

Beweis.

Es sei $a:b \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} i:k$	Man mache $i:k = a:l$, so ist $l \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} b$,
$c:d = i:k$	$i:k = c:m, \ldots m = d$,
$e:f \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} i:k$	$i:k = e:n, \ldots n \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} f$,
$\vdots$	$\vdots$
$g:h \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} i:k$	$i:k = g:p, \ldots p \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} h$

Aus Eucl. 5,12 folgt $i:k = a+c+e+\ldots+g:l+m+n+\ldots+p$. Da nun $l+m+n+\ldots+p$ (nach Eucl. 1, 4ter Grundſ.) $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ $b+d+f+\ldots+h$, so ist $i:k$ nach §. 34. $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\} a+c+e+\ldots+g:b+d+f+\ldots+h$, also (§. 35.) $a+c+e+\ldots+g:b+d+f+\ldots+h \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} i:k$.

§. 40. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes, und alle 4 Glieder sind gleichartig, so ist, verwechselt, das Verhält-

niß des ersten Gliedes zum 3ten $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als das Verhältniß des 2ten Gliedes zum 4ten.

Beweis. Es sei $a:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d$. Man mache $a:b=c:e$, so ist $e\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}d$. Durch Verwechselung erhalten wir (Eucl. 5, 16) $a:c=b:e$; also ist $a:c\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}b:d$.

§. 41. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes, so ist, verbunden, das Verhältniß der Summe des 1sten und 2ten Gliedes zum 2ten $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als das Verhältniß der Summe des 3ten und 4ten Gliedes zum 4ten. Und wenn ein Verhältniß einer größeren Größe zu einer kleineren $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes Verhältniß einer größeren Größe zu einer kleineren, so ist, getrennt, das Verhältniß der Differenz des 1sten und 2ten Gliedes zum 2ten $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als das Verhältniß der Differenz des 3ten und 4ten Gliedes zum 4ten, dagegen, zurückkehrend, das Verhältniß des 1sten Gliedes zur Differenz des 1sten und 2ten $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}$ als das Verhältniß des 3ten Gliedes zur Differenz des 3ten und 4ten, und auch das Verhältniß der Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}$ als das Verhältniß der Summe der beiden letzten Glieder zu ihrer Differenz.

Beweis. 1) Es sei $a:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d$. Man mache $b:a=d:e$, so ist $e\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c$. Da aber $a:b=e:d$, so ist verbunden $a+b:b=e+d:d$, also $a+b:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c+d:d$.

2) Es sei $a:b \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} c:d$, und dabei $a > b$, und $c > d$. Man mache $b:a = d:e$, so ist $e \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} c$. Da aber $a:b = e:d$, so ist **getrennt** $a - b : b = e - d : d$, also $a - b : b \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} c - d : d$. Man mache ferner $a:b = c:f$, so ist $f \left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\} d$. Da aber $a:b = c:f$, so ist **zurückkehrend** $a:a - b = c:c - f$, also $a:a - b \left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\} c:c - d$. Auch folgt aus $a:b = c:f$ nach §. 3. $a + b : a - b = c + f : c - f$; also ist $a + b : a - b \left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\} c + d : c - f$, also um so mehr $a + b : a - b \left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\} c + d : c - d$.

§. 42. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes, und ein 3tes, welches das 2te Glied des ersten Verhältnisses zum ersten Gliede hat, $\left\{\begin{matrix}= \text{ oder } >\\= \text{ oder } <\end{matrix}\right\}$ als ein 4tes, welches das 2te Glied des 2ten Verhältnisses zum ersten Gliede hat, so ist (ordinatim ex aequo) unter den übrigbleibenden Gliedern das Verhältniß des 1sten zum 2ten $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als das Verhältniß des 3ten zum 4ten.

Beweis. Es sei $a:b \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} c:d$, und

$$b:e \left\{\begin{matrix}= \text{ oder } >\\= \text{ oder } <\end{matrix}\right\} d:f.$$

Man mache $a:b = d:g$, und $b:e = d:h$, so ist $g \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} c$, und $h \left\{\begin{matrix}= \text{ oder } <\\= \text{ oder } >\end{matrix}\right\} f$. Da aber

$$\begin{matrix} a:b = g:d \\ b:e = d:h \end{matrix}$$

so folgt ordinatim ex aequo $a:e = g:h$; also ist $a:e \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} c:h$, also um so mehr $a:e \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} c:f$.

§. 43. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes, und ein 3tes, welches das 1ste Glied des 1sten Verhältnisses zum 2ten Gliede hat, $\left\{\begin{matrix}= \text{ oder } >\\= \text{ oder } <\end{matrix}\right\}$ als ein 4tes, welches das 1ste Glied des 2ten Verhältnisses zum 2ten Gliede hat, so ist, ordinatim ex aequo, unter den übrigen Gliedern das Verhältniß des 1sten zum 2ten ebenfalls $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als das Verhältniß des 3ten zum 4ten.

Beweis. Es sei $a:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d$

$e:a\left\{\begin{matrix}= \text{ oder } >\\= \text{ oder } <\end{matrix}\right\}f:c,$

so ist umgekehrt $b:a\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}d:c$

$a:e\left\{\begin{matrix}= \text{ oder } <\\= \text{ oder } >\end{matrix}\right\}c:f$

---

also ord. ex aeq. (§. 42.) $b:e\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}d:f$; umgekehrt $e:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}f:d$.

§. 44. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ ist als ein anderes, und ein 3tes, welches das 2te Glied des 1sten Verhältnisses zum 1sten Gliede hat, $\left\{\begin{matrix}= \text{ oder } >\\= \text{ oder } <\end{matrix}\right\}$ als ein 4tes, welches das 1ste Glied des 2ten Verhältnisses zum 2ten Gliede hat, so ist (perturbatim ex aequo) unter den übrigen Gliedern das Verhältniß des 1sten zum 2ten $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ als das Verhältniß des 3ten zum 4ten.

Beweis. Es sei $a:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d$

$b:e\left\{\begin{matrix}= \text{ oder } >\\= \text{ oder } <\end{matrix}\right\}f:c.$

Man mache $a:b=c:g$, und $e:b=c:h$, so ist $g\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}d$, und

$h \left\{ \begin{matrix} = \text{ oder } > \\ = \text{ oder } < \end{matrix} \right\} f$. Aus $a : b = c : g$ und

$b : e = h : c$ folgt pert. ex aeq.

$a : e = h : g$; also ist $a : e \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} h : d$,

also um so mehr $\left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} f : d$.

§. 45. Zusatz.

Hieraus beweißt man auf eine ähnliche Art wie in §. 43., daß, wenn ein Verhältniß $\left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\}$ ist als ein anderes, und ein 3tes, welches das erste Glied des ersten Verhältnisses zum 2ten Gliede hat, $\left\{ \begin{matrix} = \text{ oder } > \\ = \text{ oder } < \end{matrix} \right\}$ als ein 4tes, welches das 2te Glied des 2ten Verhältnisses zum 1sten Glied hat, daß alsdann (perturbatim ex aequo) unter den übrigen Gliedern das Verhältniß des 1sten zum 2ten $\left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\}$ ist als das Verhältniß des 3ten zum 4ten.

§. 46. Lehrsatz.

Wenn mehrere Verhältnisse, einzeln genommen, $\left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\}$ sind als ebensoviele andere, wobei aber auch gleiche Verhältnisse vorkommen können, und es sind alle 2ten Glieder unter sich, wie auch alle 4ten Glieder unter sich, gleich, so ist das Verhältniß der Summe der 1sten Glieder zum 2ten $\left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\}$ als das Verhältniß der Summe der 3ten Glieder zum 4ten. Sind aber alle ersten Glieder unter sich, wie auch alle 3ten Glieder unter sich, gleich, so ist das Verhältniß des ersten Gliedes zur Summe der 2ten Glieder $\left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\}$ als das Verhältniß des 3ten Gliedes zur Summe der 4ten Glieder.

Beweis. 1) Es sei $a : b \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} c : d$

$e : b \left\{ \begin{matrix} = \text{ oder } > \\ = \text{ oder } < \end{matrix} \right\} f : d$.

Man mache $b:a = d:g$, und $b:e = d:h$, so ist $g \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} e$, und $h \left\{ \begin{matrix} = \text{ oder } > \\ = \text{ oder } < \end{matrix} \right\} f$. Aber aus $a:b = g:d$ und

$e:b = h:d$ folgt (Eucl. 5, 24)

$a+e:b = g+h:d$. Also ist $a+e:b \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} e+f:d$. Wenn mehr als 4 Verhältnisse da sind, so braucht man nur dieselben Schlüsse zu wiederholen.

2) Es sei $a:b \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} c:d$

$a:e \left\{ \begin{matrix} = \text{ oder } > \\ = \text{ oder } < \end{matrix} \right\} c:f$,

so ist **umgekehrt** $b:a \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} d:c$

$e:a \left\{ \begin{matrix} = \text{ oder } < \\ = \text{ oder } > \end{matrix} \right\} f:c$

also zufolge Nr. 1) $b+e:a \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} d+f:c$; **umgekehrt** $a:b+e \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} c:d+f$. Wenn mehr als 4 Verhältnisse da sind, so braucht man nur die Schlüsse zu wiederholen.

§. 47. Lehrsatz.

Wenn mehrere Verhältnisse, einzeln genommen, $\left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\}$ sind als ebensoviele andere, wobei auch **gleiche** Verhältnisse vorkommen können, so ist auch das aus allen vorangehenden Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß $\left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\}$ als das aus allen nachfolgenden zusammengesetzte.

Beweis. Es sei $a:b \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} c:d$; $e:f = g:h$; $i:k \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} l:m$; . . .; $n:p \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} q:r$.

Man mache

$$\begin{array}{l|l|l} e:f = b:s & g:h = d:t & \text{so ist } a:b \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} c:d \\ i:k = s:u & l:m = t:v & \qquad b:s = d:t \\ \vdots & \vdots & \qquad s:u \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} t:v \text{ (§.37.)} \\ n:p = w:y & q:r = x:z & \qquad \vdots \\ & & \qquad w:y \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} x:z \end{array}$$

ord. ex aeq. (§. 42.) $a:y \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} c:z$,

d. i. $(a:b) + (e:f) + (i:k) + \ldots + (n:p) \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} (c:d) + (g:h) + (l:m) + \ldots + (q:r)$.

§. 48. Lehrsatz.

Wenn ein Verhältniß $\geq$ (d. h. größer oder gleich oder kleiner) ist als ein anderes, so ist auch jedes gebrochene Verhältniß des 1sten Verhältnisses $\geq$ (d. h. im 1sten Fall $>$, im 2ten Fall $=$, im 3ten Fall $<$) als das entsprechende gebrochene Verhältniß des 2ten Verhältnisses.

Beweis. Es sei $a:b \geq c:d$. Wäre nun $\frac{e}{f}(a:b)$ nicht $\geq \frac{e}{f}(c:d)$, so wäre nach §. 47. $e(a:b)$ nicht $\geq e(c:d)$. Ist aber $a:b \geq c:d$, so ist nach §. 47. dennoch $e(a:b) \geq e(c:d)$. Da dies sich widerspricht, so ist die Annahme falsch, und $\frac{e}{f}(a:b) \geq \frac{e}{f}(c:d)$.

Zweiter Abschnitt.

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

§. 1. Erklärung.

Wenn 4 gleichartige Größen so beschaffen sind, daß die 1ste die 2te um ebensoviel übertrifft oder von ihr um ebensoviel übertroffen wird, als die 3te die 4te im 1sten Fall übertrifft, im 2ten Fall von ihr übertroffen wird, so bilden die 4 Größen eine arithmetische Proportion, und die Zusammenstellung der 2 ersten oder der 2 letzten heißt ein arithmetisches Verhältniß, und man sagt alsdann, daß beide arithmetischen Verhältnisse einander gleich sind. Sind die vorangehenden Glieder in beiden Verhältnissen einzeln genommen $>$ als die nachfolgenden, so heißt die Proportion eine fallende; sind aber die vorangehenden Glieder $<$ als die nachfolgenden, so heißt sie eine steigende. Wenn in einer arithmetischen Proportion das 2te und 3te Glied gleich sind, so heißt sie eine stetige, sonst eine discrete. Wenn eine Reihe gleichartiger Größen so beschaffen ist, daß jede 3 auf einander folgenden Glieder eine stetige arithmetische Proportion bilden, so heißt die Reihe eine arithmetische Reihe oder Progression. — Eine Proportion in der beim Euclides erklärten Bedeutung heißt zum Unterschiede von der arithmetischen eine geometrische Proportion, und wenn eine Reihe gleichartiger Größen so beschaffen ist, daß jede 3 auf einander folgenden Glieder eine stetige geometrische Proportion bilden, so heißt die Reihe eine geometrische Reihe oder Progression.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn man die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes einer arithmetischen Reihe mit der Anzahl der Glieder multiplicirt, so erhält man die Summe aller Glieder der Reihe.

Beweis. Das kleinste Glied der Reihe ist vom benachbarten Gliede um ebensoviel verschieden als das größte von seinem benachbarten; folglich ist die Summe dieser beiden benachbarten Glieder = der Summe des größten und kleinsten, und ebenso wird weiter bewiesen, daß die Summe zweier Glieder, die gleich weit vom ersten und letzten Gliede abstehen, allemal dieselbe ist. Daraus folgt das zu Beweisende leicht von selbst.

§. 3. Zusatz.

Wenn man zwischen 2 ungleiche Größen eine hinreichende Anzahl Glieder einschaltet, so daß dadurch eine arithmetische Reihe entsteht, so kann (zufolge Eucl. 10,1) die Differenz der Reihe kleiner werden als jede gegebene Größe derselben Art.

§. 4. Lehrsatz.

Der Unterschied zweier Glieder einer geometrischen Reihe ist allemal $>$ als der Unterschied des kleineren von beiden Gliedern und des nächstkleineren, aber $<$ als der Unterschied des größeren von beiden Gliedern und des nächstgrößeren, und die Differenzen bilden wieder eine geometrische Reihe, in welcher jede 2 aufeinander folgenden Glieder sich wie die aufeinander folgenden Glieder der ursprünglichen Reihe verhalten.

Beweis. Daß der Unterschied jeder 2 auf einander folgenden Glieder einer geometrischen Reihe $>$ ist als der Unterschied des kleinern von beiden Gliedern und des nächstkleineren, aber $<$ als der Unterschied des größeren von beiden Gliedern und des nächstgrößeren, folgt unmittelbar aus Eucl. 5,25. Daß aber die Unterschiede eine geometrische Reihe bilden, worin jede 2 auf einander folgenden Glieder sich wie die auf einander folgenden Glieder der ursprünglichen Reihe verhalten, wird so bewiesen. Es seien a, b, c, d vier auf einander folgende Glieder einer geometrischen Reihe, also $a:b = b:c = c:d$, und es sei a das größte der 4 Glieder. Aus §. 1. des vorigen Abschnitts folgt $a - b : b - c = b : c = b - c : c - d$. Folglich bilden die Differenzen der ursprünglichen Reihe eine geometrische Reihe, worin

jede 2 auf einander folgenden Glieder sich wie b : c, d. i. wie die auf einander folgenden Glieder der ursprünglichen Reihe verhalten.

§. 5. Zusatz.

Macht man von der Differenzenreihe einer geometrischen Reihe wieder eine Differenzenreihe, u. s. w., so viele Differenzenreihen man will, so erhält man entweder lauter steigende oder lauter fallende geometrische Reihen, und jede 2 auf einander folgenden Glieder jeder Reihe sind jeden 2 auf einander folgenden Gliedern jeder andern Reihe proportional.

§. 6. Zusatz.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß, wenn man jede 2 auf einander folgenden Glieder einer geometrischen Reihe addirt, und von der dadurch entstandenen Summenreihe wieder eine Summenreihe macht, u. s. w., so viele Summenreihen man will, man entweder lauter steigende oder lauter fallende geometrische Reihen erhält, je nachdem die ursprüngliche Reihe steigend oder fallend war, und daß jede 2 auf einander folgenden Glieder jeder Summenreihe sich wie die auf einander folgenden Glieder der ursprünglichen Reihe verhalten.

§. 7. Zusatz.

Da in einer geometrischen Reihe jedes Glied das nächstkleinere um weniger übertrifft, als es selbst von dem nächstgrößeren übertroffen wird, so kann man, wenn man die Reihe auf der Seite der steigenden Glieder weit genug fortsetzt, auf ein Glied kommen, welches $>$ ist als jede gegebene Größe derselben Art, wie nahe auch das Verhältniß der auf einander folgenden Glieder dem Verhältniß der Gleichheit kommen mag.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn man eine geometrische Reihe auf der fallenden Seite weit genug fortsetzt, so kann man auf ein Glied kommen, welches $<$ ist als jede gegebene Größe derselben Art, wie nahe auch

das Verhältniß der auf einander folgenden Glieder dem Verhältniß der Gleichheit kommen mag.

Beweis. Es seien a und b zwei auf einander folgende Glieder der Reihe, und zwar a das kleinere, c aber irgend eine gegebene wenn auch noch so kleine Größe derselben Art. Man bilde eine geometrische Reihe c, d, e u. s. w., so daß $c:d = a:b$, so kann man, wenn man diese Reihe weit genug fortsetzt, nach dem vorigen §. auf ein Glied kommen, welches $> a$ ist. Es sei z. B das 5te Glied g in der Reihe c, d, e . . . $> a$. Dann bilde man eine geometrische Reihe von 5 Gliedern a, h, i, k, l, so daß $b:a = a:h$, so ist

$g:f = a:h$. Da nun $a < g$, so ist $h < f$
$f:e = h:i$ . . . . . $h < f$, ... $i < e$
$e:d = i:k$ . . . . . $i < e$, ... $k < d$
$d:c = k:l$ . . . . . $k < d$, ... $l < c$.

Wir haben also die geometrische Reihe, wovon a und b zwei auf einander folgende Glieder sind, auf der Seite der fallenden Glieder bis zum Gliede l fortgesetzt, welches $< c$ ist.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn man zwischen 2 ungleiche Größen eine hinreichende Anzahl mittlerer stetiger geometrischer Proportionalgrößen einschaltet, so kann der größte Unterschied zwischen 2 auf einander folgenden Gliedern $<$ werden als jede gegebene Größe derselben Art.

Beweis. Es sei a die kleinere, b die größere von beiden Größen, zwischen welche eingeschaltet werden soll, und c irgend eine gegebene wenn auch noch so kleine Größe derselben Art. Man bilde eine geometrische Progression b, $b - c$, u. s. w., so kommt man nach §. 8. endlich auf ein Glied d, welches $< a$ ist. Nimmt man nun zwischen a und b eben so viele mittlere stetige Proportionalgrößen, als zwischen d und b enthalten sind, so wird, weil $d:b < a:b$, nach §. 48. des vorigen Abschnitts auch das Verhältniß jedes zwischen d und b genommenen Mittelglie-

des zum folgenden $<$ sein als das Verhältniß jedes zwischen a und b genommenen Mittelgliedes zum folgenden. Folglich ist das letzte zwischen d und b enthaltene Mittelglied $<$ als das letzte zwischen a und b enthaltene Mittelglied, und daher der größte Unterschied zweier auf einander folgender zwischen a und b enthaltenen Mittelglieder $<$ c.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn man zwischen 2 ungleiche Größen eine hinreichende Anzahl mittlerer stetiger geometrischer Proportionalgrößen einschaltet, so kann das Verhältniß zweier auf einander folgender Differenzen dem Verhältniß der Gleichheit näher kommen als jedes gegebene Verhältniß zweier ungleicher Größen.

Beweis. Es sei a die kleinere, b die größere der beiden Größen, zwischen welche eingeschaltet werden soll, und $m:n$ irgend ein gegebenes Verhältniß, worin $m < n$. Man mache $n:m = b:c$, und schalte nun zwischen a und b so viele mittlere stetige geometrische Proportionalgrößen ein, daß der größte Unterschied zweier auf einander folgender Glieder $< b - c$ ist. Es sei alsdann d das zunächst vor b vorhergehende Mittelglied, so ist $d > c$, also $n:m > b:d$, also $b:d < n:m$, also $d:b > m:n$, also (§. 4.) das Verhältniß der Differenz jeder 2 aufeinander folgenden Mittelglieder zur nächstgrößeren Differenz $> m:n$; d. h. das Verhältniß zweier auf einander folgender Differenzen kommt dem Verhältniß der Gleichheit näher als das Verhältniß $m:n$.

§. 11. Zusatz.

Da die Differenz in einer geometrischen Reihe desto $>$ ist, je $>$ jedes der beiden auf einander folgenden Glieder selbst ist (§. 4.), so ist die 3te stetige geometrische Proportionalgröße zu 2 ungleichen Größen allemal $>$ als die 3te stetige arithmetische Proportionalgröße, es mag nun von den 2 anfänglichen Größen die erste oder die zweite die größere sein. Um so mehr ist die vierte stetige geometrische Proportionale $>$ als die 4te stetige arithmetische Proportionale, und um so mehr die

fünfte stetige geometrische Proportionale > als die 5te stetige arithmetische Proportionale, u. s. w.

§. 12. Lehrsatz.

Der Unterschied der 3ten stetigen arithmetischen und geometrischen Proportionale zu 2 ungleichen Größen ist die 3te geometrische Proportionale zur ersten von beiden Größen und zur Differenz beider Größen.

Beweis. Die erste der beiden Größen sei t, und die Differenz τ, so ist die 2te Größe $= t \pm \tau$, wo das obere Zeichen für den Fall gilt, wenn die erste von beiden Größen, und das untere Zeichen für den Fall, wenn die zweite von beiden Größen die kleinere ist. Man mache $t:\tau = \tau:x$, so wird (§. 1. des 1sten Abschn.) $t:\tau = t \pm \tau : \tau \pm x$; $\left\{\begin{matrix}\text{verbunden}\\ \text{zurückkehrend}\end{matrix}\right\}$ $t:t \pm \tau = t \pm \tau : t \pm 2\tau + x$.

§. 13. Zusatz.

Wenn man daher zu 2 ungleichen Größen die 3te arithmetische und geometrische Proportionale, und dann zur 1sten Größe und zur 3ten arithmetischen Proportionale wieder die 3te arithmetische und geometrische Proportionale nimmt, so ist der Unterschied der zuletzt genommenen 3ten arithmetischen und geometrischen Proportionale 4mal so groß als der Unterschied der zuerst genommenen 3ten arithmetischen und geometrischen Proportionale.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn man zu 2 ungleichen Größen die 4te stetige arithmetische und geometrische Proportionale nimmt, so ist der Unterschied zwischen beiden letzteren = der 3fachen 3ten Proportionale zur 1sten Größe und zum Unterschied der 1sten und 2ten, $\pm$ der 4ten Proportionale zur 1sten Größe und zum Unterschied der 1sten und 2ten.

Beweis. Die 1ste Größe heiße t, und die Differenz der 1sten und 2ten τ, und man mache $t:\tau = \tau:x = x:z$, so ist nach §. 12. $t:t \pm \tau = t \pm \tau : t \pm 2\tau + x$. Man mache noch

$t : t \pm \tau = t \pm 2\tau + x : t \pm 3\tau + y$, so ist y der Unterschied zwischen der 4ten stetigen arithmetischen und geometrischen Proportionale zu den beiden anfänglichen Größen, und $y > x$. Aus der letzteren Proportion folgt $\left\{\begin{matrix}\text{getrennt}\\ \text{zurückkehrend}\end{matrix}\right\}$ $t : \tau = t \pm 2\tau + x : \tau \pm (y - x)$. Nun ist

$$\begin{aligned} t : \tau &= t : \tau \\ t : \tau &= \tau : x \\ t : \tau &= \tau : x \\ t : \tau &= x : z \\ \hline t : \tau &= t \pm 2\tau + x : \tau \pm 2x + z \end{aligned}$$

(§. 2. des 1sten Abschn.)

Wir hatten aber auch $t : \tau = t \pm 2\tau + x : \tau \pm (y - x)$. Folglich ist $\tau \pm (y - x) = \tau \pm 2x + z$, also $y - x = 2x \pm z$, also $y = 3x \pm z$.

§. 15. Zusatz.

Wenn man daher zu 2 Größen, wovon die erste die kleinere ist, die 4te stetige arithmetische und geometrische Proportionale nimmt, und dann zur ersten Größe und zur 3ten stetigen arithmetischen Proportionale wieder die 4te stetige arithmetische und geometrische Proportionale, so ist der Unterschied zwischen der zuletzt genommenen 4ten arithmetischen und geometrischen Proportionale mehr als 4mal so groß als der Unterschied zwischen der zuerst genommenen 4ten arithmetischen und geometrischen Proportionale.

§. 16. Lehrsatz.

Wenn von 3 Größen t, t', t'' die erstere die kleinste, die letztere die größte ist, und man nimmt zwischen t'' und $3t''$ die mittlere geometrische Proportionale α, so ist das aus den 3 Verhältnissen $t : t'$, $\alpha + t : \alpha + t'$ und $\alpha - t : \alpha - t'$ zusammengesetzte ein Verhältniß einer kleineren Größe zu einer größeren.

Beweis. Es sei $t' - t = \tau$, und und man mache $t : \tau = \tau : T$; $t : \alpha = \alpha : A$; und $t : \tau = \alpha : B$, so ist auch verwechselt $t : \alpha = \tau : B$. Aus diesen 4 Proportionen folgt:

$t+\tau : t = \tau + T : \tau$ | $\alpha - t : t = A - \alpha : \alpha$

$t+\tau : t = \alpha + B : \alpha$ | $\alpha - t : t = B - \tau : \tau$. Setzt man dazu die identische

Proportion $t+\tau : t = t+\tau : t$ | $\alpha - t : t = 2\alpha - 2t : 2t$, so wird

(Eucl. 5,12) $t+\tau : t = \alpha + B + t + 2\tau + T : \alpha + t + \tau$ | $\alpha - t : t = \alpha + B + A - 2t - \tau : \alpha + 2t + \tau$.

Da nun $t'' : \alpha = \alpha : 3t''$, aber $t'' > t'$, d. i. $> t+\tau$, so ist

$t+\tau : \alpha < \alpha \quad : 3t + 3\tau$. Aber $t : t+\tau = t+\tau : t+2\tau+T$ (§. 12.),

also (Eucl. 5,15) $t : t+\tau = 3t+3\tau : 3t+6\tau+3T$

pert. ex aeq. (§. 45. des 1sten Abschn.)

$t : \alpha < \alpha \quad : 3t+6\tau+3T$, also um so mehr $t : \alpha < \alpha : 3t+3\tau+T$. Man mache ferner $\alpha + t : \tau = t+\tau : W$, so ist verbunden $\alpha + t : \alpha + t + \tau = t+\tau : t+\tau+W$, d. i. $\alpha + t : \alpha + t' = t' : t+\tau+W$, also $(t : t') + (\alpha + t : \alpha + t') = t : t+\tau+W$. Man mache ferner

$\alpha - t : \tau = t+\tau : X$, so ist, weil

$\alpha + t : \tau = t+\tau : W$

pert. ex aeq.

$\alpha - t : \alpha + t = W : X$. Man mache ferner

$\alpha + t : \tau = X : Y \ldots$ (a)

ord. ex aeq.

$\alpha - t : \tau = W : Y$; zurückkehrend $\alpha - t : \alpha - t - \tau = W : W - Y$. Aber aus

$\alpha - t : \tau = t+\tau : X$ folgt zurückkehrend $\alpha - t : \alpha - t - \tau = t+\tau : t+\tau-X$

(Eucl. 5,12) $\alpha - t : \alpha - t - \tau = t+\tau+W : t+\tau+W-X-Y$,

also $(t:t') + (\alpha + t : \alpha + t') + (\alpha - t : \alpha - t') = t : t + \tau + W - X - Y$.

Da nun $t:\alpha = \alpha:A$, und dagegen $t:\alpha < \alpha:3t + 3\tau + T$, so ist $A > 3t + 3\tau + T$, also $A - 2t - \tau > t + 2\tau + T$, also $\alpha + B + A - 2t - \tau > \alpha + B + t + 2\tau + T$. Nun war $t + \tau : t = \alpha + B + t + 2\tau + T : \alpha + t + \tau$; also ist
$t + \tau : t < \alpha + B + A - 2t - \tau : \alpha + t + \tau$. Dagegen war
$\alpha - t : t = \alpha + B + A - 2t - \tau : \alpha + 2t + \tau$

——————————————— pert. ex aeq.

$t + \tau : \alpha - t < \alpha + 2t + \tau : \alpha + t + \tau$. Da aber $t + \tau : \alpha - t = X : \tau$, so ist (§. 37. des ersten Abschn.)
$X : \tau < \alpha + 2t + \tau : \alpha + t + \tau$. Aber aus der Proport. (a) folgt verbunden
$X + Y : X = \alpha + t + \tau : \alpha + t$

——————————————— pert. ex aeq.

$X + Y : \tau < \alpha + 2t + \tau : \alpha + t$. Aus $\tau : W = \alpha + t : t + \tau$ folgt
$\tau : \tau + W = \alpha + t : \alpha + 2t + \tau$

——————————————— pert. ex aeq.

$X + Y : \tau + W < \alpha + t : \alpha + t$, d. i. $X + Y < \tau + W$, also $t + \tau + W - X - Y > t$, folglich das Verh. $t : t + \tau + W - X - Y$, d. i. $(t:t') + (\alpha + t : \alpha + t') + (\alpha - t : \alpha - t')$ ein Verhältniß einer kleineren Größe zu einer größeren.

§. 17. Lehrsatz.

In jeder geometrischen Reihe verhält sich die Differenz zweier auf einander folgender Glieder zum größern von beiden Gliedern wie die Differenz des größten Gliedes der Reihe und des (wenn man die Reihe fortsetzt) auf das kleinste zunächst folgenden Gliedes zur Summe aller Glieder der Reihe; dagegen die Differenz zweier auf einander folgender Glieder der Reihe zum kleinern von beiden Gliedern wie die Differenz des kleinsten Gliedes der Reihe und des (wenn man die Reihe fortsetzt) auf das größte zunächst folgenden Gliedes zur Summe aller Glieder der Reihe.

Beweis. Die geometrische Reihe sei a, b, c, . . . n, und zwar a das größte Glied. Man mache $a:b = n:p$, und $b:a$

$=a:q$, so ist $b:a=c:b=d:c=\ldots=n:m=p:n$, also (Eucl. 5,12) $b+c+d+\ldots+p:a+b+c+\ldots+n=b:a$; zurückkehrend $a-p:a+b+c+\ldots+n=a-b:a$, welches zuerst bewiesen werden sollte.

Dagegen verhält sich $q:a=a:b=b:c=\ldots=m:n$, also $q+a+b+\ldots+m:a+b+c+\ldots+n=a:b$; getrennt $q-n:a+b+c+\ldots+n=a-b:b$, welches gleichfalls bewiesen werden sollte.

§. 18. Lehrsatz.

In jeder geometrischen Reihe von gerader Anzahl der Glieder verhält sich die Summe zweier auf einander folgender Glieder zum größern von beiden Gliedern wie die Differenz des größten Gliedes der Reihe und des auf das kleinste zunächst folgenden Gliedes zu dem, was herauskommt, wenn man vom größten Gliede das nächstkleinere wegnimmt, zum Rest das nächstkleinere zusetzt, von der Summe das nächstkleinere wegnimmt, u. s. w., bis die Glieder der Reihe zu Ende sind. Dagegen verhält sich die Summe zweier auf einander folgender Glieder zum kleineren von beiden Gliedern wie die Differenz des kleinsten Gliedes der Reihe und des auf das größte zunächst folgenden Gliedes zu jener Größe, die durch abwechselnde Subtractionen und Additionen der Glieder entstanden.

Beweis. Es sei $a, b, c, \ldots n$ die geometrische Reihe, und a das größte Glied; man mache $a:b=n:p$, und $b:a=a:q$, so ist $a:b=b:c=c:d=\ldots=n:p$, also (§. 2. des ersten Abschn.) $a-b+c-d+\ldots-n:b-c+d-e+\ldots-p=a:b$; verbunden $a-p:a-b+c-d+\ldots-n=a+b:a$, welches zuerst bewiesen werden sollte.

Dagegen verhält sich $q:a=a:b=b:c=\ldots=m:n$, also $q-a+b-c+\ldots-m:a-b+c-d+\ldots-n=a:b$; verbunden $q-n:a-b+c-d+\ldots-n=a+b:b$, welches gleichfalls bewiesen werden sollte.

§. 19. Zusatz.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß in einer geometrischen Reihe von ungerader Anzahl der Glieder die Summe zweier aufeinander folgender Glieder sich zum größern von beiden Gliedern verhält wie die Summe des größten Gliedes der Reihe und des auf das kleinste folgenden zu jener Größe, die durch abwechselnde Subtractionen und Additionen entstanden, und daß dagegen die Summe zweier aufeinander folgender Glieder sich zum kleinern von beiden Gliedern verhält wie die Summe des kleinsten Gliedes der Reihe und des auf das größte folgenden zu jener Größe, die durch abwechselnde Subtractionen und Additionen entstanden.

§. 20. Lehrsatz.

Werden mehrere Größen, die eine fallende geometrische Reihe bilden, zu einander addirt, so ist die Summe, wie weit man auch die Reihe fortsetzen mag, allemal $<$ als die 3te Proportionale zur Differenz des 1sten und 2ten Gliedes und zum 1sten Gliede; aber der Fehler kann, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt, $<$ werden als jede gegebene Größe derselben Art.

Beweis. Man habe die Reihe bis zu irgend einem Gliede fortgesetzt, so heiße das folgende Glied t, das 1ste Glied a, das 2te Glied b, die Summe aller Glieder von a bis zu dem vor t vorhergehenden Gliede S, so ist (nach §. 17.) $a - b : a = a - t : S$, also $S <$ als die 3te Prop. zu $a - b$ und a. Es sei $a - b : a = a : P$, so ist nach §. 1. des ersten Abschn. $a - b : a = t : P - S$.

Es sei x irgend eine wenn auch noch so kleine gegebene Größe derselben Art, und man mache $a : a - b = x : y$, und setze nun die Reihe fort, bis $t < y$. Da nun $a : a - b = P - S : t$, und $t < y$, so ist $P - S < x$. Folglich kann, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt, $P - S$ kleiner werden als jede gegebene Größe derselben Art.

§. 21. Lehrsatz.

Wenn mehrere Größen eine fallende geometrische Reihe bilden, und man nimmt vom 1sten Gliede das 2te weg, setzt zum Rest das 3te zu, nimmt von der Summe das 4te weg u. s. w., immer abwechselnd, so ist das Resultat, wenn man eine gerade Anzahl Glieder genommen hat, $<$, wenn man aber eine ungerade Anzahl Glieder genommen hat, $>$ als die 3te Proportionale zur Summe der beiden ersten Glieder und zum ersten Gliede; doch kann der Fehler $<$ werden als jede gegebene Größe derselben Art.

Beweis. 1) Wenn man eine gerade Anzahl Glieder genommen hat, so ist (§. 18.) $a+b:a=a-t:S$, wo S die durch abwechselnde Subtractionen und Additionen entstandene Größe bedeutet. Also ist $S<$ als die 3te Proportionale zu $a+b$ und a. Man mache $a+b:a=a:P$, so ist, weil

$$\frac{\begin{array}{l} a+b:a=a-t:S \\ a+b:a=a:P \end{array}}{a+b:a=t:P-S.}$$

Hier beweist man wie im vorigen §., daß $P-S$ kleiner werden kann als jede gegebene Größe derselben Art.

2) Wenn man eine ungerade Anzahl Glieder genommen hat, so ist (§. 19.) $a+b:a=a+t:S$, also $S>$ als die 3te Prop. zu $a+b$ und a. Man mache

$$\frac{\begin{array}{l} a+b:a=a+t:S \\ a+b:a=a:P, \end{array}}{a+b:a=t:S-P.}$$

so ist

Hier beweist man wie im vorigen §., daß $S-P$ kleiner werden kann als jede gegebene Größe derselben Art.

Dritter Abschnitt.

Von den Facultäten.

§. 1. Erklärung.

Wenn man eine Größe nach einem aus mehreren Verhältnissen zusammengesetzten Verhältniß verändert, und die vorangehenden Glieder der einzelnen Verhältnisse sind einander gleich, und die nachfolgenden Glieder bilden eine arithmetische Reihe, so heißt die zuletzt entstandene Größe eine Facultät der anfänglichen Größe, das Verhältniß des gemeinschaftlichen vorangehenden Gliedes zur Differenz der arithmetischen Reihe das Differenzverhältniß, und die Anzahl der einzelnen Verhältnisse der Exponent der Facultät.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn $p > q$, und man macht $p:p = q:q'_{,}$; $p:p+q = q'_{,}:q''_{,}$; $p:p+2q = q''_{,}:q'''_{,}$, u. s. w., ferner $p:p = p-q:t'$; $p:p+q = t':t''$; $p:p+2q = t'':t'''$, u. s. w., endlich $p:p+q = p:u'_{,}$; $p:p+2q = u'_{,}:u''_{,}$; $p:p+3q = u''_{,}:u'''_{,}$, u. s. w., so ist $q'_{,} = \frac{u'_{,}-t'}{2}$; $q''_{,} = \frac{u''_{,}-t''}{3}$; $q'''_{,} = \frac{u'''_{,}-t'''}{4}$ u. s. w.

Beweis. Wir wollen das rte Glied in der Reihe $q'_{,}$, $q''_{,}$, $q'''_{,}$ . . . mit $q^{r}_{,}$ bezeichnen. Dann folgt aus

$p:p = q : q'_{,}$	$p:p+q = q'_{,}:q''_{,}$	$p:p+2q = q''_{,}:q'''_{,}$
$p:p = p-q:t'$	$p:p+q = t':t''$	$p:p+2q = t'':t'''$
$p:p = p:q'_{,}+t'$	$p:p+q = p:q''_{,}+t''$	$p:p+2q = u'_{,}:q'''_{,}+t'''$
also $q'_{,}+t' = p$	also $q''_{,}+t'' = u'_{,}$	also $q'''_{,}+t''' = u''_{,}$, u. s. w.,

also im Allgemeinen $q^{r+1}_{,} + t^{r+1} = u^{r}_{,}$. Aber aus

$p:p=q:q'_{,}$	$p:p+q=q'_{,}:q''_{,}$	$p:p+2q=q''_{,}:q'''_{,}$
$p:p=p-q:t'$	$p:p+q=t':t''$	$p:p+2q=t'':t'''$ folgt auch noch
$q:p-q=q'_{,}:t'$	$q'_{,}:t'=q''_{,}:t''$	$q''_{,}:t''=q'''_{,}:t'''$, also im Allge-

meinen $q^{r}_{,}:t^{r}=q:p-q$, und $q^{r+1}_{,}:t^{r+1}=q:p-q$. Aus $q^{r}_{,}:t^{r}=q:p-q$ folgt $(r+1)q^{r}_{,}:t^{r}=(r+1)q:p-q$; verbunden $(r+1)q^{r}_{,}+t^{r}:t^{r}=p+rq:p-q$. Nun aber ist

$$t^{r}:t^{r+1}=p \qquad :p+rq$$

pert. ex aeq.

$(r+1)q^{r}_{,}+t^{r}:t^{r+1}=p \qquad :p-q$. Aus der Proportion $q^{r+1}_{,}:t^{r+1}=q:p-q$ folgt verbunden $u^{r}_{,}:t^{r+1}=p:p-q$. Also ist $(r+1)q^{r}_{,}+t^{r}=u^{r}_{,}$, also $q^{r}_{,}=\frac{u^{r}_{,}-t^{r}}{r+1}$.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn im vorigen Satze $p=q$ ist, so ist $q'_{,}=\frac{u'_{,}}{2}$; $q''_{,}=\frac{u''_{,}}{3}$; $q'''_{,}=\frac{u'''_{,}}{4}$, u. s. w.

Beweis. Es ist alsdann $q'_{,}=p$; $q''_{,}=1.2p$; $q'''_{,}=1.2.3p$, u. s. w., und $u'_{,}=1.2p$; $u''_{,}=1.2.3p$; $u'''_{,}=1.2.3.4p$; u. s. w., also $q'_{,}=\frac{u'_{,}}{2}$; $q''_{,}=\frac{u''_{,}}{3}$; $q'''_{,}=\frac{u'''_{,}}{4}$, u. s. w.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn $p>q$ ist, und man macht

$p:p=q:q'_{,}$	$p:p+q=q:q'_{,,}$	$p:p+2q=q:q'_{,,,}$	
$p:p+q=q'_{,}:q''_{,}$	$p:p+2q=q'_{,,}:q'''_{,,}$	$p:p+3q=q'_{,,,}:q''_{,,,}$	u. s. w.
$p:p+2q=q''_{,}:q'''_{,}$	$p:p+3q=q''_{,,}:q''''_{,,}$	$p:p+4q=q''_{,,,}:q'''_{,,,}$	
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	

$$\text{ferner}\left|\begin{array}{l} p : p = p - q : t' \\ p : p + q = t' : t'' \\ p : p + 2q = t'' : t''' \\ \quad \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} p : p + q = p : u'_{,} & p : p + 2q = p + q : u'_{,,} & p : p + 3q = p + 2q : u'_{,,,} & \\ p : p + 2q = u'_{,} : u''_{,} & p : p + 3q = u'_{,,} : u''_{,,} & p : p + 4q = u'_{,,,} : u''_{,,,} & \text{u.s.w.} \\ p : p + 3q = u''_{,} : u'''_{,} & p : p + 4q = u''_{,,} : u'''_{,,} & p : p + 5q = u''_{,,,} : u'''_{,,,} & \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} & \end{array}$$

so ist $q^r_{,} + q^r_{,,} + q^r_{,,,} + \ldots + q^r_k = \frac{u^r_k - t^r}{r+1}$, wo man für k und r beliebige ganze Zahlen setzen kann.

Beweis. Wir wollen annehmen, der Satz sei für irgend einen Werth von k richtig, und beweisen, daß er alsdann auch für das um 1 größere k richtig sei.

Aus $q^r_{,} + q^r_{,,} + q^r_{,,,} + \ldots + q^r_k = \frac{u^r_k - t^r}{r+1}$ folgt $q^r_{,} + q^r_{,,} + q^r_{,,,} + \ldots + q^r_{k+1} = \frac{u^r_k + (r+1)\, q^r_{k+1} - t^r}{r+1}$. Nun ist $u^r_k : u^r_{k+1} = (u^r_k : u^{r-1}_k) + (u^{r-1}_k : u^{r-2}_k) + (u^{r-2}_k : u^{r-3}_k) + \ldots + (u''_k : u'_k) + (u'_k : p + kq - q) + (p + kq - q : p + kq) + (p + kq : u'_{k+1}) + (u'_{k+1} : u''_{k+1}) + (u''_{k+1} : u'''_{k+1}) + (u'''_{k+1} : u''''_{k+1}) + \ldots + (u^{r-1}_{k+1} : u_{k+1}) = [p + (k + r - 1)q : p] + [p + (k + r)q - 2q : p] + [p + (k + r)q - 3q : p] + \ldots + (p + kq : p) + (p + kq - q : p + kq) + [p : p + (k + 1)q] + [p : p + (k + 2)q] + [p : p + (k + 3)q] + \ldots + [p : p + (k + r)q]$. Hebt man hier die umgekehrten Verhältnisse (nach §. 26. des 1sten Abschn.), so erhält man $u^r_k : u^r_{k+1} = p + kq - q : p + (k + r)q$. Dagegen ist $q^r_{k+1} : u^r_{k+1} = (q^r_{k+1} : q^{r-1}_{k+1}) + (q^{r-1}_{k+1} : q^{r-2}_{k+1}) + \ldots + (q''_{k+1} : q'_{k+1}) + (q'_{k+1} : q) + (q : p + kq) + (p + kq : u'_{k+1}) + (u'_{k+1} : u''_{k+1}) + (u''_{k+1} : u'''_{k+1}) + \ldots + (u^{r-1}_{k+1} : u^r_{k+1}) = [p + (k + r)q - q : p] + [p + (k + r)q - 2q : p] + \ldots + (p + kq : p) + (q : p + kq) +$

$[p:p+(k+1)q]+[p:p+(k+2)q]+\ldots+[p:p+(k+r)q]$
$= q:p+(k+r)q$. Also
$(r+1)q_{k+1}^{r}:u_{k+1}^{r} = (r+1)q : p+(k+r)q$. Vorher war
$u_k^r : u_{k+1}^{r} = p+kq-q : p+(k+r)q$

Eucl. 5,24

$u_k^r+(r+1)q_{k+1}^{r}:u_{k+1}^{r}=p+(k+r)q:p+(k+r)q$. Da in dieser Proportion die beiden letzten Glieder gleich sind, so sind es auch die beiden ersten, d. i. $u_k^r+(r+1)q_{k+1}^{r} = u_{k+1}^{r}$. Also

$$q_{,}^{r}+q_{,,}^{r}+q_{,,,}^{r}+\ldots+q_{k+1}^{r} = \frac{u_{k+1}^{r}-t^r}{r+1}.$$

Ist also der Satz für irgend einen Werth von k richtig, so ist er auch für das um 1 größere k richtig. Nun ist er aber nach §. 2. für $k=1$ richtig; er ist also für jedes k richtig.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn im vorigen Satze $p=q$ ist, so ist $q_{,}^{r}+q_{,,}^{r}+q_{,,,}^{r}+\ldots+q_k^r = \frac{u_k^r}{r+1}$.

Beweis. Wir wollen annehmen, der Satz sei für irgend ein k richtig, und beweisen, daß er auch für das um 1 größere k richtig sei.

Aus $q_{,}^{r}+q_{,,}^{r}+q_{,,,}+\ldots+q_k^r=\frac{u_k^r}{r+1}$ folgt $q_{,}^{r}+q_{,,}^{r}+q_{,,,}^{r}+\ldots+q_{k+1}^{r}=\frac{u_k^r+(r+1)q_{k+1}^{r}}{r+1}$. Nun ist schon im Beweise des vorigen Satzes gezeigt, daß $u_k^r+(r+1)q_{k+1}^{r} = u_{k+1}^{r}$. Also wird $q_{,}^{r}+q_{,,}^{r}+\ldots+q_{k+1}^{r} = \frac{u_{k+1}^{r}}{r+1}$.

Ist also der Satz für irgend ein k richtig, so ist er auch für das um 1 größere k richtig. Nun aber ist er nach §. 3. für $k=1$ richtig; er ist also für jedes k richtig.

§. 6. Zusatz.

Wenn im vorigen Satze $p=1$ und $q=1$ gesetzt wird, so haben wir

$q'_{,} = 1$	$q'_{,,} = 2$	$q'_{,,,} = 3$	u. s. w.
$q''_{,} = 1.2$	$q''_{,,} = 2.3$	$q''_{,,,} = 3.4$	
$q'''_{,} = 1.2.3$	$q'''_{,,} = 2.3.4$	$q'''_{,,,} = 3.4.5$	
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	

$u'_{,} = 1.2$	$u'_{,,} = 2.3$	$u'_{,,,} = 3.4$	u. s. w.
$u''_{,} = 1.2.3$	$u''_{,,} = 2.3.4$	$u''_{,,,} = 3.4.5$	
$u'''_{,} = 1.2.3.4$	$u'''_{,,} = 2.3.4.5$	$u'''_{,,,} = 3.4.5.6$	
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	

Daraus fließt folgender Satz: Wenn n eine ganze Zahl, und > 1 ist, so ist $n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2) + (n-1)n(n+1)\ldots(2n-3) + (n-2)(n-1)n\ldots(2n-4) + \ldots + 1.2.3\ldots(n-1) = (n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-1)$.

§. 7. Zusatz.

Wenn in §. 4. p irgend einer ungeraden Zahl gleich gesetzt wird, die > 1 ist, also $= 2r+1$, und dagegen $q = 1$, so wird (wenn man noch die in §. 16. und 25. des 1sten Abschn. angegebenen Regeln der Bruchrechnung befolgt)

$q'_{,} = \frac{2r+1}{2r+1}$	$q'_{,,} = \frac{2r+2}{2r+1}$	u. s. w.
$q''_{,} = \frac{(2r+1)(2r+2)}{(2r+1)^2}$	$q''_{,,} = \frac{(2r+2)(2r+3)}{(2r+1)^2}$	
$q'''_{,} = \frac{(2r+1)(2r+2)(2r+3)}{(2r+1)^3}$	$q'''_{,,} = \frac{(2r+2)(2r+3)(2r+4)}{(2r+1)^3}$	
u. s. w.	u. s. w.	

ferner
$$t' = 2r$$
$$t'' = 2r \cdot \frac{2r+2}{2r+1}$$
$$t''' = 2r \cdot \frac{(2r+2)(2r+3)}{(2r+1)^2}$$
u. s. w.

$$u'_{,} = \frac{(2r+1)(2r+2)}{2r+1} \qquad u'_{,,} = \frac{(2r+2)(2r+3)}{2r+1}$$

$$u''_{,} = \frac{(2r+1)(2r+2)(2r+3)}{(2r+1)^2} \qquad u''_{,,} = \frac{(2r+2)(2r+3)(2r+4)}{(2r+1)^2}$$

$$u'''_{,} = \frac{(2r+1)(2r+2)(2r+3)(2r+4)}{(2r+1)^3} \qquad u'''_{,,} = \frac{(2r+2)(2r+3)(2r+4)(2r+5)}{(2r+1)^3}$$

u. s. w. | u. s. w. | u. s. w.

Bedeutet nun n irgend eine ganze Zahl, welche $> r+1$ ist, so finden wir, weil $q_{,}^{n-r-1} + q_{,,}^{n-r-1} + q_{,,,}^{n-r-1} + \ldots + q_{n-r}^{n-r-1} = \frac{u_{n-r}^{n-r-1} - t^{n-r-1}}{n-r}$, folgenden Satz: $\frac{(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-2)}{(2r+1)^{n-r-1}} + \frac{(n+r-1)(n+r)\ldots(2n-3)}{(2r+1)^{n-r-1}} + \ldots + \frac{(2r+1)(2r+2)\ldots(n+r-1)}{(2r+1)^{n-r-1}} = \frac{\frac{(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-1)}{(2r+1)^{n-r-1}} - 2r.\frac{(2r+2)(2r+3)\ldots(n+r-1)}{(2r+1)^{n-r-2}}}{n-r}$, oder, kürzer ausgedruckt, $(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-2) + (n+r-1)(n+r)\ldots(2n-3) + \ldots + (2r+1)(2r+2)\ldots(n+r-1) = \frac{(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-1) - 2r(2r+1)\ldots(n+r-1)}{n-r}$.

§. 8. Zusatz.

Aus dem vorigen Satze folgt, wenn r irgend eine ganze Zahl, und n irgend eine ganze Zahl, die aber $> r+1$ ist, bedeutet:

$$\frac{n-r}{n+r}(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-2) + \frac{n-r}{n+r}(n+r-1)(n+r)\ldots(2n-3)$$
$$+ \ldots + \frac{n-r}{n+r}(2r+2)(2r+3)\ldots(n+r) + (2r+1)(2r+2)\ldots(n+r-1)$$
$$= (n+r+1)(n+r+2)\ldots(2n-1).$$

§. 9. Lehrsatz.

Wenn n irgend eine ganze Zahl bezeichnet, welche > 2, und k eine andere ganze Zahl, welche $< n-1$ ist, und man n durch ${}^n\mathfrak{A}$, $\frac{n(n-1)}{1.2}$ durch ${}^n\mathfrak{B}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ durch ${}^n\mathfrak{C}$, u. s. w. aus-

druckt, so ist für ein gerades k: $n(n+1)\ldots(2n-2)+$
$(n-1)n\ldots(2n-3)+\ldots+(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1)$
$+{}^{n}\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3)+{}^{n}\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5)+\ldots$
$+{}^{n}\mathfrak{K}(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1)$
$-{}^{n}\mathfrak{A}\,n(n+1)\ldots(2n-2)-{}^{n}\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4)-\ldots$
$-{}^{n}\mathfrak{J}(n+2-k)(n+3-k)\ldots(2n-k)=$
$\frac{n-k}{n}({}^{n-1}\mathfrak{K}-1)(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1)$, für ein ungerades k aber ${}^{n}\mathfrak{A}.n(n+1)\ldots(2n-2)$
$+{}^{n}\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4)+\ldots$
$+{}^{n}\mathfrak{K}(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1)$
$-{}^{n}\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3)-{}^{n}\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5)-\ldots$
$-{}^{n}\mathfrak{J}(n+2-k)(n+3-k)\ldots(2n-k)-n(n+1)\ldots(2n-2)$
$-(n-1)n\ldots(2n-3)-\ldots-(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1)$
$=\frac{n-k}{n}({}^{n-1}\mathfrak{K}+1)(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1).$

Beweis. Für $n=3$ ist der Satz an sich klar. Für $n>3$ nehmen wir an, der Satz sei für irgend ein k richtig, welches $<n-2$, und beweisen, daß er auch für das um 1 größere k richtig sei.

1) Wenn das k, für welches der Satz als richtig angenommen wird, gerade ist. Dann ist
$\frac{n-k}{n}({}^{n-1}\mathfrak{K}-1)(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1)=$
$\frac{2n-k-1}{n}({}^{n-1}\mathfrak{K}-1)(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$. Hierzu $(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$ addirt, giebt
$\left(\frac{2n-k-1}{n}.{}^{n-1}\mathfrak{K}-\frac{n-k-1}{n}\right)(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2).$
Dies von ${}^{n}\mathfrak{L}(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$ weggenommen, giebt
$\left(\text{weil } {}^{n}\mathfrak{L}=\frac{n}{n-k-1}.{}^{n-1}\mathfrak{L},\text{ und } {}^{n-1}\mathfrak{K}=\frac{k+1}{n-k-1}.{}^{n-1}\mathfrak{L}\text{ ist}\right)$
$\left[\left(\frac{n}{n-k-1}-\frac{(2n-k-1)(k+1)}{n(n-k-1)}\right){}^{n-1}\mathfrak{L}+\frac{n-k-1}{n}\right](n-k)(n+1-k)\ldots$
$(2n-k-2),$

d. i. $\frac{n-k-1}{n}({}^{n-1}\mathfrak{L}+1)(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$. Folglich ist ${}^{n}\mathfrak{A}\,n(n+1)\ldots(2n-2)+{}^{n}\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4)$
$+\ldots+{}^{n}\mathfrak{L}(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$
$-{}^{n}\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3)-{}^{n}\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5)-\ldots$
$-{}^{n}\mathfrak{K}(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1)-n(n+1)\ldots(2n-2)$
$-(n-1)n\ldots(2n-3)-\ldots-(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$
$=\frac{n-(k+1)}{n}({}^{n-1}\mathfrak{L}+1)(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$.

2) Wenn das k, für welches der Satz als richtig angenommen wird, ungerade ist. Dann ist
$\frac{n-k}{n}({}^{n-1}\mathfrak{K}+1)(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1)=$
$\frac{2n-k-1}{n}({}^{n-1}\mathfrak{K}+1)(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$. Hiervon $(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$ weggenommen, giebt
$\left(\frac{2n-k-1}{n}\cdot{}^{n-1}\mathfrak{K}+\frac{n-k-1}{n}\right)(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$.
Dies von ${}^{n}\mathfrak{L}(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$ weggenommen, giebt
$\left[\left(\frac{n}{n-k-1}-\frac{(2n-k-1)(k+1)}{n(n-k-1)}\right){}^{n-1}\mathfrak{L}-\frac{n-k-1}{n}\right](n-k)(n+1-k)\ldots$
$(2n-k-2)$,
d. i. $\frac{n-k-1}{n}({}^{n-1}\mathfrak{L}-1)(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$. Folglich ist $n(n+1)\ldots(2n-2)+(n-1)n\ldots(2n-3)+\ldots$
$+(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)+{}^{n}\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3)+$
${}^{n}\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5)+\ldots+{}^{n}\mathfrak{L}(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$
$-{}^{n}\mathfrak{A}\,n(n+1)\ldots(2n-2)-{}^{n}\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4)-\ldots$
$-{}^{n}\mathfrak{K}(n+1-k)(n+2-k)\ldots(2n-k-1)=$
$\frac{n-(k+1)}{n}({}^{n-1}\mathfrak{L}-1)(n-k)(n+1-k)\ldots(2n-k-2)$.

Ist also der Satz für irgend ein k richtig, welches $<n-2$, so ist er auch für das um 1 größere k richtig. Nun ist er aber für $k=1$ richtig, folglich für jedes k, welches $<n-1$.

§. 10. Zusatz.

Setzen wir im vorigen Satz $k = n - 2$, so finden wir, wenn n gerade ist: $n(n+1)\ldots(2n-2) + (n-1)n\ldots(2n-3) + \ldots + 3.4.5\ldots(n+1) + {}^n\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3) + {}^n\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5) + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}.3.4.5\ldots(n+1) - {}^n\mathfrak{A}\,n(n+1)\ldots(2n-2) - {}^n\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4) - \ldots - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.4.5.6\ldots(n+2) = \frac{2}{n}(n-1-1).3.4.5\ldots(n+1) = \frac{n-2}{n}.1.2.3\ldots(n+1)$, und wenn n ungerade ist,

$${}^n\mathfrak{A}.n(n+1)\ldots(2n-2) + {}^n\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4) + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}.3.4.5\ldots(n+1) - {}^n\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3) - {}^n\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5) - \ldots - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.4.5.6\ldots(n+2) - n(n+1)\ldots(2n-2) - (n-1)n\ldots(2n-3) - \ldots - 3.4.5\ldots(n+1) = \frac{2}{n}(n-1+1).3.4.5\ldots(n+1) = 1.2.3\ldots(n+1).$$

§. 11. Zusatz.

Aus dem vorigen Satze folgt, wenn n gerade und > 2 ist,

$$n(n+1)\ldots(2n-2) + (n-1)n\ldots(2n-3) + \ldots + 1.2.3\ldots(n-1) = {}^n\mathfrak{A}.n(n+1)\ldots(2n-2) + {}^n\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4) + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.4.5.6\ldots(n+2) + \frac{n-2}{n}.1.2.3\ldots(n+1) + 2.3.4\ldots n + 1.2.3\ldots(n-1) - {}^n\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3) - {}^n\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5) - \ldots - \frac{n(n-1)}{2}.3.4.5\ldots(n+1) = {}^n\mathfrak{A}\,n(n+1)\ldots(2n-2) + {}^n\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4) + \ldots + n.2.3.4\ldots n - {}^n\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3) - {}^n\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5) - \ldots - 1.2.3\ldots(n-1),$$ und wenn n ungerade und > 1 ist,

$${}^n\mathfrak{A}.n(n+1)\ldots(2n-2) + {}^n\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4) + \ldots + 1.2.3\ldots(n-1) - {}^n\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3) - {}^n\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5) - \ldots - n.2.3.4\ldots n = n(n+1)\ldots(2n-2) + (n-1)n\ldots(2n-3) + \ldots +$$

$3.4.5\ldots(n+1)+1.2.3\ldots(n-1)+1.2.3\ldots(n+1)$
$-n.2.3.4\ldots n=n(n+1)\ldots(2n-2)+(n-1)n\ldots(2n-3)+\ldots$
$+1.2.3\ldots(n-1)$.

§. 12. Zusatz.

Aus dem vorigen Satze folgt, daß, wenn n eine ganze Zahl und >2 ist, allemal ${}^{n}\mathfrak{A}\,n(n+1)\ldots(2n-2)+$
${}^{n}\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4)+\ldots+\left\{\begin{matrix}n.2.3.4\ldots n\\ 1.2.3\ldots(n-1)\end{matrix}\right\}$
$-{}^{n}\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3)-{}^{n}\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5)-\ldots$
$-\left\{\begin{matrix}1.2.3\ldots(n-1)\\ n.2.3.4\ldots n\end{matrix}\right\}=n(n+1)\ldots(2n-2)+(n-1)n\ldots(2n-3)$
$+\ldots+1.2.3\ldots(n-1)$ ist, wo der obere Ausdruck für ein gerades, und der untere für ein ungerades n gilt; und es ist an sich klar, daß der Satz auch für $n=2$ richtig ist.

§. 13. Zusatz.

Aus §. 12. und 6. folgt, daß, wenn n eine ganze, von 1 verschiedene Zahl ist,
${}^{n}\mathfrak{A}\,n(n+1)\ldots(2n-2)+{}^{n}\mathfrak{C}(n-2)(n-1)\ldots(2n-4)+\ldots+$
$\left\{\begin{matrix}n.2.3.4\ldots n\\ 1.2.3\ldots(n-1)\end{matrix}\right\}-{}^{n}\mathfrak{B}(n-1)n\ldots(2n-3)$
$-{}^{n}\mathfrak{D}(n-3)(n-2)\ldots(2n-5)-\ldots-\left\{\begin{matrix}1.2.3\ldots(n-1)\\ n.2.3.4\ldots n\end{matrix}\right\}$
$=(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)$ ist, wo der obere Ausdruck für ein gerades, der untere für ein ungerades n gilt.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn r eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, und n eine andere ganze Zahl, welche $>r+2$ ist, und k eine ganze Zahl, welche $<n-r-1$ ist, so ist für ein gerades k:
$\frac{n-r}{n+r}(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-2)+\frac{n-r}{n+r}(n+r-1)(n+r)\ldots(2n-3)$
$+\ldots+\frac{n-r}{n+r}(n+r+1-k)(n+r+2-k)\ldots(2n-k-1)$
$+{}^{n-r}\mathfrak{B}(n+r-1)(n+r)\ldots(2n-3)+$

$$^{n-r}\mathfrak{D}(n+r-3)(n+r-2)\ldots(2n-5)+\ldots+$$
$$^{n-r}\mathfrak{K}(n+r+1-k)(n+r+2-k)\ldots(2n-k-1)$$
$$-\,^{n-r}\mathfrak{A}(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-2)$$
$$-\,^{n-r}\mathfrak{C}(n+r-2)(n+r-1)\ldots(2n-4)-\ldots$$
$$-\,^{n-r}\mathfrak{J}(n+r+2-k)(n+r+3-k)\ldots(2n-k)=$$
$$\frac{n+r-k}{n+r}(^{n-r-1}\mathfrak{K}-1)(n+r+1-k)(n+r+2-k)\ldots(2n-k-1),$$

für ein ungerades k aber $^{n-r}\mathfrak{A}(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-2)$

$$+\,^{n-r}\mathfrak{C}(n+r-2)(n+r-1)\ldots(2n-4)+\ldots$$
$$+\,^{n-r}\mathfrak{K}(n+r+1-k)(n+r+2-k)\ldots(2n-k-1)$$
$$-\,^{n-r}\mathfrak{B}(n+r-1)(n+r)\ldots(2n-3)$$
$$-\,^{n-r}\mathfrak{D}(n+r-3)(n+r-2)\ldots(2n-5)-\ldots$$
$$-\,^{n-r}\mathfrak{J}(n+r+2-k)(n+r+3-k)\ldots(2n-k)$$
$$-\frac{n-r}{n+r}(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-2)$$
$$-\frac{n-r}{n+r}(n+r-1)(n+r)\ldots(2n-3)-\ldots$$
$$-\frac{n-r}{n+r}(n+r+1-k)(n+r+2-k)\ldots(2n-k-1)=$$
$$\frac{n+r-k}{n+r}(^{n-r-1}\mathfrak{K}+1)(n+r+1-k)(n+r+2-k)\ldots(2n-k-1).$$

Beweis. 1) Für $n=r+3$ wird $n-r=3$; $n-r-1=2$; also k, welches $<n-r-1$ sein soll, $=1$; endlich $n+r=2r+3$; also die linke Seite der zu beweisenden Gleichung $=3(2r+3)(2r+4)-\frac{3}{2r+3}(2r+3)(2r+4)$, d. i. $\left(3-\frac{3}{2r+3}\right)(2r+3)(2r+4)$, d. i. $\frac{6r+6}{2r+3}(2r+3)(2r+4)$, und die rechte Seite $=\frac{2r+2}{2r+3}.3(2r+3)(2r+4)$, d. i. $\frac{6r+6}{2r+3}(2r+3)(2r+4)$, also beide Seiten gleich. Folglich gilt der Satz für $n=r+3$.

2) Für $n>r+3$ nehmen wir an, der Satz sei für irgend ein k richtig, welches $<n-r-2$ ist, und beweisen, daß er auch für das um 1 größere k richtig sei.

a) Wenn das k, für welches der Satz als richtig angenommen wird, gerade ist. Dann ist

$$\frac{n+r-k}{n+r}\left({}^{n-r-1}\mathfrak{K}-1\right)(n+r+1-k)(n+r+2-k)\ldots(2n-k-1)$$

$$=\frac{2n-k-1}{n+r}\left({}^{n-r-1}\mathfrak{K}-1\right)(n+r-k)(n+r+1-k)\ldots(2n-k-2).$$

Hierzu $\frac{n-r}{n+r}(n+r-k)(n+r+1-k)\ldots(2n-k-2)$ addirt, giebt

$$\left(\frac{2n-k-1}{n+r}\cdot{}^{n-r-1}\mathfrak{K}-\frac{n+r-k-1}{n+r}\right)(n+r-k)(n+r+1-k)\ldots$$
$$\ldots(2n-k-2).$$

Dies von ${}^{n-r}\mathfrak{L}.(n+r-k)(n+r+1-k)\ldots(2n-k-2)$ weggenommen, giebt (weil ${}^{n-r}\mathfrak{L}=\frac{n-r}{n-r-k-1}\cdot{}^{n-r-1}\mathfrak{L}$, und ${}^{n-r-1}\mathfrak{K}$ $=\frac{k+1}{n-r-k-1}\cdot{}^{n-r-1}\mathfrak{L}$ ist)

$$\left[\left(\frac{n-r}{n-r-k-1}-\frac{(2n-k-1)(k+1)}{(n+r)(n-r-k-1)}\right){}^{n-r-1}\mathfrak{L}+\frac{n+r-k-1}{n+r}\right]$$
$$(n+r-k)(n+r+1-k)\ldots(2n-k-2),$$

d. i. $\frac{n+r-k-1}{n+r}\left({}^{n-r-1}\mathfrak{L}+1\right)(n+r-k)(n+r+1-k)\ldots(2n-k-2).$

Folglich ist ${}^{n-r}\mathfrak{A}(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-2)$

$$+{}^{n-r}\mathfrak{C}(n+r-2)(n+r-1)\ldots(2n-4)+\ldots$$
$$+{}^{n-r}\mathfrak{L}(n+r-k)(n+r+1-k)\ldots(2n-k-2)$$
$$-{}^{n-r}\mathfrak{B}(n+r-1)(n+r)\ldots(2n-3)$$
$$-{}^{n-r}\mathfrak{D}(n+r-3)(n+r-2)\ldots(2n-5)-\ldots$$
$$-{}^{n-r}\mathfrak{K}(n+r+1-k)(n+r+2-k)\ldots(2n-k-1)$$
$$-\frac{n-r}{n+r}(n+r)(n+r+1)\ldots(2n-2)$$
$$-\frac{n-r}{n+r}(n+r-1)(n+r)\ldots(2n-3)-\ldots$$
$$-\frac{n-r}{n+r}(n+r-k)(n+r+1-k)\ldots(2n-k-2)=$$
$$\frac{n+r-(k+1)}{n+r}\left({}^{n-r-1}\mathfrak{L}+1\right)(n+r-k)(n+r+1-k)\ldots(2n-k-2).$$

b) Wenn das k, für welches der Satz als richtig angenommen wird, ungerade ist. Dann ist