Untersuchungen

über einige krumme Linien,

welche

mit Hülfe ihrer Subtangente

rectificirt werden,

von

Moritz von Prittwitz,

Königl. Preuß. Ingenieur-Lieutenant.

Herausgegeben und mit Zusätzen über verwandte Curven vermehrt

von

H. W. Brandes,

Professor in Breslau.

Leipzig,

bei Georg Joachim Göschen. 1816.

Untersuchungen

über den Weg

eines

gleichförmig fortrückenden Körpers,

der

in jedem Augenblicke sich grade gegen einen andern

gleichförmig und zugleich gradlinigt fortlaufenden Körper

hinbewegt.

Von

M. von Prittwitz.

Leipzig,

bei Georg Joachim Göschen. 1816.

Vorrede.

Daß ich die kleine, aber gewiß sehr gehaltvolle und gelungene Arbeit eines jungen Freundes, dessen mathematisches Talent mir während der kurzen Zeit seines Aufenthalts auf der hiesigen Universität die größte Freude gemacht hat, dem Publicum übergebe, bedarf gewiß keiner Entschuldigung. Die hier betrachteten krummen Linien verdienten eben so gut, als andere einzelne Curven eine nähere Untersuchung, und verdienten sie um so mehr, da sich aus nahe übereinstimmenden Voraussetzungen eine ganze Reihe mannigfaltig verschiedener Curven, die zum Theil sehr merkwürdige Eigenschaften haben, ergeben. Ueberdies fehlt es in unsern Lehrbüchern meistens gar sehr au Beispielen solcher Linien, die aus Bestimmungen, welche zu Differentialgleichungen des zweiten Grades führen, hergeleitet werden, und ich glaube daher Lehrern und Lernenden einen Dienst zu erweisen, wenn ich ihnen hier einen kleinen Vorrath solcher Exempel mittheile.

Mehr Entschuldigung bedarf es vielleicht, daß ich dieser Untersuchung Zusätze beigefügt habe, die sich nicht gradezu auf die hier betrachtete Familie von krummen Linien beziehen. Indeß boten sich die Fragen nach andern Curven, deren Bogen ebenfalls auf eine leichte Weise durch die Subtangente ausgedrückt wird, und nach einigen andern Linien, die durch ihre Entstehungs-Art mit jenen verwandt schienen, als so natürlich dar, daß ich hoffe, Freunde solcher Untersuchungen werden die wenigen Augenblicke nicht als unangenehm verlohren betrachten, die sie diesen wenigen Blättern widmen.

Es wird mir erlaubt sein, diesen Bemerkungen noch den Wunsch beizufügen, daß der Verfasser aus diesem neuen Kriege glücklich zurückkehren, und Musse und Aufmunterung finden möge, um ganz so viel, als seine ausgezeichneten Talente hoffen lassen, zur Erweiterung der mathematischen Wissenschaften beizutragen.

Breslau, im Mai 1815.

H. W. Brandes.

Es bewege sich (fig. 1.) der Punkt c gleichförmig stets nach dem beweglichen Punkte e hin, der auf der graden Linie ed nach d zu ebenfalls gleichförmig fortrückt, so wird der Punkt c eine krumme Linie beschreiben, deren Eigenschaften ich jetzt untersuchen will.

Es sei b der Ort des Punktes c, wenn die Richtung dieses letztern gegen die Linie ed senkrecht ist. Die Entfernung bd der beiden Punkte von einander in diesem Augenblick sei $= a$, ferner dm die Abscissenaxe, kh die Ordinatenaxe, die auf einander senkrecht stehen, ce eine Tangente an den Punkt c, die zugleich die Richtung der Bewegung des Punktes angiebt, so wird der Bogen cb sich zur graden Linie ed verhalten, wie die Geschwindigkeit des Punktes c zu der Geschwindigkeit des Punktes e, weil beider Bewegungen gleichförmig angenommen sind. Nun sei die Geschwindigkeit des Punctes c, m mal größer als die des Punktes e, ferner $bf = z$, $fc = y$, $bc = s$, so ist $s = m.\, ed$. Nun ist $gf : fc = dz : dy$ oder $gf : y = dz : dy$. Daher $gf = \frac{ydz}{dy}$ ferner $ed : gd = y : gf$ also

$$ed = \frac{y.\, gd}{gf} = \frac{y\left(a + z - \frac{ydz}{dy}\right)}{\frac{ydz}{dy}} = \frac{ady + zdy - ydz}{dz} = \frac{s}{m}$$ und wenn man

dz als beständig annimmt $\frac{1}{m} ds = \frac{1}{dz}\left\{ad^2y + dzdy + zd^2y - dydz\right\}$

$= \frac{d^2y}{dz}(a + z)$. Dies $\frac{1}{m} ds$ ist aber auch $= \frac{1}{m}\sqrt{(dz^2 + dy^2)}$, folglich

$\frac{1}{m} dz \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dz^2}\right)} = \frac{d^2y}{dz}(a + z)$. Nun sei $\frac{dy}{dz} = p$, so ist $dp = \frac{d^2y}{dz}$ und

$\frac{1}{m}\frac{dz}{a + z} = \frac{d^2y}{dz\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dz^2}\right)}} = \frac{dp}{\sqrt{(1 + p^2)}}$ und dies giebt das leicht zu findende In-