VEKTORANALYSIS

IN IHREN GRUNDZÜGEN UND WICHTIGSTEN PHYSIKALISCHEN ANWENDUNGEN

VON

ARTHUR HAAS

DR. PHIL., PROFESSOR FÜR PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN

MIT 37 ABBILDUNGEN IM TEXT

ZWEITE, VERBESSERTE AUFLAGE

BERLIN UND LEIPZIG 1929

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG · J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG · GEORG REIMER · KARL J. TRÜBNER · VEIT & COMP.

Manuldruck von F. Ullmann G. m. b. H., Zwickau Sa.

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

In den Vorlesungen, die ich im Wintersemester 1921/22 an der Wiener Universität hielt und die in diesem Buche wiedergegeben sind, sollte die Vektoranalysis nicht wie in anderen Büchern um ihrer selbst willen behandelt werden; es sollten vielmehr in diesen Vorlesungen die Grundlagen der Mechanik der Massenpunkte, der starren und deformierbaren Körper sowie die Grundlagen der MAXWELLschen Theorie und der Relativitätstheorie möglichst einfach mittels einer einheitlichen vektoriellen Methode entwickelt werden. Zu diesem Zwecke wurden in den Vorlesungen die Grundzüge der Vektor- und der Tensoranalysis dargestellt; doch wurde hierbei grundsätzlich niemals weiter gegangen, als es für die späteren physikalischen Anwendungen notwendig war.

In dem Buche wechseln rein mathematische Abschnitte mit solchen ab, in denen die gewonnenen mathematischen Erkenntnisse physikalisch verwertet werden. Eine scharfe Scheidung erschien mir notwendig, damit sich der Leser deutlich dessen bewußt werde, welche Zusammenhänge zwischen physikalischen Theoremen rein mathematischer Natur sind und welche nur unter Zuhilfenahme physikalischer Erfahrungstatsachen hergestellt werden können.

Von dem HAMILTONschen Operator habe ich in diesem Buche nirgends Gebrauch gemacht, da ich glaube, daß seine Benutzung den Anfänger nur verwirrt; aus demselben Grunde erschien mir eine scharfe Betonung des Gegensatzes zwischen polaren und axialen Vektoren überflüssig. Auf eine Darstellung der verallgemeinerten, nichteuklidischen Tensoranalysis habe ich in diesem Buche verzichtet; ich glaubte dies um so eher tun zu sollen, als sich eine solche von mir verfaßte Darstellung ohnedies in meiner „Einführung in die theoretische Physik“ (in dem Kapitel über allgemeine Relativitätstheorie) findet.

Wien, im Juni 1922.

Arthur Haas.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Von der ersten Auflage unterscheidet sich die zweite außer durch mannigfache kleinere Verbesserungen in den anderen Abschnitten vor allem durch eine völlige Umarbeitung des § 13 (Spannung). Die Gliederung des Büchleins ist im übrigen unverändert geblieben.

Wien, im Juli 1929.

Arthur Haas.

Inhalt.

V. Kapitel. Die Vektorwellen.

VI. Kapitel. Die Weltvektoren.

Anhang.

Einleitung.

Die Geschichte der Vektorrechnung beginnt eigentlich mit dem bekannten holländischen Physiker Stevin, der um 1600 anläßlich seiner Entdeckung des Prinzips des Kräfteparallelogramms zuerst physikalische Größen durch gerichtete Strecken darstellte. Etwa hundert Jahre nach Stevin erhielt die Mechanik ihr eigentliches Fundament in dem bekannten zweiten Newtonschen Bewegungsaxiom, das eine vektorielle Beziehung zum Inhalt hat. Denn es lehrt ja unter anderem, daß die Beschleunigung und die Kraft stets gleich gerichtet sind.

Da das zweite Newtonsche Bewegungsgesetz die eigentliche Grundlage der Mechanik bildet, haben natürlich die theoretischen Physiker, als sie im 17. und 18. Jahrhundert die Mechanik ausbauten, dabei auch viele wichtige Beziehungen der Vektortheorie aufgefunden. Sie sprachen allerdings nicht von Vektoren; aber sie wußten, wenn auch auf komplizierte Art, mit ihnen zu operieren, namentlich seit durch Euler in der Mitte des 18. Jahrhunderts die Physik mit der analytischen Geometrie des Raumes verknüpft worden war; und als im Beginne des 19. Jahrhunderts die Potentialtheorie ausgebildet wurde, da erkannten die Theoretiker auch die Bedeutung der wichtigen Differentialoperationen, durch die Vektorgrößen miteinander verknüpft werden können.

Freilich rechneten damals die theoretischen Physiker nie mit den Vektoren selbst, sondern immer, indem sie alles auf ein Koordinatensystem bezogen, mit den Vektorkomponenten. Erst um das Jahr 1840 erkannten gleichzeitig, doch unabhängig voneinander Grassmann und Hamilton, daß dieses ständige Rechnen mit den Vektorkomponenten statt mit den Vektoren selbst eine durch den Gegenstand gar nicht geforderte und ganz überflüssige Komplizierung bedeutet; und so bildeten sie in den Vierziger Jahren des 19. Jahrhunderts die eigentliche Vektorrechnung aus. In die theoretische Physik hat die Vektoranalysis indessen erst durch Maxwells berühmtes, 1873 erschienenes Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus Eingang gefunden. Eine allgemeine Verbreitung wurde der Vektoranalysis freilich erst seit dem Beginne des 20. Jahrhunderts zuteil — infolge der ungeheuren Vereinfachung, die durch sie die Darstellung der Mechanik und der Elektrizitätstheorie erfährt.

I. Kapitel.

Die Vektoren.

§ 1. Vektoren und Skalare.

Unter einem Vektor verstehen wir eine gerichtete Strecke, unter einer Vektorgröße eine Größe, die erst durch Angabe einer Richtung bestimmt ist und daher symbolisch durch einen Vektor dargestellt werden kann. Beispiele für Vektorgrößen sind die Kraft, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, das statische Moment, die elektrische Feldstärke.

An jeder Vektorgröße müssen drei wesentliche Eigenschaften unterschieden werden: der Betrag, die Richtung und der Richtungssinn. Unter dem Betrag eines Vektors versteht man die Zahl, die es angibt, wieviel Einheiten die betreffende Größe hat. Unter dem Betrag einer Kraft oder einer Geschwindigkeit versteht man beispielsweise die Zahl, die es angibt, wieviel Krafteinheiten die betreffende Kraft oder wieviel Geschwindigkeitseinheiten die betreffende Geschwindigkeit mißt. Bei der Darstellung durch eine gerichtete Strecke ist natürlich der Betrag der Vektorgröße durch die Länge der Strecke repräsentiert.

Dem allgemeinen Brauche gemäß sollen im folgenden Vektorgrößen immer mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden. Der Betrag eines Vektors soll mit dem entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet werden, also der Betrag eines Vektors $\mathfrak{A}$ mit A.

Daß zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im Betrage, in der Richtung und im Richtungssinn übereinstimmen, soll durch die symbolische Gleichung ausgedrückt werden

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,. \tag{1}$$

Zwei Vektoren werden also auch dann als identisch angesehen, wenn sie von verschiedenen Punkten aus gezogen werden, wofern nur Betrag, Richtung und Richtungssinn übereinstimmen. Daß zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ zwar im Betrage und in der Richtung übereinstimmen, jedoch entgegengesetzten Richtungssinn haben, soll seinen Ausdruck in der symbolischen Gleichung finden.

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{C}\,. \tag{2}$$

Die Projektionen eines Vektors auf die Achsen eines Koordinatensystems werden als die Komponenten des Vektors in bezug auf dieses Koordinatensystem bezeichnet. Sind die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{A}$ gleich[1] A_x, A_y, A_z, so ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$A^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2 . \tag{3}$$

Das Quadrat des Betrages eines Vektors ist gleich der Summe der Quadrate seiner Komponenten.

Durch die Komponenten ist aber nicht nur der Betrag des Vektors bestimmt, sondern auch seine Richtung und durch das Vorzeichen der Komponenten natürlich auch der Richtungssinn. Es ist ja die Projektion auf die x-Achse gleich dem Betrage des Vektors, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den die Vektorrichtung mit der Richtung der x-Achse einschließt, also

$$A_x = A \cos(\mathfrak{A}, x) \tag{4}$$

oder nach Gl. 3

$$\cos(\mathfrak{A}, x) = \frac{A_x}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}} . \tag{5}$$

Zwei analoge Gleichungen gelten für die Winkel, die die Vektorrichtung mit der y- und der z-Achse bildet.

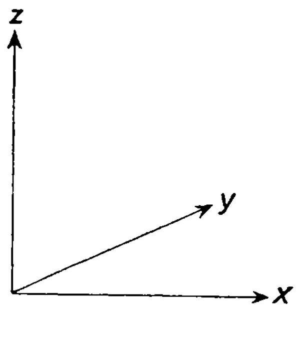

Fig.

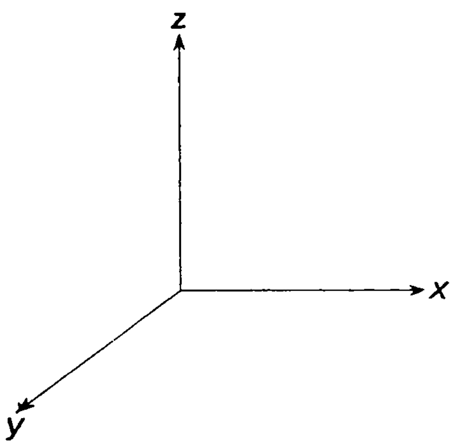

Fig. 2.

Eine kurze Zwischenbemerkung über räumliche Koordinatensysteme muß indessen hier eingeschaltet werden. Es sind zwei Arten von räumlichen Koordinatensystemen möglich, die miteinander nie zur Deckung gebracht werden können, weil die eine Art das Spiegelbild der anderen ist. Zeichnen wir nämlich in einer vertikalen Ebene die x- und die z-Achse, so kann die positive y-Achse nach hinten oder nach vorn gerichtet sein. Im ersten Falle (Fig. 1) erscheint, von einem Punkte

[1] Die Komponenten eines Vektors sollen in diesem Buch grundsätzlich immer mit lateinischen Buchstaben bezeichnet werden.

der positiven z-Achse aus gesehen, die Drehung, die auf kürzestem Wege die positive x-Achse in die Richtung der positiven y-Achse überführt[2], entgegengesetzt der Drehung des Uhrzeigers. Im zweiten Fall (Fig. 2) erscheint diese Drehung im Sinne des Uhrzeigers. Im ersten Fall spricht man von einem englischen, im zweiten Fall von einem französischen Koordinatensystem.[3] Man nennt auch das englische Koordinatensystem ein Rechtssystem und das französische ein Linkssystem. Stellt man nämlich die x-Achse durch den Daumen, die y-Achse durch den Zeigefinger und die z-Achse durch den Mittelfinger dar, so erhält man durch die Finger der rechten Hand ein englisches, durch die der linken Hand hingegen ein französisches Koordinatensystem. Da für die Untersuchung elektromagnetischer Vorgänge das englische Koordinatensystem vorteilhafter ist, ist es heute in der theoretischen Physik allgemein gebräuchlich und soll darum auch im folgenden ausschließlich benutzt werden.

Im Gegensatze zu den Vektoren nennt man Größen, die bereits durch Angabe einer Zahl vollkommen bestimmt sind, denen also eine Richtung nicht zukommt, Skalare. Man nennt sie deshalb so, weil sie vollkommen bestimmt sind, sobald man ihre an einer bestimmten Skala gemessene Größe kennt. Skalare sind z. B. die Temperatur, die Zeit, die Masse, die elektrische Ladung, die Magnetismusmenge.

Mit einem Skalar wird ein Vektor offenbar so multipliziert, daß der Betrag des Vektors mit dem Skalar multipliziert wird, ohne daß an der Richtung des Vektors etwas geändert wird. Ebenso wird natürlich ein Vektor durch einen Skalar dividiert, indem man den Betrag dividiert, ohne etwas an der Richtung zu ändern.

Diese Regel führt nun weiterhin zu dem wichtigen Begriff des Einheitsvektors. Unter einem solchen versteht man einen Vektor, dessen Länge gleich der Längeneinheit ist. Jede mögliche Richtung kann also durch einen Einheitsvektor festgelegt werden. Jeder beliebige Vektor kann nun aufgefaßt werden als das Produkt aus einem in seine Richtung fallenden Einheitsvektor und einem Skalar, der gleich ist dem Betrage des Vektors. Nennen wir etwa einen Einheitsvektor, der in die Richtung eines Vektors $\mathfrak{A}$ fällt, $\mathfrak{a}$, so ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} A \,. \tag{6}$$

Auch ein Koordinatensystem kann charakterisiert werden durch die drei Einheitsvektoren, die in die Richtungen der positiven Achsen fallen. Man bezeichnet diese Einheitsvektoren allgemein mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ und nennt sie die Grundvektoren des betreffenden Koordinatensystems.

---

[2] Statt durch eine Drehung um 90° kann man ja die positive x-Achse in die Richtung der positiven y-Achse auch durch eine entgegengesetzte Drehung um 270° überführen. Darum wird von einer Überführung „auf kürzestem Wege" gesprochen.

[3] Die Bezeichnungen erklären sich daraus, daß früher das durch Fig. 1 dargestellte System hauptsächlich von englischen, das durch Fig. 2 dargestellte aber vor allem von französischen Physikern benutzt wurde.

§ 2. Vektoralgebra.

Ebenso wie Zahlengrößen können auch Vektorgrößen durch mannigfache Operationen miteinander verknüpft werden, die zweckmäßig so definiert werden, daß sie in besonderen Fällen in die mit gleichem Namen benannten arithmetischen Operationen übergehen.

Als *Summe zweier Vektoren* definiert man zunächst einen Vektor, der die *Diagonale eines Parallelogramms* darstellt, dessen Seiten den beiden Summanden nach Größe und Richtung gleich sind. Um die Summe zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu erhalten, trägt man also von dem Endpunkt des Vektors $\mathfrak{A}$ den Vektor $\mathfrak{B}$ auf und verbindet nun den Anfangspunkt des Vektors $\mathfrak{A}$ mit dem Endpunkt des Vektors $\mathfrak{B}$ (Fig. 3). Die vektorielle oder, wie man auch sagt, die geometrische Summe der beiden Vektoren wird durch das Symbol ausgedrückt

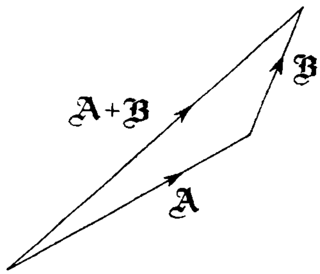

Fig. 3.

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} .$$

Ohne weiteres zeigt die geometrische Anschauung, daß ebenso wie für die arithmetische so auch für die vektorielle Addition sowohl das *kommutative* als auch das *assoziative Gesetz* gilt. Es ist

$$(1) \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} ,$$

und wenn ein beliebiger dritter Vektor mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet wird, ist

$$(2) \qquad (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) + \mathfrak{B} = (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) + \mathfrak{A} .$$

Sind zwei zu addierende Vektoren gleich gerichtet, so geht die geometrische Addition in die arithmetische über, indem der Betrag der Summe dann einfach gleich ist der Summe der Einzelbeträge.

Unter der *Differenz zweier Vektoren*, bezeichnet durch das Symbol

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} ,$$

versteht man die Summe aus dem Vektor $\mathfrak{A}$ und aus einem Vektor, der dem Vektor $\mathfrak{B}$ *entgegengesetzt gleich* ist.

Hat ein Vektor $\mathfrak{A}$ die Komponenten A_x, A_y, A_z, so können wir den Vektor auch auffassen als die Summe dreier Vektoren, die in die Richtungen der Koordinatenachsen fallen und die Beträge A_x, A_y, A_z haben. Indem wir die Symbole für die Grundvektoren des Koordinatensystems benutzen, können wir also die Formel aufstellen

$$(3) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{i} A_x + \mathfrak{j} A_y + \mathfrak{k} A_z .$$

Ist umgekehrt ein Vektor $\mathfrak{A}$ in der Form darstellbar

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i} S' + \mathfrak{j} S'' + \mathfrak{k} S''$$

wobei S', S'' und S''' drei skalare Ausdrücke bedeuten mögen, so können wir daraus sofort schließen, daß S' die x-Komponente des Vektors ist, S'' die y- und S''' die z-Komponente.

Denken wir uns die Gl. 3 auch für einen zweiten Vektor $\mathfrak{B}$ gebildet und zu der ursprünglichen Gl. 3 vektoriell hinzuaddiert, so finden wir

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{i}\,(A_x + B_x) + \mathfrak{j}\,(A_y + B_y) + \mathfrak{k}\,(A_z + B_z)\,. \tag{4}$$

Nach dem vorhin Gesagten bedeutet diese Formel, daß die Komponenten der Summe zweier Vektoren gleich sind den Summen der Komponenten der einzelnen Vektoren.

Bei der Multiplikation von Vektoren unterscheidet man die sogenannte innere und die sogenannte äußere Multiplikation. Als inneres oder skalares Produkt zweier Vektoren definiert man einen Skalar, der sich ergibt, wenn man den Betrag des einen Vektors multipliziert mit der Projektion des anderen Vektors auf den ersten Vektor. Das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird durch das Symbol bezeichnet

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B} \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,.$$

Es ist also

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = A\,B \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\,. \tag{5}$$

Das skalare Produkt ist positiv oder negativ, je nachdem ob die Vektoren miteinander einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bilden.

Aus der Definition des skalaren Produktes folgt zunächst, daß ebenso wie für die arithmetische Multiplikation das kommutative Gesetz gilt; es ist

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}\,. \tag{6}$$

Wir wollen nun weiterhin das skalare Produkt aus einem Vektor $\mathfrak{A}$ und einem zweiten Vektor $\mathfrak{D}$ untersuchen, der seinerseits die Summe zweier Vektoren $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ sei. Indem wir die Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ zu der x-Achse eines sonst beliebigen Koordinatensystems machen, erkennen wir aus der Gl. 4 sogleich, daß die Projektion des Vektors $\mathfrak{D}$ auf die Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ gleich ist der Summe der Projektionen der Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Nach der Definition des skalaren Produktes ist also

$$\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}\,. \tag{7}$$

Für die innere Multiplikation gilt nicht nur das kommutative, sondern auch das distributive Gesetz, weshalb auf die skalare Multiplikation die Rechenregeln der arithmetischen Multiplikation angewendet werden können.

Aus der Gl. 5 folgt, daß in zwei Fällen das skalare Produkt eine besonders einfache Form annimmt, nämlich dann, wenn die beiden Vektoren gleich gerichtet oder aber zueinander normal sind. Im ersten Falle ist das skalare Produkt einfach gleich dem Produkt der Beträge, und daher ist im besonderen das skalare Produkt jedes Vektors mit sich selbst gleich dem Quadrate des Betrages; es ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} = A^2 . \tag{8}$$

Hingegen ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0, \text{ wenn } \mathfrak{A} \perp \mathfrak{B} . \tag{9}$$

Umgekehrt kann aus dem Umstande, daß das skalare Produkt zweier Vektoren verschwindet, stets geschlossen werden, daß die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen. In ihrer Anwendung auf die Grundvektoren ergeben die Gl. 8 und 9 die wichtigen Beziehungen

$$\mathfrak{i}\,\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\,\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\,\mathfrak{k} = 1 \tag{10}$$

und

$$\mathfrak{i}\,\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\,\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\,\mathfrak{i} = 0 . \tag{11}$$

Das skalare Produkt zweier Grundvektoren ergibt immer eins oder null, je nachdem, ob die beiden Faktoren gleich oder verschieden sind.

Wollen wir das skalare Produkt zweier Vektoren durch die Komponenten der Vektoren ausdrücken, so gehen wir von der Gleichung aus

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathfrak{i}\,A_x + \mathfrak{j}\,A_y + \mathfrak{k}\,A_z)\,(\mathfrak{i}\,B_x + \mathfrak{j}\,B_y + \mathfrak{k}\,B_z) . \tag{12}$$

Wenn wir im Sinne des distributiven Gesetzes ausmultiplizieren, erhalten wir auf der rechten Seite neun Glieder, von denen aber nach Gl. 11 sechs verschwinden. Wenden wir auf die übrigbleibenden drei die Gl. 10 an, so erhalten wir die einfache Beziehung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z . \tag{13}$$

Dividieren wir diese Gleichung durch das Produkt AB, und beachten wir, daß A_x gleich ist $A \cos(\mathfrak{A}, x)$, so ergibt sich nach Gl. 5 die Relation

$$\left\{\begin{aligned} \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) &= \cos(\mathfrak{A}, x)\cos(\mathfrak{B}, x) \\ &+ \cos(\mathfrak{A}, y)\cos(\mathfrak{B}, y) + \cos(\mathfrak{A}, z)\cos(\mathfrak{B}, z) . \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Im Gegensatz zu dem inneren oder skalaren Produkt definiert man als das äußere oder Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen Vektor, dessen Betrag gleich ist dem Flächeninhalt eines von den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildeten Parallelogramms, der also soviel Längeneinheiten mißt, als das Parallelogramm Flächeneinheiten enthält und der einen solchen Richtungssinn hat, daß von seiner Spitze aus gesehen die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint, die auf kürzestem Wege den im Produkte an erster Stelle stehenden Vektor in die Richtung des an zweiter Stelle stehenden Vektors überführt, wofern man beide Vektoren von demselben Punkte aus zieht (Fig. 4). Man bezeichnet das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch das Symbol

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] .$$

In der Tat ist das Vektorprodukt eigentlich nicht eine gerichtete Strecke, sondern eine gerichtete Plangröße; aber es erweist sich für alle vektoriellen Operationen als zweckmäßig, statt mit gerichteten Plangrößen mit den sie „ergänzenden Hilfsvektoren“ zu rechnen, die eben in der angegebenen Weise senkrecht auf den gerichteten Plangrößen errichtet werden.

Aus der Definition des Vektorproduktes ergibt sich für seinen Betrag der Wert $AB \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Weiter folgt aus der Definition, daß sich der Richtungssinn des Vektorproduktes ändert, wenn die Reihenfolge der beiden Vektoren im Produkt geändert wird; es ist

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]. \tag{15}$$

Wir wollen nun weiterhin das Vektorprodukt aus einem Vektor $\mathfrak{A}$ und einem zweiten Vektor $\mathfrak{D}$ untersuchen, der seinerseits die Summe zweier Vektoren $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ sei. Wir denken uns hierzu ein Parallelogramm konstruiert, dessen Seiten von den Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildet werden

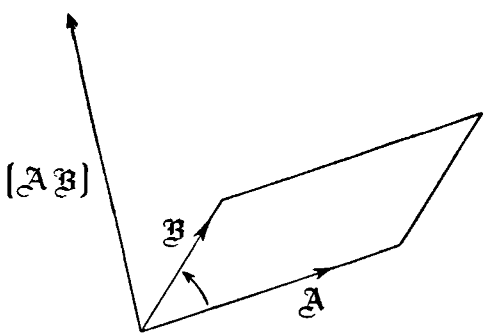

Fig. 4.

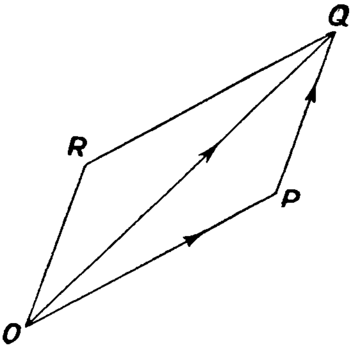

Fig. 5.

mögen, dessen Diagonale also gleich $\mathfrak{D}$ sei, und denken uns nun dieses Parallelogramm auf eine zu dem Vektor $\mathfrak{A}$ senkrechte Ebene projiziert. Die Projektionen der Seiten und der Diagonale sind dann gegeben durch die Ausdrücke

$$B \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}); \quad C \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}); \quad D \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}).$$

Wir denken uns nun die Dimensionen dieses Parallelogramms vergrößert im Verhältnis $A : 1$; dann erhalten wir (dargestellt durch Fig. 5) ein Parallelogramm $OPQR$, und es sind die Längen der Strecken OP, PQ und OQ numerisch gleich den Beträgen der drei Vektorprodukte $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$ und $[\mathfrak{A}\mathfrak{D}]$. Nun denken wir uns schließlich noch in der Figurenebene das Parallelogramm $OPQR$ um 90^0 so gedreht, daß die Strecke OP senkrecht stehe auf dem Vektor $\mathfrak{B}$; dann steht natürlich auch die Strecke PQ senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{C}$ und die Strecke OQ senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{D}$. Überdies sind aber, weil die Figurenebene senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{A}$ steht, alle drei gerichteten Strecken auch normal zu dem Vektor $\mathfrak{A}$. Nach erfolgter Drehung stellen also die drei Strecken OP, PQ und OQ nach Größe und Richtung die drei Vektorprodukte $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$ und $[\mathfrak{A}\mathfrak{D}]$ dar;[1] und da die Diagonale eines Parallelogramms gleich ist der Vektorsumme der Seiten des Parallelogramms, so ergibt sich somit die Beziehung

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{D}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$$

oder, da ja $\mathfrak{D}$ die Summe von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ist,

$$[\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{C}]. \tag{16}$$

Für die vektorielle Multiplikation gilt also ebenso wie für die arithmetische das distributive Gesetz; und daraus folgt, daß die äußere Multiplikation nach den Regeln der arithmetischen durchgeführt werden kann, nur mit dem Unterschiede, daß bei einer Vertauschung in der Reihenfolge der Faktoren das Vorzeichen umgekehrt werden muß.

Aus der Definition des Vektorproduktes folgt, daß es in zwei Fällen eine einfache Gestalt annimmt; nämlich dann, wenn die Vektoren zueinander senkrecht oder wenn sie parallel sind. Im ersten Falle ist der Betrag des Vektorproduktes gleich dem Produkte der einzelnen Beträge; für den zweiten Fall aber finden wir

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = 0\,, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}\,. \tag{17}$$

Umgekehrt kann aus dem Umstande, daß das Vektorprodukt zweier Vektoren verschwindet, immer geschlossen werden, daß diese beiden Vektoren die gleiche Richtung haben.

Aus der Gl. 17 ergeben sich für die Grundvektoren die wichtigen Formeln

$$[\mathfrak{i}\,\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\,\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}] = 0\,. \tag{18}$$

Bilden wir hingegen die äußeren Produkte zweier verschiedener Grundvektoren, so haben die Produkte immer den Betrag eins und die Richtung des dritten Grundvektors. Es ergeben sich somit die Beziehungen

$$\left\{\begin{array}{lll} [\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}] = \mathfrak{k}; & [\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}] = \mathfrak{i}; & [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}] = \mathfrak{j} \\ [\mathfrak{j}\,\mathfrak{i}] = -\mathfrak{k}; & [\mathfrak{k}\,\mathfrak{j}] = -\mathfrak{i}; & [\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}] = -\mathfrak{j}\,. \end{array}\right. \tag{19}$$

Wollen wir die Komponenten des Vektorproduktes durch die Komponenten der miteinander multiplizierten Vektoren ausdrücken, so haben wir nach dem distributiven Gesetz den Ausdruck zu bilden

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [(\mathfrak{i}A_x + \mathfrak{j}A_y + \mathfrak{k}A_z)\,(\mathfrak{i}B_x + \mathfrak{j}B_y + \mathfrak{k}B_z)]\,. \tag{20}$$

Von den neun Gliedern, die sich durch Ausmultiplizieren ergeben, fallen drei Glieder nach Gl. 18 weg, und wir finden somit

[1] Es ist überflüssig, in diesem Zusammenhang auch vom Richtungssinn zu sprechen.

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{aligned}[t] &[\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}]\,A_x\,B_y + [\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}]\,A_x\,B_z \\ &+ [\mathfrak{j}\,\mathfrak{i}]\,A_y\,B_x + [\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}]\,A_y\,B_z \\ &+ [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}]\,A_z\,B_x + [\mathfrak{k}\,\mathfrak{j}]\,A_z\,B_y\,. \end{aligned}$$

Hierfür finden wir nach den Gl. 19

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{k}A_xB_y - \mathfrak{j}A_xB_z - \mathfrak{k}A_yB_x + \mathfrak{i}A_yB_z + \mathfrak{j}A_zB_x - \mathfrak{i}A_zB_y\,.$$

Indem wir die Glieder ordnen und so drei skalare Ausdrücke erhalten, die mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ multipliziert erscheinen, finden wir für die Komponenten des Vektorproduktes die Werte[2]

$$(21)\qquad \begin{cases} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_x = A_y\,B_z - A_z\,B_y \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_y = A_z\,B_x - A_x\,B_z \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_z = A_x\,B_y - A_y\,B_x\,. \end{cases}$$

Nachdem die innere und die äußere Multiplikation definiert sind. ist es nur mehr eine keine weiteren Festsetzungen verlangende Rechenaufgabe, Ausdrücke zu berechnen, in denen drei oder mehr Vektoren miteinander multipliziert erscheinen. Zunächst ist es klar, daß ein Ausdruck von der Form $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$, da in ihm ein Vektor mit einem Skalar multipliziert erscheint, einen Vektor darstellt, der dieselbe Richtung hat wie $\mathfrak{A}$. Die Ausdrücke $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$, $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}\mathfrak{A})$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ sind also im allgemeinen voneinander nach Größe und Richtung verschiedene Vektoren.

Das innere Produkt aus einem Vektor und dem äußeren Produkte zweier anderer, also die Größe $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ muß natürlich auch ein Skalar sein. Dieser ist gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildeten Parallelogramms, multipliziert mit dem Betrage A und überdies noch mit dem Kosinus des Winkels, den die Richtung von $\mathfrak{A}$ mit der auf dem Parallelogramm errichteten Normalen einschließt. Der Kosinus dieses Winkels ist aber gleich dem Sinus des Winkels, den der Vektor $\mathfrak{A}$ mit der Ebene des Parallelogramms bildet. Infolgedessen ist das skalare Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ gleich dem Volumen des von den Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gebildeten Parallelepipeds. Hieraus folgt sogleich die wichtige Beziehung

$$(22)\qquad \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = 0\,, \quad \text{wenn } \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \text{ komplanar}$$

sind, d. h. wenn die drei Vektoren, von einem Punkte aus aufgetragen, in eine Ebene zu liegen kommen.

Das Volumen des Parallelepipeds ergibt sich aber nun auch, wenn der Inhalt des von den Vektoren $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ gebildeten Parallelogramms multipliziert wird mit dem Betrage B und überdies mit dem Sinus des Winkels, den die Richtung von $\mathfrak{B}$ mit der Parallelogrammebene einschließt. Analoges gilt schließlich auch für das von den Vektoren $\mathfrak{A}$ und

[2] Aus der ersten der drei Gl. 21 erhält man die zweite und aus dieser wieder die dritte, indem man die Indizes x, y, z zyklisch, d. h. in der Reihenfolge x, y, z, x usw. vertauscht. Aus x wird y, aus y wird z und aus z wiederum x.

$\mathfrak{B}$ gebildete Parallelogramm, und somit ergibt sich durch zyklische Vertauschung die Beziehung[3]

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,. \tag{23}$$

Das zweifache Vektorprodukt $\big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\big]$ muß jedenfalls wiederum ein Vektor sein. Bezeichnen wir den Vektor $[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ mit $\mathfrak{E}$, so ist nach Gl. 21

$$\big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\big]_x = A_y E_z - A_z E_y = A_y\,(B_x C_y - B_y C_x) - A_z\,(B_z C_x - B_x C_z)\,.$$

Zu dieser Gleichung addieren wir noch die Identität hinzu

$$0 = A_x\,B_x\,C_x - A_x\,B_x\,C_x\,;$$

dann finden wir

$$\big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\big]_x = B_x\,(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x\,(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)\,.$$

Analoge Gleichungen gelten für die y- und die z-Komponente des zweifachen Vektorproduktes. Beachten wir die Gl. 13, so erhalten wir somit die Formel

$$\big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\big] = \mathfrak{B}\,(\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}) - \mathfrak{C}\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,. \tag{24}$$

Die **Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Veränderlichen** läßt sich, indem man den Differentialquotienten als Grenzwert eines Differenzenquotienten auffaßt, stets auf die vektorielle Subtraktion zurückführen. Aus der Gl. 4 ergibt sich somit für den zeitlichen Differentialquotienten eines Vektors die Formel

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \mathfrak{i}\,\frac{dA_x}{dt} + \mathfrak{j}\,\frac{dA_y}{dt} + \mathfrak{k}\,\frac{dA_z}{dt}\,. \tag{25}$$

Dabei muß aber die wesentliche Voraussetzung erfüllt sein, daß sich die Lage des Koordinatensystems selbst mit der Zeit nicht ändert.

---

[3] Daß in der Gl. 23, in der die drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zyklisch vertauscht werden, auch das Vorzeichen überall richtig ist, erkennt man leicht durch folgende Überlegung. Wir denken uns die von den Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildete Ebene horizontal, etwa als Tischebene, und in dieser die Lage der beiden Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ derart, daß, von oben gesehen, die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint, die den Vektor $\mathfrak{B}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{C}$ überführt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem ob der Vektor $[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ mit dem Vektor $\mathfrak{A}$ einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet. Im ersten Falle ist das skalare Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ positiv, im zweiten negativ. Im ersten Fall muß der Vektor $\mathfrak{A}$ von der Horizontalebene irgendwie nach aufwärts gehen. Ist dies der Fall, dann wird einem die Anschauung aber immer zeigen, daß dann auch vom Vektor $\mathfrak{B}$ aus gesehen die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint, die auf kürzestem Wege den Vektor $\mathfrak{C}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ überführt. Ist dies aber der Fall, dann ist auch der Winkel zwischen den Vektoren $[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}]$ und $\mathfrak{B}$ spitz, also das skalare Produkt $\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}]$ positiv; d. h. es haben die Produkte $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ und $\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}]$ dasselbe Vorzeichen. Dasselbe läßt sich auch leicht für den zweiten Fall zeigen, daß der Vektor $\mathfrak{A}$ mit dem Vektor $[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ einen stumpfen Winkel einschließt. (Bei dem Studium veranschaulicht man sich am besten die Verhältnisse so, daß man auf einen Tisch von einem Punkte aus zwei verschiedenfarbige Bleistifte nach verschiedenen Richtungen legt und dann irgendwie nach aufwärts von demselben Punkte aus einen Federstiel oder einen dritten Bleistift hält.)